ตัวแปรเชิงซ้อน

วชิรารักษ์ โอรสรัมย์

คณะวิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัยราชภัฏบุรีรัมย์

2562

ตัวแปรเชิงซ้อน

วชิรารักษ์ โอรสรัมย์

(วท.ม. คณิตศาสตร์ศึกษา)

คณะวิทยาศาสตร์

มหาวิทยาลัยราชภัฏบุรีรัมย์

2562

คำนำ

ตัวแปรเชิงซ้อน เล่มนี้เรียบเรียงขึ้นโดยมีวัตถุประสงค์เพื่อใช้เป็นหนังสือประกอบการศึกษาค้นคว้าสำหรับนักศึกษาระดับปริญญาตรีที่ศึกษาทางด้านคณิตศาสตร์ ซึ่งเนื้อหาในเล่มนี้ประกอบไปด้วยความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับจำนวนเชิงซ้อน ฟังก์ชันวิเคราะห์ ฟังก์ชันมูลฐาน ปริพันธ์บนระนาบจำนวนเชิงซ้อน ลำดับและอนุกรมในระนาบเชิงซ้อน และ ทฤษฎีบทตกค้างและการประยุกต์

ข้าพเจ้าขอขอบพระคุณท่านผู้แต่งและเรียบเรียงโดยผู้ทรงคุณวุฒิหลายท่านดังที่ปรากฏอยู่ในบรรณานุกรมเป็นอย่างสูง ข้าพเจ้าหวังเป็นอย่างยิ่งว่าตำราเรื่องตัวแปรเชิงซ้อนเล่มนี้คงเป็นประโยชน์ต่อการเรียนของนักศึกษา และผู้สนใจทั่วไป

วชิรารักษ์ โอรสรัมย์

สิงหาคม 2562

สารบัญ

สารบัญ(ต่อ)

สารบัญรูปภาพ

สารบัญรูปภาพ(ต่อ)

บทที่ 1
จำนวนเชิงซ้อน

การศึกษาคณิตศาสตร์เบื้องต้นมาแล้วนั้นจะเห็นว่านักคณิตศาสตร์เบื้อตนมาแล้วนั้นจะเห็นว่านักคณิตศาสตร์ได้ทำการจำแนกจำนวนต่าง ๆ ไว้เป็นหมวดหมู่ หรือที่เรียกอีกอย่างว่าเซตในแต่ละเซตก็จะมีคุณสมบัติเฉพาะตัวของมันเอง เซตที่ได้ทำการรู้จักมาแล้วยกตัวอย่างเช่น เซตของจำนวนธรรมชาติ เซตของจำนวนเต็มลบ และศูนย์ เซตของจำนวนตรรกยะ และเซตของจำนวนอตรรยะ ซึ่งเซตของจำนวนตรรกยะรวมกับเซตของจำนวนอตรรยะจะเรียกว่าเซตของจำนวนจริงนั่นเอง ต่อมานักคณิตศาสตร์ชาวกรีกชื่อดีโอฟานโตส(Diophantos) เริ่มเห็นว่าระบบจำนวนจริงนั้นไม่เพียงพอ ในราวปี พ.ศ. 818 เมื่อท่านต้องการแก้ปัญหาซึ่งดูเหมือนง่ายมากคือด้านของสามเหลี่ยมมุมฉากซึ่งมีเส้นรอบรูปเท่ากับ 12 หน่วย และมีพื้นที่เท่ากับ 7 ตารางหน่วย ซึ่งปัญหานี้ก่อนให้เกิดสมการขึ้นมาและสมการนั้นไม่สามารถแก้ได้ในระบบจำนวนจริงนักคณิตศาสตร์หลายท่านจึงได้สร้างจำนวนขึ้นมาใหม่ ซึ่งเรียกว่าจำนวนเชิงซ้อนนั่นเองระบบจำนวนเชิงซ้อนนั้นจึงมีความสำคัญสำหรับการแก้ปัญหาที่ไม่สามารถแก้ได้ในระบบจำนวนจริง ดังนั้นจึงทำให้มีนักคณิตศาสตร์รวมถึงนักวิทยาศาสตร์ให้ความสนใจเป็นอย่างมาก สำหรับในบทนี้ได้แบ่งเนื้อหาออกเป็น6 เรื่องได้แก่ จำนวนเชิงซ้อน สมบัติของจำนวนเชิงซ้อน จำนวนเชิงซ้อนในรูปแบบของคู่อันดับ จำนวนเชิงซ้อนในรูปแบบเชิงขั้วการคูณและการหารจำนวนเชิงซ้อนในรูปแบบเชิงขั้ว รากของจำนวนเชิงซ้อน ดังนี้

1.1 จำนวนเชิงซ้อน

ในการศึกษาระบบจำนวน จะเริ่มศึกษาถึงจำนวนนับหรือจำนวนธรรมชาติ จำนวนเต็ม จำนวนตรรกยะ และจำนวนอตรรกยะ ตามลำดับ เซตของจำนวนตรรกยะและจำนวนอตรรกยะเราเรียกว่า จำนวนจริง ซึ่งคุณสมบัติต่าง ๆ ที่สำคัญเราได้ศึกษามาแล้วพิจารณาสมการ $x^2+1=0$ จะเห็นว่าไม่มีจำนวนจริง x ใด ๆ ที่สอดคล้องกับสมการนี้ เพราะจำนวจริงใด ๆ ยกกำลังสองต้องมากกว่าเท่ากับศูนย์เสมอ แต่เพื่อที่จะหาคำตอบของสมการนี้จะเห็นว่า

จาก $\quad x^2+1=0$

$\quad x^2=-1$

กำหนดให้ $i^2=-1$

จะได้ $\quad x^2=i^2$

$\quad x=\pm i \qquad$ เมื่อ $i=\sqrt{-1}$

จากสมกาข้างต้นจะเห็นว่ารากที่สองของจำนวนจริงลบไม่มีในระบบจำนวนจริง ถ้าต้องการให้จำนวนจริงให้ครอบคลุมจำนวนซึ่งเป็นรากที่สองของจำนวนจริงลบด้วย นักคณิตศาสตร์ได้ขยายเซตของจำนวนจริงโดยให้บทนิยามที่ ปิยรัตน์ จาตุรันตบุตร (2547 : 216 - 217) ได้ให้ไว้ดังต่อไปนี้

บทนิยาม 1.1

กำหนดให้ $\sqrt{-1}$ เป็นจำนวนซึ่ง $\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}=-1$ เขียนแทน $\sqrt{-1}$ ด้วย i ดังนั้น $i\cdot i=i^2=-1$

บทนิยาม 1.2

เรียกจำนวนใด ๆ bi เมื่อ b เป็นจำนวนจริงที่ $b\neq 0$ ว่าจำนวนจินตภาพแท้ และถ้า a เป็นจำนวนจิงที่ $a>0$ แล้วเขียนแทนด้วย $\sqrt{-a}$ ด้วย $i\sqrt{a}$ หรือ $\sqrt{a}i$

เมื่อมี i เพิ่มเข้ามาในระบบจำนวนจริงและระบบจำนวนจริงมีสมบัติเป็นฟิลด์ระบบใหม่ที่เกิดขึ้นจึงควรมีสมบัติต่าง ๆ ของฟิลด์ด้วย เช่น ควรมีจำนวนผกผันสำหรับการบวกของ i คือ $-i$ ซึ่ง $i+(-i)=(-i)+i=0$ ควรมีสมบัติปิดภายใต้การบวกและการคูณ ดังนั้นระบบนี้จึงต้องรวมเอาจำนวนเช่น $3+i, 2-i, i^3, 6i, 1+\sqrt{3}i$ ฯลฯ เข้าไว้เป็นสมาชิกในระบบด้วย ด้วยวิธีการดังกล่าว จำนวนใด ๆ ที่อยู่ในรูป $a+bi$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริงจะเป็นสมาชิกของระบบใหม่ที่เกิดขึ้น ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริงที่ไม่ใช่ศูนย์ จำนวน $a+bi$ ตะมีบางส่วนเป็นจำนวนจริงและมีบางส่วนเป็นจำนวนจิตภาพ แต่ถ้า $b=0$ จะได้ $a+bi=a+0=a$ ซึ่งเป็นจำนวนจริง และถ้า $a=0$ และ $b\neq 0$ จะได้ $a+bi=0+bi=bi$ ซึ่งเป็นจำนวนจิตภาพแท้ ดังนั้น ทั้งจำนวนจริงและจำนวนจินตภาพต่างสามาถเขียนให้อยู่ในรูปแบบ $a+bi$ ได้เสมอดังบทนิยาม

บทนิยาม 1.3

เรียกเซตของจำนวนที่อยู่ในรูปแบบ $a+bi$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง ว่า เซตของจำนวนเชิงซ้อน เขียนแทนด้วย C ดังนั้น

$$C=\left\{a+bi \middle| a,b\in R \text{ และ } i=\sqrt{-1}\right\}$$

ถ้า $b\neq 0$ แล้ว $a+bi$ เป็นจำนวนจินตภาพ

ถ้า $a=0$ และ $b\neq 0$ แล้ว $a+bi$ เป็นจำนวนจินตภาพแท้

ถ้า $b=0$ แล้ว $a+bi$ เป็นจำนวนจริง

ตัวอย่าง 1.1

$3+i$ เป็นจำนวนจินตภาพ

$\sqrt{3}i$ เป็นจำนวนจินภาพแท้

2 เป็นจำนวนจริง

สำหรับการเท่ากันของจำนวนเชิงซ้อนนั้น จีระ เจริญสุขวิมล และวินิจ วงศ์รัตนะ (2544 : 299)

บทนิยาม 1.4

จำนวนเชิงซ้อน $a+bi$ เท่ากับจำนวนเชิงซ้อน $c+di$ ก็ต่อเมื่อ $a=c$ และ $b=d$

จากบทนิยาม 1.4 จะได้ว่า $a+bi \neq c+di$ ก็ต่อเมื่อ $a \neq c$ หรือ $b \neq d$ และเราไม่สามารถเปรียบเทียบจำนวนเชิงซ้อนสองจำนวนว่าจำนวนใดมีข้างมากกว่า เช่น $1+i \neq 1$ แต่บอกไม่ได้ว่า $1+i$ มากกว่า i หรือ $1+i$ น้อยกว่า i ทั้งนี้เพราะไม่มีสมบัติอันดับของจำนวนเชิงซ้อน

ตัวอย่าง 1.2

$a+bi=3i$ จะได้ว่า $a=0$ และ $b=3$

$a+bi=-2+i$ จะได้ว่า $a=-2$ และ $b=1$

ตัวอย่าง 1.3 ถ้า $(x+y)+(x-y)i=2-8i$ แล้วจงหาค่า x และ y

วิธีทำ เนื่องจาก $(x+y)+(x-y)i=2-8i$

จะได้ $x+y=2$ และ $x-y=-8$

แก้ระบบสมการหาค่า x และ y ดังต่อไปนี้

$$x+y=2 \qquad ....(1)$$

$$x-y=-8 \qquad ....(2)$$

นำ $(1)+(2)$ ได้

$$2x=-6$$

$$x=-3$$

แทนค่า $x=-3$ ใน สมการ (1) จะได้

$$-3+y=2$$

$$y=5$$

ดังนั้น $x=-3$ และ $y=5$

พัชรา วันเพ็ญ (2529 : 3) ได้ให้บทนิยามของจำนวนเชิงซ้อนสังยุคไว้ดังนี้

บทนิยาม 1.5

กำหนดให้จำนวนเชิงซ้อน $z = a + bi$ จำนวนเชิงซ้อนสังยุคของ $a + bi$ คือ $a - bi$ เขียนแทนด้วย $\overline{z}$ หรือ $\overline{a + bi}$ ดังนั้น $\overline{z} = \overline{a + bi} = a - bi$

ตัวอย่าง 1.4

$z = 2 + 3i$, $\quad \overline{z} = 2 - 3i$

$z = 6 - 2i$, $\quad \overline{z} = 6 + 2i$

$z = 4i$, $\quad \overline{z} = -4i$

$z = 5$, $\quad \overline{z} = 5$

ปิยรัตน์ จาตุรันตบุตร (2547 : 216) ได้ให้บทนิยามของการบวกและการคูณจำนวนเชิงซ้อนดังต่อไปนี้

บทนิยาม 1.6

สำหรับจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ $a + bi$ และ $c + di$

$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$

$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$

ตัวอย่าง 1.5

1. $(2 + 3i) + (2 - 5i) = 4 - 2i$
2. $(3 - 2i)(2 + i) = (6 + 2) + (3 - 4)i$

   $= 8 - i$
3. $(a + bi)(a - bi) = (a^2 + b^2) + (ab - ba)i$

   $= a^2 + b^2$
4. $(3 - 2i) + (2 + i) = 3^2 + 2^2 = 13$

ตัวอย่าง 1.6 จงเขียน $\dfrac{1}{2+5i}$ ให้อยู่ในรูป $a+bi$ เมื่อ $a,b \in R$

วิธีทำ
$$\begin{aligned}\frac{1}{2+5i} &= \frac{1}{2+5i}\cdot\frac{2-5i}{2-5i}\\ &= \frac{2-5i}{2^2+5^2}\\ &= \frac{2-5i}{29}\\ &= \frac{2}{29}-\frac{5}{29}i\end{aligned}$$

ดังนั้น $\dfrac{1}{2+5i} = \dfrac{2}{29}-\dfrac{5}{29}i$

> **บทนิยาม 1.7**
>
> กำหนดให้ $z=a+bi$ เรียก a ว่าส่วนจริงเขียนแทนด้วย $R(z)$ และเรียก b ว่าส่วนจินตภาพเขียนแทนด้วย $I(z)$ ดังนั้นถ้า $z=a+bi$ จะได้ $R(z)=a$ และ $I(z)=b$

1.2 สมบัติของจำนวนเชิงซ้อน

เซตของจำนวนเชิงซ้อนและการดำเนินการบวกและคูณ มีสมบัติฟิลด์ กล่าวคือคือสำหรับจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ จะมีคุณสมบัติตามทฤษฎีบทที่ สมถวิล ขันเขตต์ (2558 : 4) ได้ให้ไว้ดังต่อไปนี้

> **ทฤษฎีบท1.1**
>
> สำหรับจำนวนเชิงซ้อน z_1, z_2 และ z_3 จะสอดคล้องกับสมบัติต่อไปนี้
>
> 1. สมบัติปิดภายใต้การบวกและการคูณ นั่นคือ z_1+z_2 และ z_1z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน
> 2. สมบัติสลับที่ภายใต้การบวกและการคูณ นั่นคือ
> $$z_1+z_2 = z_2+z_1$$
> $$z_1z_2 = z_2z_1$$
> 3. สมบัติจัดหมู่ภายใต้การบวกและการคูณ นั่นคือ
> $$z_1+(z_2+z_3) = (z_1+z_2)+z_3$$
> $$z_1(z_2z_3) = (z_1z_2)z_3$$

ทฤษฎีบท1.1 (ต่อ)

4. สมบัติการแจกแจง นั่นคือ

$$z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3$$

$$(z_2+z_3)z_1=z_2z_1+z_3z_1$$

5. การมีเอกลักษณ์การบวกและการคูณ

$z_1+0=0+z_1$ เรียก 0 เป็นเอกลักษณ์การบวก

$z_1\cdot 1=1\cdot z_1$ เรียก 1 เป็นเอกลักษณ์การคูณ

6. การมีอิสเวอร์สการบวกและการคูณ

สำหรับทุกจำนวนเชิงซ้อน z_1 จะมีจำนวนเชิงซ้อน z ที่ทำให้ $z_1+z=0$ เรียก z ว่า อินเวอร์สการบวกของ z_1 เขียนแทนด้วย $-z_1$

สำหรับทุกจำนวนเชิงซ้อน $z_1\neq 0$ จะมีจำนวนเชิงซ้อน z ที่ทำให้ $z_1\cdot z=1$ เรียก z ว่า อินเวอร์สกาคูณของ z_1 เขียนแทนด้วย $\dfrac{1}{z_1}$

การพิสูจน์ทฤษฎีบท 1.1 ทั้ง 6 ข้อข้างต้นส่วนใหญ่สามารถกระทำได้โดยตรง จากการอ้างบทนิยามที่กล่าวมาแล้วในหัวข้อ 1.1 มีบางข้อเท่านั้นที่การพิสูจน์ค่อนข้างจะซับซ้อน ผู้เขียนจึงได้แสดงวิธีการพิสูจน์การมีอินเวอร์สสำหรับการคูณดังต่อไปนี้

ให้ $a,b\in R$ โดยที่ $a\neq 0$ หรือ $b\neq 0$ และ $(a+bi)(x+yi)=1+0i=1$ ต้องการแสดงว่า x และ y เป็นจำนวนจริง

จาก $\quad (a+bi)(x+yi)=1+0i$

จะได้ $\quad (ax-by)+(ay+bx)i=1+0i$

นั่นคือ $\quad ax-by=1$ และ $ay+bx+=0$

แก้ระบบสมการข้างต้นดังต่อไปนี้

$$ax-by=1 \qquad \text{....(1)}$$

$$ay+bx=0 \qquad \text{....(2)}$$

จากสมการ (2) จะได้ $y=-\dfrac{bx}{a}$ แทนค่าในสมการ (1) จะได้

$$ax-b\left(-\frac{bx}{a}\right)=1$$

$$ax + \frac{b^2x}{a} = 1$$

$$\left(a + \frac{b^2}{a}\right)x = 1$$

$$\left(\frac{a^2 + b^2}{a}\right)x = 1$$

$$x = \frac{a}{a^2 + b^2}$$

แทนค่า $x = \dfrac{a}{a^2 + b^2}$ (2) จะได้

$$ay + b\left(\frac{a}{a^2 + b^2}\right) = 0$$

$$ay + \frac{ab}{a^2 + b^2} = 0$$

$$y = -\frac{b}{a^2 + b^2}$$

จะเห็นว่า x และ y ต่างก็เป็นจำนวนจริง

ดังนั้น $x + yi = \dfrac{a}{a^2 + b^2} - \dfrac{bi}{a^2 + b^2}$

นั่นคือ $x + yi \in C$

ตัวอย่าง 1.7 จงหาจำนวนผกผันสำหรับการคูณของ $1 + 3i$

วิธีทำ จำนวนผกผันสำหรับการคูณของ $1 + 3i$ คือ $\dfrac{1}{1 + 3i}$

คูณจำนวนเชิงซ้อนสังยุคของ $1 + 3i$ คูณ $\dfrac{1}{1 + 3i}$ ทั้งเศษและส่วน

จะได้

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+3i} &= \frac{1}{1+3i} \cdot \frac{1-3i}{1-3i} \\ &= \frac{1-3i}{1^2 + 3^2} \\ &= \frac{1-3i}{10} \\ &= \frac{1}{10} - \frac{3i}{10} \end{aligned}$$

ดังนั้นจำนวนผกผันสำหรับการคูณของ $1 + 3i$ คือ $\dfrac{1}{10} - \dfrac{3i}{10}$

นอกจากการบวกและการคูณจำนวนเชิงซ้อนแล้ว ปิยรัตน์ จาตุรันตบุตร (2547 : 222) ได้ให้บทนิยามของการลบและการหารจำนวนเชิงซ้อนดังต่อไปนี้

บทนิยาม 1.8

กำหนดให้ $a+bi$ และ $c+di \in C$

$(a+bi)-(c+di)=x+yi$ ก็ต่อเมื่อ $a+bi=(x+yi)+(c+di)$

จากบทนอยามข้างต้นจะได้

$a=x+c$ และ

$b=y+d$

นั่นคือ $x=a-c$ และ

$y=b-d$

ดังนั้น $(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$

$=(a-c)+(bi-di)$

$=(a+bi)+(-c-di)$

เพราะฉะนั้น $(a+bi)-(c+di)$ เท่ากับ $a+bi$ บวกกับจำนวนผกผันสำหรับการบวกของ $c+di$

ตัวอย่าง 1.8

$$\begin{aligned}(3+5i)-(2-7i)&=(3+5i)+(-2+7i)\\&=1+12i\end{aligned}$$

บทนิยาม 1.9

กำหนดให้ $a+bi$ และ $c+di \in C$

$\dfrac{a+bi}{c+di}=x+yi$ ก็ต่อเมื่อ $a+bi=(x+yi)(c+di)$

จากบทนิยามข้างต้น

$$a + bi = (x + yi)(c + di)$$

จะได้ $a + bi = (xc - yd) + (xd + yc)i$

นั่นคือ $a = xc - yd$ และ

$$b = xd + yc$$

แก้สมการจะได้

$$x = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} \quad \text{และ}$$

$$y = \frac{-ad + bc}{c^2 + d^2}$$

ดังนั้น $\dfrac{a + bi}{c + di} = \dfrac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \left(\dfrac{-ad + bc}{c^2 + d^2}\right)i$

สำหรับการหาผลหารนิยมใช้จำนวนเชิงซ้อนสังยุคของตัวหารคูณทั้งเศษและส่วนดังนี้

$$\begin{aligned}\frac{a + bi}{c + di} &= \frac{a + bi}{c + di} \cdot \frac{c - di}{c - di} \\ &= \frac{(ac + bd) + (-ad + bc)i}{c^2 + d^2} \\ &= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \left(\frac{-ad + bc}{c^2 + d^2}\right)i\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 1.9 $\dfrac{3 - 2i}{2 + i} = \dfrac{3 - 2i}{2 + i} \cdot \dfrac{2 - i}{2 - i}$

$$\begin{aligned} &= \frac{(6 - 2) + (-2 - 3)}{2^2 + 1^2} \\ &= \frac{4 - 5i}{5} \\ &= \frac{4}{5} - i\end{aligned}$$

ดังนั้น $\dfrac{3 - 2i}{2 + i} = \dfrac{4}{5} - i$

นอกจากการบวก การลบ การคูณ และการหาร จำนวนเชิงซ้อนที่กล่าวมาข้างต้นนั้น (ประสิทธิ์ ลิ้มบุพศิริพร (2557: 13) ยังได้ให้ทฤษฎีบทเกี่ยวกับการบวก การลบ การคูณ และการหาร จำนวนเชิงซ้อนสังยุค ดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1.2

สำหรับจำนวนเชิงซ้อน z_1 และ z_2 ใด ๆ จะได้ว่า

1. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
2. $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$
3. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
4. $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ เมื่อ $z_2 \neq 0$

พิสูจน์ กำหนดให้ $z_1 = a_1 + b_1 i$ และ $z_2 = a_2 + b_2 i$

1.

$$\begin{aligned}
\overline{z_1 + z_2} &= \overline{(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i)} \\
&= \overline{(a_1 + a_2) + (b_1 i + b_2 i)} \\
&= \overline{(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i} \\
&= (a_1 + a_2) - (b_1 + b_2) i \\
&= a_1 + a_2 - b_1 i - b_2 i \\
&= (a_1 - b_1 i) + (a_2 - b_2 i) \\
&= \overline{z_1} + \overline{z_2}
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\overline{z_1 - z_2} &= \overline{(a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i)} \\
&= \overline{(a_1 - a_2) + (b_1 i - b_2 i)} \\
&= \overline{(a_1 - a_2) + (b_1 - b_2) i} \\
&= (a_1 - a_2) - (b_1 - b_2) i \\
&= a_1 - a_2 + b_1 i - b_2 i \\
&= (a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i) \\
&= \overline{z_1} - \overline{z_2}
\end{aligned}$$

3.

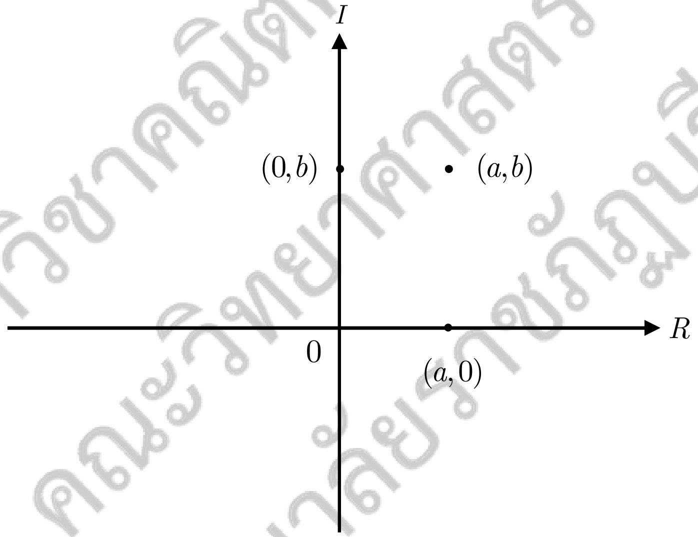
$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{(a_1 + b_1 i).(a_2 + b_2 i)}$$
$$= \overline{(a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i}$$
$$= (a_1a_2 - b_1b_2) - (a_1b_2 + a_2b_1)i$$
$$= a_1a_2 - b_1b_2 - a_1b_2i - a_2b_1i$$
$$= (a_1a_2 - b_1b_2) + (-a_1b_2 - a_2b_1)i$$
$$= (a_1 - b_1i) \cdot (a_2 - b_2i)$$
$$= \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

4. ให้ $z_2 \neq 0$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \overline{\left(\frac{a_1 + b_1i}{a_2 + b_2i}\right)}$$
$$= \overline{\left(\frac{a_1 + b_1i}{a_2 + b_2i} \cdot \frac{a_2 - b_2i}{a_2 - b_2i}\right)}$$
$$= \overline{\left(\frac{(a_1a_2 + b_1b_2) + (-a_1b_2 + a_2b_1)i}{(a_2)^2 + (b_2)^2}\right)}$$
$$= \left(\frac{(a_1a_2 + b_1b_2) - (-a_1b_2 + a_2b_1)i}{(a_2)^2 + (b_2)^2}\right)$$
$$= \left(\frac{a_1a_2 + b_1b_2 + a_1b_2i - a_2b_1)i}{(a_2)^2 + (b_2)^2}\right)$$
$$= \frac{(a_1 - b_1i)}{(a_2 - b_2i)} \cdot \frac{(a_2 + b_2i)}{(a_2 + b_2i)}$$
$$= \frac{(a_1 - b_1i)}{(a_2 - b_2i)}$$
$$= \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$

1.3 จำนวนเชิงซ้อนในรูปแบบของคู่อันดับ

จำนวนเชิงซ้อนแต่ละจำนวน $a+bi$ สามารถเขียนแทนด้วยคู่อันดับของจำนวนจริง (a,b) เพียงคู่อันดับเดียวเท่านั้น และสามารถเขียนกราฟของ (a,b) บนระนาบได้ ซึ่งในกรณีนี้เรียกว่าระนาบเชิงซ้อนในระบบพิกัดฉากในทางกลับกันแต่ละจุด (a,b) บนระนาบจะแทนจำนวนเชิงซ้อน $a+bi$ เพียงจำนวนเดียวเท่านั้น ในกรณีที่ $b=0$ จะได้ $a+oi=a$ เป็นจำนวนจริงที่แทนด้วยจุด(a,o) และถ้า $a=0$ จะได้ $0+bi=bi$ เป็นจำนวนจินตภาพแท้ แทนด้วยจุด $(0,b)$ ด้วยเหตุนี้จึงเรียนกแกนในแนวระดับของระนาบนี้ว่าแกนจริงและแกนในแนวดิ่งว่าแกนจินตภาพ ดังภาพประกอบ



ภาพประกอบ 1.1 การเขียน $a+bi$ ให้อยู่ในระนาบแกนจริงและแกนจินตภาพ

ที่มา : คณาจารย์Think Beyond Genius.2559 : 231

จำนวนเชิงซ้อนที่เป็นจำนวนจินตภาพ แต่ไม่ใช่จำนวนจินตภาพแท้จะแทนด้วยจุดแต่ละจุดในระนาบเชิงซ้อน ซึ่งไม่อยู่บนแกนจริง และไม่อยู่บนแกนจินตภาพ การกำหนดจุดแทนจำนวนเชิงซ้อนทำได้ทำนองเดียวกันกับการแทนคู่ดันดับในจำนวนจริง ดังตัวอย่างต่อไปนี้

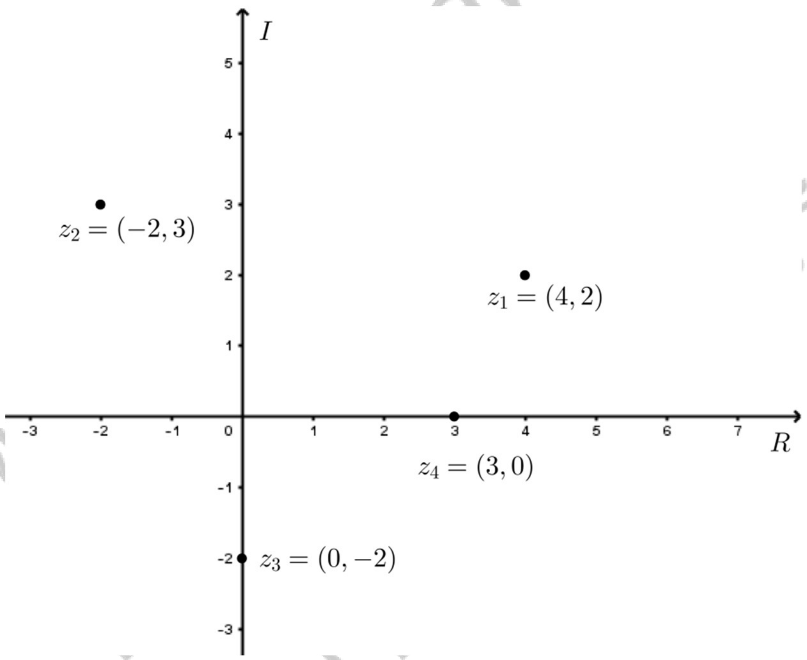
ตัวอย่าง 1.10 จงเขียนกราฟของจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้

$z_1=4+2i, z_2=-2+3i, z_3=-2i$ และ $z_5=3$

วิธีทำ เนื่องจาก

$$
\begin{aligned}
z_1 &= 4 + 2i && \therefore z_1 = (4,2) \\
z_2 &= -2 + 3i && \therefore z_2 = (-2,3) \\
z_3 &= -2i && \therefore z_3 = (0,-2) \\
z_4 &= 3 && \therefore z_4 = (3,0)
\end{aligned}
$$

แทนจุดในระนาบแกนจริงและแกนจินตภาพได้ดังต่อไปนี้



นอกจากการเขียนจำนวนเชิงซ้อนในรูปแบบของคู่อันดับแล้วยังสามารถทำการบวกลบคูณและหารจำนวนเชิงซ้อนในรูปของคู่อันดับได้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 1.11

1. $(2,2) + (4,1) = (2+4, 2+1) = (6,3)$
2. $(2,3) - (4,1) = (2-4, 3-1) = (-2,2)$
3. $(1,3) - (2,4) = (1 \cdot 2 - 3 \cdot 4, 4 \cdot 1 + 3 \cdot 2)$

$$= (2-12, 4-6)$$

$$= (-10,-2)$$

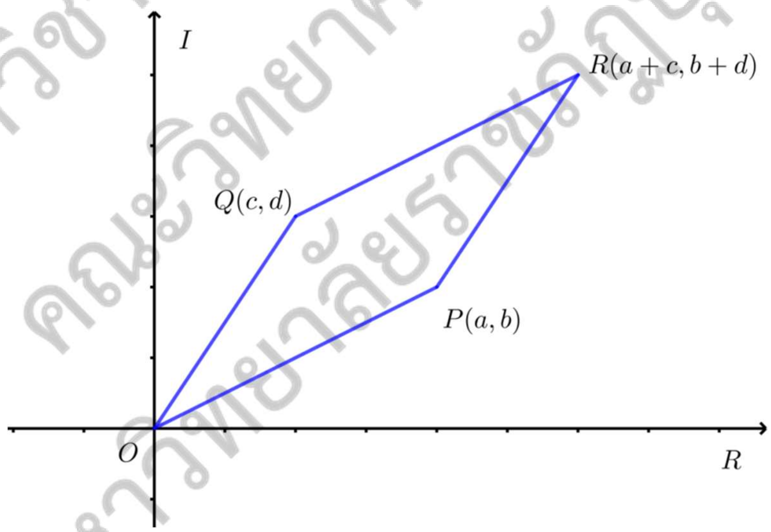
4. $$\frac{(2,4)}{(1,3)} = \frac{(2,4)}{(1,3)}\frac{(1,-3)}{(1,-3)}$$

$$= \frac{(2\cdot 1 - 4\cdot(-3), 2\cdot(-3) + 4\cdot 1)}{1^2 + 3^2}$$

$$= \frac{(2+12, (-6)+4)}{10}$$

$$= \frac{(14,-2)}{10}$$

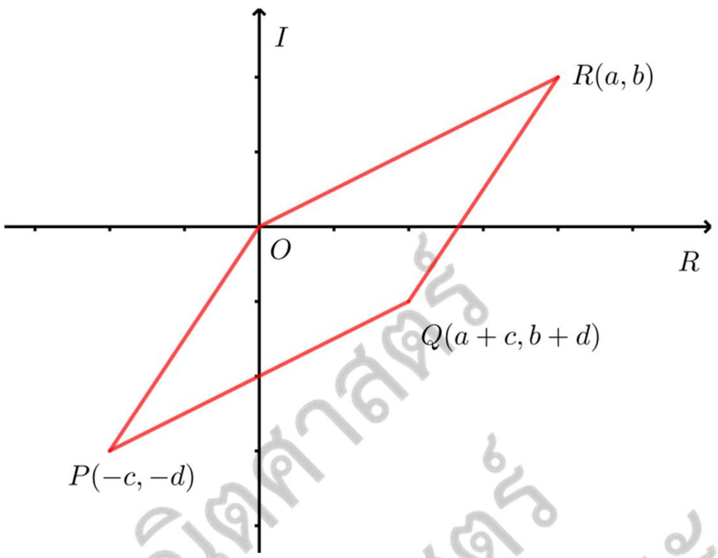
เนื่องจาก $(a+bi)+(c+di) = (a+c)+(b+d)i$ ดังนั้น $(a,b)+(c,d) = (a+c,b+d)$ คือ กราฟของผลบวก $(a+bi)+(c+di)$ แสดงได้ดังภาพประกอบต่อไปนี้



ภาพประกอบ 1.2 กราฟของผลบวก $(a+bi)+(c+di)$

ที่มา : ปิยรัตน์ จาตุรันตบุตร. 2559 : 227

ด้วยวิธีการเดียวกันกับการเขียนกราฟของผลบวกของจำนวนเชิงซ้อนสองจำนวนเราสามารถเขียนกราฟของจำนวนเชิงซ้อนสามจำนวนโดยการหาจุดที่แทนผลบวกของจำนวนเชิงซ้อนสองจำนวนแรกก่อนแล้วจึงหาจุดของผลบวกจำนวนเชิงซ้อนที่ได้กับจำนวนเชิงซ้อนจำนวนที่สาม และถ้าต้องการเขียนกราฟของ $(a+bi)-(c+di)$ สามารถเขียนกราฟของ $(a+bi)+(-c-di)$ แทนได้ดังภาพประกอบต่อไปนี้



ภาพประกอบ 1.3 กราฟของผลบวก $(a+bi)+(c+di)$
ที่มา : ปิยรัตน์ จาตุรันตบุตร. 2559 : 227

จะเห็นว่าการบวกจำนวนเชิงซ้อนในระบาบนั้นเหมือนกับการบวกเวกเตอร์ บางครั้งจึงเขียนแทนจำนวนเชิงซ้อนด้วยเวกเตอร์ เช่น แทนจำนวนเชิงซ้อน $z_1 = (4,1)$ ด้วยเวกเตอร์ที่มีจุด $(0,0)$ เป็นจุดเริ่มต้นและจุด $(4,1)$ เป็นจุดสิ้นสุด

1.4 จำนวนเชิงซ้อนในรูปแบบเชิงขั้ว

จากบทนิยามการคูณและการหารของจำนวนเชิงซ้อน จะเห็นว่าการคูณหรือการหารจำนวนเชิงซ้อนหลาย ๆ จำนวนมีความยุ่งยากซับซ้อน จึงมีวิธีช่วยแก้ปัญหาเหล่านี้ได้ง่ายขึ้น เช่นการเปลี่ยนจำนวนเชิงซ้อนให้อยู่ในรูปแบบเชิงขั้วมิติ สำหรับการเปลี่ยนจำนวนเชิงซ้อนให้อยู่ในรูปแบบเชิงขั้วนั้นอาศัยหลักการตามบทนิยามที่ คณาจารย์Think Beyond Genius (2559 : 232) ดังต่อไปนี้

บทนิยาม 1.10

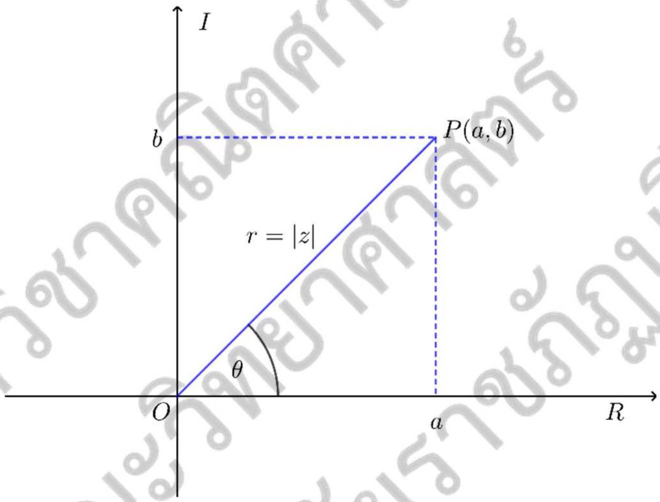
ค่าสัมบูรณ์(absolute value) หรือมอดูลัส(modulus) ของจำนวนเชิงซ้อน $z = a+bi$ ใด ๆ คือ $\sqrt{a^2+b^2}$ เขียนแทนด้วย $|z|$ นั่นคือ

$$|z| = \sqrt{a^2+b^2}$$

นอกจากการเขียนจำนวนเชิงซ้อน $z = a + bi$ ซึ่งแทนด้วยจุด (a,b) ในระบบพิกัดฉาก แล้วยังสามารถเขียน z ในระบบพิกัดเชิงขั้วได้ดังนี้

ให้จุด $P(a,b)$ เป็นจุดในระนาบจำนวนเชิงซ้อน แทนจำนวนเชิงซ้อน $z = a + bi$

ให้ $r = \left|z\right| = \sqrt{a^2 + b^2}$ และ θ เป็นมุมที่เวกเตอร์ $\overline{OP}$ กับแกน R ดังภาพประกอบ



ภาพประกอบ 1.4 แสดงจำนวนเชิงซ้อน $a + bi$ บนระบบพิกัดเชิงขั้ว

ที่มา : สมถวิล ขันเขตต์. 2558 :6

จากภาพประกอบ 1.4 จะได้ $\left|a + bi\right|$ คือ r ซึ่งเป็นระยะระหว่างจุด O และจุด P และโดยทั่วไปจะมีค่าเป็นบวกเสมอยกเว้นจุด P จะอยู่ที่จุด $(0,0)$ แอมพลิจูด ของ $a + bi$ คือมุมที่จัดจากแกนจริงไปยังส่วนของเส้นตรง OP

จากภาพประกอบ 1.4 จะได้ว่า

$$\tan\theta = \frac{b}{a}$$

และ $\quad a = r\cos\theta, \quad b = r\sin\theta$

ดังนั้น $a + bi = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

เราเรียก $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ว่าเป็นรูปแบบเชิงขั้วของจำนวนเชิงซ้อน และเรียก $a + bi$ ว่าเป็นรูปแบบทางพีชคณิตของจำนวนเชิงซ้อน

ข้อสังเกต 1.1

1 แอมพลิจูดของจำนวนเชิงซ้อนหนึ่ง ๆ มีได้หลายต่า เพราะว่า $\sin(\theta + 2k\pi) = \sin\theta$ และ $\cos(\theta + 2k\pi) = \cos\theta$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มใด ๆ ดังนั้นแอมพลิจูดของ $a + bi$ คือ $\theta + 2k$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มใด ๆ เช่นถ้า $\theta = 30^\circ$ แอมพลิจูดคือ $30^\circ, 390^\circ, 750^\circ$ หรือ -330°

2. จำนวนเชิงซ้อนในรูปแบบ $a + bi$ สามารถแปลงให้อยู่ในรูปแบบเชิงขั้วได้โดยอาศัยความสัมพันธ์

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)$$

และ $a + bi = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

ในทางกลับกันจำนวนเชิงซ้อนในรูปแบบเชิงขั้วสามารถแปลงให้อยู่ในรูป $a + bi$ ได้โดยอาศัยความสัมพันธ์

$$a = r\cos\theta$$
$$b = r\sin\theta$$

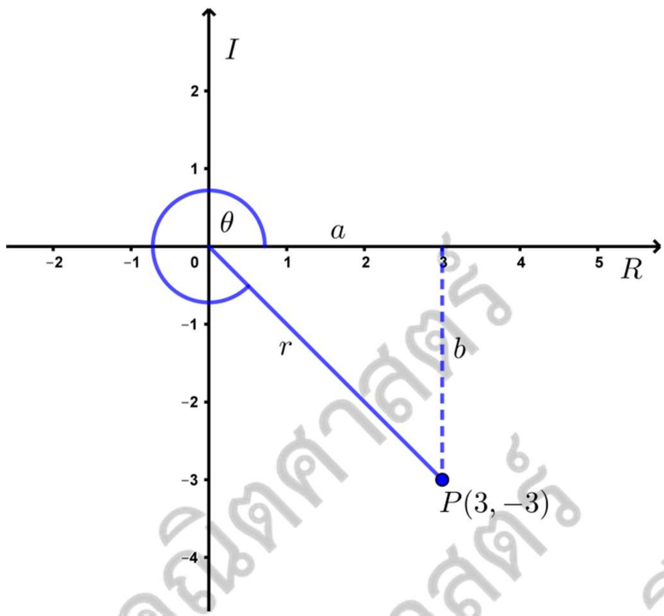
ปิยรัตน์ จาตุรันตบุตร (2547 : 229) ได้ให้บทนิยามของแอมพลิจูดหลักดังต่อไปนี้

บทนิยาม 1.11

กำหนดให้ $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ แอมพลิจูดหลักของ z คือ θ เมื่อ $-\pi < \theta < \pi$

ตัวอย่าง 1.12 จงเขียน $3 - 3i$ ให้อยู่ในรูปแบบเชิงขั้ว

วิธีทำ เขียนกราฟของ $(3, -3)$ บนระนาบเชิงซ้อนได้ดังนี้



จะได้ $r = \sqrt{3^2 + (-3)^2}$

$= \sqrt{18}$

$= 3\sqrt{2}$

และ $\theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{b}{a}\right)$

$= \tan^{-1}\left(\dfrac{-3}{3}\right)$

$= \tan^{-1}(-1)$

นั่นคือ $\theta = (180^\circ - 45^\circ)$ หรือ $\theta = (360^\circ - 45^\circ)$

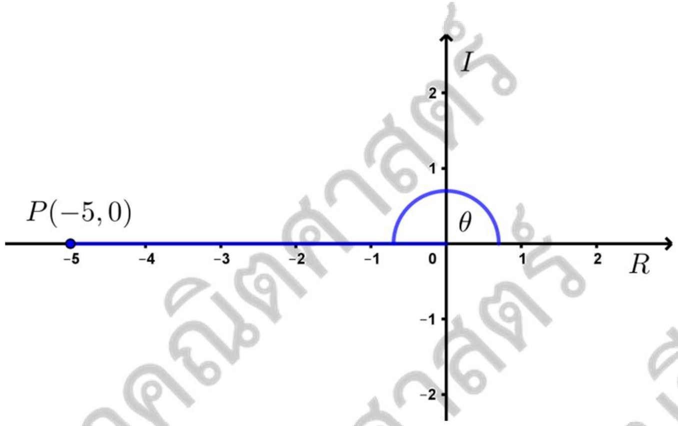
$\theta = 135^\circ$ หรือ $\theta = 315^\circ$

แต่จากภาพประกอบ ได้ $\theta = 315^\circ$

ดังนั้น $3 - 3i = 3\sqrt{2}(\cos 315^\circ + i\sin 315^\circ)$

ตัวอย่าง 1.13 จงเขียน -5 ให้อยู่ในรูปแบบเชิงขั้ว

วิธีทำ เขียนกราฟของ $(-5, 0)$ บนระนาบเชิงซ้อนได้ดังนี้



จะได้ $r = \sqrt{0^2 + (-5)^2}$

$= \sqrt{25}$

$= 5$

และ $\theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{b}{a}\right)$

$= \tan^{-1}\left(\dfrac{0}{-5}\right)$

$= \tan^{-1} 0$

นั่นคือ $\theta = 180^\circ$

ดังนั้น $-5 = 5(\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ)$

ตัวอย่าง 1.14 จงเขียน $6(\cos 210^\circ + i \sin 210^\circ)$ ให้อยู่ในรูปแบบ $a + bi$ พร้อมทั้งเขียนกราฟ

วิธีทำ จาก $a = r\cos\theta$

จะได้ $a = 6\cos 210^\circ$

$a = 6\cos 210^\circ$

$= 6\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

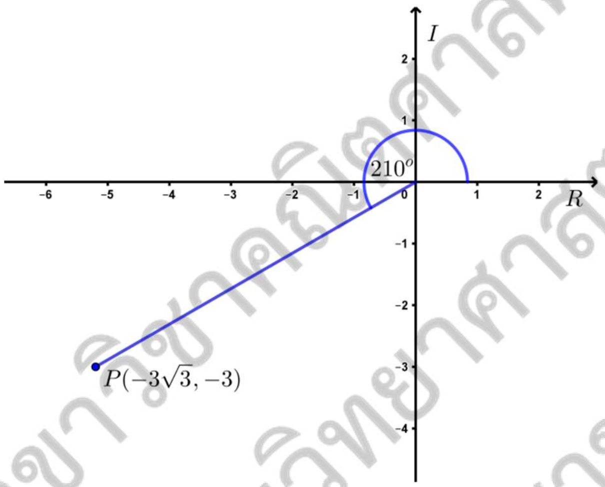
$= -3\sqrt{3}$

และ $b = r\sin\theta$

$$
\begin{aligned}
b &= 6\sin 210^{\circ} \\
&= 6\left(-\frac{1}{2}\right) \\
&= -3
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $6(\cos 210^{\circ} + i\sin 210^{\circ}) = -3\sqrt{3} - 3i$

เขียนกราฟของ $6(\cos 210^{\circ} + i\sin 210^{\circ})$ ได้ดังนี้



ดังนั้นการเขียน $a+bi$.ให้อยู่ในรูป $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ โดยที่ $a = r\cos\theta$ และ $b = r\sin\theta$ นั้นคือการเขียนให้อยู่ในรูปแบบเชิงขั้วดังได้กล่าวในบทนิยามที่ (สมถวิล ขันเขตต์ (2558 : 7) ได้ให้ไว้ดังต่อไปนี้

บทนิยาม 1.12

จำนวนเชิงซ้อน z เขียนอยู่ในรูป $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ เรียกว่า จำนวนเชิงซ้อนรูปแบบเชิงขั้ว โดยที่

r คือ ค่าสัมบูรณ์ หรือ มอดูลัสของ z

θ เรียกว่า อาร์กิวเมนต์ ของ z เขียนแทนด้วย $\theta = \arg(z)$

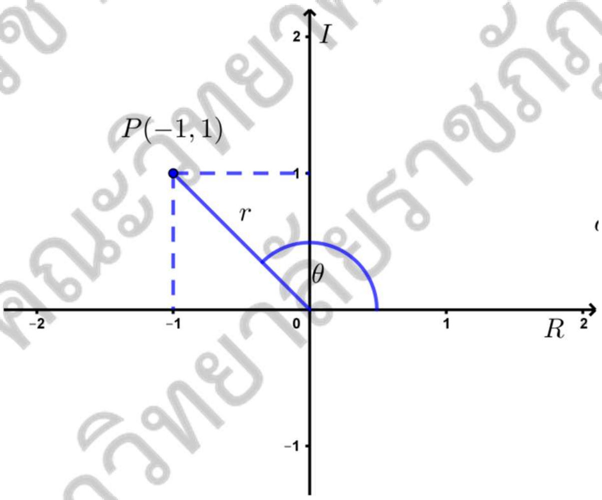
จากบทนิยามถ้า $z = 0$ นั่นคือ $a = 0$ และ $b = 0$ ดังนั้น $\arg(z)$ หาค่าไม่ได้และ $\arg(z)$ มีจำนวนอนันต์ ซึ่งแต่ละค่าต่างกัน $2n\pi$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้นถ้าพิจารณาเฉพาะในช่วงหนึ่งจึงนิยามค่าความสำคัญของอาร์กิวเมนต์ ดังนี้

บทนิยาม 1.13

ค่าสำคัญของอาร์กิวเมนต์ (principle value of $\arg(z)$) ของจำนวนเชิงซ้อน $z \neq 0$ เขียนแทนด้วย $\mathrm{Arg}(z)$ หมายถึงค่าของ $\arg(z)$ เพียงค่าเดียวซึ่ง $-\pi < \arg(z) < \pi$

ตัวอย่าง 1.15 กำหนดให้ $z = -1 + i$ จงเขียนให้อยู่ในรูปแบบเชิงขั้ว

วิธีทำ จาก $z = -1 + i$ เขียนแสดงด้วยจุดบนระนาบเชิงซ้อนได้ดังนี้



จะได้ $$r = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$$

และ
$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$
$$= \tan^{-1}\left(\frac{1}{-1}\right)$$
$$= \frac{3\pi}{4}$$

นั่นคือ $\arg(z) = \frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} + 2\pi, \frac{3\pi}{4} + 4\pi, \ldots, \frac{3\pi}{4} + 2n\pi, \ldots$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม

และ $\operatorname{Arg}(z) = \dfrac{3\pi}{4}$

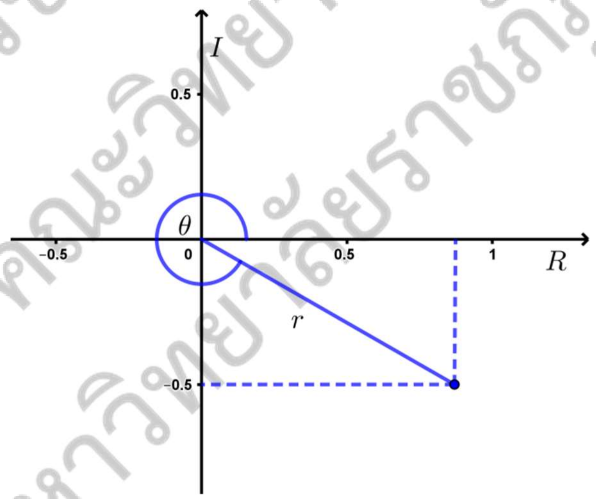
จากรูปแบบ $\quad a + bi = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

จะได้ $\quad z = -1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$

หรือ $\quad z = -1 + i = \sqrt{2}\left[\cos\left(\dfrac{3\pi}{4} + 2n\pi\right) + i\sin\left(\dfrac{3\pi}{4} + 2n\pi\right)\right]$

ตัวอย่าง 1.16กำหนดให้ $z = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i$ จงเขียนให้อยู่ในรูปแบบเชิงขั้ว

วิธีทำ จาก $z = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i$ เขียนแสดงด้วยจุดบนระนาบเชิงซ้อนได้ดังนี้



จะได้ $$r = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}}$$

$$= 1$$

และ $$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{11\pi}{6}$$

นั่นคือ $\arg(z) = \frac{11\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} + 2\pi, \frac{11\pi}{6} + 4\pi, \ldots, \frac{11\pi}{6} + 2n\pi, \ldots$

เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม และ $\mathrm{Arg}(z) = \frac{11\pi}{6}$

จากรูปแบบ $a + bi = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

จะได้ $z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i = \left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$

หรือ $z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i = \left[\cos\left(\frac{11\pi}{6} + 2n\pi\right) + i\sin\left(\frac{11\pi}{6} + 2n\pi\right)\right]$

ประสิทธิ์ ลิ้มบุพศิริพร (2557: 14) ได้ให้ทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับจำนวนเชิงซ้อนดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1.3 สำหรับจำนวนเชิงซ้อน z ใด ๆ จะได้ว่า

1. $|z| = |\overline{z}|$ และ $|\overline{z}|^2 = |z|^2 = z\overline{z}$
2. $\mathrm{Re}(z) = \frac{z + \overline{z}}{2}$ และ $\mathrm{Im}(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i}$
3. $\mathrm{Re}(z) \le |z|$ และ $|\mathrm{Im}(z)| \le |z|$
4. $\overline{\overline{z}} = z$
5. $z = \overline{z}$ ก็ต่อเมื่อ z เป็นจำนวนจริง
6. ถ้า $z \neq 0$ แล้ว $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$

พิสูจน์ ให้ $z = a + bi$

1.

$$\left|z\right| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \left|\overline{z}\right|$$

$$z\overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = \left|z\right|^2$$

2.

$$\frac{z + \overline{z}}{2} = \frac{(a + bi) + (a - bi)}{2} = \frac{2a}{2} = a = \mathrm{Re}(z)$$

$$\frac{z - \overline{z}}{2i} = \frac{(a + bi) - (a - bi)}{2i} = \frac{2bi}{2i} = b = \mathrm{Im}(z)$$

3. จาก $\left|z\right|^2 = \left|\mathrm{Re}(z)\right|^2 + \left|\mathrm{Im}(z)\right|^2$

ดังนั้น $\left|z\right|^2 \geq \left|\mathrm{Re}(z)\right|^2$ และ $\left|z\right|^2 \geq \left|\mathrm{Im}(z)\right|^2$

ซึ่งทำให้ได้ $\mathrm{Re}(z) \leq \left|z\right|$ และ $\left|\mathrm{Im}(z)\right| \leq \left|z\right|$ ตามต้องการ

4. จาก $\overline{z} = a - bi$ ดังนั้น $\overline{\overline{z}} = a - (-bi) = a + bi = z$

ทฤษฎีบท 1.4

กำหนดให้ z_1 และ z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ

1. $\left|z_1 z_2\right| = \left|z_1\right|\left|z_2\right|$
2. $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{\left|z_1\right|}{\left|z_2\right|}$

พิสูจน์ กำหนดให้ $z_1 = a_1 + b_1 i$ และ $z_2 = a_2 + b_2 i$

1.

$$\begin{aligned}
z_1 \cdot z_2 &= (a_1 + b_1 i).(a_2 + b_2 i) \\
&= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i \\
\left|z_1 \cdot z_2\right|^2 &= (a_1 a_2 - b_1 b_2)^2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)^2 \\
&= a_1^2 a_2^2 - 2a_1 a_2 b_1 b_2 + b_1^2 b_2^2 + a_1^2 b_2^2 + 2a_1 b_2 a_2 b_1 + a_2^2 b_1^2 \\
&= a_1^2 a_2^2 + b_1^2 b_2^2 + a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2 \\
&= a_1^2 a_2^2 + a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2 + b_1^2 b_2^2
\end{aligned}$$

$$= a_1^{\,2}(a_2^{\,2}+b_2^{\,2})+b_1^{\,2}(a_2^{\,2}+b_2^{\,2})$$

$$= a_1^{\,2}(a_2^{\,2}+b_2^{\,2})+b_1^{\,2}(b_2^{\,2}+a_2^{\,2})$$

$$= (a_1^{\,2}+b_1^{\,2})(a_2^{\,2}+b_2^{\,2})$$

$$= (a_1^{\,2}+b_1^{\,2})(a_2^{\,2}+b_2^{\,2})$$

$$= |z_1|^2|z_2|^2$$

$$|z_1\cdot z_2| = |z_1||z_2|$$

2.

$$|z_1| = \left|z_2\cdot\frac{z_1}{z_2}\right|$$

$$= |z_2|\cdot\left|\frac{z_1}{z_2}\right|$$

$$\frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{|z_2|\cdot\left|\frac{z_1}{z_2}\right|}{|z_2|}$$

$$= \left|\frac{z_1}{z_2}\right|$$

ต่อไปจะเป็นอสมการอิงรูปสามเหลี่ยมซึ่ง เกียรติสุดา นาคประสิทธิ์ (2556 : 11-12) ได้ให้ทฤษฎีบท บทแทรกและการพิสูจน์ไว้ดังนี้

ทฤษฎีบท 1.5 อสมการอิงรูปสามเหลี่ยม

กำหนดให้ z_1 และ z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ แล้ว $|z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|$

พิสูจน์

$$\begin{aligned}
\left|z_1 + z_2\right|^2 &= (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} \\
&= (z_1 + z_2)(\overline{z}_1 + \overline{z}_2) \\
&= z_1\overline{z}_1 + z_1\overline{z}_2 + z_2\overline{z}_1 + z_2\overline{z}_2 \\
&= \left|z_1\right|^2 + z_1\overline{z}_2 + \overline{z}_1 z_2 + \left|z_2\right|^2 \\
&= \left|z_1\right|^2 + z_1\overline{z}_2 + \overline{z_1\overline{z}_2} + \left|z_2\right|^2 \\
&= \left|z_1\right|^2 + z_1\overline{z}_2 + \overline{z_1\overline{z}_2} + \left|z_2\right|^2
\end{aligned}$$

แต่เนื่องจาก $z_1\overline{z}_2 + \overline{z_1\overline{z}_2} = 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z}_2) \le 2\left|z_1\overline{z}_2\right|$

$$\begin{aligned}
&\le \left|z_1\right|^2 + 2\left|z_1\overline{z}_2\right| + \left|z_2\right|^2 \\
&= \left|z_1\right|^2 + 2\left|z_1\right|\left|\overline{z}_2\right| + \left|z_2\right|^2 \\
&= \left(\left|z_1\right| + \left|z_1\right|\right)^2
\end{aligned}$$

ถอดรากที่สองทั้งสองข้างของอสมการได้ว่า $\left|z_1 + z_2\right| \le \left|z_1\right| + \left|z_2\right|$

บทแทรก 1.1

กำหนดให้ z_1 และ z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ
แล้ว $\left|z_1\right| - \left|z_2\right| \le \left|z_1 - z_2\right|$

พิสูจน์

เนื่องจาก $z_1 = (z_1 - z_2) + z_2$

ดังนั้น $\left|z_1\right| = \left|(z_1 - z_2) + z_2\right|$

$\le \left|(z_1 - z_2)\right| + \left|z_2\right|$

จะได้ $\left|z_1\right| - \left|z_2\right| \le \left|(z_1 - z_2)\right|$

1.5 การคูณและการหารจำนวนเชิงซ้อนในรูปแบบเชิงขั้วมิติ

ในหัวข้อนี้จะศึกษาเกี่ยวกับการคำนวณที่สำคัญในทางพีชคณิต นั่นคือ การคูณ การหาร การยกกำลัง ซึ่งในหัวข้อที่ผ่านมาการเขียนจำนวนเชิงซ้อนในรูปแบบ $a+bi$ นั่นมีความสะดวกในการบวกและการลบ แต่สำหรับการคูณและการหารจะมีความยุ่งยากพอสมควร อย่างไรก็ตามหากเขียนจำนวนเชิงซ้อนให้อยู่ในรูปแบบของพิกัดเชิงขั้วแล้ว พบว่าการคำนวนผลคูณและผลหารจะมีความสะดวกมากยิ่งขึ้น ยิ่งไปกว่านั้น การเขียนจำนวนเชิงซ้อนในรูปแบบของพิกัดเชิงขั้วยังมีความสะดวกในการยกกำลังอีกด้วยสำทฤษฎีที่เกี่ยวข้องนี้ สมถวิล ขันเขตต์ (2558 : 12) ได้ให้ไว้ดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1.6 ทฤษฎีบทของเดอมัวว์ (Demoivre 's Theorem)

ให้ $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ และ $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน แล้ว

1. $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2\left[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\right]$

2. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}\left[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)\right]$ เมื่อ $z_2 \neq 0$

พิสูจน์ ให้ $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ และ $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

1.

$$\begin{aligned}
z_1 \cdot z_2 &= \left[r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\right]\cdot\left[r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)\right] \\
&= r_1 \cdot r_2\left[(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)\right] \\
&= r_1 \cdot r_2\left[\cos\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1 i\sin\theta_2 + i\sin\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2\right] \\
&= r_1 \cdot r_2\left[\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)\right] \\
&= r_1 \cdot r_2\left[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\right]
\end{aligned}$$

ดังนั้น $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2\left[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\right]$

2. ให้ $z_2 \neq 0$

$$\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)} \\
&= \frac{r_1}{r_2}\left[\frac{\cos\theta_1 + i\sin\theta_1}{\cos\theta_2 + i\sin\theta_2}\right]\cdot\left[\frac{\cos\theta_2 - i\sin\theta_2}{\cos\theta_2 - i\sin\theta_2}\right]
\end{aligned}$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\left[\frac{(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\cdot(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}{\cos^2\theta_2 + \sin^2\theta_2}\right]$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\left[\frac{\left[\cos\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta_1 i\sin\theta_2 + i\sin\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2\right]}{\cos^2\theta_2 + \sin^2\theta_2}\right]$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\left[\frac{\left[(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta_1 i\sin\theta_2)\right]}{\cos^2\theta_2 + \sin^2\theta_2}\right]$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)\right]$$

ดังนั้น $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)\right]$ เมื่อ $z_2 \neq 0$

ตัวอย่าง 1.17กำหนดให้ $z_1 = 3\left[\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right]$ และ $z_2 = 4\left[\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right]$

จงหา z_1z_2 และ $\frac{z_1}{z_2}$ ในรูปของ $a + bi$

วิธีทำ $z_1z_2 = 3\left[\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right] \times 4\left[\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right]$

$$= 12\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$= 12\left[\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right]$$

$$= 12\left[-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right]$$

$$= -6\sqrt{2} + 6\sqrt{2}i$$

ดังนั้น $z_1z_2 = -6\sqrt{2} + 6\sqrt{2}i$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3\left[\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right]}{4\left[\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right]}$$

$$= \frac{3}{4}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$= \frac{3}{4}\left[\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right]$$

$$= \frac{3}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$$

$$= \frac{3}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{3}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$$

ดังนั้น $\frac{z_1}{z_2} = \frac{3}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{3}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

ตัวอย่าง 1.18 กำหนดให้ $z_1 = 5\left[\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ\right]$ และ

$z_2 = 7\left[\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ\right]$

จงหา $z_1 z_2$ และ $\frac{z_1}{z_2}$ ในรูปของ $a + bi$

วิธีทำ $z_1 z_2 = 5\left[\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ\right] \times 7\left[\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ\right]$

$$= 35\left[\cos\left(30^\circ + 60^\circ\right) + i\sin\left(30^\circ + 60^\circ\right)\right]$$

$$= 35\left[\cos 90^\circ + i\sin 90^\circ\right]$$

$$= 35\left[0 + i\right]$$

$$= 35i$$

ดังนั้น $z_1 z_2 = 35i$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{5\left[\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ\right]}{7\left[\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ\right]}$$

$$= \frac{5}{7}\left[\cos\left(30^\circ - 60^\circ\right) + i\sin\left(30^\circ - 60^\circ\right)\right]$$

$$= \frac{5}{7}\left[\cos\left(-30^\circ\right) + i\sin\left(-30^\circ\right)\right]$$

$$= \frac{5}{7}\left[\cos\left(30^\circ\right) - i\sin\left(30^\circ\right)\right]$$

$$= \frac{5}{7}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$$

$$= \frac{5\sqrt{3}}{14} - \frac{5}{14}i$$

ดังนั้น $\frac{z_1}{z_2} = \frac{5\sqrt{3}}{14} - \frac{5}{14}i$

จากทฤษฎีบทของเดอมัววร์ (Demoivre 's Theorem) นั้นเป็นการหาผลคูณและหารจำนวนเชิงซ้อนที่อยู่ในรูปแบบเชิงขั้ว สำหรับทฤษฎีต่อไปน ณัฐกร สุคันธมาลา (2559 : 8) ได้กล่าวถึงการยกกำลังของจำนวนเชิงซ้อนดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1.7

ให้ $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ และ n เป็นจำนวนเต็มใด ๆ

จะได้ว่า $z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$

พิสูจน์

กรณีที่ 1 $n = 0$ แล้ว $z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$ เป็นจริง

กรณีที่ 2 $n > 0$

พิสูจน์โดยวิธีอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

เมื่อ $n = 1$ จะได้ $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

ถ้า $n = k$ เป็นจริง จะได้ $z^k = r^k(\cos k\theta + i\sin k\theta)$

จะแสดงว่า $z^{k+1} = r^{k+1}\left[\cos(k+1)\theta + i\sin(k+1)\theta\right]$ เป็นจริงด้วย

พิจารณา

$$\begin{aligned}
z^{k+1} &= z^k z \\
&= \left[r^k(\cos k\theta + i\sin k\theta)\right]\cdot\left[r(\cos\theta + i\sin\theta)\right] \\
&= r^{k+1}\left[(\cos k\theta + i\sin k\theta)\cdot(\cos\theta + i\sin\theta)\right] \\
&= r^{k+1}\left[(\cos k\theta\cos\theta + \cos k\theta i\sin\theta + i\sin k\theta\cos\theta + i\sin k\theta i\sin\theta)\right] \\
&= r^{k+1}\left[(\cos k\theta\cos\theta - \sin k\theta\sin\theta + i(\sin k\theta\cos\theta + \cos k\theta\sin\theta)\right]
\end{aligned}$$

$$= r^{k+1}\left[(\cos(k\theta+\theta)+i\sin(k\theta+\theta)\right]$$
$$= r^{k+1}\left[(\cos(k+1)\theta+i\sin(k+1)\theta\right]$$

กรณีที่ 2 $n<0$

$$z^{n} = \frac{1}{z^{-n}}$$
$$= \frac{1}{r^{-n}\left[\cos(-n\theta)+i\sin(-n\theta)\right]}$$
$$= \frac{1}{r^{-n}\left[\cos(n\theta)-i\sin(n\theta)\right]}$$
$$= \frac{1}{r^{-n}}\frac{1}{\left[\cos(n\theta)-i\sin(n\theta)\right]}\left[\frac{\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)}{\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)}\right]$$
$$= \frac{1}{r^{-n}}\frac{\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)}{\left[\cos^{2}(n\theta)+i\sin^{2}(n\theta)\right]}$$
$$= \frac{1}{r^{-n}}\frac{\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)}{1}$$
$$= r^{n}\left[\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)\right]$$

ตัวอย่าง 1.19 กำหนดให้ $z=2\left[\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right]$ จงหา z^{9} ในรูปของ $a+bi$

วิธีทำ จาก $z=2\left[\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right]$

$$z^{9} = 2^{9}\left[\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right]^{9}$$
$$= 2^{9}\left[\cos\frac{9\pi}{3}+i\sin\frac{9\pi}{3}\right]$$
$$= 2^{9}\left[\cos 3\pi+i\sin 3\pi\right]$$
$$= 512(-1+0\mathrm{i})$$
$$= -512$$

ดังนั้น $z^{9}=-512$

ตัวอย่าง 1.20จงหาค่าของ $(-\sqrt{3}+i)^7$

วิธีทำ แปลง $-\sqrt{3}+i$ ให้อยู่ในรูปแบบเชิงขั้วดังต่อไปนี้

$$r = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + (1)^2}$$
$$= \sqrt{3+1}$$
$$= 2$$

และ $$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{-\sqrt{3}}\right)$$
$$= 150^\circ$$

นั่นคือ $-\sqrt{3}+i = 2(\cos 150^\circ + i\sin 150^\circ)$

$$(-\sqrt{3}+i)^7 = \left[2(\cos 150^\circ + i\sin 150^\circ)\right]^7$$
$$= 2^7\left[\cos\left(7\times 150\right)^\circ + i\sin\left(7\times 150\right)^\circ\right]$$
$$= 2^7\left[\cos 1050^\circ + i\sin 1050^\circ\right]$$
$$= 2^7\left[\cos(720+330)^\circ + i\sin(720+330)^\circ\right]$$
$$= 2^7\left[\cos 330^\circ + i\sin 330^\circ\right]$$
$$= 128\left[\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right]$$
$$= 64\sqrt{3} - 64i$$

ดังนั้น $(-\sqrt{3}+i)^7 = 64\sqrt{3} - 64i$

ตัวอย่าง 1.21 กำหนดให้ $z = 1+\sqrt{3i}$ จงหา z^{-5}ในรูปของ $a+bi$

วิธีทำ แปลง $z = 1+\sqrt{3i}$ ให้อยู่ในรูปแบบเชิงขั้วดังต่อไปนี้

$$r = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2}$$
$$= \sqrt{1+3}$$
$$= 2$$

และ $\theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{1}\right)$

$$= \frac{\pi}{3}$$

$\operatorname{Arg}(z) = \dfrac{\pi}{3}$

จะได้ $z = 1 + 3i = 2\left[\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right]$

นั่นคือ $z^{-5} = 2^{-5}\left[\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right]^{-5}$

$$= 2^{-5}\left[\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right]^{-5}$$

$$= \frac{1}{2^5}\left[\cos\frac{-5\pi}{3} + i\sin\frac{-5\pi}{3}\right]$$

$$= \frac{1}{2^5}\left[\cos\frac{5\pi}{3} - i\sin\frac{5\pi}{3}\right]$$

$$= \frac{1}{32}\left[\cos\frac{5\pi}{3} - i\sin\frac{5\pi}{3}\right]$$

$$= \frac{1}{32}\left[\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right]$$

$$= \frac{1}{64} + \frac{\sqrt{3}}{64}i$$

ดังนั้น $z^{-5} = \dfrac{1}{64} + \dfrac{\sqrt{3}}{64}i$

ตัวอย่าง 1.22กำหนดให้ $z_1 = 2 + 2i$ และ

$$z_2 = \sqrt{3} + i$$

จงหา $\dfrac{z_1^{15}}{z_2^{21}}$ ในรูปของ $a + bi$

วิธีทำ แปลง $z_1 = 2 + 2i$ ให้อยู่ในรูปแบบเชิงขั้วดังต่อไปนี้

$$r = \sqrt{2^2 + 2^2}$$
$$= \sqrt{4+4}$$
$$= \sqrt{8}$$
$$= 2\sqrt{2}$$

และ $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{2}{2}\right)$

$$= \frac{\pi}{4}$$

$\mathrm{Arg}(z_1) = \frac{\pi}{4}$

จะได้ $z_1 = 2\sqrt{2}\left[\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right]$

และแปลง $z_2 = \sqrt{3} + i$ ให้อยู่ในรูปแบบเชิงขั้วดังต่อไปนี้

$$r = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2}$$
$$= \sqrt{3+1}$$
$$= 2$$

และ $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$$= \frac{\pi}{6}$$

$\mathrm{Arg}(z_2) = \frac{\pi}{6}$

จะได้ $z_2 = 2\left[\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right]$

นั่นคือ $\frac{z_1^{15}}{z_2^{21}} = \frac{\left(2\sqrt{2}\right)^{15}\left[\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right]^{15}}{2^{21}\left[\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right]^{21}}$

$$= \frac{\left(2^{3/2}\right)^{15}\left[\cos\frac{15\pi}{4} + i\sin\frac{15\pi}{4}\right]}{2^{21}\left[\cos\frac{21\pi}{6} + i\sin\frac{21\pi}{6}\right]}$$

$$= \frac{2^{45/2}\left[\cos\frac{15\pi}{4} + i\sin\frac{15\pi}{4}\right]}{2^{21}\left[\cos\frac{21\pi}{6} + i\sin\frac{21\pi}{6}\right]}$$

$$= 2^{3/2}\left[\cos\left(\frac{15\pi}{4} - \frac{21\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{15\pi}{4} - \frac{21\pi}{6}\right)\right]$$

$$= 2^{3/2}\left[\cos\frac{3\pi}{12} + i\sin\frac{3\pi}{12}\right]$$

$$= 2^{3/2}\left[\cos\frac{3\pi}{12} + i\sin\frac{3\pi}{12}\right]$$

$$= 2^{3/2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$$

$$= 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$$

$$= 2 + 2i$$

ดังนั้น $\frac{z_1^{\ 15}}{z_2^{\ 21}} = 2 + 2i$

1.6 รากของจำนวนเชิงซ้อน

จำนวน w จะเรียกว่ารากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน z ถ้า $w^n = z$ และเขียนได้เป็น $w = z^{1/n}$ จากทฤษฎีบทของของเดอมัวว์ สามารถแสดงให้เห็นได้ว่าเมื่อกำหนด

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวก แล้ว

$$z^{1/n} = \left[r(\cos\theta + i\sin\theta)\right]^{1/n}$$

$$= r^{1/n}\left[\cos(\theta + 2n\pi) + i\sin(\theta + 2n\pi)\right]^{1/n}$$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มใด ๆ

$$= r^{1/n}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{m}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{m}\right)\right]$$

ซึ่งประสิทธิ์ ลิ้มบุพศิริพร (2557: 29) เราสามารถกล่าวได้ดังบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 1.14

กำหนดให้ n เป็นจำนวนนับ และ z เป็นจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ เรากล่าวว่าจำนวนเชิงซ้อน w เป็นรากที่ n ของ z ก็ต่อเมื่อ

$$w^{n} = z$$

เราเขียนแทนรากที่ n ของ z ด้วย

สำหรับการหารากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อนนั้น เกียรติสุดา นาคประสิทธิ์ (2556 : 23) ได้กล่าวไว้ในทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท1.8

กำหนดให้ $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ และ $n \geq 1$ แล้วรากที่ n ของ z มีได้ทั้งหมด n ค่าที่แตกต่างกันคือ

$$z_{k} = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right]$$

เมื่อ $k = 0,1,2,\ldots,n-1$

ตัวอย่าง 1.23 จงหารากที่ 3 ของ $8i$

วิธีทำ $8i$ เปลี่ยนให้อยู่ในรูปแบบเชิงขั้วได้ดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{0^{2} + 8^{2}} \\ &= \sqrt{64} \\ &= 8 \end{aligned}$$

และ $$\theta = \frac{\pi}{2}$$

จะได้ $$8i = 8\left[\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right]$$

จากทฤษฎีบท 1.8 ได้ว่า รากที่สามของ $8i$ มีทั้งหมด 3 รากที่แตกต่างกันได้แก่

$$z_k = \sqrt[3]{8}\left[\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}\right)\right] \text{ เมื่อ } k=0,1,2$$

ดังนั้นรากที่สามทั้งหมดของ $8i$ คือ

$$z_0 = \sqrt[3]{8}\left[\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2(0)\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2(0)\pi}{3}\right)\right]$$

$$=2\left[\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}}{3}\right)\right]$$

$$=2\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$=2\left[\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ\right]$$

$$=2\left[\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right]$$

$$=\sqrt{3}+i$$

$$z_1 = \sqrt[3]{8}\left[\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2(1)\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2(1)\pi}{3}\right)\right]$$

$$=2\left[\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}+\frac{4\pi}{2}}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}+\frac{4\pi}{2}}{3}\right)\right]$$

$$=2\left[\cos\left(\frac{\frac{5\pi}{2}}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\frac{5\pi}{2}}{3}\right)\right]$$

$$= 2\left[\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right]$$

$$= 2\left[\cos 150^\circ + i\sin 150^\circ\right]$$

$$= 2\left[-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right]$$

$$= -\sqrt{3} + i$$

$$z_2 = \sqrt[3]{8}\left[\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2(2)\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2(2)\pi}{3}\right)\right]$$

$$= 2\left[\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} + \frac{8\pi}{2}}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} + \frac{8\pi}{2}}{3}\right)\right]$$

$$= 2\left[\cos\left(\frac{\frac{9\pi}{2}}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{9\pi}{2}}{3}\right)\right]$$

$$= 2\left[\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right]$$

$$= 2\left[\cos 270^\circ + i\sin 270^\circ\right]$$

$$= 2\left[0 - i\right]$$

$$= -2i$$

ดังนั้นรากที่สามทั้ง 3 รากของ $8i$ คือ $\sqrt{3} + i, -\sqrt{3} + i$ และ $-2i$

ตัวอย่าง 1.24จงหารากที่ 2 ของ $-8+8\sqrt{3}i$

วิธีทำ $-8+8\sqrt{3}i$ เปลี่ยนให้อยู่ในรูปแบบเชิงขั้วได้ดังต่อไปนี้

$$r=\sqrt{(-8)^2+(8\sqrt{3})^2}$$
$$=\sqrt{64+192}$$
$$=\sqrt{256}$$
$$=16$$

และ $$\theta=\tan^{-1}\left(\frac{8\sqrt{3}}{-8}\right)$$
$$=\tan^{-1}(-\sqrt{3})$$

นั่นคือ $$\theta=120^\circ=\frac{2\pi}{3}$$

จะได้ $$-8+8\sqrt{3}i=16\left[\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right]$$

จากทฤษฎีบท 1.8 ได้ว่า รากที่สองของ $8i$ มีทั้งหมด 2 รากที่แตกต่างกันได้แก่

$$z_k=\sqrt[2]{16}\left[\cos\left(\frac{\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{2}\right)\right]$$ เมื่อ $k=0,1$

ดังนั้นรากที่สามทั้งหมดของ $8i$ คือ

$$z_0=\sqrt[2]{16}\left[\cos\left(\frac{\frac{2\pi}{3}+2(0)\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\frac{2\pi}{3}+2(0)\pi}{2}\right)\right]$$
$$=4\left[\cos\left(\frac{\frac{2\pi}{3}}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\frac{2\pi}{3}}{2}\right)\right]$$
$$=4\left[\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right]$$
$$=4\left[\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ\right]$$

$$= 4\left[\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right]$$

$$= 2+2\sqrt{3}i$$

$$z_1 = \sqrt[2]{16}\left[\cos\left(\frac{\frac{2\pi}{3}+2(1)\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\frac{2\pi}{3}+2(1)\pi}{2}\right)\right]$$

$$= 4\left[\cos\left(\frac{\frac{2\pi}{3}+\frac{6\pi}{3}}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\frac{2\pi}{3}+\frac{6\pi}{3}}{2}\right)\right]$$

$$= 4\left[\cos\left(\frac{\frac{8\pi}{3}}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\frac{8\pi}{3}}{2}\right)\right]$$

$$= 4\left[\cos\left(\frac{8\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{8\pi}{6}\right)\right]$$

$$= 4\left[\cos 240^\circ + i\sin 240^\circ\right]$$

$$= 4\left[-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right]$$

$$= -2-2\sqrt{3}i$$

ดังนั้น รากที่สองทั้ง 2 รากของ $-8+8\sqrt{3}i$ คือ $2+2\sqrt{3}i$ และ $-2-2\sqrt{3}i$

ตัวอย่าง 1.25จงหา z ทั้งหมดที่ทำให้ $z^5 = -1$

วิธีทำ $-1 = -1+0i$ เปลี่ยนให้อยู่ในรูปแบบเชิงขั้วได้ดังต่อไปนี้

$$r = \sqrt{(-1)^2+(0)^2}$$

$$= \sqrt{1}$$

$$= 1$$

และ $\theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{0}{-1}\right)$

นั่นคือ $\theta = 180^\circ = \pi$

จะได้ $-1 + 0i = \left[\cos\pi + i\sin\pi\right]$

จากทฤษฎีบท 1.8 ได้ว่า รากที่ห้าของ $-1 + 0i$ มีทั้งหมด 5 รากที่แตกต่างกันได้แก่

$$z_k = \sqrt[5]{1}\left[\cos\left(\frac{\pi + 2k\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi + 2k\pi}{5}\right)\right] \text{ เมื่อ } k = 0,1,2,3,4$$

ดังนั้นรากที่ห้าทั้งหมดของ $-1 + 0i$ คือ

$$z_0 = \sqrt[5]{1}\left[\cos\left(\frac{\pi + 2(0)\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi + 2(0)\pi}{5}\right)\right]$$

$$= \cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}$$

$$z_1 = \sqrt[5]{1}\left[\cos\left(\frac{\pi + 2(1)\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi + 2(1)\pi}{5}\right)\right]$$

$$= \cos\frac{3\pi}{5} + i\sin\frac{3\pi}{5}$$

$$z_2 = \sqrt[5]{1}\left[\cos\left(\frac{\pi + 2(2)\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi + 2(2)\pi}{5}\right)\right]$$

$$= \cos\frac{5\pi}{5} + i\sin\frac{5\pi}{5}$$

$$= \cos\pi + i\sin\pi$$

$$= -1 + 0i$$

$$= -1$$

$$z_3 = \sqrt[5]{1}\left[\cos\left(\frac{\pi + 2(3)\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi + 2(3)\pi}{5}\right)\right]$$

$$= \cos\frac{7\pi}{5} + i\sin\frac{7\pi}{5}$$

$$z_4 = \sqrt[5]{1}\left[\cos\left(\frac{\pi + 2(4)\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi + 2(4)\pi}{5}\right)\right]$$
$$= \cos\frac{9\pi}{5} + i\sin\frac{9\pi}{5}$$

ดังนั้นดังนั้นค่า z ทั้งหมดที่ทำให้ $z^5 = -1$ คือ $\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}$, $\cos\frac{3\pi}{5} + i\sin\frac{3\pi}{5}$, -1, $\cos\frac{7\pi}{5} + i\sin\frac{7\pi}{5}$ และ $\cos\frac{9\pi}{5} + i\sin\frac{9\pi}{5}$

ตัวอย่าง 1.26จงหารากของสมการ $x^3 + 1 = 0$

วิธีทำ จาก $x^3 + 1 = 0$

ดังนั้น $x^3 = -1$

$-1 = -1 + 0i$ เปลี่ยนให้อยู่ในรูปแบบเชิงขั้วได้ดังต่อไปนี้

$$r = \sqrt{(-1)^2 + (0)^2}$$
$$= \sqrt{1}$$
$$= 1$$

และ $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{0}{-1}\right)$

นั่นคือ $\theta = 180^\circ = \pi$

จะได้ $-1 + 0i = \left[\cos\pi + i\sin\pi\right]$

จากทฤษฎีบท 1.8 ได้ว่า รากที่สามของ $-1 + 0i$ มีทั้งหมด 3 รากที่แตกต่างกันได้แก่

$$z_k = \sqrt[3]{1}\left[\cos\left(\frac{\pi + 2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi + 2k\pi}{3}\right)\right] \text{ เมื่อ } k = 0,1,2$$

ดังนั้นรากที่สามทั้งหมดของ $-1 + 0i$ คือ

$$z_0 = \sqrt[3]{1}\left[\cos\left(\frac{\pi + 2(0)\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi + 2(0)\pi}{3}\right)\right]$$
$$= \left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$z_1 = \sqrt[3]{1}\left[\cos\left(\frac{\pi + 2(1)\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi + 2(1)\pi}{3}\right)\right]$$

$$= \left[\cos\left(\frac{3\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{3}\right)\right]$$

$$= -1 + 0i$$

$$= -1$$

$$z_1 = \sqrt[3]{1}\left[\cos\left(\frac{\pi + 2(2)\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi + 2(2)\pi}{3}\right)\right]$$

$$= \left[\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3}i$$

ดังนั้น รากของสมการ $x^3 + 1 = 0$ คือ $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -1$ หรือ $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

1.7 สรุปท้ายบทที่ 1

การศึกษาระบบจำนวนเชิงซ้อนนั้นได้เริ่มจากบางสามการไม่สามารหาจำนวนจริง ที่สอดคล้องกับสมการ เช่นสมการ $x^2 + 1 = 0$ จะเห็นว่ารากที่สองของจำนวนจริงลบไม่มีในระบบจำนวนจริง ถ้าต้องการให้จำนวนจริงให้ครอบคลุมจำนวนซึ่งเป็นรากที่สองของจำนวนจริงลบด้วย นักคณิตศาสตร์ได้ขยายเซตของจำนวนจริงออกไปเป็นเซตอีกเซตหนึ่งเรียกว่าจำนวนเชิงซ้อนนั่นเอง ซึ่งจำนวนเชิงซ้อนเป็นจำนวนที่เขียนในรูป $z = a + bi$ สำหรับจำนวนเชิงซ้อนในรูปแบบนี้นั่นมีความสะดวกในการบวกและการลบ แต่สำหรับการคูณและการหารจะมีความยุ่งยากจึงมีการเปลี่ยนจำนวนเชิงซ้อนให้อยู่ในรูปแบบเชิงขั่ว $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ แล้วการคำนวนผลคูณและผลหารจะมีความสะดวกมากยิ่งขึ้น ยิ่งไปกว่านั้น การเขียนจำนวนเชิงซ้อนในรูปแบบของพิกัดเชิงขั่วยังมีความสะดวกในการยกกำลังและหาค่าราก

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 1

1. จงหาค่า x และ y

   1.1 $x+3-2i=5+yi$
   1.2 $x-(y-2)i=7+4i$
   1.3 $3+x+(y-1)i=5-6i$
   1.4 $3+(y-1)i=x-6i$
   1.5 $4+(2y+1)i=2x-i$

2. จงหาค่าต่อไปนี้

   2.1 $(3-2i)+(5+4i)$
   2.2 $(1+2i)+(7+2i)$
   2.3 $(3-2i)-(5+4i)$
   2.4 $(8+2i)-(6+3i)$
   2.5 $(1-2i)(5+3i)$
   2.6 $(1+i)(-2+3i)$
   2.5 $\dfrac{3-2i}{5+4i}$
   2.6 $\dfrac{1+2i}{4+3i}$

3. จงแปลงจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปแบบพิกัดเชิงขั้ว แล้วเขียนกราฟของแต่ละจำนวนลงในระนาบเชิงซ้อน

   3.1 $4+4i$
   3.2 $2-2\sqrt{3}i$
   3.3 $\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$
   3.4 $-\sqrt{2}+\sqrt{2}i$
   3.5 $-\sqrt{3}+i$
   3.6 $-\sqrt{3}i$
   3.7 $2+4i$
   3.8 $-1+\sqrt{3}i$
   3.9 $2+i$

4. กำหนดให้ $z_1=2-i$ และ $z_2=1-3i$ จงหา

   4.1 $|z_1|$
   4.2 $|z_1z_2|$
   4.3 $|z_1\overline{z}_2|$
   4.4 $|\overline{z}_1z_2|$
   4.5 $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|$

5. จงเขียนจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูป $a+bi$

5.1 $z=12\left[\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right]$

5.2 $z=7\left[\cos 0+i\sin 0\right]$

5.3 $z=8\left[\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right]$

5.4 $z=3\left[\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right]$

5.5 $z=4\left[\cos 270^\circ+i\sin 270^\circ\right]$

5.6 $z=6\left[\cos 135^\circ+i\sin 135^\circ\right]$

6. จงใช้ทฤษฎีของเดอมัวร์ หาค่าต่อไปนี้

6.1 $\left[4\left(\cos 50^\circ+i\sin 50^\circ\right)\right]^3$

6.2 $\left[2\left(\cos 5^\circ+i\sin 5^\circ\right)\right]^{30}$

6.3 $(-1-i)^5$

6.4 $(-3+3i)^4$

6.5 $(-1+\sqrt{3}i)^8$

6.6 $(-1+\sqrt{3}i)^8$

7. จงหาค่ารากของจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ แล้วเขียนคำตอบในรูปแบบทางพีชคณิต

7.1 รากที่ 4 ของ $16\left[\cos 200^\circ+i\sin 200^\circ\right]$

7.2 รากที่ 4 ของ i

7.3 รากที่ 4 ของ $-2\sqrt{3}-2i)$

7.4 รากที่ 5 ของ $32\left[\cos 305^\circ+i\sin 305^\circ\right]$

7.5 รากที่ 6 ของ -64

8. จงหารากของสมการต่อไปนี้

8.1 $x^6+1=0$

8.2 $x^5-1=0$

8.3 $x^4-16=0$

9. จงพิสูจน์ว่า $\dfrac{1}{r(\cos\theta+i\sin\theta)}=\dfrac{1}{r}\left[\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\right]$

10. ให้ $z=-1+i$ จงหาค่า z^2, z^3, z^4, z^6 และ z^8 แล้วเขียนกราฟของจำนวนเหล่านั้นลงบนระนาบเชิงซ้อนเดียวกัน

บทที่ 2
ฟังก์ชันวิเคราะห์

ในบทที่ผ่านมานั้นได้ศึกษาเกี่ยวกับแนวคิดพื้นฐานของจำนวนเชิงซ้อน คุณสมบัติพีชคณิตการเรียนจำนวนเชิงซ้อนในรูปแบบเชิงขั้วและการดำเนินการแบบทวิภาค ได้แก่การบวก ลบ คูณ และการหาร รวมถึงการยกกำลัง และการหาค่าราก สำหรับในบทนี้จะมุ่งศึกษาเกี่ยวกับฟังก์ชันเชิงซ้อน คุณสมบัติที่สำคัญ ได้แก่ ลิมิต ความต่อเนื่อง และการหาอนุพันธ์ค่าเชิงซ้อน อีกทั้งนำเสนอบทนยาม ของ ฟังก์ชันเชิงซ้อน อีกทั้งนำเสนอนิยามของฟังก์ชันวิเคราห์ และทฤษฎีที่เกี่ยวข้องโดยฟังก์ชันดังกล่าวไม่เพียงแต่มีบทบาทสำคัฟญในการวิเคราห์ฟังก์ชันเชิงซ้อน แต่สามารถนำไปประยุกต์เนื้อหาในบทนี้และบทถัดไป ซึ่งจะพบว่าฟังก์ชันเชิงซ้อนมีคุณสมบัติบางประการที่ฟังก์ชันค่าจริงไม่มี หรือในทำนองกลับกัน ฟังก์ชันค่าจริงมีสมบัติบางประการที่ฟังก์ชันเชิงซ้อนไม่มี และสำหรับบทนี้แบ่งเนื้อหาออกเป็น 7.เรื่อง ได้แก่ ฟังก์ชันของตัวแปรเชิงซ้อน ฟังก์ชันตัวแปรเชิงซ้อนเบื้องต้น การส่ง เซตในระนาบเชิงซ้อน ลิมิตและความต่อเนื่อง อนุพันธ์ของฟังก์ชันและฟังก์ชันวิเคราะห์ และฟังก์ชันวิเคราะห์และสมการโคชี-รีมันน์

2.1 ฟังก์ชันของตัวแปรเชิงซ้อน

ตัวแปรเชิงซ้อน คือตัวแปรที่มีค่าเป็นจำนวนเชิงซ้อน โดยทั่วไปจะใช้ตัว z ซึ่งในที่นี้ $z = x + yi$ เมื่อ x และ y เป็นตัวแปรจริง ดังนั้นฟังก์ชันของตัวแปรเชิงซ้อนคือฟังก์ชันที่ส่งเซตย่อยของจำนวนเชิงซ้อนไปยังเซตของจำนวนเชิงซ้อน และใช้ z เป็นตัวแปร เนื่องจาก $z = x + yi$ เมื่อ x และ y เป็นตัวแปรจริงดังนั้นทุก ๆ ฟังก์ชันของตัวแปรเชิงซ้อนเมื่อแทน z ด้วย $z = x + yi$ แล้วจะสามารถแยกเป็นส่วนจริง และส่วนจินตภาพ ซึ่งทั้งสองส่วนเป็นฟังก์ชันค่าจริงของ x และ y นั่นคือ ฟังก์ชันของตัวแปรเชิงซ้อนสามารถเขียนให้อยู่ในรูป $f(x+yi) = u(x,y) + iv(x,y)$ และสำหรับนิยามของฟังก์ชันนั้น วัชรีกาญจน์ กีรติ (2551 : 11) ได้ให้บทนิยามไว้ดังนี้

บทนิยาม 2.1

ฟังก์ชัน คือ ความสัมพันธ์ซึ่งในสองคู่อันดับใด ๆ ของความสัมพันธ์นั้น ถ้ามีสมาชิกตัวหน้าเท่ากันแล้ว สมาชิกตัวหลังต้องไม่ต่างกัน สามารถเขียนด้วยภาษาทางตรรกศาสตร์ได้ดังนี้ f เป็นฟังก์ชัน ก็ต่อเมื่อ ถ้า $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in f$ และ $x_1 = x_2$ แล้ว $y_1 = y_2$ ถ้า f เป็นฟังก์ชัน $(x,y) \in f$ แล้วเราจะกล่าวว่า y เป็นค่าของของฟังก์ชัน f ที่ x ค่าของ เขียนแทนด้วย $f(x)$ อ่านว่า เอฟออฟเอ็กซ์

จากบทนิยาม ให้ $f : A \to B$ เป็นฟังก์ชันจากเซต A ไปยังเซต B และ $a \in A, b \in B$ เรียก b ว่าภาพของ a ภายใต้ f หรือเป็นค่า ของ f ที่ a ถ้า f กำหนดให้สมาชิก a ในเซต A คู่กับสมาชิก b ในเซต B แล้วเขียนแทนด้วย $b = f(a)$ เรียนกเซตของข้อมูลเข้าทั้งหมดของ f ว่า โดเมน ของ f เขียนแทนด้วย $Dom\, f$ และเรียกเซตข้อมูลออกทั้งหมดของ f ว่าเรนจ์ ของ f เขียนแทนด้วย $Range\, f$ สำหรับการหาโดเมนและเรจน์ของฟังก์ชันแสดงได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2.1 กำหนดให้ N เป็นเซตของจำนวนนับ

และ $f = \{(x,y) : x, y \in N, x + 3y = 15\}$

ดังนั้น $f = \{(12,1), (9,2), (6,3), (3,4)\}$

ได้ $\quad Dom\, f = \{12, 9, 6, 3\}$

และ $\quad Range\, f = \{1, 2, 3, 4\}$

ตัวอย่าง 2.2 จงหา $Dom\, f$ และ $Range\, f$ เมื่อกำหนดให้

$$f = \left\{(x,y) : x, y \in R, y = \frac{1}{x-3}\right\}$$

วิธีทำ พิจารณาสมการ $y = \dfrac{1}{x-3}$

จะเห็นว่า ถ้า $x = 3$ แล้วจะทำให้ $y = \dfrac{1}{0}$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

ดังนั้น จำนวนจริง 3 จึงไม่อยู่ในโดเมนของ f ส่วนจำนวนจริงอื่น ๆ จะอยู่ในโดเมนของ r

$$Dom\, f = \{x : x \in R, x \neq 3\} = (-\infty, 3) \cup (3, \infty)$$

และจาก $y = \dfrac{1}{x-3}$

เขียน x ในเทอมของ y ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} y(x-3) &= 1 \\ yx - 3y &= 1 \\ xy &= 1 + 3y \\ x &= \frac{1+3y}{y} \end{aligned}$$

จะเห็นว่าถ้า $y = 0$ แล้วจะไม่สามารถหาค่าของ x ได้ ดังนั้น

$$Range\, f = \{y : y \in R, y \neq 0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$$

ในการนิยามฟังชันของตัวแปรเชิงซ้อนก็เช่นเดียวกบฟังก์ชันของตัวแปรจริงที่เราได้เคยศึกษาผ่านมาแล้วนั้น ดังนั้นความสัมพันธ์จาก $\mathbb{C}$ ไปยัง $\mathbb{C}$ เมื่อ $\mathbb{C}$ เป็นเซตของจำนวนเชิงซ้อน จะเรียกว่าเป็นฟังก์ชันของตัวแปรเชิงซ้อนเมื่อ z เป็นตัวแปรกอิสระ และ w เป็นตัวแปรตาม จะเขียนฟังก์ชันอยู่ในรูป $w = f(z)$ สำหรับบทนิยามของฟังก์ชันค่าเชิงซ้อน เกียรติสุดา นาคประสิทธิ์ (2556 : 38) ได้ให้ไว้ดังนี้

บทนิยาม 2.2

ฟังก์ชันค่าเชิงซ้อน f คือฟังก์ชันที่มีโดเมนและเรนจ์เป็นเซตย่อยของเซตของจำนวนเชิงซ้อน $\mathbb{C}$ นั่นคือ $f : S \to \mathbb{C}$ เมื่อ $S \subseteq \mathbb{C}$

ถ้า f เป็นฟังก์ชันค่าเชิงซ้อนและ $z = x + yi$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนแล้วสามารถเขียนให้ได้อยู่ในรูปแบบใดรูปแบบหนึ่งต่อไปนี้

$$
\begin{aligned}
f(z) &= u(z) + iv(z) \\
f(x,y) &= u(x,y) + iv(x,y) \\
f(x,y) &= \big(u(x,y), v(x,y)\big) \\
f(re^{i\theta}) &= u(re^{i\theta}) + iv(re^{i\theta}) \\
f(re^{i\theta}) &= \big(u(re^{i\theta}), iv(re^{i\theta})\big)
\end{aligned}
$$

เรียก u ว่าส่วนจริงของ f และ v เรียกว่าส่วนจินตภาพของ f

จากบทนิยามจะได้ว่าตัวแปรเชิงซ้อน คือตัวแปรที่อยู่ในรูปของ z หรือ $z = x + yi$ เมื่อ x และ y เป็นตัวแปรจริง ส่วนฟังก์ชันของตัวแปรเชิงซ้อน คือ ฟังก์ชันจากเซตของจำนวนเชิงซ้อนไปยังเซตย่อยของเซตของจำนวนเชิงซ้อนและใช้ z เป็นตัวแปร เช่น

$$f(z) = z^2 - 2z - 15$$

$$\mathrm{g}(z) = \sin 2z$$

$$h(z) = \frac{z}{(z-1)(z-3\mathrm{i})}$$

ทุก ๆ ฟังก์ชันของตัวแปรเชิงซ้อนเมื่อแทน z ด้วย $z = x + yi$ แล้วจะสามารถแยกเป็นส่วนจริง และส่วนจินตภาพซึ่งทั้งสองส่วนเป็นฟังก์ชันของ x และ y นั่นคือฟังก์ชัยตัวแปรเชิงซ้อนสามารถเขียนในรูป $f(z) = u(x,y) + v(x,y)i$ เรียกรูปแบบนี้ว่างฟังก์ชันค่าเชิงซ้อน

ตัวอย่าง 2.3 กำหนด $f(z) = z^2 - 1$ จงหาค่าของ $f(3-i)$

วิธีทำ จาก $f(z) = z^2 - 1$

จะได้
$$\begin{aligned} f(3-i) &= (3-i)^2 - 1 \\ &= 9 - 6i + i^2 - 1 \\ &= 9 - 6i - 1 - 1 \\ &= 7 - 6i \end{aligned}$$

ดังนั้น $f(3-i) = 7 - 6i$

ตัวอย่าง 2.4 กำหนด $f(z) = z^2 + 3z$ จงหาค่าของ $f(2-3i)$

วิธีทำ จาก $f(z) = z^2 + 3z$

จะได้
$$\begin{aligned} f(2-3i) &= (2-3i)^2 + 3(2-3i) \\ &= 4 - 12i - 9 + 6 - 9i \\ &= 1 - 21i \end{aligned}$$

ดังนั้น $f(2-3i) = 1 - 21i$

ต่อไปจะกล่าวถึงฟังก์ชันค่าเชิงเดี่ยวและฟังก์ชันหลายค่า ซึ่ง สมถวิล ขันเขตต์ (2558 : 22) ได้ให้บทนิยามไว้ดังต่อไปนี้

บทนิยาม 2.3

ถ้า z สมนัยกับ w เพียง 1 ค่าเรียก w เป็น**ฟังก์ชันค่าเชิงเดี่ยว** (single valued function) ของ z และถ้า z สมนัยกับ w มากกว่า 1 ค่าเรียก w เป็น**ฟังก์ชันหลายค่า** หรือฟังก์ชันพหุคูณ (multiple valued function) ของ z

ตัวอย่าง 2.5 จงพิจารณาฟังก์ชันต่อไปนี้ว่าเป็นฟังก์ชันพหุคูณหรือฟังกชันค่าเชิงเดี่ยว

1. $w = f(z) = z - 2$
2. $w = f(z) = z^{1/2}$

1. $w = f(z) = z - 2$ เป็นฟังก์ชันค่าเชิงเดี่ยว เพราะว่าแทน z ด้วยจำวนเชิงซ้อนใด ๆจะได้ค่าของ w เพียงค่าเดียว

2. $w = f(z) = z^{1/2}$ เป็นฟังก์ชันพหุคูณ เพราะว่าแทน $z = 1$ จะได้ $w = f(1) = 1^{1/2}$ ซึ่งมีค่าเป็น 1 กับ -1

ตัวอย่าง 2.6 ให้ $w = f(z) = 2z + 1$ จงแสดงว่า w เป็นฟังก์ชันค่าเชิงเดี่ยวเมื่อ $z = 2 - 3i$

วิธีทำ จาก $w = f(z) = 2z + 1$ และ $z = 2 - 3i$

จะได้

$$\begin{aligned} w &= f(2-3i) \\ &= 2(2-3i)+1 \\ &= 4-6i+1 \\ &= 5-6i \end{aligned}$$

ดังนั้น $w = 2z + 1$ เป็นค่าเชิงเดี่ยว

ตัวอย่าง 2.7 ให้ $w = f(z) = \sqrt{z}$ จงแสดงว่า w เป็นฟังก์ชันค่าพหุคูณ เมื่อ $z = -8 + 8\sqrt{3}i$

วิธีทำ เปลี่ยน $z = -8 + 8\sqrt{3}i$ ให้อยู่ในรูปแบบเชิงขั้วได้ดังต่อไปนี้

$$r = \sqrt{(-8)^2 + (8\sqrt{3})^2} = \sqrt{64+192} = \sqrt{256} = 16$$

และ $$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{8\sqrt{3}}{-8}\right) = \tan^{-1}(-\sqrt{3})$$

นั่นคือ $$\theta = 120^\circ = \frac{2\pi}{3}$$

จะได้ $$-8 + 8\sqrt{3}i = 16\left[\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right]$$

จาก $w = f(z) = \sqrt{z}$ และ $z = -8 + 8\sqrt{3}i$

จะได้ $$w = f(-8 + 8\sqrt{3}i)$$

$$= \sqrt{-8 + 8\sqrt{3}i}$$

$$= \sqrt{16\left[\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right]}$$

หรือ $$w_k = \sqrt{16\left[\cos\left(\frac{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi}{2}\right)\right]}$$ เมื่อ $k = 0,1$

หรือ $$w_k = 4\cos\left(\frac{2\pi + 6k\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi + 6k\pi}{12}\right)$$

นั่นคือค่าของ w มีสองค่าคือ w_0 และ w_1 ดังนี้

$$w_0 = 4\left[\cos\left(\frac{2\pi + 6(0)\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi + 6(0)\pi}{12}\right)\right]$$

$$= 4\left[\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right]$$

$$= 4\left[\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ\right]$$

$$= 4\left[\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right]$$

$$= 2\sqrt{3} + 2i$$

และ

$$w_1 = 4\left[\cos\left(\frac{2\pi + 6(1)\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi + 6(1)\pi}{12}\right)\right]$$

$$= 4\left[\cos\left(\frac{8\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{8\pi}{12}\right)\right]$$

$$= 4\left[\cos 120^\circ + i\sin 120^\circ\right]$$

$$= 4\left[-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right]$$

$$= -2\sqrt{3} + 2i$$

ดังนั้น ฟังก์ชัน $w = \sqrt{z}$ เมื่อ $z = -8 + 8\sqrt{3}i$ เป็นฟังก์ชันพหุคูณ

ถ้า f เป็นฟังก์ชันค่าเชิงซ้อนและ $z = x + yi$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนแล้วสามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบ $f(z) = u(x,y) + v(x,y)i$ ได้เรียกรูปแบบนี้ว่างฟังก์ชันค่าเชิงซ้อน สำหรับการเขียนให้อยู่ในรูปฟังก์ชันค่าเชิงซ้อนนั้นสามารถทำได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2.8 กำหนดให้ $f(z) = 3z^2 - z + 4$ จงแสดงว่า $f(z)$ เป็นฟังก์ชันค่าเชิงซ้อน

วิธีทำ จากฟังก์ชันที่กำหนดให้ แทน $z = x + yi$

จะได้

$$\begin{aligned} f(z) &= 3(x+yi)^2 - (x+yi) + 4 \\ &= 3(x^2 + 2xyi - y^2) - (x+yi) + 4 \\ &= 3x^2 + 6xyi - 3y^2 - x - yi + 4 \\ &= 3x^2 - 3y^2 - x + 4 + 6xyi - yi \\ &= (3x^2 - 3y^2 - x + 4) + (6xy - y)i \end{aligned}$$

จะเห็นว่า $f(z)$ สามารถเขียนให้อยู่ในรูป $f(z) = u(x,y) + v(x,y)i$

เมื่อ $u(x,y) = 3x^2 - 3y^2 - x + 4$ และ $v(x,y) = 6xy - y$

ดังนั้น $f(z) = 3z^2 - z + 4$ เป็นฟังก์ชันค่าเชิงซ้อน

ในทางกลับกันเมื่อกำหนดฟังก์ชันค่าเชิงซ้อน $f(z) = u(x,y) + v(x,y)i$ เราสามารถเปลี่ยนให้อยู่ในรูปฟังก์ชันตัวแปรเชิงซ้อนได้ โดยอาศัยความสัมพันธ์ดังนี้

$$z = x + yi \quad \text{และ} \quad \overline{z} = x - yi$$

จะได้ $$x = \frac{z + \overline{z}}{2} \quad \text{และ} \quad y = \frac{z - \overline{z}}{2i}$$

แสดงได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2.9 กำหนดให้ $f(z)=(x^2-y^2)+2xyi$ และ $z=x+yi$ จงเขียน $f(z)$ ในรูปฟังก์ชันตัวแปรเชิงซ้อน

วิธีทำ จาก $f(z)=(x^2-y^2)+2xyi$

แทน $x=\dfrac{z+\overline{z}}{2}$ และ $y=\dfrac{z-\overline{z}}{2i}$ ลงใน $f(z)$

จะได้
$$
\begin{aligned}
f(z) &= \left[\left(\frac{z+\overline{z}}{2}\right)^2-\left(\frac{z-\overline{z}}{2}\right)^2\right]+2\left(\frac{z+\overline{z}}{2}\right)\left(\frac{z-\overline{z}}{2}\right)i \\
&= \left[\left(\frac{z^2+2z\overline{z}+\overline{z}^2}{4}\right)-\left(\frac{z^2-2z\overline{z}+\overline{z}^2}{-4}\right)\right]+2\left(\frac{z+\overline{z}}{2}\right)\left(\frac{z-\overline{z}}{2i}\right)i \\
&= \left(\frac{z^2+2z\overline{z}+\overline{z}^2}{4}\right)+\left(\frac{z^2-2z\overline{z}+\overline{z}^2}{4}\right)+2\left(\frac{z+\overline{z}}{2}\right)\left(\frac{z-\overline{z}}{2i}\right)i \\
&= \frac{(z^2+2z\overline{z}+\overline{z}^2)+(z^2-2z\overline{z}+\overline{z}^2)}{4}+\left(\frac{(z+\overline{z})(z-\overline{z})}{2}\right) \\
&= \frac{2z^2+2\overline{z}^2}{4}+\frac{z^2-\overline{z}^2}{2} \\
&= \frac{2z^2+2\overline{z}^2}{4}+\frac{2z^2-2\overline{z}^2}{4} \\
&= \frac{2z^2+2\overline{z}^2+2z^2-2\overline{z}^2}{4} \\
&= \frac{4z^2}{4} \\
&= z^2
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $f(z)=z^2$ เป็นฟังก์ชันตัวแปรเชิงซ้อน

ตัวอย่าง 2.10 กำหนดให้ $f(z)=(2xy-1)-(x^2-y^2)i$ และ $z=x+yi$ จงเขียน $f(z)$ ในรูปฟังก์ชันตัวแปรเชิงซ้อน

วิธีทำ จาก $f(z)=(2xy-1)+(x^2-y^2)i$

แทน $x=\dfrac{z+\overline{z}}{2}$ และ $y=\dfrac{z-\overline{z}}{2i}$ ลงใน $f(z)$

จะได้ $$f(z)=\left[2\left(\frac{z+\overline{z}}{2}\right)\left(\frac{z-\overline{z}}{2i}\right)-1\right]-\left[\left(\frac{z+\overline{z}}{2}\right)^2-\left(\frac{z-\overline{z}}{2i}\right)^2\right]i$$

$$=\left[\frac{z^2-\overline{z}^2}{2i}-1\right]-\left[\left(\frac{z^2+2z\overline{z}+\overline{z}^2}{4}\right)-\left(\frac{z^2-2z\overline{z}+\overline{z}^2}{-4}\right)\right]i$$

$$=\left[\frac{z^2-\overline{z}^2}{2i}-1\right]-\left[\left(\frac{z^2+2z\overline{z}+\overline{z}^2}{4}\right)-\left(\frac{z^2-2z\overline{z}+\overline{z}^2}{-4}\right)\right]i$$

$$=\left[\frac{z^2-\overline{z}^2}{2i}-1\right]-\left[\left(\frac{z^2+2z\overline{z}+\overline{z}^2}{4}\right)+\left(\frac{z^2-2z\overline{z}+\overline{z}^2}{4}\right)\right]i$$

$$=\left[\frac{z^2-\overline{z}^2}{2i}-1\right]-\left[\left(\frac{z^2+2z\overline{z}+\overline{z}^2+z^2-2z\overline{z}+\overline{z}^2}{4}\right)\right]i$$

$$=\left[\frac{z^2-\overline{z}^2}{2i}-1\right]-\left(\frac{2z^2+2\overline{z}^2}{4}\right)i$$

$$=\left[\frac{z^2-\overline{z}^2}{2i}-1\right]-\left(\frac{z^2+\overline{z}^2}{2}\right)i$$

$$=-1+\frac{z^2-\overline{z}^2}{2i}-\left(\frac{z^2+\overline{z}^2}{2}\right)i$$

$$=-1+\left(\frac{z^2-\overline{z}^2}{-2}\right)i-\left(\frac{z^2+\overline{z}^2}{2}\right)i$$

$$=-1-\left(\frac{z^2-\overline{z}^2}{2}\right)i-\left(\frac{z^2+\overline{z}^2}{2}\right)i$$

$$=-1-\left(\frac{z^2-\overline{z}^2}{2}+\frac{z^2+\overline{z}^2}{2}\right)i$$

$$=-1-\left(\frac{-2z^2}{2}\right)i$$

$$=-1+z^2i$$

ดังนั้น $f(z)=-1+z^2i$ เป็นฟังก์ชันตัวแปรเชิงซ้อน

ในบางฟังก์ชันค่าเชิงซ้อนอาจไม่สามารถจัดพจน์ทั้งหมดของฟังก์ชันค่าเชิงซ้อนในรูปของ z ล้วน ๆ ได้ดังนั้นเราอาจต้องเขียนบางพจน์ให้อยู่ในรูปอื่น ๆ ของ z ได้แก่ $\mathrm{Re}(z) = x$ หรือ $\mathrm{Im}(z) = y$ หรือ $z = x + yi$ แสดงได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

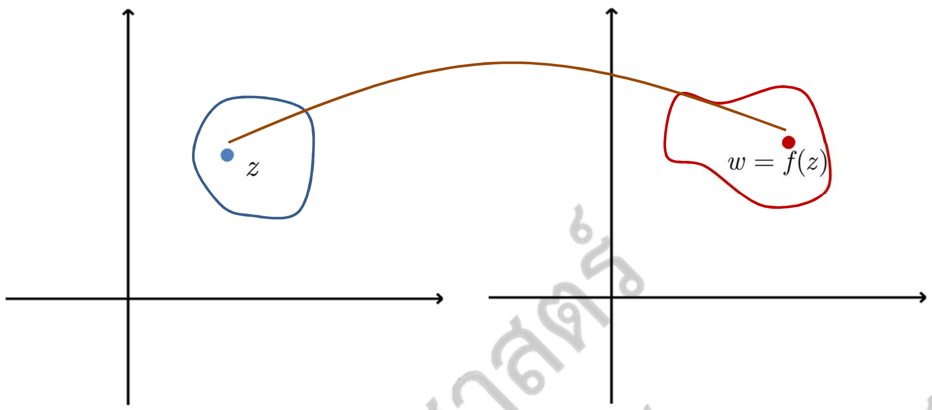
ตัวอย่าง 2.11 ให้ $f(z) = x + 5yi$ จงเขียน $f(z)$ ในรูปฟังก์ชันตัวแปรเชิงซ้อน

วิธีทำ จาก
$$\begin{aligned} f(z) &= x + 5yi \\ &= x + 5yi + 5x - 5x \\ &= -4x + 5x + 5yi \\ &= -4x + 5(x + yi) \\ &= -4\,\mathrm{Re}(z) + 5z \end{aligned}$$

ดังนั้น $f(z) = -4\,\mathrm{Re}(z) + 5z$ เป็นฟังก์ชันตัวแปรเชิงซ้อน

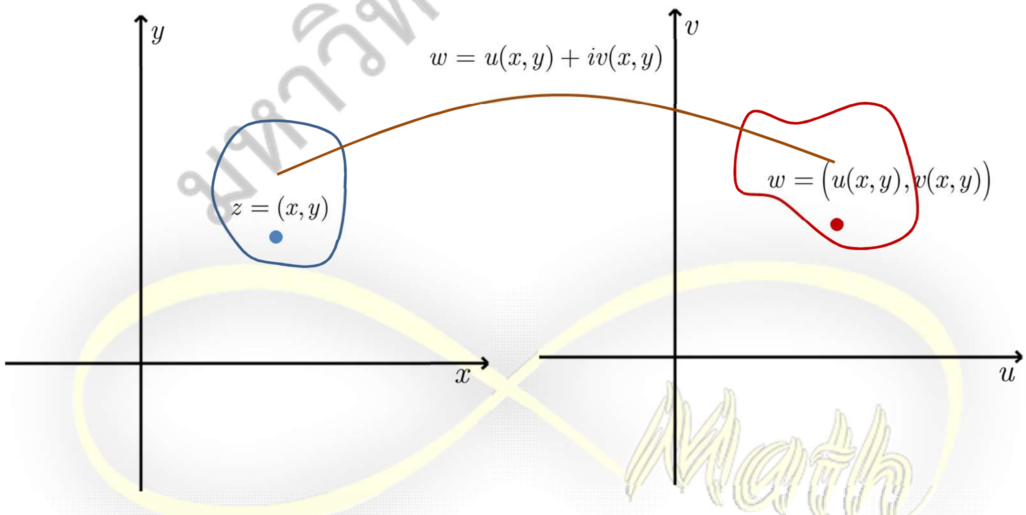
2.2 การส่ง

ในวิชาแคลคูลัสเมื่อกล่าวถึงกราฟของฟังก์ชันค่าจริง $f(x)$ นั้นหมายถึงการอธิบายลักษณะของฟังก์ชันด้วยจุดในระนาบคู่อันดับ $(x, f(x))$ แต่สำหรับฟังก์ชันเชิงซ้อนของตัวแปรเชิงซ้อนถ้าจะอธิบายลักษณะของฟังก์ชันในแบบเดียวกันแล้วเราพบว่าจุดที่อยู่บนกราฟจะเป็นจุดใน 4 มิติซึ่งยากแก่การเข้าใจ ดังนั้นเพื่อให้การอธิบายลักษระของฟังก์ชันเกิดประโยชน์ต่อการนำไปใช้ จึงเขียนกราฟโดยใช้สมบัติที่เรียกว่า **การส่ง** (mapping property) ซึ่งเป็นการเขียนกราฟด้วยการแสดงการจับคู่ระหว่างจุดที่อยู่บนโดเมนและจุดในเรนจ์ โดยการเยีนแสดงตำแหน่งของจุดในโดเมนและจุดในเรจน์บนระนาบสองระนาบที่แยกกัน เช่น การเขียนกราฟของฟังก์ชัน $w = f(z)$ ถ้าต้องการแสดงการจับคู่ระหว่าง z กับ $w = f(z)$ สามารถเขียนตำแหน่งของ z ลงในระนาบหนึ่งและเขียนตำแหน่ง w ลงอีกระนาบหนึ่ง แสดงได้ดังแผนภาพต่อไปนี้



ภาพประกอบ 2.1 การส่ง $w = f(z)$
ที่มา :ประสิทธิ์ ลิ้มบุพศิริพร. 2557 : 46

การเขียนกราฟของฟังก์ชันโดยวิธีการข้างตนเป็นการแสดงภาพรวมของการจับคู่ภายใต้ข้อกำหนดของฟังก์ชันซึ่งจะทำให้เห็นการเปลี่ยนแปลงขอบเขตหรือรูป่างของโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชัน สังเกตว่าเมื่อต้องการเน้นการจัดคู่ดังที่กล่าวมาข้างต้น เรามักนิยมใช้คำว่า การส่ง แทนคำว่า ฟังก์ชัน และถ้า z จับคู่กับจุด $w = f(z)$ แล้วเราจะกล่าวว่า f ส่งจุด z ไปยัง w แสดงได้ดังภาพประกอบต่อไปนี้



ภาพประกอบ 2.2 การส่ง $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$
ที่มา :ประสิทธิ์ ลิ้มบุพศิริพร. 2557 : 46

จะเห็นว่า f ส่งจุด z ที่มีพกัดเป็น (x,y) ในระนาบ xy ไปยังจุด w ที่มีพิกัดเป็น $(u(x,y),v(x,y))$ ในระนาบ uv ซึ่งแสดงว่า ฟังก์ชันค่าเชิงซ้อน f ทำให้เกิดการแปลง หรือการเปลี่ยนตัวแปรจาก (x,y) ไปยัง (u,v) กำหนดโดย

$$u = u(x,y) \quad \text{และ} \quad v = v(x,y)$$

จากกรณีนี้เราอาจถือว่าฟังก์ชันค่าเชิงซ้อนเป็นการแปลงและอาจเรียกความสัมพันธ์ที่กำหนดโดยฟังก์ชันค่าเชิงซ้อนในรูป $w = f(z)$ ว่าการแปลง

โดยทั่วไปตัวแปรเชิงซ้อน z และค่าของฟังก์ชัน w นิยมเขียนแทนด้วย $z = x + yi$ และ $f(z) = w = u(x,y) + iv(x,y)$ ตามลำดับ ดังนั้นในระนาบแรกนิยมเขียนแทนแกนในแนวนอนด้วย $x = \mathrm{Re}(z)$ และแทนแกนในแนวตั้งด้วย $y = \mathrm{Im}(z)$ และเรียกระนาบนี้ว่าระนาบ z ในขณะที่อีกระนาบหนึ่งเรียกว่า ระนาบ w โดยเขียนแทนแกนในแนวนอนด้วย $u = \mathrm{Re}(w)$ และแทนแกนในแนวตั้งด้วย $v = \mathrm{Im}(w)$

ถ้า $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ และ w เป็นฟังก์ชันค่าเชิงเดี่ยวของ $z = x + yi$
เช่น $w = z^2 = (x+yi)^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi$
นั่นคือจุด $P(x,y)$ บนระนาบ z จะแปลงไปเป็นจุด $P'(u,v)$ บนระนาบ w
เนื่องจาก $w = u(x,y) + iv(x,y)$

จะได้ว่า $u(x,y) = x^2 + y^2$ และ $v(x,y) = 2xy$

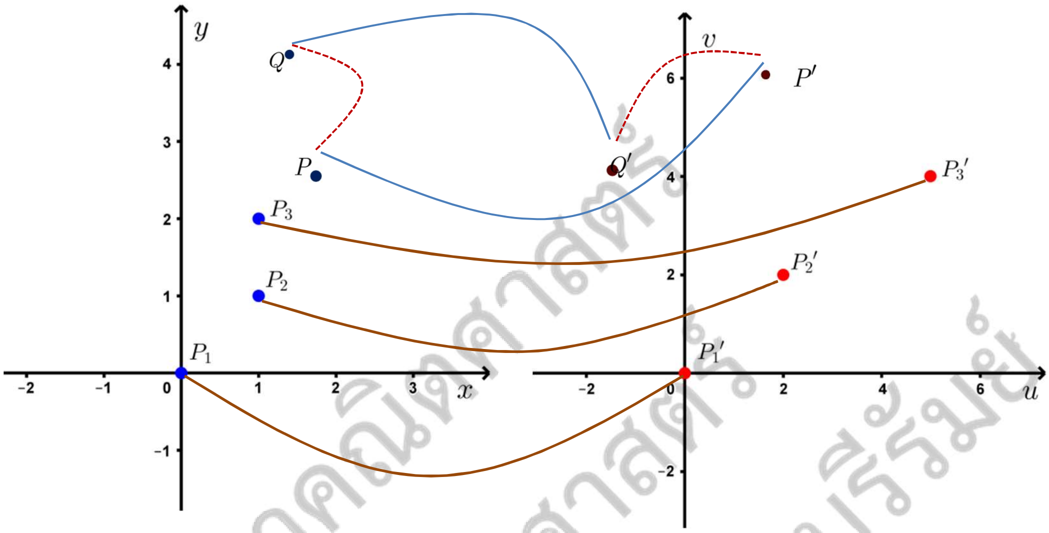
นั้นคือ $P(x,y)$ ใด ๆ บนระนาบ z แปลงเป็น $P'(x^2 + y^2, 2xy)$ บนระนาบ w

$P_1(0,0)$ แปลงเป็น $P_1'(0^2 + 0^2, 2(0)(0)) = P'(0,0)$

$P_2(1,1)$ แปลงเป็น $P_2'(1^2 + 1^2, 2(1)(1)) = P'(2,2)$

$P_3(1,2)$ แปลงเป็น $P_3'(1^2 + 2^2, 2(1)(2)) = P'(5,4)$

แสดงได้ดังภาพประกอบต่อไปนี้



ภาพประกอบ 2.3 การส่งจุดจากระนาบ z ไประนาบ w

ที่มา : สมถวิล ขันเขตต์. 2558 : 38

จุดทุกจุดที่อยู่บนเส้นโค้ง PQ (เส้นประ) ในระนาบ z ถูกส่งไปยังจุดที่สมนัยกันบนส่วนโค้ง $P'Q'$ (เส้นประ) ของระนาบ w จะเรียกฟังก์ชัน f ว่าการส่ง (mapping) หรือการแปลง (transformation)

ตัวอย่าง 2.12 กำหนด $w = z - 2 + 3i$ จงแสดงการส่งของ w ที่จุด $z = 0, i$ และ $3 - 2i$

วิธีทำ จาก $w = z - 2 + 3i$ ให้ $z = x + yi$

จะได้ $w = x + yi - 2 + 3i$

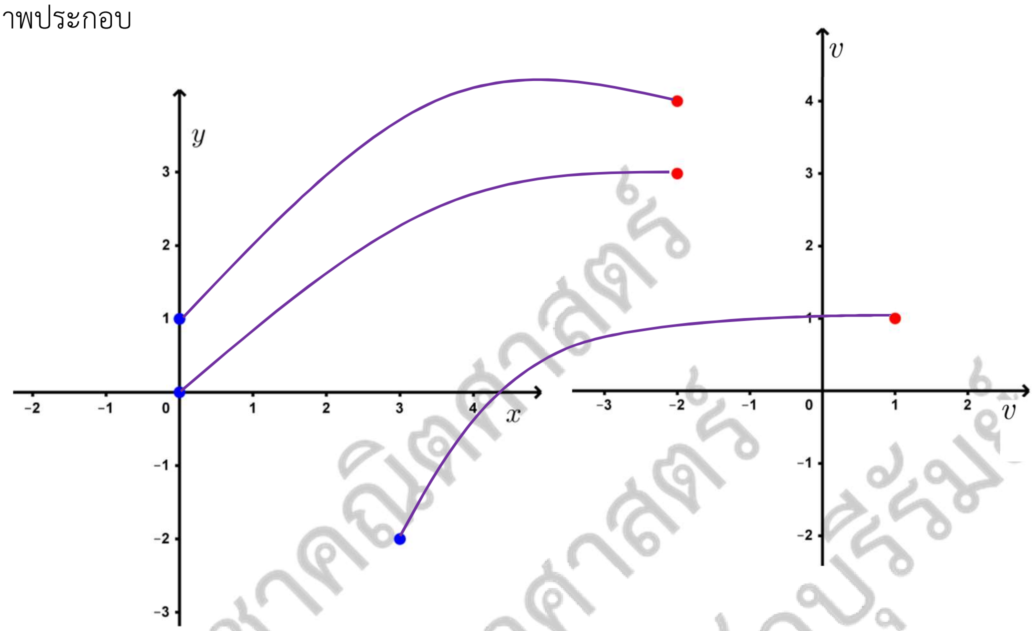
$w = x - 2 + (y+3)i$

จุด $z = 0 = 0 + 0i$ ถูกส่งไปที่ $w = 0 - 2 + (0+3)i = -2 + 3i$

จุด $z = i = 0 + i$ ถูกส่งไปที่ $w = 0 - 2 + (1+3)i = -2 + 4i$

จุด $z = 3 - 2i$ ถูกส่งไปที่ $w = 3 - 2 + (-2+3)i = 1 + i$

ดังภาพประกอบ



ในหัวข้อที่ผ่านมานี้เป็นการแนะนำให้รู้จักพื้นฐานการส่ง ต่อไปจะเป็นการศึกษา การเลื่อนขนาน การหมุน การเปลี่ยนขนาด และการผกผัน ซึ่งจะนำไปใช้เป็นพื้นฐานในการศึกษาการส่งโดยฟังก์ชันมูลฐานต่อไปซึ่งมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

2.3 เซตของจุดในระนาบจำนวนเชิงซ้อน

ในหัวข้อนี้ เราจะกล่าวถึงแนวคิดพื้นฐานเกี่ยวกับจุดและเซตของจุดในระนาบ โดยจะกล่าวถึงการจำแนกเซตของจุดด้วยสมบัติเกี่ยวกับความใกล้กันของจุดดัง (เกียรติสุดา นาคประสิทธิ์ (2556 : 28-29) ได้ให้บทนิยามไว้ดังต่อไปนี้

บทนิยาม 2.4

กำหนดให้ $z_0 = x_0 + y_0 i \in \mathbb{C}$ และ $r > 0$ **วงกลม** (circle) ที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด z_0 รัศมียาว r หน่วยคือ เซตของจำนวนเชิงซ้อน z ทั้งหมดซึ่งมีระยะห่างจากจุด z_0 เป็นระยะทางเท่ากับ r หน่วย เขียนแทนด้วย $C(z_0, r)$ นั่นคือ

$$C(z_0, r) = \left\{ z : \left| z - z_0 \right| = r \right\}$$

กล่าวอีกนัยหนึ่งคือ $\left| z - z_0 \right| = r$ เป็นสมการของวงกลม $C(z_0, r)$

ตัวอย่าง 2.13

1. $\left|z\right| = 1$

เนื่องจาก $\left|z\right| = \left|z - 0\right| = 1$ จากบทนิยามนั่นคือ $z_0 = 0$

ดังนั้น $\left|z\right| = 1$ คือสมการของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่จุดกำเนิด รัศมียาว 1 หน่วย

2. $\left|z - 2 + 5i\right| = 8$

เนื่องจาก $\left|z - 2 + 5i\right| = \left|z - (2 - 5i)\right| = 8$ จากบทนิยามนั่นคือ $z_0 = 2 - 5i$

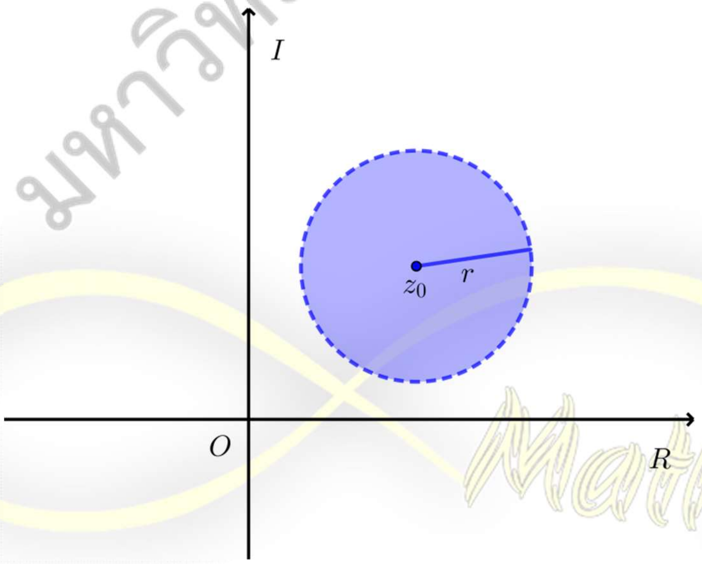
ดังนั้น $\left|z - 2 + 5i\right| = 8$ คือสมการของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด $z_0 = 2 - 5i$ รัศมียาว 8 หน่วย

บทนิยาม 2.5

กำหนดให้ $z_0 = x_0 + y_0 i \in \mathbb{C}$ และ $r > 0$ **แผ่นวงกลม** (circular disk) ที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด z_0 รัศมียาว r หน่วยคือ เซตของจำนวนเชิงซ้อน z ทั้งหมดซึ่งมีระยะห่างจากจุด z_0 เป็นระยะทางน้อยกว่า r หน่วย เขียนแทนด้วย $D(z_0, r)$ นั่นคือ

$$D(z_0, r) = \left\{ z : \left|z - z_0\right| < r \right\}$$

จากบทนิยาม แสดงแผ่นวงกลมได้ดังภาพประกอบต่อไปนี้



ภาพประกอบ 2.4 แสดงแผ่นวงกลม

ที่มา : ธนิต มาลากร 2556 : 39

บทนิยาม 2.6

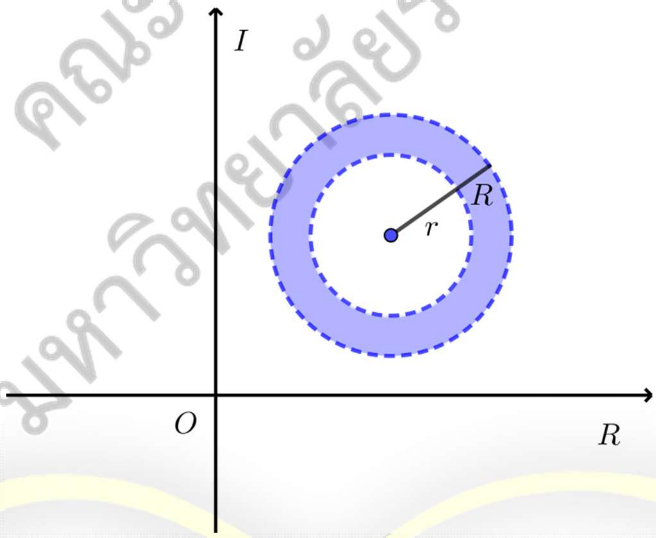
กำหนดให้ $z_0 = x_0 + y_0 i \in \mathbb{C}$ และ $r, R > 0$ **แผ่นวงกลม** (circular disk) ให้ S_1 เป็นเซตของจุดซึ่งสอดคล้องกับสมการ $r < \left|z - z_0\right|$ ซึ่งคือจุดซึ่งอยู่ภายนอกวงกลมที่มีจุดศุนย์กลางที่จุด z_0 รัศมียาว r หน่วย และ ให้ S_2 เป็นเซตของจุดซึ่งสอดคล้องกับสมการ $\left|z - z_0\right| < R$ ซึ่งคือจุดซึ่งอยู่ภายนอกวงกลมที่มีจุดศุนย์กลางที่จุด z_0 รัศมียาว R หน่วย

ถ้า $0 < r < R$ แล้วเรียกเซตของจุดที่สอดคล้องกับอสมการ $r < \left|z - z_0\right| < R$ ซึ่งก็คือเซตของจุดทั้งหมดในเซต $S_1 \cap S_2$ ว่า**วงแหวน** (annulus)

เขียนแทนด้วย $A(z_0, r, A)$ นั่นคือ

$$A(z_0, r, A) = \left\{ z : r < \left|z - z_0\right| < R \right\}$$

จากบทนิยาม แสดงวงแหวนได้ดังภาพประกอบต่อไปนี้



ภาพประกอบ 2.5 แสดงแผ่นวงแหวน

ที่มา : ธนิต มาลากร 2556 : 39

บทนิยาม 2.7

ให้ $\varepsilon > 0$ และ $z_0 \in \mathbb{C}$

ย่านใกล้เคียง ε **ที่จุด** z_0 (ε-neighborhood at z_0)

เขียนแทนด้วย $N_\varepsilon(z_0)$ นิยามโดย $N_\varepsilon(z_0) = \left\{z : \left|z - z_0\right| < \varepsilon\right\}$

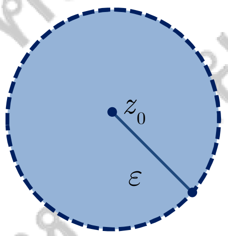
ย่านใกล้เคียงแท้ ε **ที่จุด** z_0 (deleted ε-neighborhood at z_0)

เขียนแทนด้วย $N'_\varepsilon(z_0)$ นิยามโดย $N'_\varepsilon(z_0) = \left\{z : 0 < \left|z - z_0\right| < \varepsilon\right\}$

ย่านใกล้เคียง ε (ε-neighborhood at z_0) ของ z_0 อาศัยความหมายทางเรขาคณิตของมอดุลัสจะได้ว่าย่านของจุด z_0 รัศมี ε คือเซตของจุดทั้งหลายที่อยู่ภายในวงกลมที่มีจุดศูนย์กลาง อยู่ที่จุด z_0 และรัศมี ε เช่น S เป็นย่านใกล้เคียงจุด z_0 หรือเขียนแทนเซต S ด้วย

$$S = \left\{z \in \mathbb{C} \middle\| z - z_0 \right| < \varepsilon\} = N_\varepsilon(z_0)$$

แสดงได้ดังภาพประกอบต่อไปนี้



ภาพประกอบ 2.6 ภาพแสดง $S = \left\{z \in \mathbb{C} \middle\| z - z_0 \right| < \varepsilon\} = N_\varepsilon(z_0)$

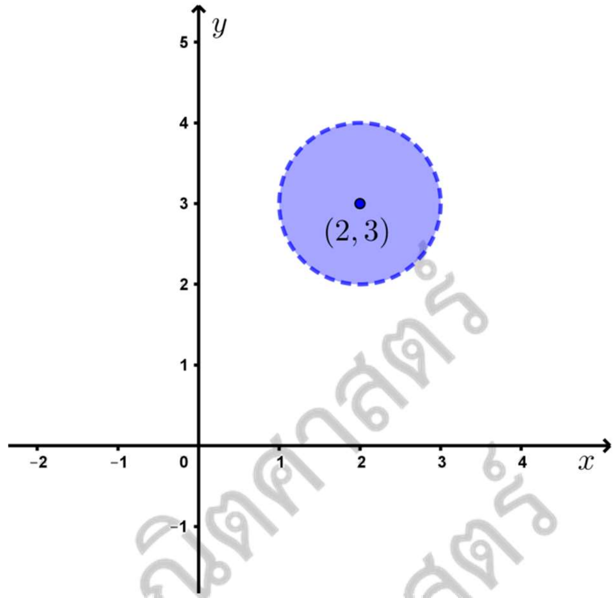
ที่มา : ก่อสุข วีระถาวร. 2542 : 38

ตัวอย่าง 2.14 จงอธิบาย $N_1(2+3i)$ พร้อมทั้งวาดรูปประกอบ

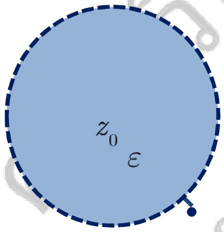
วิธีทำ เนื่องจาก $N_1(2+3i) = \left\{z \in \mathbb{C} \middle\| z - (2+3i) \right| < 1\}$

นั่นคือ $N_1(2+3i)$ เป็นย่านใกล้เคียงจุด $2+3i$ รัศมี 1

แสดงได้ดังภาพประกอบต่อไปนี้



และสำหรับย่าน ย่านใกล้เคียงแท้ ε ที่จุด z_0 (deleted ε-neighborhood at z_0) คือย่านใกล้จุด z_0 รัศมี ε คือย่านของจุด z_0 ที่ไม่รวมจุด z_0 แสดงได้ดังภาพประกอบต่อไปนี้



ภาพประกอบ 2.6 ภาพแสดง $N'_\varepsilon(z_0) = \left\{z \in \mathbb{C} \middle| 0 < |z - z_0| < \varepsilon\right\}$

ที่มา : ก่อสุข วีระถาวร. 2542 : 38

ตัวอย่าง 2.15

1. $\left\{z : |z| < 3\right\}$

   เนื่องจาก $\left\{z : |z| < 3\right\} = \left\{z : |z - 0| < 3\right\}$ จากบทนิยามจะได้ $z_0 = 0$

   ดังนั้น $\left\{z : |z| < 3\right\}$ เป็นย่านใกล้เคียง 3 ที่จุด $z = 0$

2. $\left\{z : |z - 1 + 2i| < 0.02\right\}$

   เนื่องจาก $\left\{z : |z - 1 + 2i| < 0.02\right\} = \left\{z : |z - (1 - 2i)| < 0.02\right\}$

   จากบทนิยามจะได้ $z_0 = 1 - 2i$

   ดังนั้น $\left\{z : |z - 1 + 2i| < 0.02\right\}$ เป็นย่านใกล้เคียง 0.02 ที่จุด $z = 1 - 2i$

นอกนจากบทนิยามที่ได้กล่าวมาข้างต้นแล้วยังมีนิยามอื่น ๆ ที่ ประสิทธิ์ ลิ้มบุพศิริพร (2557 : 34) ได้กล่าวไว้ดังนี้

บทนิยาม 2.8

กำหนดให้ $z_0 \in \mathbb{C}$ และ $S \subseteq \mathbb{C}$

1. z_0 เป็น**จุดภายใน** (inteior point) ของ S ถ้ามีจำนวนจริงบวก ε ซึ่งมีสมบัติว่า $N_\varepsilon(z_0) \subseteq S$

2. z_0 เป็น**จุดภายนอก** (exterior point) ของ S ถ้ามีจำนวนจริงบวก ε ซึ่งมีสมบัติว่า $N_\varepsilon(z_0) \subseteq \mathbb{C} - S$

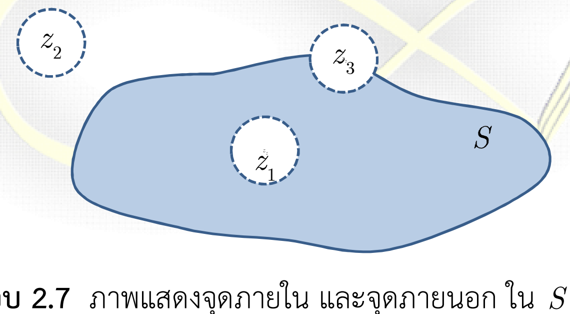
3. z_0 เป็น**จุดขอบ** (boundary point) ของ S ถ้า z_0 ไม่เป็นจุดภายในและจุดภายนอก ของ S

จากบทนิยามกล่าวว่า z_0 เป็นจุดภายใน ของเซต S ถ้าสามารถหาย่านใกล้เคียงของจุด z_0 ที่จุดทุกจุดอยู่ภายใน S ของเซต S และในที่นี้แทนด้วยสัญลักษณ์ $int(\mathrm{S})$ หมายถึง เซตของจุดที่ประกอบด้วยจุดภายในทุก ๆ จุดของ S นั่นเอง

z_0 เป็นจุดภายนอก ของเซต S ถ้าสามารถหาย่านใกล้เคียงของจุด z_0 ที่จุดทุกจุดไม่อยู่ภายใน S จุดภายนอกของเซต S และในที่นี้แทนด้วยสัญลักษณ์ $ext(\mathrm{S})$ หมายถึงเซต เซตที่ประกอบด้วยจุดต่าง ๆ ที่เป็นจุดภายนอกของ S แสดงจุดภายในและจุดภายนอกดังภาพประกอบต่อไปนี้

z_0 เป็นจุดขอบ ของเซต S ถ้าทุกย่านใกล้เคียงของจุด z_0 มีทั้งภายใน S และจุดภายนอก S และในที่นี้แทนด้วยสัญลักษณ์ $ext(\mathrm{S})$ หมายถึงเซต เซตที่ประกอบด้วยจุดต่าง ๆ ที่เป็นจุดภายนอกของ S และ ขอบของเซต S (boundary) ของเซต S คือเซตที่ประกอบด้วยจุดของทุกจุดของ S

ต่อไปจะแสดงจุดภายใน จุดภายนอก และจุดขอบของ S ดังตัวอย่างต่อไปนี้ จุด z_1 เป็นจุดภายใน S และจุด z_2 เป็นจุดภายนอก ส่วน z_3 เป็นจุดขอบ แสดงได้ดังภาพประกอบต่อไปนี้

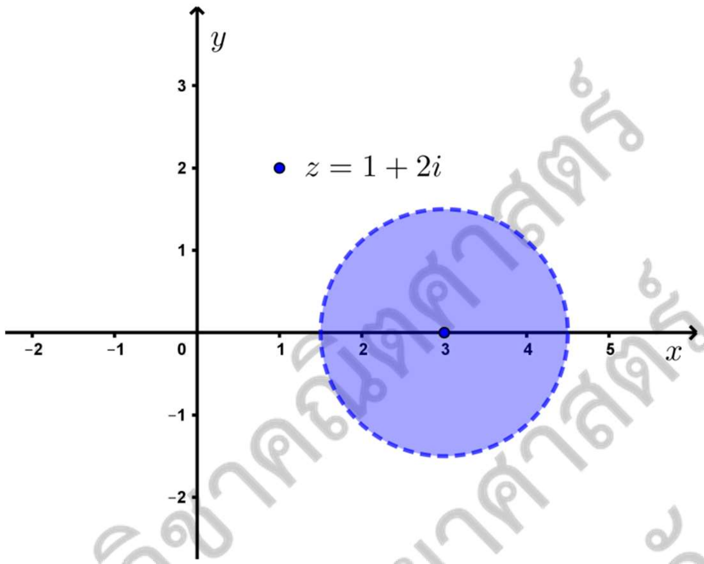


ภาพประกอบ 2.7 ภาพแสดงจุดภายใน และจุดภายนอก ใน S

ที่มา : สมถวิล ขันเขตต์. 2558 : 40

ตัวอย่าง 2.16 กำหนดให้ $S=\left\{z\in\mathbb{C}\middle|\left|z-3\right|<1\right\}$

วิธีทำ สามารถเขียนเซต S ได้ดังภาพประกอบต่อไปนี้

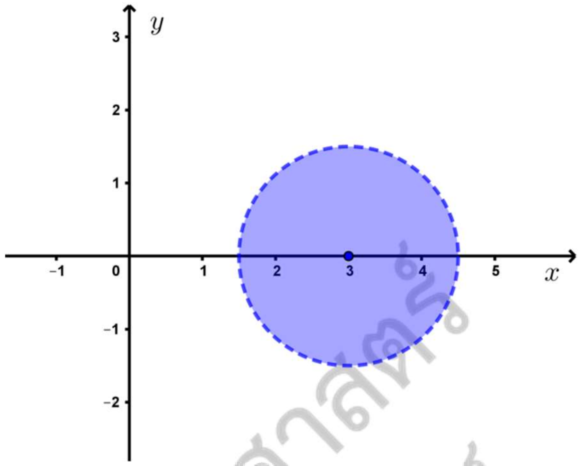


จากภาพประกอบจะได้ว่าจุด $z=1+2i$ เป็นจุดภายนอกของ S

สำหรับเป็นจุดขอบของ S คือ $z=1.5, z=4.5$ และ ทุก ๆ จุดที่อยู่บนเส้นรอบวงกลม $\left|z-3\right|=1.5$

> **บทนิยาม 2.9**
>
> เซต S เรียกว่า **เซตเปิด** (open set) ถ้าเซต S ประกอบด้วยจุดภายในทั้งหมด
>
> เซต S เรียกว่า **เซตปิด** (closed set) ถ้าเซต S ประกอบด้วยจุดภายในและจุดขอบ

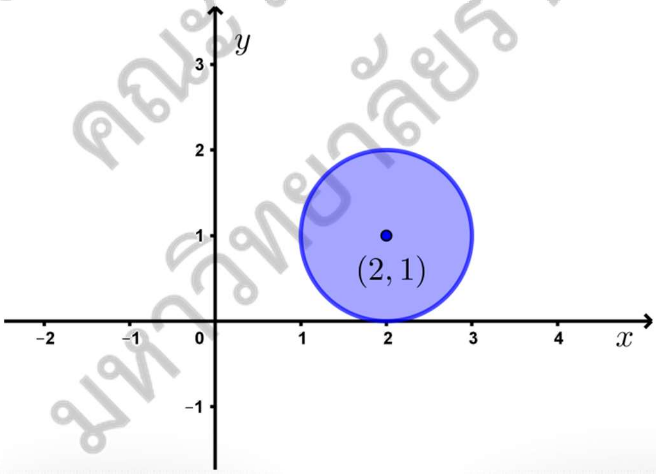
ตัวอย่างต่อไปนี้จะเป็นตัวอย่างของเซตปิดและเซตเปิดเพื่อให้ผู้เรียนได้เข้าใจนิยามได้มากขึ้น เช่น ให้ $S=\left\{z\in\mathbb{C}\middle|\left|z-3\right|<1\right\}$ จะได้ว่าทุก ๆ จุดใน S เป็นจุดภายในของ S ดังนั้น S เป็นเซตเปิด แสดงได้ดังภาพประกอบต่อไปนี้



ภาพประกอบ 2.8 ภาพแสดงเซตเปิด $S=\left\{z\in\mathbb{C}\middle\|z-3\right|<1\}$

ที่มา : สมถวิล ขันเขตต์. 2558 : 41

ให้ $S=\left\{z\in\mathbb{C}\middle\|z-(2+i)\right|\leq 1\}$ จะได้ว่าทุก ๆ จุดใน S เป็นจุดภายในของ S ดังนั้น S เป็นเซตเปิด แสดงได้ดังภาพประกอบต่อไปนี้



ภาพประกอบ 2.9 ภาพแสดงเซตปิด $S=\left\{z\in\mathbb{C}\middle\|z-(2+i)\right|\leq 1\}$

ที่มา : สมถวิล ขันเขตต์. 2558 : 42

เมื่อเราทราบบทนิยามต่าง ๆ ที่กล่าวมาข้างต้นแล้วต่อไปจะเป็นการนำเสนอทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง ดังเกียรติสุดา นาคประสิทธิ์ (2556 : 30 -34)

ทฤษฎีบท 2.1.

ให้ S เป็นเซตปิดแล้วจุดขอบทั้งหมดของ S อยู่ใน S

พิสูจน์ กำหนดให้ S เป็นเปนเซตปิด และ z_0 เป็นจุดบนของ S
สมมติให้ $z_0 \notin S$ นั่นคือ $z_0 \in \mathbb{C} - S$ ซึ่งเป็นเซตเปิด
ดังนั้น z_0 เป็นจุดภายในของ $\mathbb{C} - S$
นั่นคือจะมี จำนวนจริงบวก ε ซึ่ง $N_\varepsilon(z_0) \subseteq \mathbb{C} - S$
ทำให้ $N_\varepsilon(z_0) \cap S = \varnothing$ เกิดข้อนิยามกับบทนิยามจุดขอบ
ดังนั้น $z_0 \in S$

ทฤษฎีบท 2.2

ถ้า S เป็นเซตปิดแล้วจุดลิมิตทั้งหมดของ S อยู่ใน S

พิสูจน์

กำหนดให้ S เป็นเปนเซตปิด และ z_0 เป็นจุดลิมิตของ S
สมมติให้ $z_0 \notin S$ นั่นคือ $z_0 \in \mathbb{C} - S$ ซึ่งเป็นเซตเปิด
ดังนั้น z_0 เป็นจุดภายในของ $\mathbb{C} - S$
นั่นคือจะมี จำนวนจริงบวก ε ซึ่ง $N_\varepsilon(z_0) \subseteq \mathbb{C} - S$
ทำให้ $N_\varepsilon(z_0) \cap S = \varnothing$
เนื่องจาก $N'_\varepsilon(z_0) \subseteq N_\varepsilon(z_0)$
ดังนั้น $N'_\varepsilon(z_0) \cap S = \varnothing$ ซึ่งเกิดข้อนิยามกับบทนิยามจุดลิมิต
ดังนั้น $z_0 \in S$

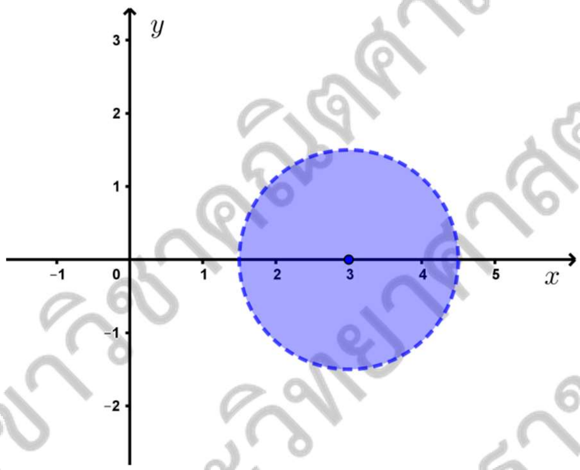
บทนิยาม 2.10

z_0 เป็น**จุดลิมิต** (limit point) หรือ จุด**สะสม** (accumulation point) ของ S ถ้าสำหรับทุก ๆ จำนวนจริงบวก ε ซึ่งมีสมบัติว่า $N'_\varepsilon(z_0) \cap S \neq \varnothing$

จากบทนิยาม นั่นคือ z_0 เป็นจุดลิมิต ของเซต S ถ้าทุก ๆ ย่านใกล้เคียงของจุด z_0 ($N_\varepsilon(z_0)$) มีสมาชิกอย่างน้อยหนึ่งจุดของเซต S ที่แตกต่างจากจุด z_0 นั่นเองยกตัวอย่างเช่น ให้

$$S = \left\{ z \in \mathbb{C} \middle| \left| z-3 \right| < 1 \right\}$$

จะได้ว่าทุก ๆ จุดใน S และจุดบนเส้นรอบวงกลม $\left| z-3 \right| = 1$ เป็นจุดลิมิตของ S แสดงได้ดังภาพประกอบต่อไปนี้



ภาพประกอบ 2.9 ภาพแสดงจุดลิมิตของ $S = \left\{ z \in \mathbb{C} \middle| \left| z-3 \right| < 1 \right\}$

ที่มา : สมถวิล ขันเขตต์. 2558 : 41

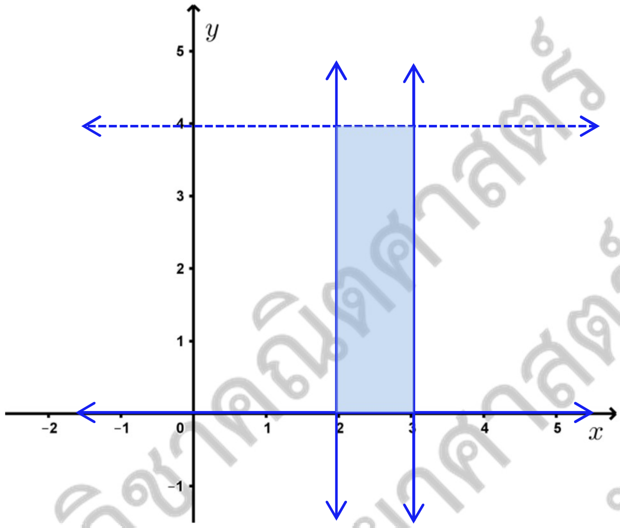
บทนิยาม 2.11

กำหนดให้ $S \subset \mathbb{C}$ กล่าวว่าเซต S เป็น**เซตมีขอบเขต** (bounded set) ถ้ามีจำนวนจริงบวก R ในเซต S ซึ่งทำให้ $|z| \le R$

จากบทนิยาม ถ้าไม่มีจำนวนจริงบวก R ที่สอดคล้อง เรียกเซตไม่มีขอบเขต (unbounded set) ตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2.17 กำหนดให้ $S=\left\{z\in\mathbb{C}\middle|2\le \mathrm{Re}(z)\le 3,0\le \mathrm{Im}(z)<4\right\}$

วิธีทำ สามารถเขียนเซต S ได้ดังภาพประกอบต่อไปนี้

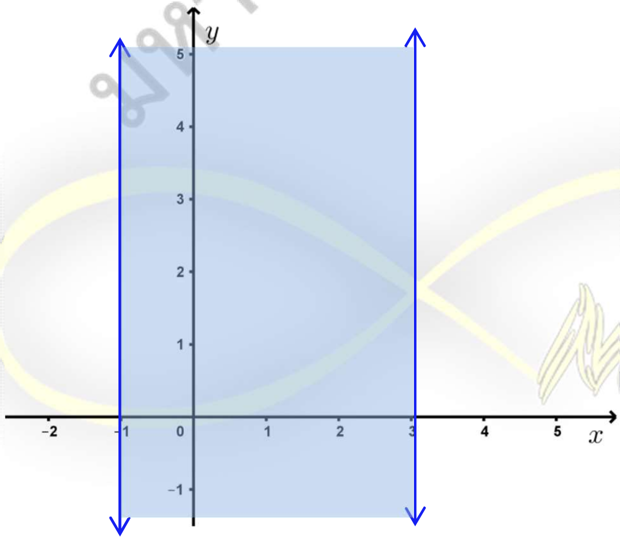


จากภาพประกอบ เลือก $R=5$ จะได้ว่า สำหรับทุก ๆ $z\in S$ เราจะได้ $\left|z\right|\le 5$

ดังนั้น $S=\left\{z\in\mathbb{C}\middle|2\le \mathrm{Re}(z)\le 3,0\le \mathrm{Im}(z)<4\right\}$ เป็นเซตมีขอบเขต

ตัวอย่าง 2.18 กำหนดให้ $S=\left\{z\in\mathbb{C}\middle|-1\le \mathrm{Re}(z)\le 3\right\}$

วิธีทำ สามารถเขียนเซต S ได้ดังภาพประกอบต่อไปนี้



จากภาพประกอบไม่มีจำนวนจริง R ใด ๆ ที่ทำให้ สำหรับทุก ๆ $z\in S$ แล้ว $\left|z\right|\le M$

ดังนั้น $S = \left\{ z \in \mathbb{C} \middle| -1 \le \mathrm{Re}(z) \le 3 \right\}$ เป็นเซตไม่มีขอบเขต

ต่อไปจะเป็นนิยามของเส้นเชื่อม และลักษณะของเซตรูปแบบต่าง ๆจากบทนิยามของเกียรติสุดา นาคประสิทธิ์. (2556 : 31) ได้กล่าวไว้ดังตอไปนี้

บทนิยาม 2.12

ให้ $a, b \in \mathbb{C}$ **เส้นเชื่อมหลายเหลี่ยม** (polygonal line) จากจุด a ไปยังจุด b คือเซต

$$P = \bigcup_{k=1}^{n-1} \left[z_k, z_{k+1} \right]$$

เมื่อ $z_1 = a$ และ $z_n = b$ และเขียนแทน P ด้วย $\left[a = z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}, z_n = b \right]$

บทนิยาม 2.13

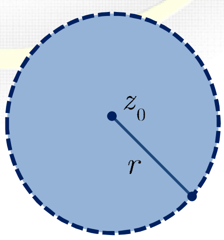
ให้ $S \subseteq \mathbb{C}$

1. S เป็น**เซตเชื่อมโยง** (connected set) ถ้าสามารถหาเส้นเชื่อมหลายเหลี่ยม S ซึ่ง $P \subseteq S$ ที่เชื่อมจุด a และจุด b สำหรับทุกคู่ของจุด $a, b \in S$
2. S **เป็นโดเมน** (domain) ถ้า S เป็นเซตเปิดและเชื่อมโยง
3. S **เป็นบริเวณ** (region) ถ้า S เป็นโดเมน หรือ โดเมนยูเนียนกับจุดของบางจุดของ S หรือ โดเมนยูเนียนกับจุดของทั้งหมดของ S

จากบทนิยามนั่นคือเราเรียกเซตเชื่อมโยงและเป็นเซตเปิดว่า โดเมน และเรียนกเซรซึ่งเป็นโดเมนหรือเซตซึ่งประกอยด้วยโดเมนพร้อมทั้งจุดขอบบางจุดหรือทั้งหมดของเซตว่า บริเวณ และบริเวณซึ่งประกอบด้วยโดเมนและจุดขอบทั้งหมดว่าบริเวณปิด แสดงได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2.19 กำหนด $S = \left\{ z \in \mathbb{C} \middle| \left| z - z_0 \right| < r \right\}$

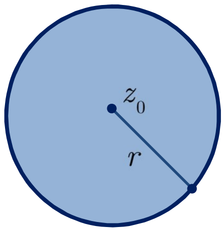
วิธีทำ สามารถเขียนเซต S ได้ดังภาพประกอบต่อไปนี้



จากภาพประกอบจะได้ว่า $S=\left\{z\in\mathbb{C}\middle|\left|z-z_0\right|<r\right\}$ เป็นโดเมน

ตัวอย่าง 2.20 กำหนด $S=\left\{z\in\mathbb{C}\middle|\left|z-z_0\right|\le r\right\}$

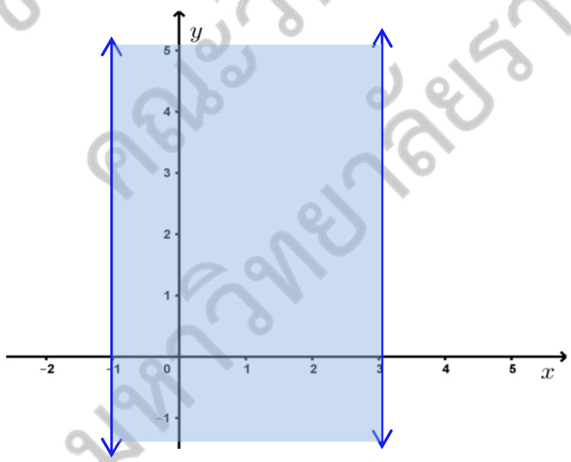
วิธีทำ สามารถเขียนเซต S ได้ดังภาพประกอบต่อไปนี้



จากภาพประกอบจะได้ว่า $S=\left\{z\in\mathbb{C}\middle|\left|z-z_0\right|\le r\right\}$ เป็นบริเวณปิด

ตัวอย่าง 2.21 กำหนดให้ $S=\left\{z\in\mathbb{C}\middle|-1\le \operatorname{Re}(z)\le 3\right\}$

วิธีทำ สามารถเขียนเซต S ได้ดังภาพประกอบต่อไปนี้



จากภาพประกอบจะได้ว่า $S=\left\{z\in\mathbb{C}\middle|-1\le \operatorname{Re}(z)\le 3\right\}$ เป็นบริเวณ

สำหรับบทนิยามต่อไปเป็นบทนิยามเกี่ยวกับเส้นโครงในรูปแบบต่าง ๆ ดัง สมถวิล ขันเขตต์ (2558 : 45-46) ได้ให้บทนิยามไว้ดังต่อไปนี้

บทนิยาม 2.14

เส้นโค้ง (cuve) C ในระนาบเชิงซ้อน หมายถึง ฟังก์ชันค่าเชิงซ้อนของตัวแปรจริงซึ่งกำหนดโดย $z:[a,b]\to\mathbb{C}$ และเรียนสมการ

$$z(t)=x(t)+iy(t),t\in[a,b]$$

ว่า สมการอิงตัวแปรเสริมของเส้นโค้ง C และเรียนก $z(a)$ ว่าจุดเริ่มต้น (initial point) และเรียก $z(b)$ ว่าจุดสิ้นสุด (end point) ของเส้นโค้ง C และแทนเส้นโค้ง C และสมการด้วย

$$C:z(t)=x(t)+iy(t),t\in[a,b]$$

เรียกเส้นโค้ง $C:z(t)=x(t)+iy(t),t\in[a,b]$ ว่า**เส้นโค้งปิด** (closed curve) ถ้า $z(a)=z(b)$

เรียกเส้นโค้ง $C:z(t)=x(t)+iy(t),t\in[a,b]$ **เส้นโค้งเรียบ** (smooth curve) ถ้า $x'(t)$ และ $y'(t)$ มีความต่อเนื่องบนช่วง (a,b)

เรียกเส้นโค้ง $C:z(t)=x(t)+iy(t),t\in[a,b]$ **เส้นโค้งเรียบเป็นช่วง** (piecewise smooth curve) ถ้าสามารถแบ่งเส้นโค้ง C ออกเป็นโค้งย่อย ๆ ได้จำนวนจำกัด โดยที่แต่ละเส้นโค้งย่อยเป็นเส้นโค้งเรียบ

เรียกเส้นโค้ง $C:z(t)=x(t)+iy(t),t\in[a,b]$ **เส้นโค้งเชิงเดี่ยว** (simple curve) ถ้าทุก ๆ $t_1,t_2\in(a,b)$ และ $t_1\neq t_2$ จะได้ว่า $z(t_1)\neq z(t_2)$ หรือในเชิงเรขาคณิตคือเส้นโค้งมั่ดตัวเอง

เรียกเส้นโค้ง $C:z(t)=x(t)+iy(t),t\in[a,b]$ **เส้นโค้งปิดเชิงเดี่ยว** (simple closed curve) ถ้าเส้นโค้ง C เป็นเส้นโค้งปิดที่เรียบเป็นช่วง ๆ และเป็นเส้นโค้งเชิงเดียว

ตัวอย่าง 2.22 กำหนดให้ $C:z(t)=\cos t+i\sin t,\ 0\le t\le 2\pi$

วิธีทำ จะเห็นว่าหราฟของเส้นโค้ง C เป็นวงกลมมีรัศมียาว 1 หน่วย มีจุดเริ่มต้นอยู่ที่ $z(0)=\cos 0+i\sin 0=1+0i$

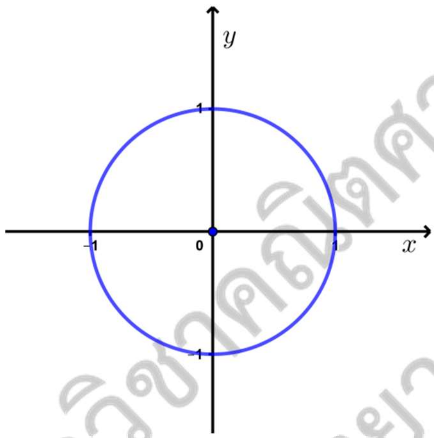
แล้วเคลื่อนที่ทวนเข็มนาฬิกา

และจุดสิ้นสุดอยู่ที่ $z(2\pi) = \cos(2\pi) + i\sin(2\pi) = 1 + 0i$

จะเห็นว่า $z(0) = z(2\pi)$

แสดงว่าเส้นโค้งนี้เป็นเส้นโค้งปิด

ดังภาพประกอบต่อไปนี้



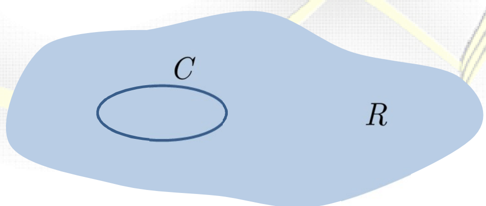
บทนิยาม 2.15

ส่วนภายในเส้นโค้ง C (interior of C) คือบริเวณที่ถูกปิดล้อมด้วยเส้นปิดเชิงเดี่ยว

บทนิยาม 2.16

เรียกบริเวณ R ว่าเป็นบริเวณ**เชื่อมโยงเชิงเดี่ยว** (simple commected region) ถ้า R มีสมบัติว่า ทุก ๆ เส้นโค้งปิดเชิงเดี่ยว C ในบริเวณ R ซึ่งส่วนภายในของ C เป็นเซตย่อยของ R

จากบทนิยามแสดงได้ดังภาพประกอบต่อไปนี้



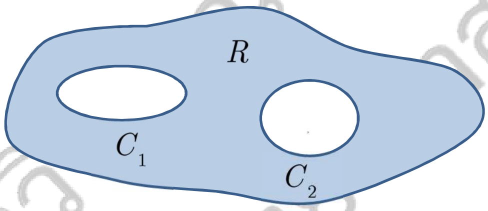
ภาพประกอบ 2.10 ภาพแสดง R เป็นบริเวณเชื่อมโยงเชิงเดี่ยว

ที่มา : สมถวิล ขันเขตต์. 2558 : 46

บทนิยาม 2.17

บริเวณ R จะเรียกว่าเป็น**บริเวณเชื่อมโยงหลายเชิง** (multiply commected region) ถ้าสามารถลากเส้นโค้งเปิดเชิงเดี่ยว C ใด ๆ ใน R แล้วจะมีเส้นโค้งปิดเชิงเดี่ยว C อย่างน้อยหนึ่งวงที่ข้างในประกอบด้วยจุดซึ่งไม่ใช่จุดใน R

แสดงบริเวณเชื่อมโยงหลายเชิงได้ดังภาพประกอบต่อไปนี้



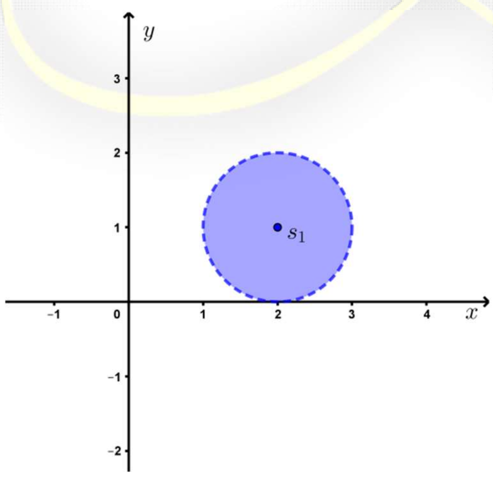
ภาพประกอบ 2.11 ภาพแสดง R เป็นบริเวณเชื่อมโยงหลายเชิง
ที่มา : สมถวิล ขันเขตต์. 2558 : 46

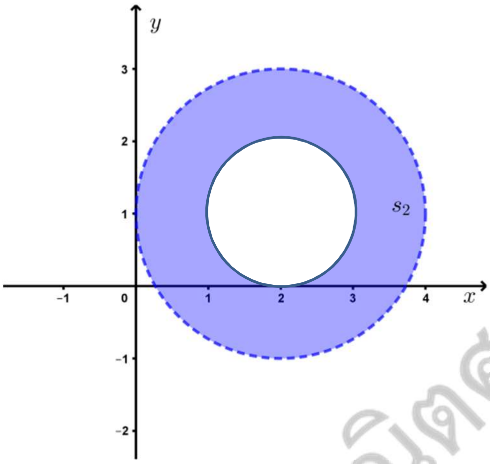
ตัวอย่าง 2.23 กำหนดให้เวตของจุดบนระนาชเชิงซ้อนแต่ละข้อต่อไปนี้

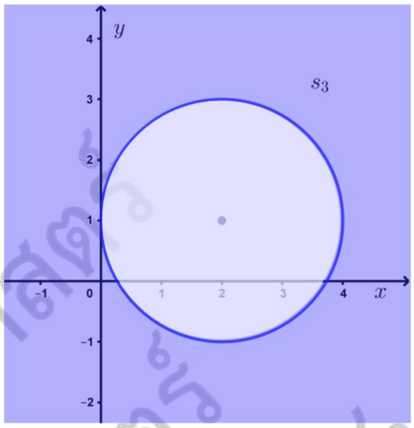
1. $S_1 = \left\{ z \in \mathbb{C} \middle| \left| z-(2+i) \right| < 1 \right\}$
2. $S_2 = \left\{ z \in \mathbb{C} \middle| 1 \le \left| z-(2+i) \right| < 2 \right\}$
3. $S_3 = \left\{ z \in \mathbb{C} \middle| \left| z-(2+i) \right| \ge 2 \right\}$

จงพิจารณาว่าเซตแต่ละจุดต่อไปนี้เป็นเซตเปิด เซตปิด บริเวณ หรือโดเมน

วิธีทำ สามารถเขียนเซต S_1, S_2 และ S_3 ได้ดังภาพประกอบต่อไปนี้







จากภาพประกอบ $S_1 = \left\{z \in \mathbb{C} \middle| |z-(2+i)| < 1\right\}$ จะได้ว่า

S_1 เป็นย่านใกล้เคียงของจุด $2+i$ รัศมียาว 1 หรือ $N_1(2+i)$ ซึ่งหมายถึงเซตของจุดภายในวงกลม $|z-(2+i)| = 1$ จะเห็นว่า S_1 เป็นเซตมีขอบเขต และเป็นเซตเชื่อมโยงเชิงเดี่ยว และจุดต่าง ๆ บนเส้นรอบวงของวงกลม $|z-(2+i)| = 1$ ไม่ได้อยู่ในเซต S_1 ดังนั้น จึงเป็นเซตเปิด และเรียก S_1 ว่าเป็นโดเมน

จากภาพประกอบ $S_2 = \left\{z \in \mathbb{C} \middle| 1 \le |z-(2+i)| < 2\right\}$

S_2 ประกอบด้วยจุดทุกจุดในวงแหวนซึ่งอยู่ระหว่างวงกลม $|z-(2+i)| = 1$ และ $|z-(2+i)| = 2$ รวมกับจุดที่อยู่บนเส้นรอบวงของวงกลม $|z-(2+i)| = 1$ แต่ไม่รวมจุดที่อยู่บนเส้นรอบวงของวงกลม $|z-(2+i)| = 2$ ดังนั้น S_2 เป็นเซตเปิด เป็นเซตที่มีขอบเขต เป็น บริเวณ แต่ไม่เป็นโดเมนเพราะว่าเซต S_2 มีจุดขอบบางจุดเป็นสมาชิก และเซต S_2 เป็นบริเวณเชื่อมโยงหลายเชิง

จากภาพประกอบ $S_3 = \left\{z \in \mathbb{C} \middle| |z-(2+i)| \ge 2\right\}$

S_3 ประกอบด้วยจุดทุกจุดที่อยู่บนเส้นรอบวงของวงกลม $|z-(2+i)| = 2$ และจุดที่อยู่ภายนอกวงกลม $|z-(2+i)| = 2$ ดังนั้น S_3 เป็นเซตไม่มีขอบเขต เป็นเซตปิด และเซต S_3 ไม่เป็นโดเมน แต่เป็นบริเวณ

2.4 ลิมิตและความต่อเนื่อง

ในวิชาแคลคูลัสเมื่อกล่าวถึงการศึกษาเรื่องลิมิตของฟังก์ชันค่าจริง เราหมายถึงการศึกษาพฤติกรรมของฟังก์ชันใกล้จุด ๆ หนึ่งที่เราสนใจ และจะเห็นว่าเมื่อกล่าวถึงตำแหน่งบนจุดของเส้นจำนวนที่ใกล้ จุด ๆ หนึ่ง เราหมายถึงตำแหน่งที่อยู่ห่างจากจุดนั้นไปทางซ้ายหรือทางขวาในระยะที่ไม่ไกลนัก อย่างไรก็ตาม เมื่อเรากล่าวถึงตำแหน่งของจุดบนระนาบที่ใกล้ จุด ๆ หนึ่ง เราไม่สามารถอธิบายโดยอาศัยหลักการเดียวกันได้ทั้งนี้เพราะตำแหน่งดังกล่าวสามารถอยู่ได้รอบจุดนั้น หรืออาจกล่าวได้ว่าตำแหน่งดังกล่าวอยู่ในย่านใกล้จุดนั้น ดังนั้นสำหรับการหาลิมิตของฟังก์ชันเชิงซ้อน f เมื่อ z เข้าใกล้ z_0 ต้องพิจารณาเมื่อ z เข้าใกล้ z_0 ทุกทิศทาง ดังที่ ประสิทธิ์ ลิ้มบุพศิริพร (2557 : 51) ได้ให้บทนิยามไว้ดังต่อไปนี้

บทนิยาม 2.18

กำหนดให้ D เป็นโดเมนใน $\mathbb{C}$ และ z_0 เป็นจุดเกาะกลุ่มของ D สมมติว่า $f(z)$ เป็นฟังก์ชันที่นิยามบน D แต่อาจไม่นิยามที่จุด z_0 และให้ $w_0 \in \mathbb{C}$ เรากล่าวว่า ลิมิตของ $f(z)$ ขณะ z เข้าใกล้ z_0 เป็น w_0 ซึ่ง เขียนแทนด้วย

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$$

หมายความว่าสำหรับแต่ละจำนวนจริงบวก ε ใด ๆ มีจำนวนจริงบวก δ ซึ่งมีสมบัติว่า

ถ้า $z \in D$ และ $0 < \left|z - z_0\right| < \delta$ แล้ว $\left|f(z) - w_0\right| < \varepsilon$

จากบทนิยามข้างต้นกล่าวได้ว่าถ้าเราสามารถหา w_0 ที่สอดคล้อกับสมบัติข้างต้นได้แล้ว เรากล่าวว่า ลิมิตของ $f(z)$ ที่จุด z_0 หาค่าได้ หรือกล่าวอีกอย่างว่า $f(z)$ มีค่าลิมิตที่จุด z_0 แสดงได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2.24 จงพิสูจน์ว่า $\lim\limits_{z \to 1} \dfrac{iz}{4} = \dfrac{i}{4}$

วิธีทำ ในที่นี้งต้องแสดงให้เห็นว่า สำหรับแต่ละค่า $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ที่ซึ่งถ้า

$0 < \left|z - z_0\right| < \delta$ แล้วจะต้องได้ว่า $\left|f(z) - w_0\right| < \varepsilon$

ให้ $\varepsilon > 0$

เลือก $\delta = 4\varepsilon$

สำหรับ $z \neq 1$ ซึ่ง $0 < \left|z - 1\right| < 4\varepsilon$

ทำให้ $$\begin{aligned} \left|f(z) - w_0\right| &= \left|\frac{iz}{4} - \frac{i}{4}\right| \\ &= \left|\frac{i}{4}\right|\left|z - 1\right| \\ &< \frac{1}{4}(\delta) \\ &= \frac{1}{4}(4\varepsilon) \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

ดังนั้น $\lim\limits_{z \to 1} \frac{iz}{4} = \frac{i}{4}$

ตัวอย่าง 2.25 จงพิสูจน์ว่า $\lim\limits_{z \to 0} (z + 2i) = 2i$

วิธีทำ ในที่นี้ต้องแสดงให้เห็นว่า สำหรับแต่ละค่า $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ที่ซึ่งถ้า

$0 < \left|z - z_0\right| < \delta$ แล้วจะต้องได้ว่า $\left|f(z) - w_0\right| < \varepsilon$

ให้ $\varepsilon > 0$

เลือก $\delta = \varepsilon$

สำหรับ $z \neq 0$ ซึ่ง $0 < \left|z - 0\right| < \delta$

ทำให้ $$\begin{aligned} \left|f(z) - w_0\right| &= \left|z + 2i - 2i\right| \\ &= \left|z - 0\right| \\ &< \delta \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

ดังนั้น $\lim\limits_{z \to 0} (z + 2i) = 2i$

ตัวอย่าง 2.26 จงพิสูจน์ว่า $\lim\limits_{z \to 1+i} (2 + i)z = 1 + 3i$

วิธีทำ ในที่นี้ต้องแสดงให้เห็นว่า สำหรับแต่ละค่า $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ที่ซึ่งถ้า

$0 < \left|z - z_0\right| < \delta$ แล้วจะต้องได้ว่า $\left|f(z) - w_0\right| < \varepsilon$

ให้ $\varepsilon > 0$

เลือก $\delta = \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{5}}$

สำหรับ z ซึ่ง $0 < \left|z - (1+i)\right| < \delta$

ทำให้
$$
\begin{aligned}
\left|f(z) - w_0\right| &= \left|(2+i)z - (1+3i)\right| \\
&= \left|2+i\right|\left|z - \frac{1+3i}{2+i}\right| \\
&= \sqrt{5}\left|z - \frac{(1+3i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}\right| \\
&= \sqrt{5}\left|z - \frac{(5+5i)}{2^2+1^2}\right| \\
&= \sqrt{5}\left|z - \frac{5(1+i)}{5}\right| \\
&= \sqrt{5}\left|z - (1+i)\right| \\
&< \sqrt{5}\,\delta \\
&= \sqrt{5}\,\frac{\varepsilon}{\sqrt{5}} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $\lim\limits_{z \to 1+i} (2+i)z = 1+3i$

และสำหรับการเขียนลิมิตอาจเขียนในรูปแบบอื่น ๆ ได้อีกเช่น ลิมิตของ f เมื่อ $z = x + yi$ มีค่าเข้าใกล้จุดคงที่ $z_0 = x_0 + y_0 i$ เท่ากับ L อาจเขียนแทนด้วย

$$\lim_{x+yi \to x_0+y_0 i} f(z) = L \quad \text{หรือ} \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(z) = L$$

การหาลิมิตของฟังก์ชันโดยใช้นิยามนั้นเป็นการไม่สะดวก ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตของฟังก์ชันจึงมีความสำคัญมากในการหาลิมิตของฟังก์ชันเชิงซ้อนต่าง ๆ และเป็นความรู้พื้นฐานที่จะนำไปใช้ใน

การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่เป็นรูปแบบของลิมิตอีกอย่างหนึ่งซึ่งจะกล่าว และจะสังเกตได้ว่าทฤษฎีบทเรื่องลิมิตจะคล้ายกับทฤษฎีบทของลิมมิตของฟังก์ชันค่าจริงสองตัวแปรที่เคยได้ศึกษามาแล้วนั้น นั้นคือการที่ z เข้าใกล้ z_0 ในระนาบเชิงซ้อนนั้นก็เหมือนกับการที่จุด (x,y) เข้าใกล้ (x_0,y_0) ในระนาบสองมิติ นั่นคือการจะกล่าวว่า $\lim_{z\to z_0} f(z)=L$ นั้นค่า $f(z)$ จะต้องเข้าใกล้ L เสมอไม่ว่า z จะเข้าใกล้ z_0 ในทิศทางใดก็ตาม ดังนั้นการหาลิมิตของฟังก์ชันตัวแปรเชิงซ้อนจึงมีหลักเช่นเดียวกับฟังก์ชันค่าจริง ดัง ณัฐกร สุคันธมาลา (2559 : 22) ได้กล่าวไว้ในทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.3

ถ้า $\lim_{z\to z_0} f(z)$ หาค่าได้ แล้วลิมิตนั้นต้องมีเพียงค่าเดียวเท่านั้น

พิสูจน์

กำหนดให้ $\lim_{z\to z_0} f(z)=K$ และ $\lim_{z\to z_0} f(z)=L$

สำหรับแต่ละค่า $\varepsilon>0$ จะมี $\delta>0$ ที่ซึ่งถ้ากำหนดว่า $0<\left|z-z_0\right|<\delta$

แล้วจะต้องได้ว่า $\left|f(z)-K\right|<\frac{\varepsilon}{2}$ และ $\left|f(z)-L\right|<\frac{\varepsilon}{2}$

ดังนั้น
$$\begin{aligned}
\left|K-L\right| &= \left|\left(f(z)-L\right)-\left(f(z)-K\right)\right| \\
&= \left|\left(f(z)-L\right)+\left[-\left(f(z)-K\right)\right]\right| \\
&\le \left|\left(f(z)-L\right)\right|+\left|\left(f(z)-K\right)\right| \\
&< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

หมายความว่าทุก ๆ $\varepsilon>0$ ที่เรากำหนดขึ้นมาจะปรากฏว่า $\left|K-L\right|<\varepsilon$ เสมอเป็นไปได้กรณีเดียวเท่านั้นคือ $\left|K-L\right|=0$ นั่นคือ $K=L$

นอกจากทฤษฎีที่กล่าวมาข้างต้นแล้วนั้นยังมีทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับการหาลิมิตของฟังก์ชันตัวแปรเชิงซ้อนดังที่ พัชรา วันเพ็ญ (2529 : 59) ได้กล่าวไว้ดังต่อไปนี

ทฤษฎีบท 2.4

กำหนดให้ $\lim_{z \to z_0} f(z) = K$ และ $\lim_{z \to z_0} g(z) = L$ แล้ว

1. $\lim_{z \to z_0} \left[f(z) + g(z) \right] = \lim_{z \to z_0} f(z) + \lim_{z \to z_0} g(z) = K + L$.
2. $\lim_{z \to z_0} \left[f(z) \cdot g(z) \right] = \lim_{z \to z_0} f(z) \cdot \lim_{z \to z_0} g(z) = KL$
3. $\lim_{z \to z_0} \left[\frac{f(z)}{g(z)} \right] = \frac{\lim_{z \to z_0} f(z)}{\lim_{z \to z_0} g(z)} = \frac{K}{L}$ สำหรับ $L \neq 0$

สำหรับการพิสูจน์นั้นก็จะคล้าย ๆ กับการพิสูจน์ในเรื่องลิมิตของจำนวนจริง ดังนั้นจึงไม่พิสูจน์ในเอกสารนี้และนอกจากทฤษฎีที่ได้กล่าวมาข้างต้นแล้ว ณัฐกร สุคันธมาลา (2559 : 23) ยังได้ให้ทฤษฎีบทเพิ่มเติมดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.5

1. $\lim_{z \to z_0} z = z_0$
2. $\lim_{z \to z_0} z^n = (z_0)^n$
3. $\lim_{z \to z_0} k = k$ เมื่อ k เป็นค่าคงตัวเชิงซ้อน
4. $\lim_{z \to z_0} P(z) = P(z_0)$ เมื่อ $P(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j$ และ

   a_j เป็นค่าคงตัวเชิงซ้อนที่ $a_n \neq 0$
5. ถ้า $\lim_{z \to z_0} f(z) = K$ แล้ว $\lim_{z \to z_0} \left| f(z) \right| = \left| K \right|$

ในการแสดงว่าลิมิตของฟังก์ชันหาค่าได้หรือไม่นั้น เราต้องพิจารณาลิมิตของฟังก์ชันตามเส้นทางต่าง ๆ ถ้าค่าของลิมิตบน 2 เส้นทางนั้นมีค่าแตกต่างกัน ก็จะสรุปได้ทันทีว่าลิมิตหาค่าไม่ได้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2.27 จงแสดงว่า $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\overline{z}}{z}$ หาค่าไม่ได้

วิธีทำ ถ้าลิมิตหาค่าได้เมื่อ z เข้าใกล้ 0 ทางใดก็ตาม ค่าลิมิตจะหาได้เท่ากัน ในการแสดงว่าลิมิตหาค่าไม่ได้ จะพิจารณา z เข้าใกล้ 0 ใน 2 ทาง ดังต่อไปนี้

1. .ให้ z เข้าใกล้ 0 ตามแกนจริง นั่นคือ $y=0$

ให้ $z = x + yi$ และ

$\overline{z} = x - yi$

เมื่อ $y=0$ นั่นคือ $z = x$ และ $\overline{z} = x$

นั่นคือ
$$\lim_{z\to 0}\frac{\overline{z}}{z} = \lim_{z\to 0}\frac{x}{x}$$
$$= 1$$

2. .ให้ z เข้าใกล้ 0 ตามแกนจินตภาพ นั่นคือ $x = 0$

ให้ $z = x + yi$ และ

$\overline{z} = x - yi$

เมื่อ $x = 0$ นั่นคือ $z = yi$ และ $\overline{z} = -yi$

นั่นคือ
$$\lim_{z\to 0}\frac{\overline{z}}{z} = \lim_{z\to 0}\frac{-yi}{yi}$$
$$= -1$$

จะเห็นว่า z เข้าใกล้ 0 ตามแกนจริง และ แกนจินตภาพ ทำให้ $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\overline{z}}{z}$ ได้ค่าแตกต่างกัน

ดังนั้น $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\overline{z}}{z}$ หาค่าไม่ได้

ตัวอย่าง 2.28 กำหนดให้ $f(z) = \dfrac{xy}{x^2+y^2} - \dfrac{y^2}{x^2}i$ จงแสดงว่า $\lim\limits_{z\to 0} f(z)$ หาค่าไม่ได้

วิธีทำ ถ้าลิมิตหาค่าได้เมื่อ z เข้าใกล้ 0 ทางใดก็ตาม ค่าลิมิตจะหาได้เท่ากัน ในการแสดงว่าลิมิตหาค่าไม่ได้ จะพิจารณา z เข้าใกล้ 0 ใน 2 ทางดังต่อไปนี้

1. .ให้ z เข้าใกล้ 0 ตามเส้นตรง $y = x$

นั่นคือ
$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0}\left(\frac{xx}{x^2+x^2} - \frac{x^2}{x^2}i\right)$$

$$= \lim_{z \to 0} \left(\frac{x^2}{2x^2} - i \right)$$

$$= \lim_{z \to 0} \left(\frac{1}{2} - i \right)$$

$$= \frac{1}{2} - i$$

2. .ให้ z เข้าใกล้ 0 ตามเส้นตรง $y = 2x$

นั่นคือ $$\lim_{z \to 0} f(z) = \lim_{z \to 0} \left(\frac{x(2x)}{x^2 + (2x)^2} - \frac{(2x)^2}{x^2} i \right)$$

$$= \lim_{z \to 0} \left(\frac{2x^2}{x^2 + 4x^2} - \frac{4x^2}{x^2} i \right)$$

$$= \lim_{z \to 0} \left(\frac{2}{5} - 4i \right) i$$

$$= \frac{2}{5} - 4i$$

จะเห็นว่า z เข้าใกล้ 0 ตามเส้นตรง $y = x$ และ $y = x$ ทำให้ $\lim_{z \to 0} f(z)$ ได้ค่าแตกต่างกัน

ดังนั้น $\lim_{z \to 0} f(z)$ หาค่าไม่ได้

ตัวอย่าง 2.29 จงหาค่าของ $\lim_{z \to 1+i} (z^2 - 5z + 10)$

วิธีทำ $$\lim_{z \to 1+i} (z^2 - 5z + 10) = \lim_{z \to 1+i} z^2 - \lim_{z \to 1+i} 5z + \lim_{z \to 1+i} 10$$

$$= \lim_{z \to 1+i} z^2 - \lim_{z \to 1+i} 5z + \lim_{z \to 1+i} 10$$

$$= \lim_{z \to 1+i} z^2 - \left(\lim_{z \to 1+i} 5 \cdot \lim_{z \to 1+i} z \right) + \lim_{z \to 1+i} 10$$

$$= (1+i)^2 - 5(1+i) + 10$$

$$= (1+i)(1+i) - 5(1+i) + 10$$

$$= 2i - 5 - 5i + 10$$

$$= 5 - 3i$$

ดังนั้น $\lim_{z \to 1+i} (z^2 - 5z + 10) = 5 - 3i$

ตัวอย่าง 2.30 จงหาค่าของ $\lim\limits_{z\to -2i}\dfrac{(2z+3)(z-1)}{z^2-2z+4}$

วิธีทำ
$$\begin{aligned}\lim_{z\to -2i}\frac{(2z+3)(z-1)}{z^2-2z+4} &= \frac{\lim\limits_{z\to -2i}(2z+3)(z-1)}{\lim\limits_{z\to -2i}(z^2-2z+4)}\\ &= \frac{\lim\limits_{z\to -2i}(2z+3)\lim\limits_{z\to -2i}(z-1)}{\lim\limits_{z\to -2i}(z^2-2z+4)}\\ &= \frac{\left[2(-2i)+3\right]\left[(-2i)-1\right]}{(-2i)^2-2(-2i)+4}\\ &= \frac{(-4i+3)(-2i-1)}{-4+4i+4}\\ &= \frac{-11-2i}{4i}\\ &= -\frac{1}{2}+\frac{11}{4}i\end{aligned}$$

ดังนั้น $\lim\limits_{z\to -2i}\dfrac{(2z+3)(z-1)}{z^2-2z+4} = -\dfrac{1}{2}+\dfrac{11}{4}i$

ตัวอย่าง 2.31 จงหาค่าของ $\lim\limits_{z\to 1+i}\dfrac{z^2-z+1-i}{z^2-2z+2}$

วิธีทำ $\lim\limits_{z\to 1+i}\dfrac{z^2-z+1-i}{z^2-2z+2} = \dfrac{(1+i)^2-(1+i)+1-i}{(1+i)^2-2(1+i)+2} = \dfrac{0}{0}$ ซึ่งอยู่ในรูปแบบยังไม่กำหนด

โดยความรู้พื้นฐานจากแคลคูลัส จะได้

$$\begin{aligned}\lim_{z\to 1+i}\frac{z^2-z+1-i}{z^2-2z+2} &= \lim_{z\to 1+i}\frac{(z+i)(z-1-i)}{(z-1+i)(z-1-i)}\\ &= \lim_{z\to 1+i}\frac{(z+i)}{(z-1+i)}\\ &= \frac{(1+i)+i}{(1+i)-1+i}\\ &= \frac{1+2i}{2i}\\ &= 1+\frac{1}{2}i\end{aligned}$$

ดังนั้น $\lim\limits_{z\to 1+i}\dfrac{z^2-z+1-i}{z^2-2z+2} = 1+\dfrac{1}{2}i$

สำหรับการตรวจสอบความต่อเนื่องของฟังก์ชันตัวแปรเชิงซ้อนนั้น (สมเกียรติ ตั้งพูลผล (2535 : 29) ได้ให้บทนิยามไว้ดังต่อไปนี้

บทนิยาม 2.19

ให้ฟังก์ชัน $f(z)$ หาค่าได้ที่จุดในย่านจุด z_0 รวมทั้งที่จุด z_0 เองด้วย เราเรียก $f(z)$ **ต่อเนื่อง** ที่จุด z_0 ก็ต่อเมื่อทุกค่าของ $\varepsilon > 0$ ที่กำหนดจะหาค่า $\delta > 0$ ได้ที่ $\left|f(z) - f(z_0)\right| < \varepsilon$ เมื่อ $\left|z - z_0\right| < \delta$

จากบทนิยามเรากล่าวได้ว่า $f(z)$ ต่อเนื่อง ที่จุด z_0 นั้นต้องมีคุณสมบัติ 3 ข้อต่อไปนี้

1. $f(z_0)$ หาค่าได้
2. $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ หาค่าได้
3. $f(z_0) = \lim\limits_{z \to z_0} f(z)$

ถ้า $f(z)$ ขาดคุณสมบัติข้อใดข้อหนึ่งในสามข้อก็จะทำให้ $f(z)$ ไม่ต่อเนื่องที่จุด z_0

ตัวอย่าง 2.32 กำหนดให้ $f(z) = 2z^3 + i$ จงตรวจสอบว่า $f(z)$ ต่อเนื่องที่จุด $z = i$ หรือไม่

วิธีทำ ตรวจสอบคุณสมบิต 3 ข้อต่อไปนี้

1. $f(i) = 2i^3 + i = -2i + i = -i$
2. $\lim\limits_{z \to i}(2z^3 + i) = 2i^3 + i = -2i + i = -i$
3. $f(i) = \lim\limits_{z \to i}(2z^3 + i)$

ดังนั้น $f(z) = 2z^3 + i$ ต่อเนื่องที่จุด $z = i$

ตัวอย่าง 2.33 กำหนดให้ $f(z) = \dfrac{3z^2 + i - 5}{z^2 + 1}$ จงตรวจสอบว่า $f(z)$ ต่อเนื่องที่จุด $z = i$ หรือไม่

วิธีทำ ตรวจสอบคุณสมบิต 3 ข้อต่อไปนี้

1. $f(i) = \dfrac{3i^2 + i - 5}{i^2 + 1} = \dfrac{-3 + i - 5}{-1 + 1}$ หาค่าไม่ได้

ไม่ต้องพิจารณาข้อ 2 และ 3 ต่อ

ดังนั้น $f(z) = \dfrac{3z^2 + i - 5}{z^2 + 1}$ ไม่ต่อเนื่องที่จุด $z = i$

การตรวจสอบความต่อเนื่องของฟังก์ชันนอกจากใช้บทนิยาม 2.19 แล้วเรายังสามารถใช้ทฤษฎีบทที่ สมถวิล ขันเขตต์ (2558 : 54) ได้ให้ไว้ดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.5

ให้ $f(z) = u(x,y) + v(x,y)i$ f มีความต่อเนื่องที่จุด z_0 ก็ต่อเมื่อ $u(x,y)$ และ $v(x,y)$ ต่อเนื่องที่จุด $z_0 = x_0 + iy_0$

ตัวอย่าง 2.34 กำหนดให้ $f(z) = \dfrac{1}{z}$ จงตรวจสอบว่า $f(z)$ ต่อเนื่องที่จุด $z = 0$ หรือไม่

วิธีทำ จาก $f(z) = \dfrac{1}{z}$ และให้ $z = x + yi$

จะได้ $f(z) = \dfrac{1}{x+yi} = \dfrac{x}{x^2+y^2} - \dfrac{y}{x^2+y^2}i$

นั่นคือส่วนจริง $u(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$

และส่วนจินตภาพ $v(x,y) = -\dfrac{y}{x^2+y^2}$

สำหรับการตรวนสอบว่า $f(z)$ ต่อเนื่องที่จุด $z = 0$ หรือไม่นั้นจากทฤษฎีบท

ตรวจสอบว่า $u(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$ ต่อเนื่องที่จุด $z = 0$ หรือไม่

พิจารณา 3 ข้อต่อไปนี้

จาก $z = 0 = 0 + 0i$

1. $u(0,0) = \dfrac{0}{0^2+0^2}$ หาค่าไม่ได้

   ไม่ต้องพิจารณาข้อ 2 และ 3 ต่อ

   นั่นคือ $u(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$ ไม่ต่อเนื่องที่จุด $z = 0$

ดังนั้น $f(z) = \dfrac{1}{z}$ ไม่ต่อเนื่องที่จุด $z = 0$

การดำเนินการทางพีชคณิตบางตัวนั้นยังทำให้คุณสมบัติของความต่อเนื่องยังคงอยู่ ดังทฤษฎีบทที่ ก่อสุข วีระถาวร (2542 : 70)

ทฤษฎีบท 2.6

ให้ $f(z)$ และ $g(z)$ มีความต่อเนื่องที่จุด z_0 ดังนั้นฟังก์ชันต่อไปนี้มีความต่อเนื่องที่จุด z_0 ด้วย

1. $f(z)+g(z)$
2. $f(z)-g(z)$
3. $f(z)\cdot g(z)$
4. $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ เมื่อ $g(z)\neq 0$

2.5 อนุพันธ์ของฟังก์ชัน

ในการศึกษาถึงอนุพันธ์ของฟังก์ชันเชิงซ้อนนั้น นิยามและทฤษฎีบทต่าง ๆ จะคล้ายกับฟังก์ชันค่าจริงของตัวแปรจริง แต่จะมีคุณสมบัติเฉพาะของฟังก์ชันที่เพิ่มเข้ามา นั้นคือการเป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ ซึ่งสามารถนำไปประยุกต์ใช้ในสาขาวิชาอื่น ๆ ได้ สำหรับบทนิยามของอนุพันธ์ของฟังก์ชันนั้น ประสิทธิ์ ลิ้มบุพศิริพร (2557 : 65-66) ได้ให้บทนิยามและทฤษฎีบทไว้ดังต่อไปนี้

บทนิยาม 2.20

กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนย่านจุดหนึ่งของ z_0 เรากล่าวว่า f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่จุด z_0 หรือกล่าวว่า f มีอนุพันธ์ที่จุด z_0 ถ้า

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

หาค่าได้ ในกรณีนี้เราเรียกลิมิตนี้ว่า **อนุพันธ์** ของ f ที่จุด z_0 ซึ่งเขียนแทนด้วย $f'(z_0)$ หรือ $\dfrac{df}{dz}(z_0)$

หมายเหตุ 2.1

1. ค่าของอนุพันธ์ฟังก์ชันเชิงซ้อนเป็นจำนวนเชิงซ้อน

2. อนุพันธ์ของ f ที่จุด z_0 สามารถเขียนได้ในรูปลิมิตต่อไปนี้

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

ในที่นี้ Δz แทน $z - z_0$ ในบทนิยามข้างต้น

3. อนุพันธ์ของ f ที่จุด z ใด ๆ สามารถเขียนได้ในรูปลิมิตต่อไปนี้

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

ตัวอย่าง 2.35 กำหนดให้ $f(z) = z^2$ จงหา $f'(i)$ โดยใช้บทนิยาม

วิธีทำ จากบทนิยามจะได้ $f'(z_0) = \lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$

จะได้
$$\begin{aligned} f'(i) &= \lim_{z \to i} \frac{z^2 - i^2}{z - i} \\ &= \lim_{z \to i} \frac{(z-i)(z+i)}{z-i} \\ &= \lim_{z \to i} z + i \\ &= 2i \end{aligned}$$

ดังนั้น $f'(i) = 2i$

ตัวอย่าง 2.36 กำหนดให้ $f(z) = z^2 - 5z$ จงหา $f'(z)$ โดยใช้บทนิยาม

วิธีทำ จากบทนิยาม $f'(z) = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$

จะได้
$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\left[(z + \Delta z)^2 - 5(z + \Delta z)\right] - \left[z^2 - 5z\right]}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\left[z^2 + 2z\Delta z + \Delta z^2 - 5z - 5\Delta z\right] - \left[z^2 - 5z\right]}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{z^2 + 2z\Delta z + \Delta z^2 - 5z - 5\Delta z - z^2 + 5z}{\Delta z} \end{aligned}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{2z\Delta z + \Delta z^2 - 5\Delta z}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(2z + \Delta z - 5)\Delta z}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} (2z + \Delta z - 5)$$

$$= 2z - 5$$

ดังนั้น $f'(z) = 2z - 5$

ตัวอย่าง 2.37 จงแสดงว่า $f(z) = x + 4yi$ ไม่มีอนุพันธ์ที่จุดใด ๆ

วิธีทำ ให้ z เป็นจุดใด ๆ ในระนาบเชิงซ้อน จะได้ว่า $\Delta z = \Delta x + \Delta yi$

จากบทนิยาม $f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$

จะได้
$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f\left[(x + yi) + (\Delta x + \Delta yi)\right] - f(x + yi)}{\Delta x + \Delta yi}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f\left[(x + \Delta x) + (y + \Delta y)i\right] - f(x + yi)}{\Delta x + \Delta yi}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\left[(x + \Delta x) + 4(y + \Delta y)i\right] - \left[x + 4yi\right]}{\Delta x + \Delta yi}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{x + \Delta x + 4yi + 4\Delta yi - x - 4yi}{\Delta x + \Delta yi}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta x + 4\Delta yi}{\Delta x + \Delta yi}$$

แยกพิจารณาเป็น 2 กรณีดังต่อไปนี้

กรณีที่ 1 $\Delta z \to 0$ บนเส้นตรงที่ขนานกับแกนจริง

จะได้ว่า $\Delta y = 0$ และ $\Delta z = \Delta x$

ทำให้ได้ว่า $\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta x + 4\Delta yi}{\Delta x + \Delta yi} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$

กรณีที่ 2 $\Delta z \to 0$ บนเส้นตรงที่ขนานกับแกนจินตภาพ

จะได้ว่า $\Delta x = 0$ และ $\Delta z = \Delta yi$

ทำให้ได้ว่า $\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta x + 4\Delta yi}{\Delta x + \Delta yi} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{4\Delta yi}{\Delta yi} = 4$

จากทั้งสองกรณีทำให้ได้ว่า $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$ หาค่าไม่ได้

ดังนั้น $f(z) = x + 4yi$ ไม่มีอนุพันธ์ที่จุดใด ๆ

ทฤษฎีบท 2.7

ให้ f เป็นฟังก์ชันค่าเชิงซ้อนและ $z_0 \in \mathbb{C}$ ถ้า f หาอนุพันธ์ได้ที่จุด z_0 แล้ว f ต่อเนื่องที่จุด z_0

พิสูจน์

สำหรับ $z \neq z_0$ จะได้ว่า $f(z) - f(z_0) = \lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \cdot (z - z_0)$

และเนื่องจาก f หาอนุพันธ์ได้ที่จุด z_0 จะได้ว่า $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ หาค่าได้

$$
\begin{aligned}
\text{ดังนั้น}\left[\lim_{z \to z_0} f(z)\right] - f(z_0) &= \lim_{z \to z_0}\left[f(z) - f(z_0)\right] \\
&= \lim_{z \to z_0}\left[\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \cdot z - z_0\right] \\
&= \lim_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \cdot \lim_{z \to z_0}(z - z_0) \\
&= f'(z_0) \cdot 0 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

ทำให้ได้ว่า $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$ นั่นคือ f ต่อเนื่องที่จุด z_0

บทกลับของทฤษฎีบทดังกล่าวไม่เป็นความจริง นั่นคือถ้า f ต่อเนื่องที่ z_0 แล้ว f อาจมีอนุพันธ์ที่ z_0 หรือไม่มีก็ได้

เนื่องจากนิยามของอนุพันธ์ของฟังก์ชันเชิงซ้อนคล้ายคลึงกับนิยามของค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันค่าจริง ดังนั้นจึงสามารถนำสูตรการหาค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันค่าจริงในรายวิชาแคลคูลัสมาใช้จะคล้ายกันดังที่ ณัฐกร สุคันธมาลา (2559 : 34-36) ได้ให้ทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.8 (กฎการหาอนุพันธ์)

ถ้า f มีอนุพันธ์คือ $f'(z)$ และ g มีอนุพันธ์คือ $g'(z)$ แล้วข้อความต่อไปนี้เป็นจริง

1. $\dfrac{d}{dz}c = 0$ และ $\dfrac{d}{dz}cf(z) = cf'(z)$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัวเชิงซ้อน
2. $\dfrac{d}{dz}\left[f(z)+g(z)\right] = f'(z)+g'(z)$
3. $\dfrac{d}{dz}\left[f(z)\cdot g(z)\right] = f(z)\cdot g'(z)+f'(z)\cdot g(z)$
4. $\dfrac{d}{dz}\left[\dfrac{f(z)}{g(z)}\right] = \dfrac{f'(z)\cdot g(z)-f(z)\cdot g'(z)}{\left[g(z)\right]^2}$

พิสูจน์

สำหรับ z_0 ใด ๆ จะได้ว่า

1. ถ้า c เป็นค่าคงตัวเชิงซ้อนแล้ว $f(z)=c$

ดังนั้น $f'(z_0) = \lim\limits_{z\to z_0}\left(\dfrac{c-c_0}{z-z_0}\right) = \lim\limits_{z\to z_0} 0 = 0$

และ
$$f'(z_0) = \left(\lim_{z\to z_0}\frac{cf(z)-cf(z_0)}{z-z_0}\right)$$
$$= c\left(\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right)$$
$$= cf'(z_0)$$

2.
$$(f+g)'(z_0) = \lim_{z\to z_0}\left(\frac{\left[(f+g)(z)\right]-\left[(f+g)(z_0)\right]}{z-z_0}\right)$$
$$= \lim_{z\to z_0}\left(\frac{\left[f(z)+g(z)\right]-\left[f(z_0)+g(z_0)\right]}{z-z_0}\right)$$
$$= \lim_{z\to z_0}\left(\frac{\left[f(z)-f(z_0)\right]+\left[g(z)-g(z_0)\right]}{z-z_0}\right)$$

$$= \lim_{z \to z_0} \left(\frac{\left[f(z) - f(z_0)\right]}{z - z_0} + \frac{\left[g(z) - g(z_0)\right]}{z - z_0} \right)$$

$$= \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} + \lim_{z \to z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}$$

$$= f'(z_0) + g'(z_0)$$

3. $(f \cdot g)'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \left(\frac{\left[(f \cdot g)(z)\right] - \left[(f \cdot g)(z_0)\right]}{z - z_0} \right)$

$$= \lim_{z \to z_0} \left(\frac{\left[f(z).g(z)\right] - \left[f(z_0).g(z_0)\right] + f(z).g(z_0) - f(z).g(z_0)}{z - z_0} \right)$$

$$= \lim_{z \to z_0} \left(\frac{\left[f(z).g(z) - f(z).g(z_0)\right] + \left[f(z).g(z_0) - f(z_0).g(z_0)\right]}{z - z_0} \right)$$

$$= \lim_{z \to z_0} \left(\frac{f(z)\left[g(z) - g(z_0)\right] + g(z_0)\left[f(z) - f(z_0)\right]}{z - z_0} \right)$$

$$= \lim_{z \to z_0} \left(\frac{f(z)\left[g(z) - g(z_0)\right]}{z - z_0} + \frac{g(z_0)\left[f(z) - f(z_0)\right]}{z - z_0} \right)$$

$$= \lim_{z \to z_0} \left(\frac{f(z)\left[g(z) - g(z_0)\right]}{z - z_0} \right) + \lim_{z \to z_0} \left(\frac{g(z_0)\left[f(z) - f(z_0)\right]}{z - z_0} \right)$$

$$= \lim_{z \to z_0} f(z) \cdot \left(\lim_{z \to z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} \right) + \lim_{z \to z_0} g(z_0) \cdot \lim_{z \to z_0} \left(\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right)$$

$$= f(z_0).g'(z_0) + f'(z_0).g(z_0)$$

4. ถ้า $g(z) \neq 0$ ให้ $h(z) = \frac{1}{g(z)}$ แล้ว

$$h'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \left(\frac{\left[h(z)\right] - \left[h(z_0)\right]}{z - z_0} \right)$$

$$= \lim_{z \to z_0} \frac{1}{z - z_0} \left(\frac{1}{g(z)} - \frac{1}{g(z_0)} \right)$$

$$= \lim_{z \to z_0} \frac{1}{z - z_0} \left(\frac{g(z_0) - g(z)}{g(z)g(z_0)} \right)$$

$$= \lim_{z \to z_0} \frac{1}{g(z)g(z_0)} \left(\frac{g(z_0) - g(z)}{z - z_0} \right)$$

$$= -\lim_{z \to z_0} \frac{1}{g(z)g(z_0)} \left(\frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} \right)$$

$$= -\left(\lim_{z \to z_0} \frac{1}{g(z)g(z_0)} \right) \left(\lim_{z \to z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} \right)$$

$$= -\frac{g'(z_0)}{\left[g(z_0) \right]^2}$$

ดังนั้นจาก 3 จะได้ว่า

$$\left[\frac{f}{g} \right]'(z) = \left[f \cdot \frac{1}{g} \right]'(z)$$

$$= f'(z) \cdot \left[\frac{1}{g(z)} \right] + f(z) \cdot \left[\frac{1}{g} \right]'(z)$$

$$= f'(z) \cdot \left[\frac{1}{g(z)} \right] + f(z) \cdot \left(-\frac{g'(z)}{\left[g(z) \right]^2} \right)$$

$$= \frac{f'(z) \cdot g(z) - f(z) \cdot g'(z)}{\left[g(z) \right]^2}$$

นั่นคือ $\frac{d}{dz} \left[\frac{f(z)}{g(z)} \right] = \frac{f'(z) \cdot g(z) - f(z) \cdot g'(z)}{\left[g(z) \right]^2}$

ตัวอย่าง 2.38 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(z) = 5z^2 + 2z - i$

วิธีทำ จาก $f(z) = 5z^2 + 2z - i$

จะได้ $\frac{d}{dz} f(z) = \frac{d}{dz} \left(5z^2 + 2z - i \right)$

$$= \frac{d}{dz} 5z^2 + \frac{d}{dz} 2z - \frac{d}{dz} i$$

$$= 10z + 2$$

ดังนั้น $f'(z) = 10z + 2$

ตัวอย่าง 2.39 กำหนด $f(z)=(z^3+4)(6z^2-5z-2i)$ จงหา $f'(z)$

วิธีทำ $f'(z)=\dfrac{d}{dz}\Big[(z^3+4)(6z^2-5z-2i)\Big]$

$$=(z^3+4)\frac{d}{dx}(6z^2-5z-2i)+(6z^2-5z-2i)\frac{d}{dx}(z^3+4)\Big[\ \ \Big]$$

$$=\big(z^3+4\big)\big(12z-5\big)+\big(6z^2-5z-2i\big)\big(3z^2\big)$$

$$=12z^4-5z^3+48z-20+18z^4-15z^3-3z^2i$$

$$=30z^4-20z^3-3z^2i+48z-20$$

ดังนั้น $f'(z)=30z^4-20z^3-3z^2i+48z-20$

ตัวอย่าง 2.40 กำหนด $f(z)=\dfrac{z-1}{z-3z^5}$ จงหา $f'(z)$

วิธีทำ $f'(z)=\dfrac{d}{dz}\left(\dfrac{z-1}{z-3z^5}\right)$

$$=\frac{\big(z-3z^5\big)\frac{d}{dx}\big(z-1\big)-\big(z-1\big)\frac{d}{dx}\big(z-3z^5\big)}{\big(z-3z^5\big)^2}$$

$$=\frac{\big(z-3z^5\big)\big(1\big)-\big(x-1\big)\big(1-15z^4\big)}{\big(z-3z^5\big)^2}$$

$$=\frac{12z^5-15z^4+1}{\big(z-3z^5\big)^2}$$

ดังนั้น $f'(z)=\dfrac{12z^5-15z^4+1}{\big(z-3z^5\big)^2}$

ทฤษฎีบท 2.9 (กฎลูกโซ่)

ถ้า $w=f(z)$ มีอนุพันธ์ที่ z_0 และ $g(w)$ มีอนุพันธ์ที่ $w_0=f(z_0)$ แล้ว ฟังก์ชันประกอบ $(g\circ f)(z)$ มีอนุพันธ์ที่ z_0 และ

$$(g\circ f)'(z_0)=g'\Big(f(z_0)\cdot f'(z_0)\Big)$$

พิสูจน์

กำหนดให้ $h(w) = \begin{cases} 0 & , w = w_0 \\ \dfrac{g(w) - g(w_0)}{w - w_0} & , w \neq w_0 \end{cases}$

ให้ $w \to w_0$ โดยนิยามของ $h(w)$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \lim_{w \to w_0} h(w) &= \lim_{w \to w_0} \left(\frac{g(w) - g(w_0)}{w - w_0} - g'(w_0) \right) \\ &= \lim_{w \to w_0} \frac{g(w) - g(w_0)}{w - w_0} - \lim_{w \to w_0} g'(w_0) \\ &= g'(w_0) - g'(w_0) \\ &= 0 \\ &= h(w_0) \end{aligned}$$

นั่นคือ $h(w)$ ต่อเนื่องที่ $w_0 = f(z_0)$

เนื่องจาก $w = f(z)$ และ $w_0 = f(z_0)$ ถ้า $z \neq z_0$ จะได้ว่า $w \neq w_0$

นั่นคือ $h\big(f(z)\big) = h(w)$

$$\begin{aligned} &= \frac{g(w) - g(w_0)}{w - w_0} - g'(w_0) \\ &= \frac{g\big(f(z)\big) - g\big(f(z_0)\big)}{f(z) - f(z_0)} - g'(w_0) \end{aligned}$$

ดังนั้น $h\big(f(z)\big) + g'(w_0) = \dfrac{g\big(f(z)\big) - g\big(f(z_0)\big)}{f(z) - f(z_0)}$

จาก $z - z_0 \neq 0$ จะได้ว่า

$$\Big[h\big(f(z)\big) + g'(w_0)\Big] \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{g\big(f(z)\big) - g\big(f(z_0)\big)}{z - z_0}$$

ดังนั้น $(g \circ f)'(z_0) = \displaystyle\lim_{z \to z_0} \frac{(g \circ f)(z) - (g \circ f)(z_0)}{z - z_0}$

$$= \lim_{z \to z_0} \frac{g\big(f(z)\big) - g\big(f(z_0)\big)}{z - z_0}$$

$$= \lim_{z \to z_0} \left(\left[h\left(f(z)\right) + g'(w_0) \right] \left[\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right] \right)$$

$$= \lim_{z \to z_0} \left[h\left(f(z)\right) + g'(w_0) \right] \cdot \lim_{z \to z_0} \left[\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right]$$

จาก $w = f(z)$ ต่อเนื่องที่ z_0 และ $h(w)$ ต่อเนื่องที่ $w_0 = f(z_0)$

ดังนั้น $\lim_{z \to z_0} h\left(f(z)\right) = h\left(f(z_0)\right) = h(w_0) = 0$

จึงได้ว่า $(g \circ f)'(z_0) = \left[\lim_{z \to z_0} g'(w_0) \right] \cdot \lim_{z \to z_0} \left[\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right]$

$$= g'(w_0) \cdot \lim_{z \to z_0} \left[\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right]$$

$$= g'\left(f(z_0)\right) \cdot f'(z_0)$$

หมายเหตุ 2.2

จากกฎลูกโซ่จะได้ว่า

1. $\frac{d}{dz}\left[z^n\right] = nz^{n-1}$ สำหรับทุก $n \in \mathbb{Z}$
2. $\frac{d}{dz}\left[g(z)\right]^n = n\left[g(z)\right]^{n-1} \frac{d}{dz}\left[g(z)\right]$ สำหรับทุก $n \in \mathbb{Z}$

ตัวอย่าง 2.41 กำหนด $f(z) = \dfrac{1}{\left(z^6 - 3z + 1\right)^{11}}$ จงหา $f'(z)$

วิธีทำ $f'(z) = \frac{d}{dz}\left(z^6 - 3z + 1\right)^{-11}$

$$= -11\left(z^6 - 3z + 1\right)^{-12} \frac{d}{dx}\left(z^6 - 3z + 1\right)$$

$$= -11\left(z^6 - 3z + 1\right)^{-12}\left(6z^5 - 3\right)$$

$$= \left(33 - 66z^5 - 3\right)\left(z^6 - 3z + 1\right)^{-12}$$

ดังนั้น $f'(z) = \left(33 - 66z^5 - 3\right)\left(z^6 - 3z + 1\right)^{-12}$

2.6 สมการโคชี-รีมันน์ และฟังก์ชันวิเคราะห์

การแสดงว่าฟังก์ชันค่าเชิงซ้อน f สามารถหาอนุพันธ์ได้ที่จุด z_0 โดยใช้บทนิยามมีความยุ่งยากพอสมควร ยิ่งฟังก์ชันมีความซับซ้อน การหาอนุพันธ์ก็ยิ่งยุ่งยากขึ้นด้วย ในหัวข้อนี้จะศึกษาเงื่อนไขของการมีอนุพันธ์ของฟังก์ชันผ่านสมการโคชี-รีมันน์ ซึ่งสะดวกในการใช้งาน โดยมี 2 รูปแบบ คือ สมการโคชีรี-มันน์ในพิกัดฉาก และสมการโคชี-รีมันน์ในพิกัดเชิงขั้ว ซึ่งสามารถประยุกต์ใช้ให้เหมาะสมกับฟังก์ชันที่ศึกษาได้และ ประสิทธิ์ ลิ้มบุพศิริพร (2557 : 69) ได้ให้ทฤษฎีบทดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.10

ให้ f เป็นฟังก์ชันค่าเชิงเดียวซึ่ง $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ เมื่อ $u(x,y)$ และ $v(x,y)$ เป็นฟังก์ชันค่าจริง ถ้า $f'(z)$ หาค่าได้แล้ว

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ และ } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

พิสูจน์

ให้ $z = x + iy$ และ $\triangle z = \triangle x + i(\triangle y)$

สมมติว่า $f'(z)$ หาค่าได้

จากบทนิยามจะได้ว่า $\lim\limits_{\triangle z \to 0} \dfrac{f(z+\triangle z) - f(z)}{\triangle z}$ หาค่าได้

จาก $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$

พิจารณา $\lim\limits_{\triangle z \to 0} \dfrac{f(z+\triangle z) - f(z)}{\triangle z}$ $\triangle z \to 0$ แยกพิจารณาได้ดังนี้

กรณีที่ $\triangle z \to 0$ ตามแกนจริง ซึ่งจะได้ $\triangle z = \triangle x$ เมื่อ $\triangle z \to 0$ จะได้ $\triangle x \to 0$

$$\text{ดังนั้น } f'(z) = \lim_{\triangle z \to 0} \frac{f(z+\triangle z) - f(z)}{\triangle z}$$

$$= \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(z+\triangle x) - f(z)}{\triangle x}$$

$$f'(z) = \lim_{\triangle z \to 0} \frac{\left[u(x+\triangle x, y) + v(x+\triangle x, y)i\right] - \left[u(x,y) + v(x,y)i\right]}{\triangle z}$$

$$= \lim_{\triangle x \to 0} \frac{u(x+\triangle x, y) + v(x+\triangle x, y)i - u(x,y) - v(x,y)i}{\triangle x}$$

$$= \lim_{\triangle x \to 0} \frac{u(x+\triangle x, y) - u(x,y) + v(x+\triangle x, y)i - v(x,y)i}{\triangle x}$$

$$= \lim_{\triangle x \to 0} \frac{u(x+\triangle x, y) - u(x,y)}{\triangle x} \cdot i \lim_{\triangle z \to 0} \frac{v(x+\triangle x, y) - v(x,y)}{\triangle x}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

กรณีที่ $\triangle z \to 0$ ตามแกนจินตภาพ ซึ่งจะได้ $\triangle z = i(\triangle y)$ เมื่อ $\triangle z \to 0$ จะได้ $\triangle y \to 0$

ดังนั้น $f'(z) = \lim\limits_{\triangle z \to 0} \dfrac{f(z+\triangle z) - f(z)}{\triangle z}$

$$= \lim_{\triangle y \to 0} \frac{f(z+\triangle y) - f(z)}{\triangle y}$$

$$= \lim_{\triangle y \to 0} \frac{\Big[u(x, y+\triangle y) + v(x, y+\triangle y)i\Big] - \Big[u(x,y) + v(x,y)i\Big]}{\triangle y}$$

$$= \lim_{\triangle y \to 0} \frac{u(x, y+\triangle y) + v(x, y+\triangle y)i - u(x,y) - v(x,y)i}{\triangle yi}$$

$$= \lim_{\triangle y \to 0} \frac{u(x, y+\triangle y) - u(x,y) + v(x, y+\triangle y)i - v(x,y)i}{\triangle yi}$$

$$= \lim_{\triangle y \to 0} \frac{\Big[u(x, y+\triangle y) - u(x,y)\Big] + i\Big[v(x, y+\triangle y) - v(x,y)\Big]}{\triangle yi}$$

$$= \frac{1}{i}\lim_{\triangle y \to 0} \frac{u(x, y+\triangle y) - u(x,y)}{\triangle yi} + \lim_{\triangle y \to 0} \frac{v(x, y+\triangle y) - v(x,y)}{\triangle y}$$

$$= \frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$= -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$= \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

จากที่กำหนดให้ f หาอนุพันธ์ได้ ดังนั้น

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{และ} \quad f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

เพราะฉะนั้นจะได้ว่า

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \text{ และ } \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

จากทฤษฎีบทที่กล่าวข้างต้นไปนั้นนั้น สมถวิล ขันเขตต์ (2558 : 59) ได้ให้บทนิยามและทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับสมการโคชี - รีมันน์ไว้ดังต่อไปนี้

บทนิยาม 2.21

กำหนดให้ $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ เรียกสมการ

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \text{ และ } \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

ว่าสมการ **โคชี-รีมันน์**

หมายเหตุ 2.3

เนื่องจากสมการโคชี – รีมันน์ เป็นเงื่อนไขจำเป็นของการมีอยู่ของอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่จุด z_0 จึงสามารถใช้ในการพิจารณาจุดที่ฟังก์ชัน f ไม่สามารถหาอนุพันธ์ได้โดยใช้บทกลับของทฤษฎี 2.11 นั่นคือ ถ้า $\frac{\partial u}{\partial x}\neq\frac{\partial v}{\partial y}$ หรือ $\frac{\partial u}{\partial y}\neq-\frac{\partial v}{\partial x}$ ที่จุด z_0 แล้ว $f'(z_0)$ หาค่าไม่ได้ทุกจุดในระนาบจำนวนเชิงซ้อนหาค่าได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2.42 กำหนดให้ $f(z)=\left|z\right|^2=x^2+y^2=u(x,y)+iv(x,y)$

วิธีทำ จะได้ว่า $u(x,y)=x^2+y^2$ และ

$v(x,y)=0$

โดยการหาอนุพันธ์ย่อยเทียวกับตัวแปร x และ y ได้ว่า

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=2y \qquad \text{และ}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=0 \qquad \frac{\partial v}{\partial x}=0$$

นั่นคือ อนุพันธ์ย่อยไม่สอดคล้องกับสมการโคชี-รีมันน์ทุกจุด $z=x+yi$

ยกเว้นที่จุด z ซึ่ง $x=y=0$

ดังนั้น ฟังก์ชัน f ไม่มีอนุพันธ์ทุกจุด z ซึ่ง $z \neq 0$ แต่ไม่สามารถสรุปที่จุด $z = 0$ ได้

ทฤษฎีบท 2.11

กำหนด $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ ซึ่ง $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial x}$ และ $\dfrac{\partial v}{\partial y}$ มีความต่อเนื่องบนย่านจุด $z_0 = x_0 + iy_0$ และสอดคล้องกับสมการโคชี – รีมันน์ที่จุด z_0 แล้ว $f'(z_0)$ หาค่าได้ และ

$$f'(z_0) = \frac{\partial}{\partial x} u(x_0 y_0) + \frac{\partial}{\partial x} iv(x_0 y_0)$$

หรือ

$$f'(z_0) = \frac{\partial}{\partial y} v(x_0 y_0) - \frac{\partial}{\partial y} iu(x_0 y_0)$$

ตัวอย่าง 2.43 กำหนดให้ $f(z) = z^3 + 5$ จงพิจารณาว่า $f(z)$ หาอนุพันธ์ได้ที่จุดใดบ้าง

วิธีทำ จาก $f(z) = z^3 + 5$

จะได้ $f'(z) = 3z^2$

นั่นคือ $f'(a)$ หาค่าได้สำหรับทุกจำนวนเชิงซ้อน a ใด ๆ

ดังนั้น $f(z)$ หาอนุพันธ์ได้ที่จุด z ใด ๆ

ตัวอย่าง 2.44 กำหนดให้ $f(z) = 3z\overline{z}$ จงพิจารณาว่า $f(z)$ หาอนุพันธ์ได้ที่จุดใดบ้าง

วิธีทำ จากทฤษฎีบท 2.11

แทน $z = x + yi$ ในฟังก์ชันที่กำหนดให้จะได้

$$\begin{aligned} f(z) &= 3(x+yi)(x-yi) \\ &= 3(x^2+y^2) + 0yi \end{aligned}$$

นั่นคือ $u(x,y) = 3(x^2+y^2)$ และ $v(x,y) = 0$ จะได้

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 3y \qquad \text{และ}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

นั้นคือสมการโคชี – รีมันน์จะเป็นจริงเมื่อ $x = 0$ และ $y = 0$ เท่านั้น

ดังนั้น $f(z) = 3z\bar{z}$ หาอนุพันธ์ได้เฉพาะที่จุด $z = 0 + 0i = 0$ เท่านั้น

ตัวอย่าง 2.45 กำหนดให้ $f(z) = (x^3 - 3xy^2 + 1) + (3x^2y - y^3 - 3)i$ หา $f'(z)$

วิธีทำ $f(z) = (x^3 - 3xy^2 + 1) + (3x^2y - y^3 - 3)i$

นั่นคือ $u(x,y) = x^3 - 3xy^2 + 1$ และ $v(x,y) = 3x^2y - y^3 - 3$ จะได้

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -6xy \qquad \text{และ}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 6xy \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2$$

จะเห็นว่า $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}$ และ $\frac{\partial v}{\partial y}$ มีความต่อเนื่องทุกค่า x และ y และสอดคล้องกับสมการโคชี – รีมันน์ จากทฤษฎีบท 2.11

ดังนั้น $f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = (3x^2 - 3y^2) + 6xyi$

จากการหาค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันตัวแปรจำนวนเชิงซ้อน $f(z)$ เราทราบว่าการที่จะบอกว่า $f(z)$ มีอนุพันธ์ ไม่สามารถบอกได้จากเงื่อนไขของสมการโคชี – รีมันน์ แต่หากพูดถึงค่าอนุพันธ์ภายในย่านจุด ε ของจุดหนึ่ง ๆ แล้วเราอาจจะใช้สมการโคชี – รีมันน์มาเป็นเงื่อนไขได้ การที่ $f(z)$ มีค่าอนุพันธ์ภานในย่านจุด ε ของจุดหนึ่ง ๆ นั้นมีชื่อเรียกโดยเฉพาะซึ่งจะกล่าวถึงบทนิยามที่ เกียรติสุดา นาคประสิทธิ์ (2556 : 75) ต่อไปนี้

บทนิยาม 2.22

ถ้ามีย่านจุด z_0 คือ $N_\varepsilon(z_0)$ ซึ่ง f หาอนุพันธ์ได้ที่ทุกค่า z ใน $N_\varepsilon(z_0)$ จะกล่าวว่า f มี**ภาวะวิเคราะห์ที่จุด**

ถ้า f เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่ทุกจุดในบริเวณ R จะกล่าวว่า f เป็น**ฟังก์ชันวิเคราะห์บน** R (analytic on R)

ถ้า f เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่ทุกจุดในระนาบเชิงซ้อนจะกล่าวว่า f เป็น**ฟังก์ชันทั่ว** (entire function)

ตัวอย่าง 2.46 จงพิจารณาว่าฟังก์ชันต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุดใดบ้าง

1. $f(z) = \left|z\right|^2$
2. $f(z) = z^2 + 2z$
3. $f(z) = \overline{z}$

วิธีทำ (1) ให้ $z = x + yi$

จาก $f(z) = \left|z\right|^2$ จะได้ $f(z) = x^2 + y^2$

นั่นคือ $u(x,y) = x^2 + y^2$ และ $v(x,y) = 0$ โดยการหาอนุพันธ์ย่อยเทียบกับตัวแปร x และ y ได้ว่า

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y \qquad \text{และ}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

นั่นคือสมการโคชี-รีมันน์เป็นจริงเมื่อ $x = 0$ และ $y = 0$ เท่านั้น แสดงว่า $f(z) = \left|z\right|^2$ หาอนุพันธ์ได้เฉพาะจุด $z = 0$ เท่านั้นและถ้าพิจารณาฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุด $z = 0$ จะเห็นว่าไม่สามารถหาย่านใกล้เคียงจุด 0 ซึ่ง f หาอนุพันธ์ได้ทุก z ในย่านใกล้เคียงจุด 0

ดังนั้น $f(z) = \left|z\right|^2$ ไม่เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุดใดๆ

(2) จาก $f(z) = z^2 + 2z$ จะได้ $f'(z) = 2z + 2$

จะเห็นว่า f หาอนุพันธ์ได้ทุกค่า z ในระนาบเชิงซ้อน

นั่นคือ f เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ทุกจุดในระนาชเชิงซ้อน

ดังนั้น $f(z) = z^2 + 2z$ เป็นฟังก์ชันทั่ว

(3) ให้ $z = x + yi$

จาก $f(z) = \overline{z}$

จะได้ $f(z) = x - yi$

นั่นคือ $u(x,y) = x$ และ $v(x,y) = -y$ โดยการหาอนุพันธ์ย่อย

เทียบกับตัวแปร x และ y ได้ว่า

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \qquad \text{และ}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -1 \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

พบว่า f ไม่สอดคล้องกับสมการโคชี – รีมันน์ นั่นคือ f หาอนุพันธ์ไม่ได้ทุกค่า z

ดังนั้น $f(z) = z^2 + 2z$ ไม่เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์

ตัวอย่าง 2.47 จงหาบริเวณที่ใหญ่ที่สุดที่ทำให้ฟังก์ชัน $f(z) = \dfrac{x}{x^2+y^2} - \dfrac{y}{x^2+y^2}i$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์

วิธีทำ จาก $f(z) = \dfrac{x}{x^2+y^2} - \dfrac{y}{x^2+y^2}i$ จะได้

$$u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} \qquad \text{และ} \qquad v(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}$$

โดยการหาอนุพันธ์ย่อยเทียบกับตัวแปร x และ y ได้ว่า

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2} \qquad \text{และ}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

พบว่า f สอดคล้องกับสมการโคชี – รีมันน์ สำหรับทุก $z \neq 0$

เนื่องจาก $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial x}$ และ $\dfrac{\partial v}{\partial y}$ ต่อเนื่องทุก ๆ $z = x + yi \neq 0$ นั่นคือ f สามารถหาอนุพันธ์ได้ทุกจุดซึ่ง $z \neq 0$ และ $f'(z_0) = \dfrac{\partial u}{\partial x} + i\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} + \dfrac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}i$

นั่นคือ f เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ในทุกโดเมนซึ่งไม่บรรจุ $z = 0$

ดังนั้น บริเวณที่ใหญ่ที่สุดที่ทำให้ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันวิเคราห์คือ $\mathbb{C} - \{0\}$

2.7 สรุปท้ายบทที่ 2

ฟังก์ชันของตัวแปรเชิงซ้อนคือฟังก์ชันที่ส่งเซตย่อยของจำนวนเชิงซ้อนไปยังเซตของจำนวนเชิงซ้อน และใช้ z เป็นตัวแปร เนื่องจาก $z = x + yi$ เมื่อ x และ y เป็นตัวแปรจริงดังนั้นทุก ๆ ฟังก์ชันของตัวแปรเชิงซ้อนเมื่อแทน z ด้วย $z = x + yi$ แล้วจะสามารถแยกเป็นส่วนจริง และส่วนจินตภาพ ซึ่งทั้งสองส่วนเป็นฟังก์ชันค่าจริงของ x และ y นั่นคือ ฟังก์ชันของตัวแปรเชิงซ้อนสามารถเขียนให้อยู่ในรูป $f(x+yi) = u(x,y) + iv(x,y)$ ฟังก์ชันตัวแปรเชิงซ้อนแตกต่างจากฟังก์ชันค่าจริง นั่นคือฟังก์ชันค่าเชิงซ้อนของตัวแปร z หนึ่งค่าอาจจะมีค่าของฟังก์ชันหลายค่าได้ เรียกว่าฟังก์ชันพหุคูณ ในการศึกษาเกี่ยวกับ ลิมิต ความต่อเนื่อง และอนุพันธ์ จึงมีความแตกต่างจากฟังก์ชันค่าจริง เช่นการจะหา $f'(z)$ ได้ นั่นต้องตรวจสอบ f ว่าสอดคล้องกับสมกาโคชี – รีมันต์นั่นคือ $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$ และ $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$ แล้วจะสามารถหา $f'(z)$ ได้จาก

$$f'(z_0) = \frac{\partial}{\partial x} u(x_0 y_0) + \frac{\partial}{\partial x} iv(x_0 y_0)$$

หรือ

$$f'(z_0) = \frac{\partial}{\partial y} v(x_0 y_0) - \frac{\partial}{\partial y} iu(x_0 y_0)$$

และถ้า f เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุด z_0 แล้ว $f(z_0)$ หาค่าได้

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 2

1. จงวาดกราฟของเซต S ของจุดในระนาบจำนวนเชิงซ้อนซึ่งสอดคล้องกับอสมการที่กำหนดให้ และพิจารณาว่าเซตดังกล่าวเป็นเซตชนิดใดต่อไปนี้

   ก. เซตเปิด ข. เซตปิด ค. โดเมน ง. เซตมีขอบเขต จ. เซตเชื่อมโยง

   11.1 $\operatorname{Re} z < -2$

   11.2 $\operatorname{Im} z > 4$

   11.3 $2 < \left|\operatorname{Re}(z-2)\right| < 5$

   11.4 $1 < \left|z+1-i\right| < 3$

   11.5 $2 \le \left|z-2-3i\right| \le 5$

2. จงหาส่วนจริง $u(x,y)$ และส่วนจินตภาพ $v(x,y)$ ของฟังก์ชันแต่ละข้อต่อไปนี้เมื่อกำหนด $z = x+yi$

   2.1 $f(z) = z^2 + 3z - 5$

   2.2 $f(z) = z^2 + \overline{z}z - 5i$

   2.3 $f(z) = z\overline{z} + 3z$

   2.4 $f(z) = e^{z-z^2}$

   2.5 $f(z) = z^2 + z\left(\dfrac{1-i}{3}\right) + 6$

3. จงหาค่าของฟังก์ชันแต่ละข้อต่อไปนี้ที่ค่าของ z ที่กำหนดให้

   3.1 $f(z) = xy + i(x^2 + y^2)$ $z = -1+2i$

   3.2 $f(z) = z\overline{z} + z - 2\overline{z} + 1$ $z = 4+3i$

   3.3 $f(z) = e^z$ $z = -2-3\pi i$

4. จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้

4.1 $\lim_{z\to 1} z+1$

4.2 $\lim_{z\to 1+i} (z+1)^3$

4.3 $\lim_{z\to 4i} \dfrac{1}{(z^3-1)(z^2+2)}$

4.4 $\lim_{z\to 4i} \dfrac{z^2+4}{2z^2+(3-4i)z-6i}$

4.5 $\lim_{z\to 4i} \dfrac{z^2-2iz-1}{z^4+2z^2+1}$

5. จงหา $f'(z)$ เมื่อกำหนด

5.1 $f(z)=z^2+3z-5$

5.2 $f(z)=e^{-z}$

5.3 $f(z)=iz^2+3$

5.4 $f(z)=\dfrac{z}{z-1}$

5.5 $f(z)=(2iz+5)^2$

5.6 $f(z)=(iz-1)^{-3}$

5.7 $f(z)=\dfrac{z^2+3i}{z-5}$

5.8 $f(z)=\dfrac{z-\sin z}{z^2-1}$

6. จงหา $f'(z_0)$ ของฟังก์ชันแต่ละข้อต่อไปนี้

6.1 $f(z)=2z^2+5$ $\quad z_0=i$

6.2 $f(z)=z^2+3z-5$ $\quad z_0=-1+i$

6.3 $f(z)=iz^2+(1-i)$ $\quad z_0=-3i$

6.4 $f(z)=z^2(1-i)+z-1$ $\quad z_0=-i$

7. จงใช้สมการโคชี – รีมันน์ แสดงว่า $f'(z_0)$ หาค่าไม่ได้ทุกจุดในระนาบจำนวนเชิงซ้อน

7.1 $f(z)=z$

7.2 $f(z)=z-z\overline{z}$

7.3 $f(z)=2x+ixy^2$

7.4 $f(z)=3z\overline{z}+5$

8. จงแสดงว่าฟังก์ชัน $f(z) = x^3 + i(1-y)^3$ สามารถหาอนุพันธ์ได้เพียงจุดเดียวคือ $z = i$ และจงหาค่า $f'(z)$ ที่จุดดังกล่าว

9. จงใช้สมการโคชี – รีมันน์ ทดสอบว่าฟังก์ชันแต่ละข้อต่อไปนี้ที่ใดบ้างเป็นฟังก์ชันวิเคราะห์

9.1 $f(z) = z$

9.2 $f(z) = z - z\overline{z}$

9.3 $f(z) = 2x + ixy^2$

9.4 $f(z) = 3z\overline{z} + 5$

9.5 $f(z) = iz^2 + 3$

9.6 $f(z) = \dfrac{z}{z-1}$

9.7 $f(z) = (2iz+5)^2$

9.8 $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z+1)}$

10. จงแสดงว่าฟังก์ชันต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันทั่ว

10.1 $f(z) = 3x + y + i3(y - x)$

10.2 $f(z) = 3z^2 + 5z - 6i$

10.3 $f(z) = z^3$

10.4 $f(z) = z - 3$

บทที่ 3

ฟังก์ชันมูลฐาน

เป็นที่ทราบกันดีว่าฟังก์ชันมูลฐานที่ศึกษากันในวิชาแคลคูลัสถือเป็นฟังก์ชันที่มีบทบาทสำคัญในการศึกษาคณิตศาสตร์ในหลายแขนงวิชา ซึ่งเราคงได้เคยศึกษา ฟังก์ชันพหุนาม ฟังก์ชันเลขชี้กำลัง ฟังก์ชันลอการิทึม ฟังก์ชันตรีโกณมิติ เป็นต้น จะเห็นว่าชื่อของฟังก์ชันเหล่านี้ สำหรับฟังก์ชันมูลฐานที่จะนำมาศึกษากันในวิชานี้เป็นฟังก์ชันค่าเชิงซ้อนของตัวแปรเชิงซ้อน ฟังก์ชันเหล่านี้ได้แก่ ฟังก์ชันพหุนาม ฟังก์ชันเลขชี้กำลัง ฟังก์ชันตรีโกณมิติ เป็นตน จะเห็นว่าชื่อของฟังก์ชันเหล่านี้เป็นชื่อเดียวกับที่ใช้สำหรับฟังก์ชันมูลฐานของตัวแปรจริง ทั้งนี้เพราะฟังก์ชันดังกล่าวมักสร้างจากฟังก์ชันของตัวแปรจริงในชื่อนั้น ๆ โดยจะใช้การขยายขอบเขตของตัวแปรจริงของฟังก์ชันนั้นให้สามารถใช้กับตัวแปรเชิงซ้อนได้อย่างมีความหมายหรือสร้างโดยอาศัยสมบัติของฟังก์ชันของตัวแปรจริงเป็นตนแบบ ดังนั้นเราจึงมักพบว่าเมื่อเทนตัวแปรเชิงซ้อนด้วยตัวแปรจริงนอกจากนี้ยังพบว่าฟังก์ชันดังกล่าวอาจคงสมบัติที่สำคัญของฟังก์ชันของตัวแปรจริงในชื่อเดียวกันด้วย เราจะได้เรียนรู้แนวคิดเหล่านี้จากหัวข้อต่าง ๆ ดังต่อไปนี้

3.1 ฟังก์ชันเลขชี้กำลัง

ในหัวข้อนี้เราจะศึกษาฟังก์ชันมูลฐานที่สร้างโดยอาศัยฟังก์ชันเลขชี้กำลัง e^x เป็นต้นแบบ เพื่อให้เกิดความเข้าใจในที่มาของการนิยามฟังก์ชันนี้ เราจะเริ่มพิจารณาปัญหาการหาฟังก์ชันค่าเชิงซ้อนที่มีสมบัติสอดคล้องกับสมบัติพื้นฐานของฟังก์ชัน e^x สมมติว่าฟังก์ชันดังกล่าวคือ $f(z)$ เมื่อ z เป็นค่าตัวแปรเชิงซ้อนสมบัติพื้นฐานประการแรกที่จะกล่าวคือ $f(z)$ ควรสามารถคงรูปเดิมของฟังก์ชันเลขชี้กำลังเมื่อ z ถูกกำหนดค่าจริง x กล่าวคือ $f(z)$ ควรมีสมบัติว่า

(1) $$f(x+0i)=e^x$$

นอกจากนี้ $f(z)$ ควรสามารถคงสมบัติที่สำคัญต่าง ๆ ของ e^x เช่น $e^{x_1+x_2}=e^{x_1}e^{x_2}$ จะเห็นว่าสมบัติของ $f(z)$ ที่สอดคล้องกับสมบัติของ e^x ในข้อนี้อาจกล่าวได้ว่าคือ

(2) $$f(z_1+z_2)=f(z_1)f(z_2)$$

สังเกตว่าหากจะนำเพียงสมบัติสองข้อนี้มาวิเคราะห์หาฟังก์ชันที่ต้องการ เราอาจจะทำได้เพียงใช้หลักการคาดเดาเพื่อหาฟังก์ชันที่ต้องการเท่านั้น ดังนั้นเราจึงจำเป็นต้องหาสมบัติอื่นของ e^x ที่ควรนำนวมใช้ในการกำหนดสมบัติของ $f(z)$ คือสมบัติการมีอนุพันธ์ของ e^x เราทราบว่า e^x เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้และ

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x$$

ดังนั้นสมบัติที่เหมาะสมที่ควรนำมากำหนดให้กับ $f(z)$ ในข้อนี้ควรเป็นดังนี้ $f(z)$ เป็นฟังก์ชันทั่วไปโดยที่

(3) $$f'(z) = f(z) \text{ ทุก ๆ } z \in \mathbb{C}$$

จะเห็นว่าสมบัตินี้ถือเป็นสมบัติที่สำคัญที่เพียงพอที่จะนำมาใช้กำหนดรูปแบบของฟังก์ชัน $f(z)$ ได้ กล่าวคือสมมติว่า $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ จากทฤษฎีบท 2.10 จะได้ว่า $f'(z) = \frac{\partial}{\partial x}u(x,y) + i\frac{\partial}{\partial x}v(x,y)$ เนื่องจาก $f' = f$ ดังนั้น ทำให้ได้ว่า

$$u(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}u(x,y) \quad \text{และ} \quad v(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}v(x,y)$$

หาปริพันธ์เทียบกับตัวแปร x จะได้ ว่า

$$u(x,y) = g(y)e^x \quad \text{และ} \quad v(x,y) = h(y)e^x$$

เมื่อ $g(y)$ และ $h(y)$ เป็นฟังก์ชันค่าจริงที่ขึ้นอยู่กับตัวแปร y อย่างเดียวเนื่องจากอนุพันธ์ย่อยของ u และ v สอดคล้องกับสมการโคชี – รีมันน์ ดังนั้น

$$g(y)e^x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = h'(y)e^x \quad \text{และ}$$

$$g'(y)e^x = \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -h(y)e^x$$

หรือจะได้ว่า

(4) $$g(y) = h'(y) \quad \text{และ} \quad g'(y) = -h(y)$$

เพราะฉะนั้น

$$h'' + h' = 0$$

จากการแก้สมการจะได้

$$h(y) = c_1 \cos y + c_2 \sin y$$

โดยที่ c_1, c_2 เป็นค่าคงตัวค่าจริง เมื่อแทน h ในสมการ (1) จะได้

$$g(y) = -c_1 \sin y + c_2 \cos y$$

เพราะฉะนั้น

$$u(x,y) = (-c_1 \sin y + c_2 \cos y)e^x \qquad \text{และ}$$

$$v(x,y) = (c_1 \cos y + c_2 \sin y)e^x$$ ซึ่งทำให้ได้ว่า

$$f(z) = u(x,y) + v(x,y) = Ae^x(c_1 \cos y + c_2 \sin y)$$

เมื่อ $A = c_2 + ic_1$ เนื่องจาก $f(0) = e^0 = 1$ ดังนั้นจะได้ว่า $A = 1$ ดังนั้น f ที่ต้องการมีรูปเป็น

$$f(z) = e^x(\cos y + \sin y) = e^x e^{iy}$$

เห็นได้ชัดว่า $f(z)$ ในรูปนี้มีสมบัติสอดคล้องกับสมการ(1)นอกจากนี้สังเกตว่าจากสมบัติของ e^{iy} ที่กล่าวไว้ในบทที่ 1 เราทราบว่า e^{iy} มีสมบัติสอดคล้องกับสมการ (2) และเราทราบว่า e^x ก็มีสมบัติเช่นกัน ดังนั้น $f(z)$ ในรูปนี้สอดคล้องกับสมการ (2) เช่นกัน ฟังก์ชัน $f(z)$ ที่กล่าวมาข้างต้นเป็นที่มาของบทนิยามต่อไปนี้ (ประสิทธิ์ ลิ้มบุพศิริพร, 2557 : 86-87)

บทนิยาม 3.1

ฟังก์ชันเลขชี้กำลังเชิงซ้อน เขียนแทนด้วย e^z คือฟังก์ชันค่าเชิงซ้อนที่ส่ง $\mathbb{C}$ ไปยัง $\mathbb{C}$ ซึ่งนิยามโดย

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

ทฤษฎีบทต่อไป เกียรติสุดา นาคประสิทธิ์ (2556 : 87) ได้แสดงสมบัติต่าง ๆ ของฟังก์ชันเลขชี้กำลังดังต่อไปนี

ทฤษฎีบท 3.1

ให้ $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ เมื่อ $z = x + yi,\ z_1 = x_1 + y_1 i,$ และ $z_2 = x_2 + y_2 i$

แล้วจะได้ว่า

1. e^z เป็นฟังก์ชันทั่วและ $\dfrac{d}{dz}e^z = e^z$
2. $e^{z+(2k\pi)i} = e^z$ เมื่อ $k \in Z$ นั่นคือ e^z เป็นฟังก์ชันคาบซึ่งมีคาบเท่ากับ $2\pi i$
3. $e^z = 1$ ก็ต่อเมื่อ $z = (2n\pi)i$ เมื่อ $n \in Z$
4. $e^z \neq 0$ สำหรับทุก $z \in \mathbb{C}$
5. $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$
6. $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$
7. $e^{z_1-z_2} = \dfrac{e^{z_1}}{e^{z_2}}$
8. $(e^z)^n = e^{nz}$ เมื่อ $n \in Z$

บทพิสูจน์

ให้ $z = x + yi,\ z_1 = x_1 + y_1 i,$ และ $z_2 = x_2 + y_2 i$

1. ในบทที่ 2 ได้แสดงแล้วว่า ว่าฟังก์ชัน $f(z) = e^x(\cos y + i\sin y)$

   เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ทุกจุด $z \in \mathbb{C}$ และ $f(z) = f'(z)$

   ดังนั้น $\dfrac{d}{dz}e^z = e^z$

2. กำหนดให้ $k \in Z$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} e^{z+(2k\pi)i} &= e^{(x+yi)+(2k\pi)i} \\ &= e^{x+(y+2k\pi)i} \\ &= e^x e^{(y+2k\pi)i} \end{aligned}$$

$$= e^x\left[\cos(y+2k\pi)+i\sin(y+2k\pi)\right]$$
$$= e^x(\cos y + i\sin y)$$
$$= e^z$$

นั่นคือ e^z เป็นฟังก์ชันคาบซึ่งมีคาบเท่ากับ $2\pi i$

3. ให้ $z \in \mathbb{C}$ ซึ่ง $1 = e^z = e^x(\cos y + i\sin y) = e^x\cos y + ie^x\sin y$

นั่นคือ $e^x\cos y = 1$ และ $e^x\sin y = 0$

เนื่องจาก $e^x\sin y = 0$ แสดงว่า $\sin y = 0$ นั่นคือ $y = n\pi$ เมื่อ $n \in Z$

ทำให้ $\cos y = \cos(n\pi) = \pm 1$ เมื่อ $n \in Z$

และเนื่องจาก $e^x\cos y = 1$ และ $e^x > 0$ ดังนั้น $\cos y = 1$

นั่นคือ $x = 0$ และ $y = 2n\pi$ เมื่อ $n \in Z$

ทำให้ได้ว่า $e^z = 1$ ก็ต่อเมื่อ $x = 0$ และ $y = 2n\pi$

ก็ต่อเมื่อ $z = x + yi = 0 + (2n\pi)i = (2n\pi)i$

4. ให้ $z \in \mathbb{C}$ ซึ่ง $e^z = 0$ ดังนั้น

$0 = e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$ ก็ต่อเมื่อ $e^x\cos y = 0$ และ $e^x\sin y = 0$

ก็ต่อเมื่อ $\cos y = 0$ และ $\sin y = 0$

เนื่องจากไม่มีจำนวนจริง y ที่ทำให้ $\cos y = \sin y = 0$

ดังนั้นไม่มี $z \in \mathbb{C}$ ซึ่งทำให้ $e^z = 0$

5. พิจารณา $\overline{e^z}$ จะได้ว่า

$$\overline{e^z} = \overline{e^x(\cos y + i\sin y)}$$
$$= e^x(\cos y - i\sin y)$$
$$= e^x\left[\cos(-y) + i\sin(-y)\right]$$
$$= e^{x-yi}$$
$$= e^{\overline{z}}$$

6. จาก $z_1 = x_1 + y_1 i$ และ $z_2 = x_2 + y_2 i$ จะได้

$$\begin{aligned}
e^{z_1}e^{z_2} &= \left[e^{x_1}(\cos y_1 + i\sin y_1)\right]\left[e^{x_2}(\cos y_2 + i\sin y_2)\right] \\
&= e^{x_1}e^{x_2}\left[(\cos y_1 \cos y_2 - \sin y_1 \sin y_2)\right. \\
&\qquad \left. + i(\cos y_1 \sin y_2 + \sin y_1 \cos y_2)\right] \\
&= e^{x_1+x_2}\left[\cos(y_1 + y_2) + i\sin(y_1 + y_2)\right] \\
&= e^{(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)} \\
&= e^{(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)} \\
&= e^{z_1+z_2}
\end{aligned}$$

7. จาก $z_1 = x_1 + y_1 i$ และ $z_2 = x_2 + y_2 i$ จะได้

$$\begin{aligned}
\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} &= \frac{e^{x_1}(\cos y_1 + i\sin y_1)}{e^{x_2}(\cos y_2 + i\sin y_2)} \\
&= e^{x_1-x_2}\left[\frac{(\cos y_1 + i\sin y_1)}{(\cos y_2 + i\sin y_2)}\cdot\frac{(\cos y_2 - i\sin y_2)}{(\cos y_2 - i\sin y_2)}\right] \\
&= e^{x_1}e^{x_2}\left[\frac{(\cos y_1 \cos y_2 + \sin y_1 \sin y_2) + i(\sin y_1 \cos y_2 - \cos y_1 \sin y_2)}{\cos^2 y_2 + \sin^2 y_2}\right] \\
&= e^{x_1-x_2}\left[\cos(y_1 - y_2) + i\sin(y_1 - y_2)\right] \\
&= e^{(x_1-x_2)+i(y_1-y_2)} \\
&= e^{(x_1+iy_1)-(x_2+iy_2)} \\
&= e^{z_1-z_2}
\end{aligned}$$

8. ให้ $n \in Z$ โดยสูตรของเดอมวฟวร์จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
(e^z)^n &= \left[e^x(\cos y + i\sin y)\right]^n \\
&= e^{nx}\cos(ny) + i\sin(ny) \\
&= e^{nx+i(ny)} \\
&= e^{n(x+iy)} \\
&= e^{nz}
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 3.1 กำหนดให้ $f(z)=e^{z}$ จงหา

1. $f(2\pi i)$ 2. $f(3\pi i)$ 3. $f\left(\frac{\pi}{2}i\right)$ 4. $f\left(-\frac{\pi}{2}i\right)$

วิธีทำ 1. $f(2\pi i)=e^{0+2\pi i}$

$$=e^{0}\left[\cos 2\pi+i\sin 2\pi\right]$$

$$=1\left[1+i(0)\right]$$

$$=1$$

ดังนั้น $f(2\pi i)=1$

2. $f(3\pi i)=e^{0+3\pi i}$

$$=e^{0}\left[\cos 3\pi+i\sin 3\pi\right]$$

$$=1\left[(-1)+i(0)\right]$$

$$=-1$$

ดังนั้น $f(3\pi i)=-1$

3. $f\left(\frac{\pi}{2}i\right)=e^{0+\frac{\pi}{2}i}$

$$=e^{0}\left[\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right]$$

$$=1\left[(0)+i(1)\right]$$

$$=i$$

ดังนั้น $f\left(\frac{\pi}{2}i\right)=i$

4. $f\left(-\frac{\pi}{2}i\right) = e^{0-\frac{\pi}{2}i}$

$$= e^{0}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$= 1\left[(0) + i(-1)\right]$$

$$= -i$$

ดังนั้น $f\left(-\frac{\pi}{2}i\right) = -i$

ตัวอย่าง 3.2 จงหาค่า z ทั้งหมดจากสมการ $e^{z} = 2+2i$

วิธีทำ พิจารณา $\left|2+2i\right| = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

นั่นคือ $2+2i = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

จากสมการ $e^{z} = 2+2i$ จะได้ว่า

$$e^{z} = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \qquad \text{หรือ}$$

$$e^{x}\left(\cos y + i\sin y\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

นั่นคือ $e^{x} = 2\sqrt{2}$ และ $y = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ เมื่อ $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

หาผลผลเฉลยของสมการ $e^{x} = 2\sqrt{2}$ ดังต่อไปนี้

จาก $e^{x} = 2\sqrt{2}$

$$\ln e^{x} = \ln 2\sqrt{2}$$

$$x = \ln 2\sqrt{2}$$

ดังนั้น ค่า z ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการ $e^{z} = 2+2i$ คือ

$$z = x + yi = \ln 2\sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) \text{ เมื่อ } k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

ตัวอย่าง 3.3 จงหาค่า z ทั้งหมดจากสมการ $e^{z} = 3+4i$

วิธีทำ จากสมการ $e^{z} = 3+4i$

ให้ $z = x+yi$

จะได้

$$e^{x+yi} = 3+4i$$

$$e^{x}(\cos y + i\sin y) = 3+4i$$

$$e^{x}\cos y + ie^{x}\sin y = 3+4i$$

นั่นคือ

(1) $\qquad e^{x}\cos y = 3$ $\qquad$ และ

(2) $\qquad e^{x}\sin y = 4$

จาก (1) จะได้

(3) $\qquad e^{2x}\cos^{2} y = 9$

จาก (2) จะได้

(4) $\qquad e^{2x}\sin^{2} y = 16$

หาค่า x โดยนำสมการ (3) บวก (4) จะได้

$$e^{2x}\cos^{2} y + e^{2x}\sin^{2} y = 25$$

$$e^{2x}\left(\cos^{2} y + \sin^{2} y\right) = 25$$

$$e^{2x} = 25$$

$$\ln e^{2x} = \ln 25$$

$$2x\ln e = \ln 25$$

$$2x = \ln 25$$

$$x = \frac{1}{2}\ln 25$$

$$x = \ln 5$$

$$x = 1.609$$

หาค่า y โดยนำสมการ (2) หาร (1) จะได้

$$\tan y = \frac{4}{3}$$
$$y = \tan^{-1}\frac{4}{3} \approx 0.927$$

นั่นคือค่าของ z ค่าหนึ่งคือ $z = 1.609 + 0.927i$

แต่เนื่องจาก e^z เป็นฟังก์ชันค่าบที่มีคาบเท่ากับ $2\pi i$

ดังนั้น ค่า z ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการ $e^z = 3 + 4i$ คือ

$$z = x + yi = 1.609 + i\left(0.927 + 2k\pi\right) \text{ เมื่อ } k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

3.2 ฟังก์ชันลอการิทึม

จากบทนิยามของฟังก์ชันลอการีทึมของจำนวนจริงเราทราบว่าลอการีทึมของจำนวนจริง x ใด ๆ คือผลเฉลยของสมการในรูป

$$e^y = x$$

ดังนั้นในการกำหนดบทนิยามของลอการิทึมของจำนวนเชิงซ้อน เราจะเริ่มจากการพิจารณาการมีผลเฉลยของสมการในลักษณะเดียวกัน คือ กำหนดให้ z เป็นจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ ที่ไม่เป็นศูนย์ พิจารณาจำนวนเชิงซ้อน w ที่สอดคล้องกับสมการ

(5) $$e^w = z$$

สมมติว่า $w = u + vi$ เป็นผลเฉลยของสมการ (5) เพื่อประโยชน์ในการพิจารณาผลเฉลย เราสมมติให้ $z = re^{i\theta}$ โดยที่ $\theta = \operatorname{Arg}(z)$ ดังนั้นเมื่อแทนค่า w ในสมการ (5) จะได้

$$e^u e^{iv} = re^{i\theta}$$

ทำให้ได้ว่า

$$e^u = r \qquad \text{และ } v = \theta + 2n\pi \qquad \text{เมื่อ } n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

ดังนั้น

$$w = u + vi = \ln\left|z\right| + i\left(\operatorname{Arg}(z) + 2n\pi\right) \text{ เมื่อ } n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

จากที่กล่าวมาข้างต้นนั้น ประสิทธิ์ ลิ้มบุพศิริพร (2557 : 103) ได้ให้บทนิยามของลอการิทึมไว้ดังต่อไปนี้

บทนิยาม 3.2

กำหนดให้ z เป็นจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ ที่ไม่เป็นศูนย์ ถ้า w เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่มีสมบัติว่า

$$e^{w} = z$$

แล้วเป็นจำนวน w นี้ว่า **ลอการิทึม** ของ z นิยมเขียนแทนจำนวนทั้งหลายที่เป็นลอการิทึมของ z ด้วย $\log z$

นอกจากบทนิยามของขอกาลิทึมแล้ว พัชรา วันเพ็ญ (2529 : 93) ได้ให้บทนิยามของฟังก์ชันลอการลิทึมธรรมชาติไว้ดังต่อไปนี้

บทนิยาม 3.3

ถ้า $z = e^{w}$ แล้วเขียน $w = \ln z$ เรียกว่า **ฟังก์ชันลอกาลิทึมธรรมชาติ** ของ z นิยามโดย

$$w = \ln\left|z\right| + i(\theta + 2n\pi)$$

เมื่อ $\theta = \operatorname{Arg}(z)$ และ n เป็นจำนวนเต็ม

จากบทนิยาม 3.3 จะจได้ว่า

$$\log z = \ln\left|z\right| + i\left(\operatorname{Arg}(z) + 2n\pi\right) \text{ เมื่อ } n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

หรืออาจเขียนในอีกรูปเป็น

$$\log z = \ln\left|z\right| + i\arg(z)$$

ดังนั้น $\log z$ เป็นฟังก์ชันหลายค่า นั่นคือเราสามารถกำหนดค่าให้กับ $\log z$ ได้มากกว่าหนึ่งค่า จะเห็นว่าการกำหนดค่าดังกล่าวก็คือการเลือกค่า n ในสมการในสมกาข้างต้นหรือก็คือการเลือก $\arg(z)$ ในอีกสมการนั่นเอง สังเกตว่าเราจำกัดค่าของ $\arg(z)$ ให้อยู่ในช่วง 2π เราสามารถทำให้ $\log z$ เป็นฟังก์ชันค่าเดียวได้ เช่นเลือกให้ $\arg(z) \in \left(-\pi, \pi\right]$ หรือก็คือเลือก $\arg(z) = \mathrm{Arg}(z)$ จะทำให้ $\log z$ เป็นฟังก์ชันค่าเชิงเดียวซึ่งคือลอกาลิทึมตามบทนิยามต่อไปนี้ (ประสิทธิ์ ลิ้มบุพศิริพร, 2557 : 103)

บทนิยาม 3.4

ค่าหลักของลอการิทึม หรือ **ลอการิทึมหลัก** เขียนแทนด้วย $\mathrm{Log}z$ นิยามโดย

$$\mathrm{Log}z = \ln\left|z\right| + i\,\mathrm{Arg}\,z$$

หมายเหตุ 3.1

ค่าที่แสดงโดย $\mathrm{Log}z$ มีได้เพียงค่าเดียวซึ่ง $\mathrm{Log}z$ ได้จากการแทน $n = 0$ ในสมการ $\log z = \ln\left|z\right| + i\left(\mathrm{Arg}(z) + 2n\pi\right)$ แต่ค่าที่แสดงโดย $\log z$ มีค่าได้มากกว่าหนึ่งแบบ

ตัวอย่าง 3.4 จงหาค่าที่เป็นไปได้ทั้งหมดของ $\log z$ พร้อมทั้งหาค่าของ $\mathrm{Log}z$ เมื่อ z คือจำนวนต่อไปนี้

1. 1 2. $-i$ 3. $1+i$

วิธีทำ

(1) เนื่องจาก $z = 1$ จะได้ $\left|z\right| = 1$ และ

$$\theta = \mathrm{Arg}(1) = \tan^{-1}\left(\frac{0}{1}\right) = 0$$

จาก $\mathrm{Log}z = \ln\left|z\right| + i\,\mathrm{Arg}(z)$ และ

$\log z = \ln\left|z\right| + i\left(\mathrm{Arg}(z) + 2n\pi\right)$ เมื่อ $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ จะได้

$\operatorname{Log} z = \ln 1 + i(0) = 0 + 0 = 0$ และ

$\log z = \ln 1 + i\left(0 + 2n\pi\right) = 0 + i2n\pi = i2n\pi$ เมื่อ $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

(2) เนื่องจาก $z = -1$ จะได้ $\left|z\right| = 1$ และ

$\theta = \operatorname{Arg}(-1) = \tan^{-1}\left(\dfrac{0}{-1}\right) = \pi$

จาก $\operatorname{Log} z = \ln\left|z\right| + i\operatorname{Arg}(z)$ และ

$\log z = \ln\left|z\right| + i\left(\operatorname{Arg}(z) + 2n\pi\right)$ เมื่อ $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ จะได้

$\operatorname{Log} z = \ln\left|-1\right| + i(\pi) = 0 + i\pi = i\pi$ และ

$\log z = \ln\left|-1\right| + i\left(\pi + 2n\pi\right) = i\left(1 + 2n\right)$ เมื่อ $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

(3) เนื่องจาก $z = 1 + i$ จะได้ $\left|z\right| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ และ

$\theta = \operatorname{Arg}(1+i) = \tan^{-1}\left(\dfrac{1}{1}\right) = \dfrac{\pi}{4}$

จาก $\operatorname{Log} z = \ln\left|z\right| + i\operatorname{Arg}(z)$ และ

$\log z = \ln\left|z\right| + i\left(\operatorname{Arg}(z) = \pi(z) + 2n\pi\right)$ เมื่อ $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ จะได้

$\operatorname{Log} z = \ln\sqrt{2} + i\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ และ

$\log z = \ln\sqrt{2} + i\left(\dfrac{\pi}{4} + 2n\pi\right)$ เมื่อ $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

จากตัวอย่างข้างต้นเราได้ว่า $\operatorname{Arg}(x) = 0$ ทุก $x > 0$ ดังนั้นถ้า $x > 0$ แล้วจะได้ว่า

$\log x = \ln x + i\left(0 + 2n\pi\right) = \ln x + i2n\pi$ เมื่อ $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

นั่นคือ $\operatorname{Log} x = \ln x$

และ เราได้ว่า $\operatorname{Arg}(x) = \pi$ ทุก $x < 0$ ดังนั้นถ้า $x < 0$ แล้วจะได้ว่า

$\log x = \ln\left|-x\right| + i\left(\pi + 2n\pi\right) = \ln\left|-x\right| + i\left(1 + 2n\right)\pi$ เมื่อ $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

นั่นคือ $\log x = \ln\left|-x\right| + \pi i$

หมายเหตุ 3.2

จากที่กล่าวมาข้างต้นเราได้ว่า $\operatorname{Log} x = \ln x$ เมื่อ $x > 0$ ดังนั้นจึงอาจพิจารณาว่า $\operatorname{Log} z$ เป็นฟังก์ชันที่ขยายจากฟังก์ชัน $\ln z$

สำหรับทฤษฎีของฟังก์ชันลอกาลิทึมของจำนวนเชิงซ้อนนั้นก็จะคล้าย ๆกับฟังก์ชันลอกาลิทึมของจำนวนจริงที่เราเคยได้ศึกษามาแล้ว ดังที่ เกียรติสุดา นาคประสิทธิ์ (2556 : 104) ได้ให้ไว้ดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.1

กำหนดให้ $z_1, z_2 \in \mathbb{C} - \{0\}$ และ $n \in Z$

1. $\ln(z_1 z_2) = \ln z_1 + \ln z_2$
2. $\ln \dfrac{z_1}{z_2} = \ln z_1 - \ln z_2$
3. $\ln z_1^{\,n} = n \ln z_1$

พิสูจน์

ให้ $z_1, z_2 \in \mathbb{C} - \{0\}$ และ $n \in Z$ โดยที่ $z_1 = |z_1| e^{i\arg(z_1)}$ และ $z_2 = |z_2| e^{i\arg(z_2)}$

1. พิจารณาสามการดังนี้

$$
\begin{aligned}
\ln z_1 + \ln z_2 &= \ln\left[|z_1| e^{i\arg(z_1)}\right] + \ln\left[|z_2| e^{i\arg(z_2)}\right] \\
&= \left[\ln|z_1| + i\arg(z_1)\right] + \left[\ln|z_2| + i\arg(z_2)\right] \\
&= \ln|z_1| + \ln|z_2| + i\arg(z_1) + i\arg(z_2) \\
&= \ln|z_1| + \ln|z_2| + i\left[\arg(z_1) + \arg(z_2)\right] \\
&= \ln|z_1 z_2| + i\arg(z_1 z_2) \\
&= \ln|z_1 z_2|
\end{aligned}
$$

2. พิจารณาสามการดังนี้

$$\begin{aligned}
\ln z_1 - \ln z_2 &= \ln\left[\left|z_1\right| e^{i\arg(z_1)}\right] - \ln\left[\left|z_2\right| e^{i\arg(z_2)}\right] \\
&= \left[\ln\left|z_1\right| + i\arg(z_1)\right] - \left[\ln\left|z_2\right| + i\arg(z_2)\right] \\
&= \ln\left|z_1\right| - \ln\left|z_2\right| + i\left[\arg(z_1) - \arg(z_2)\right] \\
&= \ln\left|\frac{z_1}{z_2}\right| + i\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) \\
&= \ln\left|\frac{z_1}{z_2}\right|
\end{aligned}$$

3. พิจารณาสามการดังนี้

$$\begin{aligned}
\ln z_1^{\,n} &= \ln\left[\left|z_1\right| e^{i\arg(z_1)}\right]^n \\
&= \ln\left[\left|z_1\right|^n \left(e^{i\arg(z_1)}\right)^n\right] \\
&= \ln\left[\left|z_1\right|^n \left(e^{in\arg(z_1)}\right)\right] \\
&= \ln\left|z_1\right|^n + i\left(n\arg(z_1)\right) \\
&= n\ln\left|z_1\right| + in\arg(z_1) \\
&= n\left[\ln\left|z_1\right| + i\arg(z_1)\right] \\
&= n\ln z_1
\end{aligned}$$

3.3 ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

จากเรื่องที่เราได้ศึกษามาแล้วนั้นจะเห็นว่า

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x \qquad \text{และ}$$

$$e^{-ix} = \cos(-x) + i\sin(-x) = \cos x - i\sin x$$

โดยการบวกและลบสมการทั้งสองจะได้

$$e^{ix} - e^{-ix} = 2i\sin x \qquad \text{และ}$$

$$e^{ix} + e^{-ix} = 2\cos x$$

นั่นคือ

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \qquad \text{และ} \qquad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

จากที่กล่าวมาข้างต้นนั้น ณัฐกร สุคันธมาลา (2559 : 65) ได้ให้บทนิยามฟังก์ชันไซน์ และฟังก์ชันโคไซน์ได้ดังต่อไปนี้

บทนิยาม 3.5

ฟังก์ชันไซน์ และ**ฟังก์ชันโคไซน์** ของตัวแปรเชิงซ้อน z นิยามโดย

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \qquad \text{และ} \qquad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

ตัวอย่าง 3.5 จงหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติที่กำหนดให้ในรูปแบบ $a+bi$

1. $\cos i$ 2. $\sin(2+i)$

วิธีทำ (1) $\cos i = \dfrac{e^{i\cdot i} + e^{-i\cdot i}}{2}$

$$= \frac{e^{-1} + e}{2}$$

ดังนั้น $\cos i = \dfrac{e^{-1} + e}{2}$

(2) $\sin(2+i) = \dfrac{e^{i(2+i)} - e^{-i(2+i)}}{2i}$

$$= \frac{e^{-1+2i} - e^{1-2i}}{2i}$$

$$= \frac{e^{-1}e^{2i} - ee^{-2i}}{2i}$$

$$= \frac{e^{-1}(\cos 2 + i\sin 2) - e(\cos 2 - i\sin 2)}{2i}$$

$$= \frac{0.9781 + 2.8062i}{2i}$$

$$= 1.4031 - 0.4891i$$

ดังนั้น $\sin(2+i) = 1.4031 - 0.4891i$

จากบทนิยามของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ข้างต้น เราพบว่าฟังก์ชันเหล่านี้ สามารถคงสมบัติที่สำคัญของฟังก์ชันต้นแบบได้มากมายดัง ณัฐกร สุคันธมาลา (2559 : 66) ได้กล่าวในทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.2

ถ้า z เป็นจำนวนเชิงซ้อนแล้ว $\cos z$ และ $\sin z$ เป็นฟังก์ชันทั่วและนอกจากนี้

$$\frac{d}{dz}\cos z = -\sin z \quad \text{และ} \quad \frac{d}{dz}\sin z = \cos z$$

พิสูจน์

เนื่องจาก $\dfrac{d}{dz}\sin z = \dfrac{d}{dz}\left(\dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)$

$$= \frac{1}{2i}\left(\frac{d}{dz}e^{iz} - \frac{d}{dz}e^{-iz}\right)$$

$$= \frac{1}{2i}\left(e^{iz}\frac{d}{dz}(iz) - e^{-iz}\frac{d}{dz}(-iz)\right)$$

$$= \frac{1}{2i}\left(ie^{iz} - ie^{-iz}\right)$$

$$= \frac{ie^{iz} - ie^{-iz}}{2i}$$

$$= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2}$$

$$= \cos z$$

เนื่องจาก $\dfrac{d}{dz}\cos z = \dfrac{d}{dz}\left(\dfrac{e^{iz} + e^{iz}}{2}\right)$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\left(\frac{d}{dz}e^{iz} + \frac{d}{dz}e^{iz}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(e^{iz}\frac{d}{dz}(iz) + e^{iz}\frac{d}{dz}(iz)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(ie^{iz} + ie^{iz}\right) \\
&= \frac{ie^{iz} + ie^{-iz}}{2} \\
&= \left(\frac{ie^{iz} + ie^{-iz}}{2}\right)\frac{i}{i} \\
&= \frac{-e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \\
&= -\left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2i}\right) \\
&= -\sin z
\end{aligned}
$$

นอกจากทฤษฎีบทของการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ที่ได้กล่าวมาข้างข้างต้นแล้วนั้นยังมีทฤษฎีบทอื่น ๆ ดังที่ สมเกียรติ ตั้งพูลผล (2535 : 55) ได้กล่าวไว้ดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.3 (สมบัติของฟังก์ชันตรีโกณมิติ)

ให้ $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ เมื่อ $z = x + yi$ แล้ว

1. $\sin(-z) = -\sin z$ และ $\cos(-z) = \cos z$
2. $e^{iz} = \cos z + i\sin z$
3. $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$

ทฤษฎีบท 3.3 (ต่อ)

4. $\sin z = 0$ ก็ต่อเมื่อ $z = n\pi$ และ

$\sin z = 0$ ก็ต่อเมื่อ $z = \left(n + \dfrac{1}{2}\right)\pi$ เมื่อ $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

5. $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$

$\sin(z_1 - z_2) = \sin z_1 \cos z_2 - \cos z_1 \sin z_2$

$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$

$\cos(z_1 - z_2) = \cos z_1 \cos z_2 + \sin z_1 \sin z_2$

6. $\sin(2z) = 2\sin z \cos z$ และ

$\cos(2z) = \cos^2 z - \sin^2 z$

7. $\sin(z + 2\pi) = \sin z\,,$ $\quad \sin(z + \pi) = -\sin z$

$\cos(z + 2\pi) = \cos z\,,$ $\quad \cos(z + \pi) = -\cos z$

พิสูจน์

1. $$\begin{aligned}\sin(-z) &= \frac{e^{i(-z)} - e^{-i(-z)}}{2i} \\ &= \frac{e^{-iz} - e^{iz}}{2i} \\ &= -\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \\ &= -\sin z\end{aligned}$$

2. $\cos z + i\sin z = \left(\dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right) + i\left(\dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)$

$$= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} + \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2}$$

$$= \frac{e^{iz} + e^{-iz} + e^{iz} - e^{-iz}}{2}$$

$$= \frac{2e^{iz}}{2}$$

$$= e^{iz}$$

3. $\sin^2 z + \cos^2 z = \left(\dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)^2 + \left(\dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)^2$

$$= \left(\frac{e^{2iz} - 2e^{iz}e^{-iz} + e^{-2iz}}{-4}\right) + \left(\frac{e^{2iz} + 2e^{iz}e^{-iz} + e^{-2iz}}{4}\right)$$

$$= \frac{-e^{2iz} + 2e^{iz}e^{-iz} - e^{-2iz} + e^{2iz} + 2e^{iz}e^{-iz} + e^{-2iz}}{4}$$

$$= \frac{2e^{iz}e^{-iz} + 2e^{iz}e^{-iz}}{4}$$

$$= \frac{4e^{iz}e^{-iz}}{4}$$

$$= e^{iz}e^{-iz}$$

$$= 1$$

4. $0 = \sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$

แสดงว่า $e^{iz} = e^{-iz}$

$$\frac{e^{iz}}{e^{-iz}} = 1$$

$$e^{2zi} = 1$$

นั่นคือ $2zi = 2n\pi i$ เมื่อ $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

ดังนั้น $z = 2\pi$ เมื่อ $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

ต่อไปจะแสดงว่า $z = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$ เป็นรากของ $\cos z = 0$

$$0 = \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

แสดงว่า $e^{iz} = -e^{-iz}$

$$\frac{e^{iz}}{e^{-iz}} = -1$$

$$e^{2zi} = -1 = e^{(\pi + 2n\pi)i} = e^{(1+2n)\pi i} \text{ เมื่อ } n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

นั่นคือ $\quad 2zi = (2n+1)\pi i$

ดังนั้น $\quad z = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$ เมื่อ $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

สำหรับการพิสูจน์ที่เหลือเว้นไว้ให้เป็นแบบฝึกหัด

ตัวอย่าง 3.6 จงหาค่าของ $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$

วิธีทำ $\quad \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \dfrac{e^{\frac{\pi}{4}} + e^{-\frac{\pi}{4}i}}{2}$

$$= \frac{\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) + \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)}{2}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ดังนั้น $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

ตัวอย่าง 3.7 จงหาค่า z จากสมการ $\cos z = 2$

วิธีทำ จาก $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ แทนในสมการจะได้

$$\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 2$$

คูณสมการด้วย $2e^{iz}$ จะได้

$$2e^{iz}\left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right) = 4e^{iz}$$

$$e^{2zi} + 1 = 4e^{iz}$$

$$e^{2zi} + 1 - 4e^{iz} = 0$$

$$(e^{zi})^2 - 4e^{iz} + 1 = 0$$

ผลเฉลยของสมการคือ

$$\begin{aligned} e^{zi} &= \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4(1)(1)}}{2} \\ &= \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} \\ &= \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} \\ &= 2 \pm \sqrt{3} \end{aligned}$$

นั่นคือ $e^{zi} = 2 + \sqrt{3}$ หรือ $e^{zi} = 2 - \sqrt{3}$

$zi = \ln(2 + \sqrt{3})$ $\qquad$ $zi = \ln(2 - \sqrt{3})$

$z = -i\ln(2 + \sqrt{3})$ $\qquad$ $z = -i\ln(2 - \sqrt{3})$

ดังนั้น $z = -i\ln(2 + \sqrt{3})$ หรือ $z = -i\ln(2 - \sqrt{3})$

จากฟังก์ชันตรีโกณมิติทั้งสองฟังก์ชันที่กล่าวมาข้างต้นนั้นสามารถนิยามฟังก์ชันตรีโกณมิติได้อีก 4 ฟังก์ชันที่เหลือในพจน์ของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ โดยใช้สัญลักษณ์เช่นเดียวกับในระบบของจำนวนจริงดังนี้ (เกียรติสุดา นาคประสิทธิ์, 2556 : 95)

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} \qquad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$$

$$\sec z = \frac{1}{\cos z} \qquad \csc z = \frac{1}{\sin z}$$

ตัวอย่าง 3.8 จงหาค่า $\tan(\pi - 2i)$ ในรูปแบบ $x + yi$

วิธีทำ
$$\begin{aligned}
\tan(\pi - 2i) &= \frac{\sin(\pi - 2i)}{\cos(\pi - 2i)} \\
&= \frac{\dfrac{e^{i(\pi-2i)} - e^{-i(\pi-2i)}}{2i}}{\dfrac{e^{i(\pi-2i)} + e^{-i(\pi-2i)}}{2}} \\
&= \frac{e^{i(\pi-2i)} - e^{-i(\pi-2i)}}{(e^{i(\pi-2i)} + e^{-i(\pi-2i)})i} \\
&= \frac{e^{2+i\pi} - e^{-i\pi-2}}{(e^{2+i\pi} + e^{-i\pi-2})i} \\
&= \frac{e^{2}\left(\cos\pi + i\sin\pi\right) - e^{-2}\left[\cos(-\pi) + i\sin(-\pi)\right]}{\left(e^{2}\left(\cos\pi + i\sin\pi\right) + e^{-2}\left[\cos(-\pi) + i\sin(-\pi)\right]\right)i} \\
&= \frac{e^{2}\left(\cos\pi + i\sin\pi\right) - e^{-2}\left(\cos\pi - i\sin\pi\right)}{\left[e^{2}\left(\cos\pi + i\sin\pi\right) + e^{-2}\left(\cos\pi - i\sin\pi\right)\right]i} \\
&= \frac{e^{2}\left(-1 + i(0)\right) - e^{-2}\left(-1 - (0)\right)}{\left[e^{2}\left(-1 + i(0)\right) + e^{-2}\left(-1 - (0)\right)\right]i} \\
&= \frac{-e^{2} + e^{-2}}{(-e^{2} - e^{-2})i} \\
&= -\frac{(e^{2} - e^{-2})i}{(e^{2} + e^{-2})} \\
&= -0.9640i
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\tan(\pi - 2i) = -0.9640i$

3.4 ฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิก

ในหัวข้อนี้จะศึกษาฟังก์ชันมูลฐานค่าเชิงซ้อนที่กำหนดรูปแบบโดยอาศัยฟังก์ชัน ไฮเพอร์โบลิกของตัวแปรเป็นต้นแบบดัง พัชรา ไชยะสุริยา (2544 : 59) ได้กล่าวในบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 3.6

ฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกไซน์ซึ่งเขียนแทนด้วย $\sinh z$ และ **ฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกโคไซน์**ซึ่งเขียนแทนด้วย $\cosh z$ นิยามโดย

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \text{ และ } \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

เมื่อ $z \in \mathbb{C}$

เนื่องจาก $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ และ $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ ดังนั้นจะได้ว่า

$$\sin z = -i\sinh(zi) \qquad \cos z = i\cosh(zi)$$

$$\sinh z = -i\sin(zi) \qquad \cosh z = \cos(zi)$$

จะเห็นว่าเอกลักษณ์นี้เป็นเอกลักษณ์ที่สำคัญที่แสดงถึงความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกไซน์กับฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกโคไซน์กับฟังก์ชันโคไซน์ ความสัมพันธ์เหล่านี้ช่วยให้เราสามารถศึกษาสมบัติต่าง ๆ ของฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกไซน์และฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกโคไซน์ได้อย่างรวดเร็วโดยอาศัยเพียงสมบัติของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ที่กล่าวไว้ในหัวข้อที่แล้ว (ประสิทธิ์ ลิ้มบุพศิริพร, 2557 : 99)

ตัวอย่าง 3.9 จงแสดงว่าฟังก์ชัน $\sinh z$ และ $\cosh z$ เป็นฟังก์ชันทั่วและ

$$\frac{d}{dz}(\sinh z) = \cos z \qquad \frac{d}{dz}(\cosh z) = \sinh z$$

วิธีทำ จากหัวข้อที่แล้วเราทราบว่าฟังก์ชัน $\sin z$ และ $\cos z$ เป็นฟังก์ชันทั่วและ

จาก $\sinh z = -i\sin(zi)$ จะได้

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz}(\sinh z) &= \frac{d}{dz}\Big[-i\sin(zi)\Big] \\
&= -i\frac{d}{dz}\Big[\sin(zi)\Big] \\
&= -i\Big[\cos(zi)\Big]\frac{d}{dz}(zi) \\
&= -i(i)\Big[\cos(zi)\Big] \\
&= \cos(zi) \\
&= \cosh z
\end{aligned}$$

จาก $\cosh z = \cos(zi)$ จะได้

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz}(\cosh z) &= \frac{d}{dz}\Big[\cos(zi)\Big] \\
&= \Big[-\sin(zi)\Big]\frac{d}{dz}(zi) \\
&= i\Big[-\sin(zi)\Big] \\
&= -i\sin(zi) \\
&= \sinh z
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\frac{d}{dz}(\sinh z) = \cos z$ และ $\frac{d}{dz}(\cosh z) = \sinh z$

สำหรับสมบัติของฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกของจำนวนเชิงซ้อนนั้น ณัฐกร สุคันธมาลา (2559 : 72) ได้กล่าวไว้ในทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.4 (สมบัติของฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกเชิงซ้อน)

ให้ $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ เมื่อ $z = x + yi$ แล้ว

1. $\cosh^2 z + \sinh^2 z = 1$

2. $\cosh(z_1 + z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_1 \sinh z_2$

3. $\sinh(z_1 + z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \sinh z_2$

ทฤษฎีบท 3.4 (ต่อ)

4. $\cosh(z+2i\pi)=\cosh z$ และ $\sinh(z+2i\pi)=\sinh z$

5. $\cosh(-z)=\cosh z$ และ $\sinh(-z)=-\sinh z$

นอกจากฟังก์ชัน ฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกไซน์ ฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกโคไซน์แล้วยังสามารถนิยามฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกได้อีก 4 ฟังก์ชันที่เหลือในพจน์ของฟังก์ชันดังกล่าว โดยใช้สัญลักษณ์เช่นเดียวกับจำนวนจริง ดังนี้ (เกียรติสุดา นาคประสิทธิ์, 2556 : 98)

$$\tanh z=\frac{\sinh z}{\cosh z} \qquad \coth z=\frac{\cosh z}{\sinh z}$$

$$\operatorname{sech} z=\frac{1}{\cosh z} \qquad \operatorname{csch} z=\frac{1}{\sinh z}$$

3.5 ฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผันและฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกผกผัน

ในหัวข้อนี้เราจะศึกษาผกผันตรีโกณมิติค่าเชิงซ้อน แนวคิดพื้นฐานในการกำหนดบทนิยามของฟังก์ชันผกผันเหล่านี้มีความคล้ายคลึงกับแนวคิดพื้นฐานในการกำหนดบทนิยามของลอการิทึมซึ่งถือเป็นผกผันของ e^z เพื่อให้เห็นแนวทางการศึกษาแนวคิดดังกล่าว เราจะเริ่มจากการศึกษาผกผันไซน์จากบทนิยามที่ ประสิทธิ์ ลิ้มบุพศิริพร (2557 : 113)

บทนิยาม 3.7

กำหนดให้ z เป็นจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ ฟังก์ชันไซน์ผกผัน ของ z เขียนแทนด้วย $\sin^{-1} z$ หมายถึงจำนวนเชิงซ้อน w ซึ่งมีสมบัติว่า

$$z=\sin w$$

ทฤษฎีบทต่อไปนี้แสดงให้เห็นว่า $\sin^{-1} z$ นิยามได้ทุกค่า z และยังได้ว่า $\sin^{-1} z$ เป็นฟังก์ชันหลายค่าดัง ประสิทธิ์ ลิ้มบุพศิริพร (2557 : 113) ได้กล่าวไว้ดังต่อนี้

ทฤษฎีบท 3.5

$\sin^{-1} z$ นิยามได้ทุกค่า z นอกจากนี้ยังได้ว่า $\sin^{-1} z$ เป็นฟังก์ชันหลายค่าซึ่งถูกกำหนดโดยค่าของลอการิทึมดังต่อไปนี้

$$\sin^{-1} z = -i \log\left[iz + (1-z^2)^{1/2}\right]$$

พิสูจน์

กำหนดให้ z เป็นจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ พิจารณาผลเฉลยของสมการ

$$z = \sin w$$

จากบทนิยามของ $\sin w$ จะได้ว่าสมการนี้เขียนใหม่ได้เป็น

$$z = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i}$$

จัดรูปใหม่ได้ดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned} 2iz &= e^{iw} - e^{-iw} \\ 2ize^{iw} &= (e^{iw} - e^{-iw})e^{iw} \\ 2ize^{iw} &= (e^{iw})^2 - 1 \\ (e^{iw})^2 - 2ize^{iw} - 1 &= 0 \end{aligned}$$

แก้สมการโดยวิธีกำลังสองสมบูรณ์จะได้

$$\begin{aligned} (e^{iw})^2 - 2ize^{iw} - 1 &= 0 \\ (e^{iw})^2 - 2ize^{iw} + (iz)^2 &= 1 + (iz)^2 \\ (e^{iw} - iz)^2 &= 1 - z^2 \\ e^{iw} - iz &= (1-z^2)^{1/2} \\ e^{iw} &= iz + (1-z^2)^{1/2} \\ iw &= \log\left[iz + (1-z^2)^{1/2}\right] \end{aligned}$$

หรือจะได้ว่า

$$w = -i\log\left[iz + (1-z^2)^{1/2}\right]$$

ตัวอย่าง 3.10 จงหาค่าทั้งหมดของ $\sin^{-1}(-i)$

วิธีทำ จากบทนิยาม จะได้

$$\sin^{-1}(-i) = -i\log\left[i(-i) + (1-(-i)^2)^{1/2}\right] \quad \text{หรือ}$$

$$\sin^{-1}(-i) = -i\log\left[1+\sqrt{2}\right]$$

จาก รากที่สองของ 2 คือ

$$z_k = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{0+2k\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{0+2k\pi}{2}\right)\right] \text{ เมื่อ } k = 0,1$$

นั่นคือ

$$\begin{aligned} z_0 &= \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{0+0}{2}\right) + \sin\left(\frac{0+0}{2}\right)\right] \\ &= \sqrt{2}\left[\cos 0 + \sin 0\right] \\ &= \sqrt{2}\left[1+0\right] \\ &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{0+2\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{0+2\pi}{2}\right)\right] \\ &= \sqrt{2}\left[\cos\pi + \sin\pi\right] \\ &= \sqrt{2}\left[-1+0\right] \\ &= -\sqrt{2} \end{aligned}$$

ดังนั้น $\sin^{-1}(-i) = -i\ln\left[1\pm\sqrt{2}\right]$

จาก

$$\log\left[1+\sqrt{2}\right] = \ln\left[1+\sqrt{2}\right] + 2n\pi i$$

และ $$\log\left[1-\sqrt{2}\right] = \ln\left[1-\sqrt{2}\right] + (2n+1)\pi i \quad \text{เมื่อ } n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

ซึ่ง $$\log\left[1-\sqrt{2}\right] = \ln\left[\frac{1}{1+\sqrt{2}}\right] = -\ln\left|1+\sqrt{2}\right|$$

ทำให้ได้ว่า

$$\log\left[1-\sqrt{2}\right] = -\ln\left|1+\sqrt{2}\right| + (2n+1)\pi i$$

และ $$\log\left[1\pm\sqrt{2}\right] = (-1)^n \ln(1+\sqrt{2}) + n\pi i \quad \text{เมื่อ } n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

ดังนั้น $\sin^{-1}(-i) = n\pi + i(-1)^{n+1}\ln(1+\sqrt{2})$

สำหรับทฤษฎีบทต่อไปแสดงให้เห็นว่า $\cos^{-1} z$ นิยามได้ทุกค่า z นอกจากนี้ยังได้ว่า $\cos^{-1} z$ เป็นฟังก์ชันหลายค่าดัง เกียรติสุดา นาคประสิทธิ์ (2556 : 120) ได้กล่าวในทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.6

$\cos^{-1} z$ นิยามได้ทุกค่า z นอกจากนี้ยังได้ว่า $\cos^{-1} z$ เป็นฟังก์ชันหลายค่าซึ่งถูกกำหนดโดยค่าของลอการิทึมดังต่อไปนี้

$$\cos^{-1} z = -i\ln\left[z + i(1-z^2)^{1/2}\right]$$

พิสูจน์

กำหนดให้ z เป็นจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ พิจารณาผลเฉลยของสมการ

$$z = \cos w$$

จากบทนิยามของ $\sin w$ จะได้ว่าสมการนี้เขียนใหม่ได้เป็น

$$z = \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2}$$

จัดรูปใหม่ได้ดังต่อไปนี้

$$
\begin{aligned}
2z &= e^{iw} + e^{-iw} \\
2ze^{iw} &= (e^{iw} + e^{-iw})e^{iw} \\
2ze^{iw} &= (e^{iw})^2 + 1
\end{aligned}
$$

$$(e^{iw})^2 - 2ze^{iw} + 1 = 0$$

แก้สมการโดยวิธีกำลังสองสมบูรณ์จะได้

$$
\begin{aligned}
(e^{iw})^2 - 2ze^{iw} + 1 &= 0 \\
(e^{iw})^2 - 2ze^{iw} + (z)^2 &= z^2 - 1 \\
(e^{iw} - z)^2 &= z^2 - 1 \\
e^{iw} - z &= (z^2 - 1)^{1/2} \\
e^{iw} &= z + (z^2 - 1)^{1/2} \\
iw &= \log\left[z + (z^2 - 1)^{1/2}\right] \\
w &= -i\log\left[z + (z^2 - 1)^{1/2}\right]
\end{aligned}
$$

หรือจะได้ว่า

$$w = -i\log\left[z + i(1 - z^2)^{1/2}\right]$$

ต่อไปแสดงให้เห็นว่า $\tan^{-1} z$ นิยามได้ทุกค่า z นอกจากนี้ยังได้ว่า $\tan^{-1} z$ เป็นฟังก์ชันหลายค่าดัง ประสิทธิ์ ลิ้มบุพศิริพร (2557 : 115) ได้กล่าวในทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.7

$\tan^{-1} z$ นิยามได้ทุกค่า z นอกจากนี้ยังได้ว่า $\tan^{-1} z$ เป็นฟังก์ชันหลายค่าซึ่งถูกกำหนดโดยค่าของลอการิทึมดังต่อไปนี้

$$\tan^{-1} z = \frac{i}{2}\ln\left[\frac{i+z}{i-z}\right]$$

พิสูจน์ให้เป็นแบบฝึกหัด

สำหรับผกผันไฮเพอร์โบลิก เนื่องจากแนวคิดต่าง ๆ ในเรื่องนี้คล้ายคลึงกับที่กล่าวไว้ในเรื่องตรีโกณมิติผกผัน ดังนั้นจึงจะกล่าวเนื้อหาในเรื่องนี้เพียงสังเขปและจะขอละรายเอียดของการพิสูจน์ทฤษฎีบทต่าง โดยให้ทำเป็นแบบฝึกหัด สัญลักษณ์ของผกผันไฮเพอร์โบลิกที่ใช้ในที่นี้จะใช้แบบเดียวกับที่ใช้ในวิชาแคลคูลัสโดยมีความหมายเช่นเดียวกับที่กล่าวในเรื่องตรีโกณมิติผกผัน เช่น (ประสิทธิ์ ลิ้มบุพศิริพร, 2557 : 115)

$$w = \sinh^{-1} z \qquad \text{ก็ต่อเมื่อ} \qquad \sinh w = z$$

เราสามารถแสดงได้ว่าฟังก์ชันเหล่านี้เป็นฟังก์ชันหลายค่าโดยมีสูตรในการกำหนดค่าดัง ณัฐกร สุคันธมาลา (2559 : 88) ได้กล่าวไว้ทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.8

สำหรับจำนวนเชิงซ้อน z ซึ่งอยู่ในเรนจ์ของฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกแต่ละฟังก์ชันที่ต้องการหาค่าผกผันเชิงซ้อน

1. $\sinh^{-1} z = \ln\left[z + (z^2+1)^{1/2}\right]$

2. $\cosh^{-1} z = \ln\left[z + (z^2-1)^{1/2}\right]$

3. $\tanh^{-1} z = \dfrac{1}{2}\ln\left[\dfrac{1+z}{1-z}\right]$

ตัวอย่าง 3.11 จงหาค่า $\cosh^{-1} 5$

วิธีทำ จาก $\cosh^{-1} z = \ln\left[z + (z^2-1)^{1/2}\right]$

จะได้ $\cosh^{-1} 5 = \ln\left[2 + (5^2-1)^{1/2}\right] = \ln\left[2+\sqrt{24}\right] = \ln\left[5 \pm 2\sqrt{6}\right]$

เนื่องจาก $\left[5 \pm 2\sqrt{6}\right]$ เป็นจำนวนจริงบวก

นั่นคือ $\ln\left[5 \pm 2\sqrt{6}\right] = \ln\left[5 \pm 2\sqrt{6}\right] + (0 + 2k\pi)i = \pm\ln\left[5 \pm 2\sqrt{6}\right] + (2k\pi)i$

ดังนั้น $\cosh^{-1} 5 = \pm\ln\left[5 \pm 2\sqrt{6}\right] + (2k\pi)i$

3.6 สรุปท้ายบทที่ 3

ในบทนี้ศึกษาเกี่ยวกับฟังก์ชันมูลฐานต่าง ๆ ที่เคยได้ศึกษามาในรายวิชาแคลคูลส แต่สำหรับการศึกษาฟังก์ชันในที่นี้เป็นการสร้างนิยามของฟังก์ชันมูลฐานดังกล่าวด้วยตัวแปรเชิงซ้อน นั้นคือ $f(z)$ เมื่อ $z = x + yi$ ภายใต้เงื่อนไขที่ว่าเมื่อให้ส่วนจินตภาพของ z เป็นศูนย์แล้ว $z = x + 0i$ ฟังก์ชันมูลฐานเหล่านี้ต้องมีคุณสมบัติเหมือนจำนวนจริงทุกประการ ฟังก์ชันแรกที่นิยามคือ

ฟังก์ชันชี้กำลังเชิงซ้อน e^z ซึ่งพบว่าเมื่อให้ $z = x + yi$ แล้วจะได้ว่า

$$e^z = e^x(\cos y + \sin y) = e^x e^{iy}$$

ฟังก์ชันลอกาลิทึมธรรมชาติ ของ z นิยามโดย $z = e^w$ หรือ $w = \ln z$

$$w = \ln|z| + i(\theta + 2n\pi) \text{ เมื่อ } \theta = \operatorname{Arg}(z) \text{ และ } n \text{ เป็นจำนวนเต็ม}$$

หรือ $$\log z = \ln|z| + i\left(\operatorname{Arg}(z) + 2n\pi\right) \text{ เมื่อ } n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$$

และ ค่าหลักของลอการิทึม หรือ ลอการิทึมหลัก เขียนแทนด้วย $\operatorname{Log} z$ นิยามโดย

$$\operatorname{Log} z = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z$$

ฟังก์ชันไซน์ และฟังก์ชันโคไซน์ ของตัวแปรเชิงซ้อน z นิยามโดย

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \quad \text{และ} \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

ฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกไซน์ซึ่งเขียนแทนด้วย $\sinh z$ และ ฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกโคไซน์ซึ่งเขียนแทนด้วย $\cosh z$ นิยามโดย

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \text{ และ } \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \text{ เมื่อ } z \in \mathbb{C}$$

ฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผันและฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกผกผัน

$$\sin^{-1} z = -i \ln\left[iz + (1 - z^2)^{1/2}\right]$$

$$\cos^{-1} z = -i \ln\left[z + (1 - z^2)^{1/2}\right]$$

$$\tan^{-1} z = \frac{i}{2} \ln\left[\frac{i + z}{i - z}\right]$$

$$\sinh^{-1} z = \ln\left[z + (z^2 + 1)^{1/2}\right]$$

$$\cosh^{-1} z = \ln\left[z + (z^2 - 1)^{1/2}\right]$$

$$\tanh^{-1} z = \frac{1}{2} \ln\left[\frac{1 + z}{1 - z}\right]$$

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 3

1. จงเขียนฟังก์ชันที่กำหนดให้ในพจน์ของ x และ y

   1.1 $f(z) = e^{-iz}$ 1.2 $f(z) = e^{-2z+i}$

   1.3 $f(z) = e^{i-\bar{z}}$ 1.4 $f(z) = e^{z^2}$

2. กำหนดให้ $f(z) = e^{\bar{z}-i}$ จงหา

   2.1 $f(2\pi i)$ 2.2 $f(3\pi i)$

   2.3 $f\left(\frac{\pi}{2}i\right)$ 2.4 $f\left(-\frac{\pi}{2}i\right)$

3. จงหาจำนวนเชิงซ้อน z ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการต่อไปนี้

   2.1 $e^z = 5-5i$ 2.2 $e^z = 1+\sqrt{3}i$

   2.3 $e^z = -1$ 2.4 $e^{4z} = 1$

   2.5 $e^{2z} = i$

4. จงหาค่าที่เป็นไปได้ทั้งหมดของ $\log z$ พร้อมทั้งหาค่าของ $\operatorname{Log} z$ เมื่อ z คือจำนวนต่อไปนี้

   1. $1-i$ 2. $-2+i$ 3. $2+i$

5. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 3.3 ข้อ 5-7

6. จงหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่กำหนดให้ในรูปแบบ $x+yi$

   6.1 $\sin(4i)$ 6.2 $\cos(-3i)$

   6.3 $\cos(2-4i)$ 6.4 $\sin(\frac{\pi}{4}+i)$

   6.5 $\tan(2i)$ 6.6 $\cot(\pi+2i)$

7. จงหาค่าของฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกที่กำหนดให้ในรูปแบบ $x+yi$

7.1 $\sinh(4i)$ 7.2 $\cosh(-3i)$

7.3 $\cosh(2-4i)$ 7.4 $\sinh(\frac{\pi}{4}+i)$

7.5 $\tanh(2i)$ 7.6 $\coth(\pi+2i)$

8. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 3.7

9. จงหาค่าทั้งหมดของฟังก์ชันต่อไปนี้

9.1 $\sin^{-1}(i)$ 9.2 $\cos^{-1}(i)$

9.3 $\tan^{-1}(i)$ 9.4 $\tan^{-1}(1)$

9.1 $\sin^{-1}\left(\sqrt{2}\right)$ 9.1 $\cos^{-1}\left(-\sqrt{3}\right)$

10. จงหาค่าทั้งหมดของฟังก์ชันต่อไปนี้

9.1 $\sinh^{-1}(3)$ 9.2 $\cosh^{-1}(i)$

9.3 $\tanh^{-1}(1)$ 9.4 $\tanh^{-1}(-1)$

9.1 $\sinh^{-1}\left(0\right)$ 9.1 $\cosh^{-1}\left(0\right)$

บทที่ 4

ปริพันธ์บนระนาบจำนวนเชิงซ้อน

ในบทที่ผ่านมานั้นได้ศึกษาฟังก์ชันวิเคราะห์ลิมิต และการหาอนุพันธ์อันดับหนึ่งของฟังก์ชันค่าเชิงซ้อน แต่ยังไม่ได้กล่าวถึงอนุพันธ์อันดับสูงของฟังก์ชันค่าเชิงซ้อน สำหรับอนุพันธ์อันดับสูงของฟังก์ชันเชิงซ้อนนั้นจะปรากฎอยู่ในรูปของปริพันธ์ ซึ่งเป็นรูปแบบที่ไม่ปรากฏในปริพันธ์ของฟังก์ชันตัวแปรจริง และการหาปริพันธ์ในระนาบเชิงซ้อนยังสามารถหาปริพันธ์ของฟังก์ชันตัวแปรจริงซึ่งไม่สามารถหาโดยปกติได้ และจากการหาปริพันธ์ฟังก์ชันตัวแปรจริงนั้นเราแยกออกเป็น 2 ส่วนคือ การหาปริพันธ์แบบจำกัดเขต หรือ ปริพันธ์ตามเส้น หรือ ปริพันธ์แบบกำหนดลิมิต และปริพันธ์ไม่จำกัดเขต หรือปริพันธ์แบบไม่จำกัดลิมิต สำหรับปริพันธ์ไม่จำกัดเขตนั้นจะเป็นฟังก์ชันซึ่งอนุพันธ์ของฟังก์ชันเท่ากับฟังก์ชันวิเคราะห์ที่กำหนดให้ในบริเวณหนึ่ง ส่วนปริพันธ์จำกัดเขตจะหาบนส่วนโค้ง ที่หาอนุพันธ์ได้ และไม่จำกัดเฉพาะฟังก์ชันวิเคราะห์เท่านั้น ดังนั้นในช่วงแรกจะทบทวนเส้นโค้งและสมการเส้นโค้งของตัวแปรเชิงซ้อนก่อนดังนี้

4.1 ปริพันธ์ฟังก์ชันค่าจริงของตัวแปรจริง

ก่อนที่จะกล่าวถึงปริพันธ์ของฟังก์ชันค่าเชิงซ้อน $f(z)$ ของตัวแปรเชิงซ้อนจะแนะนำให้รู้จักอนุพันธ์และปริพันธ์จำกัดเขตของฟังก์ชันค่าเชิงซ้อน $w(t)$ ของตัวแปรจริง t ก่อนดัง เกียรติสุดา นาคประสิทธิ์ (2556 : 127) ได้ให้บทนิยามไว้ดังต่อไปนี้

บทนิยาม 4.1

กำหนดให้ $w:\left[a,b\right]\to\mathbb{C}$ เป็นฟังก์ชันค่าเชิงซ้อนของตัวแปรจริง t ซึ่ง

$$w(t)=u(t)+iv(t) \quad \text{สำหรับ } t\in\left[a,b\right]$$

เมื่อ $u(t)$ และ $v(t)$ เป็นฟังก์ชันค่าจริงของตัวแปรจริง t

อนุพันธ์ของฟังก์ชัน w นิยามโดย

$$w'(t)=u'(t)+iv'(t) \text{ สำหรับ } t\in\left[a,b\right]$$

เมื่ออนุพันธ์ $u'(t)$ และ $v'(t)$ หาค่าได้ที่จุด t

บทนิยาม 4.2

กำหนดให้ $w:[a,b]\to\mathbb{C}$ เป็นฟังก์ชันค่าเชิงซ้อนของตัวแปรจริง t ซึ่ง

$$w(t)=u(t)+iv(t) \quad \text{สำหรับ } t\in[a,b]$$

เมื่อ $u(t)$ และ $v(t)$ เป็นฟังก์ชันค่าจริงของตัวแปรจริง t ถ้า

w เป็นฟังก์ชันที่**หาปริพันธ์ได้บนช่วง** $[a,b]$ ถ้า $u(t)$ และ $v(t)$ เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์ได้บนช่วง $[a,b]$ นิยามโดย

$$\int_a^b w(t)\,dt=\int_a^b u(t)\,dt+i\int_a^b v(t)\,dt$$

ตัวอย่าง 4.1 จงหาค่า $\int_0^2 (3+it)^2\,dt$

วิธีทำ เนื่องจาก $(3+it)^2=9+6it-t^2=(9-t^2)+6it$

จะได้
$$\begin{aligned}
\int_0^2 (3+it)^2\,dt &= \int_0^2 (9-t^2)\,dt+i\int_0^2 6t\,dt \\
&= \left[9t-\frac{t^3}{3}\right]_0^2+i\left[3t^2\right]_0^2 \\
&= \left(\left[9(2)-\frac{2^3}{3}\right]-\left[9(0)-\frac{0^3}{3}\right]\right)+i\left(\left[3(2)^2\right]-\left[3(0)^2\right]\right) \\
&= \left(18-\frac{8}{3}\right)+12i \\
&= \frac{46}{3}+12i
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\int_0^2 (3+it)^2\,dt=\frac{46}{3}+12i$

ตัวอย่าง 4.2 จงหาค่า $\int_0^{\pi} e^{i\theta}\,d\theta$

วิธีทำ เนื่องจาก $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

จะได้
$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} e^{i\theta}\,d\theta &= \int_0^{\pi}\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)d\theta \\ &= \int_0^{\pi}\cos\theta\,d\theta + i\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta \\ &= \left[\sin\theta\right]_0^{\pi} + i\left[-\cos\theta\right]_0^{\pi} \\ &= \left[\sin\pi - \sin 0\right] + i\left[-\cos\pi + \cos 0\right] \\ &= 0 + i\left[-(-1)+1\right] \\ &= 2i\end{aligned}$$

ดังนั้น $\int_0^{\pi} e^{i\theta}\,d\theta = 2i$

นอกจากบทนิยามที่เกี่ยวข้องกับการหาปริพันธ์ที่ได้กล่าวมาข้างต้นแล้วยังมีทฤษฎีบทที่ สมถวิล ขันเขตต์ (2558 : 71) ได้ให้ไว้ดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 4.1

ให้ a, b, c_1, c_2 และ c เป็นค่าคงตัว และถ้า $\int_a^b f(t)\,dt$ และ $\int_a^b g(t)\,dt$ หาค่าได้แล้ว

1. $\int_a^b \left[c_1 f(t) \pm c_2 g(t)\right]dt = c_1\int_a^b f(t)\,dt \pm c_2\int_a^b g(t)\,dt$
2. $\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt$ เมื่อ $a < c < b$
3. $\int_a^b f(t)\,dt = -\int_b^a f(t)\,dt$
4. $\int_a^a f(t)\,dt = 0$

ต่อไปจะเป็นบทนิยามที่เกี่ยวข้องกับฟังก์ชันต่อเนื่องเป็นช่วงและทฤษฎีเกี่ยวกับการหาปริพันธ์จำกัดเขตโดยอาศัยทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัสดังที่ เกียรติสุดา นาคประสิทธิ์ (2556 : 132) ได้กล่าวไว้ดังนี้

บทนิยาม 4.3

ฟังก์ชันค่าเชิงซ้อน $f = u + iv : [a,b] \to \mathbb{C}$ เป็น**ฟังก์ชันต่อเนื่องเป็นช่วง** ถ้า u และ v เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องเป็นชวงบน $[a,b]$

ถ้า $u,v : [a,b] \to R$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องเป็นช่วงบน $[a,b]$ แล้ว $\int_a^b u(t)\,dt$ และ $\int_a^b v(t)\,dt$ หาค่าได้ซึ่งทำให้ $\int_a^b w(t)\,dt$ หาค่าได้สำหรับ $w(t) = u(t) + iv(t)$ เมื่อ $t \in [a,b]$

ทฤษฎีบท 4.2 (ทฤษฎีบทหลักมูลแคลคูลัส)

กำหนดให้ $f = [a,b] \to \mathbb{C}$ เป็นฟังก์ชันค่าเชิงซ้อนของตัวแปรจริง ถ้ามีฟังก์ชันค่าเชิงซ้อนของตัวแปรจริง $F = [a,b] \to \mathbb{C}$ ซึ่ง

$$F'(t) = f(t) \quad \text{สำหรับ } t \in [a,b]$$

แล้ว

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$$

พิสูจน์

ให้ $F(t) = U(t) + iV(t)$ เมื่อ $U,V : [a,b] \to R$ เป็นฟังก์ชันค่าจริงของตัวแปรจริง และ $f(t) = u(t) + iv(t)$ เมื่อ $u,v : [a,b] \to R$ เป็นฟังก์ชันค่าจริงของตัวแปรจริง จะได้ว่า

$$U'(t) + iV'(t) = F'(t) = f(t) = u(t) + iv(t) \qquad \text{สำหรับ } t \in [a,b]$$

นั่นคือ $\quad U'(t) = u(t) \quad$ และ

$\quad V'(t) = v(t) \quad$ สำหรับ $t \in [a,b]$

โดยทฤษฎีบทหลักมูลแคลคูลัสสำหรับฟังก์ชันค่าจริง

$$\int_a^b u(t)\,dt = U(b) - U(a) \qquad \text{และ}$$

$$\int_a^b v(t)\,dt = V(b) - V(a)$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)\,dt &= \int_a^b u(t)\,dt + i\int_a^b v(t)\,dt \\ &= \left[U(b) - U(a)\right] + i\left[V(b) - V(a)\right] \\ &= U(b) - U(a) + iV(b) - iV(a) \\ &= \left[U(b) - iV(b)\right] - \left[U(a) - iV(a)\right] \\ &= F(b) - F(a)\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 4.3 จงหาค่า $\int_0^1 \left(3t^2 + i\right)dt$

วิธีทำ เนื่องจาก $\dfrac{d}{dt}\left(t^3 + it\right) = 3t^2 + i$

โดยทฤษฎีบทหลักมูลแคลคูลัสจะได้ว่า

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left(3t^2 + i\right)dt &= \left(t^3 + it\right)\Big|_0^1 \\ &= \left[(1)^3 + i(1)\right] - \left[(0)^3 + i(0)\right] \\ &= 1 + i\end{aligned}$$

ดังนั้น $\int_0^1 \left(3t^2 + i\right)dt = 1 + i$

ตัวอย่าง 4.4 จงใช้ทฤษฎีบทหลักมูลแคลคูลัสหาค่าปริพันธ์ $\int_0^{\pi} e^{it}\,dt$

วิธีทำ เนื่องจาก $\frac{d}{dt}\left(\frac{e^{it}}{i}\right) = e^{it}$ สำหรับ $t \in [0,\pi]$

โดยทฤษฎีบทหลักมูลแคลคูลัสจะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} e^{it}\,dt &= \left(\frac{e^{it}}{i}\right)\Bigg|_0^{\pi} \\
&= \left(\frac{e^{i\pi}}{i} - \frac{e^{i(0)}}{i}\right) \\
&= \frac{1}{i}\left(e^{i\pi} - e^{i(0)}\right) \\
&= -i\Big[\left(\cos\pi + i\sin\pi\right) - \left(\cos\pi + i\sin\pi\right)\Big] \\
&= -i(-1-1) \\
&= 2i
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\int_0^{\pi} e^{it}\,dt = 2i$

ทฤษฎีบท 4.3

กำหนดให้ $f(t) = u(t) + iv(t)$ สำหรับ $t \in [a,b]$ เป็นฟังก์ชันค่าเชิงซ้อนของตัวแปรจริง t แล้ว

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \le \int_a^b \left|f(t)\right| dt$$

พิสูจน์

ให้ $I = \int_a^b f(t)\,dt$

เนื่องจาก I เป็นจำนวนเชิงซ้อน สามารถเขียน I ในรูปของพิกัดเชิงขั้วได้ดังนี้

$I = \left|I\right| e^{i\theta}$ สำหรับจำนวนจริง θ บางจำนวน

จะได้

$$
\begin{aligned}
\left|I\right| &= Ie^{-i\theta} \\
&= e^{-i\theta}\int_a^b f(t)\,dt \\
&= \int_a^b f(t)\,e^{-i\theta}dt \\
&= \mathrm{Re}\left[\int_a^b f(t)\,e^{-i\theta}dt\right] \\
&= \int_a^b \mathrm{Re}\left[f(t)\,e^{-i\theta}\right]\,dt \\
&\le \int_a^b \left|f(t)\,e^{-i\theta}\right|\,dt \\
&= \int_a^b \left|f(t)\right|dt
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \le \int_a^b \left|f(t)\right|dt$

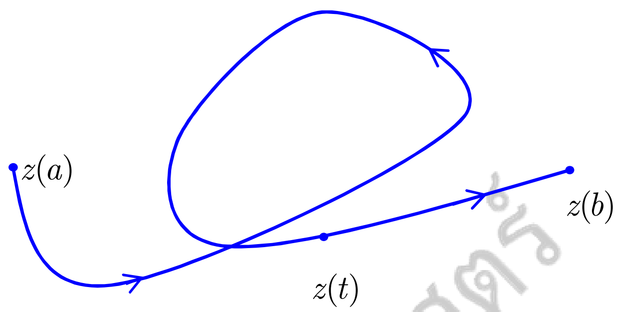
4.2 เส้นรอบขอบ

สำหรับบทนิยามของเส้นโค้ง และสมการเส้นโค้งได้ศึกษาในบทที่ผ่านมาแล้วซึ่งเขียนอยู่ในรูป

$$C : z(t) = x(t) + y(t)i, \quad a \le t \le b$$

โดยที่ a,b และ t เป็นจำนวนจริง ตัวอย่างต่อไปพิจารณากราฟเส้นโค้งหรือสมการเส้นโค้งในระนาบเชิงซ้อน

องค์ประกอบของเส้นโค้งที่กำหนดตามบทนิยามนี้ไม่เพียงหมายถึงทางเดินของจุดเท่านั้นแต่เราหมายรวมถึงทิศทางการเคลื่อนที่ของจุดด้วย โดยทิศทางดังกล่าวพิจารณาจากการแปรค่าของตัวแปรเสริม ซึ่งแสดงได้ดังภาพประกอบต่อไปนี้



ภาพประกอบ 4.1 เส้นโค้ง $z = z(t)$ เมื่อ $t \in [a,b]$

ที่มา :ประสิทธิ์ ลิ้มบุพศิริพร. 2557 : 129

จากภาพประกอบ 4.1 เราจะถือว่าจุดบนเส้นตรงเริ่มเคลื่อนออกจากจุด $z(a)$ ดังนั้นเราเรียก $z(a)$ ว่าจุดเริ่มต้น เมื่อ t เพิ่มค่าจาก a ไปยัง b จุด $z(t)$ บนเส้นโค้งจะเคลื่อนจากจุด $z(a)$ ไปตามทางเดินของเส้นโค้งไปยังจุด $z(b)$ ซึ่งถือเป็นจุดสุดท้าย ดังนั้นเราเรียก $z(b)$ ว่าจุดสิ้นสุดเพื่อแสดงทิศทางการเคลื่อนที่ของจุดดังกล่าว เรามักนิยมใช้ลูกศรกำกับบนเส้นโค้งเพื่อแสดงทิศทางและสำหรับลักษณะของเส้นรอบขอบนั้น เกียรติสุดา นาคประสิทธิ์ (2556 : 136) ได้ให้บทนิยามไว้ดังต่อไปนี้

บทนิยาม 4.4

เส้นรอบขอบ คือเส้นโค้งซึ่งประกอบด้วยเส้นโค้งเรียบจำนวนจำกัดที่เชื่อมต่อกัน

เส้นรอบขอบปิดเชิงเดียว คือเส้นรอบขอบซึ่งเป็นเส้นโค้งปิดเชิงเดียว

สมการเส้นตรงจากจุด $z_1 = x_1 + iy_1$ ไปยังจุด $z_2 = x_2 + iy_2$ สามารถกำหนดได้หลายรูปแบบจากวิชาแคลคูลัสเราทราบว่าเส้นตรงจากจุด (x_1, y_1) ไปยังจุด (x_2, y_2) เมื่อ $x_1 < x_2$ มีสมการเป็น

$$y = m(x - x_1) + y_1 \qquad \text{เมื่อ } x_1 \le x \le x_2$$

โดยที่ $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ดังนั้นสมการอิงตัวแปรเสริมของเส้นตรงจากจุด $z_1 = x_1 + iy_1$

ไปยังจุด $z_2 = x_2 + iy_2$ มีรูปเป็น

$$x(t) = t \qquad \text{และ} \qquad y(t) = m(t - x_1) + y_1 \text{ เมื่อ } t \in [x_1, x_2]$$

หรือเขียนในรูปสมการเชิงซ้อนเป็น

$$\begin{aligned} z = z(t) &= x(t) + iy(t) \\ &= t + i\left[m(t - x_1) + y_1\right] \text{ เมื่อ } t \in [x_1, x_2] \end{aligned}$$

จากความรู้ในเรื่องเวกเตอร์ เราทราบว่าสมการเส้นตรงจากจุด (x_1, y_1) ไปยังจุด (x_2, y_2) สามารถกำหนดในรูปอิงตัวแปรเสริมได้อีกรูปแบบคือ

$$x(t) = x_1 + (x_2 - x_1)t$$

$$y(t) = y_1 + (y_2 - y_1)t$$

เมื่อ $t \in [0,1]$

จากสมการอิงตัวแปรเสริมข้างต้นเราสามารถเขียนเป็นสมการรูปเชิงซ้อนได้เป็น

$$\begin{aligned} z = z(t) &= x_1 + (x_2 - x_1)t + i\left[y_1 + (y_2 - y_1)t\right] \\ &= z_1 + t(z_2 - z_1) \end{aligned}$$

จากตัวอย่างข้างต้นจะเห็นว่าสมการเส้นตรงสามารถกำหนดได้หลายรูปแบบ นอกจากนี้ยังพบว่าช่วงที่กำหนดเขตของตัวแปรเสริมของแต่ละสมการยังอาจแตกต่างกันด้วย

ตัวอย่าง 4.5 จงหาสมการเส้นตรงจากจุด $2 + i$ ไปยังจุด $3 + 3i$

วิธีทำ เราทราบว่าสมการเส้นตรงจากจุด $(2,1)$ ไปยังจุด $(3,3)$ คือ

$$y - 1 = 2(x - 2) \qquad \text{หรือ}$$

$$\begin{aligned} y - 1 &= 2x - 4 \\ y &= 2x - 3 \end{aligned}$$

ดังนั้นสมการเส้นตรงจากจุด $(2,1)$ ไปยังจุด $(3,3)$ ในรูปเชิงซ้อนมีรูปเป็น

$$z = x + yi = x + i(2x-3) \qquad \text{เมื่อ } 2 \le x \le 3$$

นอกจากนี้เรายังสามารถเขียนสมการเส้นตรงนี้ในรูปอื่นอีกคือ

จากสมการอิงตัวแปรเสริม $x(t) = x_1 + (x_2 - x_1)t$ และ $y(t) = y_1 + (y_2 - y_1)t$ จะได้

$$x(t) = 2 + (3-2)t = 2 + t \qquad \text{เมื่อ } 0 \le t \le 1$$

$$y(t) = 1 + (3-1)t = 1 + 2t \qquad \text{เมื่อ } 0 \le t \le 1$$

จาก สมการในรูปเชิงซ้อน $z(t) = x(t) + iy(t)$ จะได้

$$z(t) = (2+t) + i(1+2t)$$

ดังนั้น สมการเส้นตรงจากจุด $2+i$ ไปยังจุด $3+3i$ คือ $z(t) = (2+t) + i(1+2t)$ เมื่อ $0 \le t \le 1$

ตัวอย่าง 4.6 จงเขียนกราฟเส้นโค้ง $C : z(t) = 2(t) + 3ti,\ 0 \le t \le 2$

วิธีทำ จาก $z(t) = 2(t) + 3ti$

จะมี $x(t) = 2(t)$ และ $y(t) = 3(t)$ พิจารณาจาก $0 \le t \le 2$

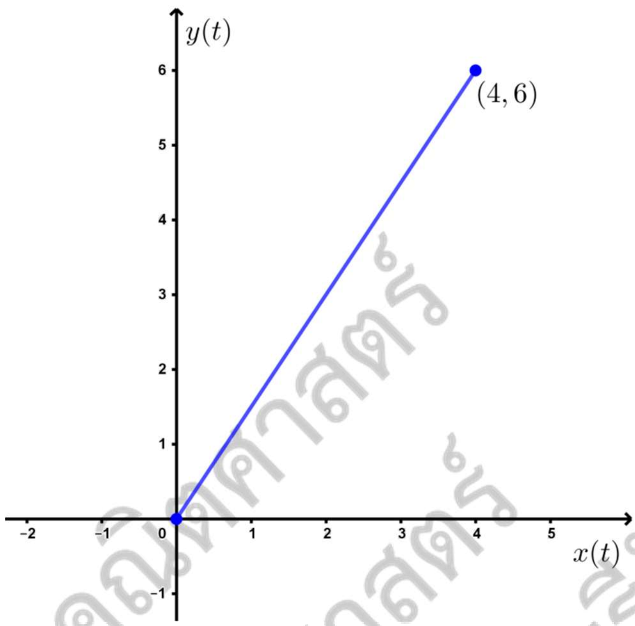
ได้ค่าดังตารางต่อไปนี้

t	0	1	2
$x(t)$	0	2	4
$y(t)$	0	3	6

เพราะฉะนั้นเส้นโค้ง C มีจุดเริ่มต้นอยู่ที่ $0+0i$ หรือ $(0,0)$

และสิ้นสุดอยู่ที่ $4+6i$ หรือ $(4,6)$ และเป็นส่วนของเส้นตรง $y = \frac{3}{2}x$

ดังนั้น เขียนกราฟของเส้นโค้ง $C : z(t) = 2(t) + 3ti,\ 0 \le t \le 2$ ได้ดังต่อไปนี้



ตัวอย่าง 4.7 จงเขียนกราฟเส้นโค้ง $C: z(t) = 2\cos t + i2\sin t,\ 0 \le t \le 2\pi$

วิธีทำ จาก $z(t) = 2\cos t + i2\sin t$

จะมี $x(t) = 2\cos t$ และ $y(t) = 2\sin t$ พิจารณาจาก $0 \le t \le 2\pi$

ได้ค่าดังตารางต่อไปนี้

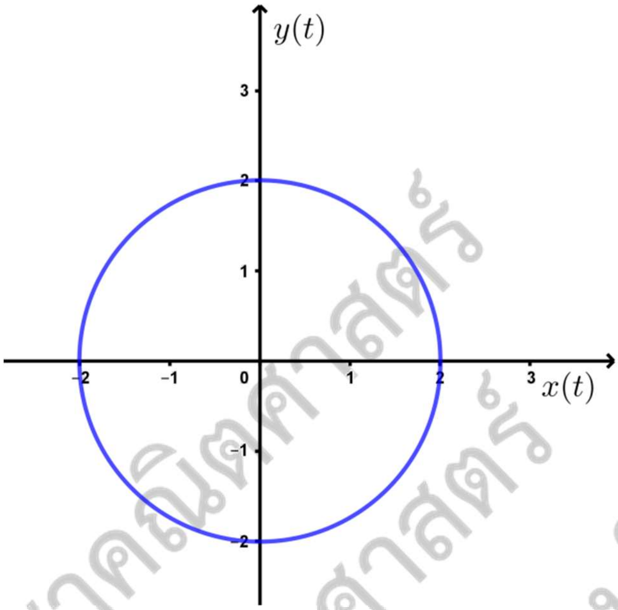
t	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$x(t)$	2	0	-2	0	2
$y(t)$	0	2	0	-2	0

เพราะฉะนั้นเส้นโค้ง C มีจุดเริ่มต้นอยู่ที่ $2+0i$ หรือ $(2,0)$

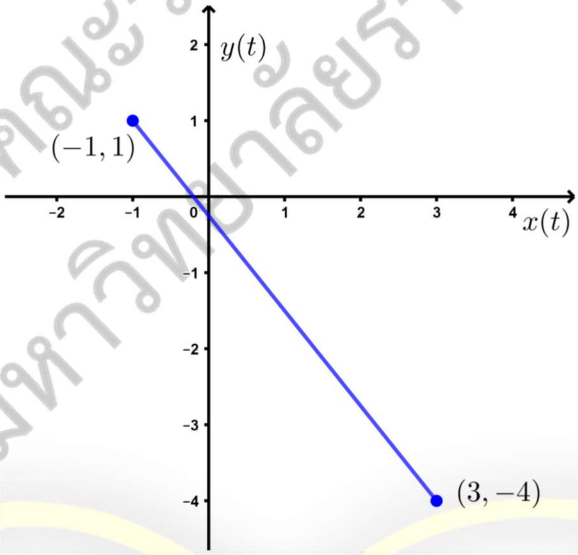
และสิ้นสุดอยู่ที่ $2+0i$ หรือ $(2,0)$ บนระนาบเชิงซ้อนซึ่งเป็นเส้นรอบวงกลม

รัศมีเท่ากับ 2 รอบจุดศูนย์กลาง $(0,0)$

ดังนั้น เขียนกราฟข้องเส้นโค้ง $C: z(t) = 2(t) + 3ti,\ 0 \le t \le 2$ ได้ดังต่อไปนี้



ตัวอย่าง 4.8 จงหาส่วนของเส้นตรงที่มีจุดปลายที่ $z_1 = -1 + i$ และ $z_2 = 3 + 4i$ ดังภาพ



วิธีทำ ให้ $C : z(t) = x(t) + y(t)i$

สมการเส้นตรงคือ $y - y_1 = m(x - x_1)$

นั่นคือ $$y - 1 = \frac{-4 - 1}{3 + 1}\left(x + 1\right)$$

$$y-1=-\frac{5}{4}\left(x+1\right)$$

นั่นคือ $$\frac{y-1}{-5}=\frac{x+1}{4}$$

จะได้ $$\frac{x+1}{4}=t \qquad \text{หรือ} \quad x=-1+4t$$

และ $$\frac{y-1}{-5}=t \qquad \text{หรือ} \quad y=1-5t$$

แทน x,y ในรูปของ t ในสมการ $C:z(t)=x(t)+y(t)i$ จะได้

$$C:z(t)=(-1+4t)+(1-5t)i$$

เมื่อ $-1\le x\le 3$ หรือ $-1\le -1+4t\le 3$ จะได้ $0\le t\le 1$

ดังนั้น สมการเส้นโค้ง C คือ $z(t)=(-1+4t)+(1-5t)i,\ 0\le t\le 1$

4.3 ปริพันธ์ตามเส้นรอบขอบ

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการหาปริพันธ์ฟังก์ชันเชิงซ้อนจากจำนวนเชิงซ้อนจำนวนหนึ่ง (z_0) ไปยังจำนวนเชิงซ้อนอีกจำนวนหนึ่ง (z_1) ซึ่งเรียกว่าปริพันธ์ตามเส้นรอบขอบ เนื่องจากมีวิธีจาก z_0 ไปยัง z_1 ในระนาบเชิงซ้อนหลายวิถี ดังนั้นจึงจำเป็นจะต้องระบุเส้นโค้งให้ชัดเจน ลักษระเช่นนี้ก็เป็นส่วนหนึ่งของปริพันธ์เชิงจริงตามเส้นโค้งในระนาบ xy สมบัติของปริพันธ์ตามเส้นเชิงจริง จึงมีส่วนสำคัญในการช่วยคำนวนปริพันธ์ตามเส้นรอบของในระนางเชิงซ้อนที่จะกล่าวในหัวข้อถัดไป

สำหรับการหาปริพันธ์จำกัดเขตของฟังก์ชันตัวแปรจริงส่วนมากจะหาปริพันธ์อยู่ในช่วงที่อยู่บนแกนจริง หรือเส้นจำนวนจริง ส่วนในกรณีของการหาปริพันธ์แบบจำกัดเขตเชิงซ้อน เราจะหาปริพันธ์ตามเส้นโค้ง C ในระนาบเชิงซ้อนซึ่งเราจะเรียกว่า ทางเดินของการหาปริพันธ์ หรือวิธีของการหาปริพันธ์ ซึ่งเส้นโค้ง C ในระนาบเชิงซ้อนเราสามารถแทนได้ในรูป

$$C:z(t)=x(t)+iy(t), \qquad a\le t\le b$$

หรือ

$$z(t)=x(t)+iy(t), \qquad a\le t\le b$$

ต่อไปจะเป็นการแสดงปริพันธ์ตามเส้นโค้งเชิงซ้อนโดยให้ $C: z(t)=x(t)+iy(t)$, $a \le t \le b$ เป็นเส้นโค้งเรียบในระนาบเชิงซ้อนและ $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่แต่ละจุดบนเส้นโค้ง C เราสามารถแบ่งเส้นโค้งดังกบ่วที่อยู่ในช่วง $a \le t \le b$ ออกเป็น n ช่วงเท่า ๆ กัน โดยที่จุดแบ่งต่าง ๆ ให้เขียนชื่อเป็น $z_1, z_2, \ldots, z_n$ และ $a = z_1 < z_2 < \ldots < z_n = b$ ซึ่งเป็นจุดบนเส้นโค้ง C และให้ $\Delta z_m = z_m - z_{m-1}$ เป็นคอร์ดที่ตัดจากเส้นโค้งระหว่างจุด z_{m-1} กับ z_m ในแต่ละส่วนโค้งที่เกิดจากการแบ่งเส้นโค้ง C เราสามารถเลือกจุดใด ๆได้

เช่น ระหว่างจุด z_0 กับ z_1 เลือกจุด ζ_1

ระหว่างจุด z_1 กับ z_2 เลือกจุด ζ_2

.

.

.

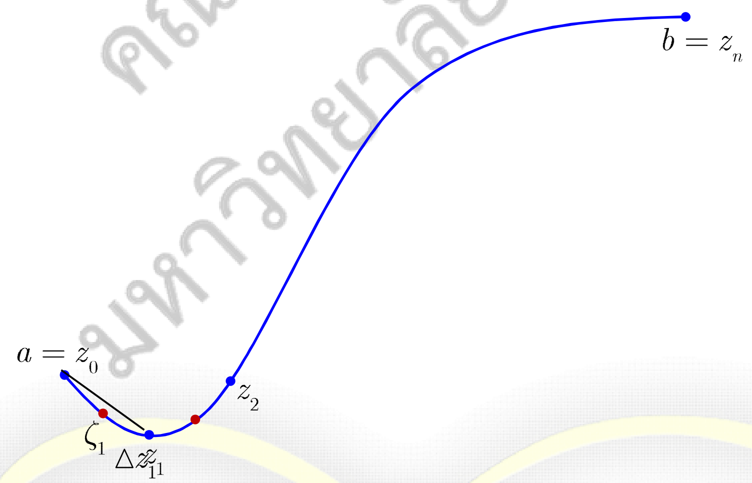
ระหว่างจุด z_{m-1} กับ z_m เลือกจุด ζ_m

.

.

.

ระหว่างจุด z_{n-1} กับ z_n เลือกจุด ζ_n



ภาพประกอบ 4.2 เส้นโค้ง $C: z(t)=x(t)+iy(t)$, $a \le t \le b$ ในระนาบเชิงซ้อน

ที่มา :Murray R.S., Seymour L.,Jhon J.S. and Dennis S. 2009 : 111

ให้ $S_n = \sum_{m=1}^{n} f\left(\zeta_n\right)\Delta z_m$

เมื่อ $n \to \infty$ จะได้ $\Delta z_m \to 0$

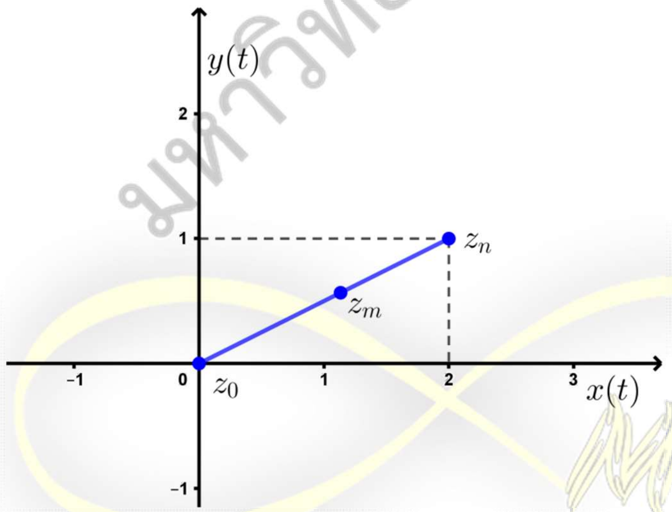
ถ้า $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{m=1}^{n} f\left(\zeta_n\right)\Delta z_m$ หาค่าได้ ค่าที่ได้คือปริพันธ์ตามเส้นของ $f(z)$ ตามเส้นโค้ง C เขียนแทนด้วย $\int\limits_C f(z)\,dz$ ดังนั้น

$$\int\limits_C f(z)\,dz = \lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^{n} f\left(\zeta_n\right)\Delta z_m$$

ในกรณีที่เส้นโค้ง C เป็นเส้นโค้งปิด เราเรียกการหาปริพันธ์ตามเส้นที่ได้ใหม่นี้ว่าการหาปริพันธ์วงรอบปิด หรือ คอนทัวร์ปริพันธ์และใช้สัญลักษณ์ $\oint_C f(z)\,dz$ หรือ $\oint\limits_C f(z)\,dz$ ทิศทางบวกของการหาปริพันธ์สำหรับปริพันธ์ตามเส้นรอบขอบคือทิศทางที่ให้พื้นที่ภายในวงรอบปิดอยู่ทางซ้ายมือของคนที่เดินไปตามทิศทางดังกล่าวในกรณีที่เส้นรอบวงปิดเป็นวงกลม ทิศทางบวกของการหาปริพันธ์ ก็คือทิศทวนเข็มนาฬิกานั่นเอง (สมถวิล ขันเขตต์, 2558 : 74).

ตัวอย่าง 4.9 กำหนดให้ $f(z) = z^2$ และ C เป็นเส้นโค้ง $z(t) = 2t + it$ เมื่อ $0 \le t \le 1$ จงหาค่าของ $\int\limits_C f(z)\,dz$

วิธีทำ เส้นโค้ง $z(t) = 2t + it$ เมื่อ $0 \le t \le 1$ แสดงได้ดังภาพต่อไปนี้



ให้ $z_m = x_m + iy_m$ จะได้

$x_m = 2t$ และ $y_m = t$

นั่นคือ $x_m = 2y_m$

ดังนั้น $z_m = 2y_m + iy_m$

ให้ $\zeta_m = z_m$ จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
f\left(\zeta_m\right) &= \left(\zeta_m\right)^2 \\
&= \left(z_m\right)^2 \\
&= \left(2y_m + iy_m\right)^2 \\
&= 3\left(y_m\right)^2 + i4\left(y_m\right)^2 \\
&= \left(3+4i\right)\left(y_m\right)^2
\end{aligned}
$$

และ

$$
\begin{aligned}
\triangle z_m &= z_m - z_{m-1} \\
&= \left[2y_m + iy_m\right] - \left[2y_{m-1} + iy_{m-1}\right] \\
&= 2y_m + iy_m - 2y_{m-1} - iy_{m-1} \\
&= 2\left[y_m - y_{m-1}\right] + i\left[y_m + y_{m-1}\right] \\
&= 2\triangle y_m + i\triangle y_m \\
&= \left[2+i\right]\triangle y_m
\end{aligned}
$$

จะได้ $\int\limits_C f(z)\,dz = \int\limits_C z^2\,dz$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^{n} f\left(\zeta_n\right)\triangle z_m \\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^{n}\left[3+i4\right]\left(y_m\right)^2\left[2+i\right]\triangle y_m \\
&= \left[3+i4\right]\left[2+i\right]\lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^{n}\left(y_m\right)^2\triangle y_m \\
&= \left[2+11i\right]\lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^{n}\left(y_m\right)^2\triangle y_m \\
&= \left[2+11i\right]\int\limits_0^1 y^2\,dy \\
&= \left[2+11i\right]\left[\frac{y^3}{3}\right]\Bigg|_0^1
\end{aligned}
$$

$$= \left[\frac{2+11i}{3}\right]\left[1^3 - 0^3\right]$$
$$= \frac{2}{3} + \frac{11i}{3}$$

ดังนั้น $\int\limits_C f(z)\,dz = \frac{2}{3} + \frac{11i}{3}$

การหาตัวอย่างปริพันธ์ตามเส้นรอบของในตัวอย่างที่ผ่านมานั้นจะเห็นว่าขั้นตอนการหาค่อนข้างยาวมาก ดังนั้นเราสามารถใช้บทนิยามและทฤษฎีบท ที่ เกียรติสุดา นาคประสิทธิ์ (2556 : 138) ได้ให้ไว้เพื่อหาปริพันธ์ตามขอบได้ง่ายและสะดวกมากยิ่งขึ้น

บทนิยาม 4.5

ให้ C เป็นเส้นรอบขอบซึ่งมีสมการคือ $C : z(t) = x(t) + iy(t)$, $a \le t \le b$ และ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงโดเมน D ในระนาบจำนวนเชิงซ้อนปริพันธ์ตามเส้นรอบขอบ C ของ f นิยามโดย

$$\int\limits_C f(z)\,dz = \int\limits_a^b f\Big(z(t)\Big)\,z'(t)\,dt$$

ในการศึกษาปริพันธ์ตามเส้นรอบขอบจำเป็นต้องกำหนดทิศทางของเส้นโค้งที่จะทำการหาค่าปริพันธ์ กำหนดให้เส้นโค้ง C ที่มีค่าตามการเพิ่มขึ้นของค่า t มีทิศทางบวก และทิศทางลบ ในทางตรงกันข้ามสำหรับกรณีที่ C เป็นเส้นโค้งปิด กำหนดให้ทิศทางทวนเข็มนาฬิกา เป็นทิศทางบวก และทิศทางตามเข็มนาฬิกา เป็นทิศทางลบ

ทฤษฎีบท 4.4

กำหนดให้ f และ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนโดเมน D และ C เป็นเส้นรอบขอบใน D แล้ว

1. $\int\limits_C kf(z)\,dz = k\int\limits_C f(z)\,dz$

2. $\int\limits_C \Big[f(z) \pm g(z)\Big]dz = \int\limits_C f(z)\,dz \pm \int\limits_C g(z)\,dz$

ทฤษฎีบท 4.4 (ต่อ)

3. $\int\limits_{C} f(z)\,dz = \int\limits_{C_1} f(z)\,dz + \int\limits_{C_2} f(z)\,dz$ เมื่อ $C = C_1 + C_2$

4. $\int\limits_{-C} f(z)\,dz = -\int\limits_{C} f(z)\,dz$

บทพิสูจน์

1. พิจารณา $\int\limits_{C} kf(z)\,dz$ ดังนี้

$$\begin{aligned}\int\limits_{C} kf(z)\,dz &= \int\limits_{a}^{b} k\Big[f\big(z(t)\big)z'(t)\Big]\,dt \\ &= k\int\limits_{a}^{b}\Big[f\big(z(t)\big)z'(t)\Big]\,dt \\ &= k\int\limits_{C} f(z)\,dz\end{aligned}$$

2. พิจารณา $\int\limits_{C}\Big[f(z) \pm g(z)\Big]dz$ ดังนี้

$$\begin{aligned}\int\limits_{C}\Big[f(z) \pm g(z)\Big]dz &= \int\limits_{a}^{b}\Big[\big(f \pm g\big)\big(z(t)\big)z'(t)\Big]\,dt \\ &= \int\limits_{a}^{b}\Big[f\big(z(t)\big) \pm g\big(z(t)\big)\Big]z'(t)\;dt \\ &= \int\limits_{a}^{b} f\big(z(t)\big)z'(t)\;dt \pm \int\limits_{a}^{b} g\big(z(t)\big)z'(t)\;dt \\ &= \int\limits_{C} f(z)\,dz \pm \int\limits_{C} g(z)\,dz\end{aligned}$$

3. พิจารณา $\int\limits_{C} f(z)\,dz$ ดังนี้

$$\begin{aligned}\int\limits_{C} f(z)\,dz &= \int\limits_{a}^{b}\Big[f\big(z(t)\big)z'(t)\Big]\,dt \\ &= \int\limits_{a}^{c}\Big[f\big(z(t)\big)z'(t)\Big]\,dt + \int\limits_{c}^{b}\Big[f\big(z(t)\big)z'(t)\Big]\,dt \\ &= \int\limits_{C_1} f(z)\,dz + \int\limits_{C_2} f(z)\,dz\end{aligned}$$

4. พิจารณา $\int\limits_{-C} f(z)\,dz$ ดังนี้

$$\int\limits_{-C} f(z)\,dz = \int\limits_{-b}^{-a}\left[f\left(z(-t)\right)\frac{d}{dz}z(-t)\right]dt$$

$$= \int\limits_{-b}^{-a}\left[f\left(z(-t)\right)z'(-t)\right]d(-t)$$

$$= \int\limits_{b}^{a}\left[f\left(z(s)\right)z'(s)\right]ds$$

$$= -\int\limits_{a}^{b}\left[f\left(z(s)\right)z'(s)\right]ds$$

$$= -\int\limits_{C} f(z)\,dz$$

ตัวอย่าง 4.10 จงหาค่า $\int\limits_{-C} \overline{z}\,dz$ เมื่อ C คือเส้นรอบขอบที่มีสมการคือ

$z(t) = 3t + it^2$ สำหรับ $t \in \left[-1, 4\right]$

วิธีทำ กำหนดให้ $z = x + yi$ จะได้ว่า $\overline{z} = x - yi$

จาก $z(t) = x(t) + iy(t) = 3t + it^2$ ทำให้ได้ว่า

$x(t) = 3t$ และ $y(t) = t^2$

จะได้ $z'(t) = 3t + i2t$ และ

$$\int\limits_{C} \overline{z}\,dz = \int\limits_{-1}^{4}\left[(3t - it^2)(3 + i2t)\right]dt$$

$$= \int\limits_{-1}^{4}\left[2t^3 + 9t + i3t^2\right]dt$$

$$= \int\limits_{-1}^{4}\left[2t^3 + 9t\right]dt + i\int\limits_{-1}^{4}\left[3t^2\right]dt$$

$$= \left[\frac{t^4}{2} + \frac{9t^2}{2}\right]_{-1}^{4} + i\left[t^3\right]_{-1}^{4}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left[4^4 + 9(4)^2\right] - \left[(-1)^4 + 9(-1)^2\right]\right) + i\left[4^3 - (-1)^3\right]$$

$$= 195 + 65i$$

ดังนั้น $\int\limits_{-C} \overline{z}\,dz = 195 + 65i$

ตัวอย่าง 4.11 จงหาค่า $\oint_C \left(\frac{1}{z}\right) dz$ เมื่อ C คือวงกลมหนึ่งหน่วยซึ่มีสมการคือ

$$z(t) = \cos t + i \sin t \quad \text{เมื่อ } t \in [0, 2\pi]$$

วิธีทำ ให้ $z(t) \in C$ ซึ่งเขียนในรูปเชิงขั้วคือ $z(t) = |z(t)| e^{i\theta}$

เนื่องจาก $z(t) \in C$ และ C มีสมการคือ $z(t) = \cos t + i \sin t$

นั่นคือ $|z(t)| = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = 1$ และ $\theta = t$

จะได้ $z(t) = |z(t)| e^{i\theta} = e^{it}$ และ $z'(t) = ie^{it}$ เมื่อ $t \in [0, 2\pi]$

ทำให้ได้ว่า $\frac{1}{z(t)} = \frac{1}{e^{it}}$ เมื่อ $t \in [0, 2\pi]$ และ

$$\begin{aligned}
\oint_C \left(\frac{1}{z}\right) dz &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{e^{it}}(ie^{it})\right] dt \\
&= i\int_0^{2\pi} [1]\, dt \\
&= i[t]\Big|_0^{2\pi} \\
&= i[2\pi - 0] \\
&= 2\pi i
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\oint_C \left(\frac{1}{z}\right) dz = 2\pi i$

ตัวอย่าง 4.12 กำหนดให้ C เป็นเส้นโค้งที่กำหนดโดย

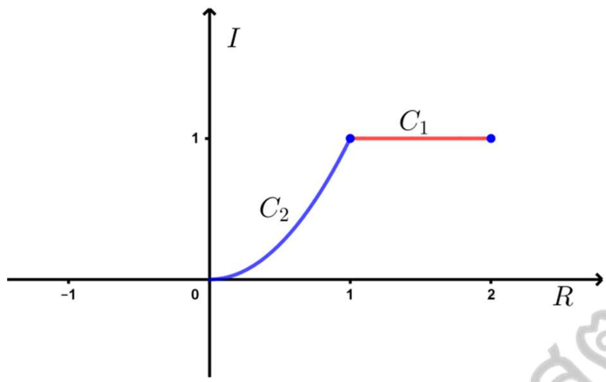
$$z(t) = \begin{cases} t + it^2, & 0 \le t < 1 \\ 1 + t + i, & 1 \le t \le 2 \end{cases}$$

จงหา $\int_C z \operatorname{Re}(z)\, dz$

วิธีทำ ให้ $C_1 : z(t) = t + it^2$ เมื่อ $0 \le t < 1$

$C_1 : z(t) = 1 + t + i$ เมื่อ $1 \le t \le 2$

จะเห็นว่า $C = C_1 + C_2$ เขียนกราฟได้ดังรูปต่อไปนี้



จะได้ $\int\limits_{C} f(z)\,dz = \int\limits_{C_1} f(z)\,dz + \int\limits_{C_2} f(z)\,dz$

พิจารณา $\int\limits_{C_1} f(z)\,dz$ ต่อไปนี้

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{C_1} f(z)\,dz &= \int\limits_0^1 \left[f\left(z(t)\right)z'(t)\right]dt \\
&= \int\limits_0^1 \left[\left((t+it^2)\,\mathrm{Re}(t+it^2)\right)(1+2it)\right]dt \\
&= \int\limits_0^1 \left[\left((t+it^2)t\right)(1+2it)\right]dt \\
&= \int\limits_0^1 \left[\left(t^2+it^3\right)(1+2it)\right]dt \\
&= \int\limits_0^1 \left[(t^2-2t^4)+i3t^3\right]dt \\
&= \left[\frac{t^3}{3}-\frac{2t^5}{5}+i\frac{3t^4}{4}\right]_0^1 \\
&= \left[\frac{1^3}{3}-\frac{2(1)^5}{5}+i\frac{3(1)^4}{4}\right]-\left[\frac{0^3}{3}-\frac{2(0)^5}{5}+i\frac{3(0)^4}{4}\right] \\
&= \frac{1}{3}-\frac{2}{5}+i\frac{3}{4} \\
&= -\frac{1}{15}+\frac{3}{4}i
\end{aligned}
$$

นั่นคือ $\int\limits_{C_1} f(z)\,dz = -\frac{1}{15}+\frac{3}{4}i$

พิจารณา $\int\limits_{C_2} f(z)\,dz$ ต่อไปนี้

$$\begin{aligned}\int_{C_2} f(z)\,dz &= \int_0^1 \Big[f\big(z(t)\big)z'(t)\Big]dt\\ &= \int_0^1 \Big[\big((1+t+i)\operatorname{Re}(1+t+i)\big)(1)\Big]dt\\ &= \int_0^1 \Big[(1+t+i)(1+t)(1)\Big]dt\\ &= \int_0^1 \Big[(1+2t+t^2)+i(1+t)\Big]dt\end{aligned}$$

$$= \left[t+t^2+\frac{t^3}{3}+i\left(t+\frac{t^2}{2}\right)\right]\Bigg|_0^1$$

$$= \left[1+1^2+\frac{1^3}{3}+i\left(1+\frac{1^2}{2}\right)\right]-\left[0+0^2+\frac{0^3}{3}+i\left(0+\frac{0^2}{2}\right)\right]$$

$$= \left[1+1+\frac{1}{3}+i\left(1+\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{7}{3}+\frac{3}{2}i$$

นั่นคือ $\int_{C_2} f(z)\,dz = \frac{7}{3}+\frac{3}{2}i$

จาก $\int_C f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz$

จะได้ $\int_C f(z)\,dz = \left(-\frac{1}{15}+\frac{3}{4}i\right)+\left(\frac{7}{3}+\frac{3}{2}i\right) = -\frac{34}{15}+\frac{9}{4}i$

ดังนั้น $\int_C f(z)\,dz = -\frac{34}{15}+\frac{9}{4}i$

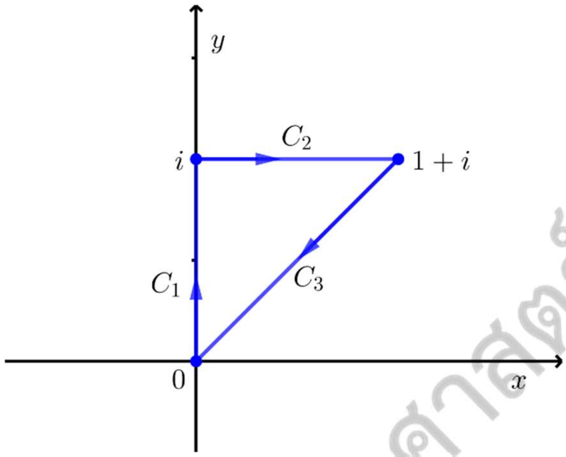
ตัวอย่าง 4.13 จงหาค่า $\oint_C \left(y-x-3x^2\right)dz$ เมื่อ C คือเส้นรอบรูปของรูปสามเหลี่ยมซึ่งมีจุดมุมคือ $(0,0),(0,1)$ และ $(1,1)$ ในทิศทางตามเข็มนาฬิกา

วิธีทำ ให้ C_1 เป็นเส้นโค้งของเส้นตรงจากจุด $(0,0)$ ไปยังจุด $(0,1)$

C_2 เป็นเส้นโค้งของเส้นตรงจากจุด $(0,1)$ ไปยังจุด $(1,1)$

C_3 เป็นเส้นโค้งของเส้นตรงจากจุด $(1,1)$ ไปยังจุด $(0,0)$

เขียนกราฟได้ดังต่อไปนี้



จากภาพประกอบจะได้ว่า

$C = C_1 + C_2 + C_3$ จะได้

$$\oint_C f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz + \int_{C_3} f(z)\,dz$$

พิจารณาเส้นโค้ง C_1 ดังต่อไปนี้

จาก $z(t) = x(t) + iy(t)$ และ

$x(t) = x_1 + (x_2 - x_1)t$

$y(t) = y_1 + (y_2 - y_1)t$

จะได้ $x(t) = 0 + (0-0)t = 0$ หรือ $x = 0$

และ $y(t) = 0 + (1-0)t = t$ หรือ $y = t$

นั่นคือ $z(t) = it$ และ $z'(t) = i$ สำหรับ $t \in [0,1]$

$$\begin{aligned}
\int_{C_1} f(z)\,dz &= \int_{C_1} (y - x - 3x^2 i)\,dz \\
&= \int_0^1 \left[\left(t - 0 - 3(0)^2 i\right)(i)\right] dt \\
&= \int_0^1 [it]\,dt \\
&= i\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 \\
&= i\left[\frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right] \\
&= \frac{1}{2}i
\end{aligned}$$

นั่นคือ $\int\limits_{C_1} f(z)\,dz = \frac{1}{2}i$

พิจารณาเส้นโค้ง C_2 ดังต่อไปนี้

จาก $z(t) = x(t) + iy(t)$ และ

$x(t) = x_1 + (x_2 - x_1)t$

$y(t) = y_1 + (y_2 - y_1)t$

จะได้ $x(t) = 0 + (1-0)t = t$ หรือ $x = t$

และ $y(t) = 1 + (1-1)t = 1$ หรือ $y = 1$

นั่นคือ $z(t) = t + i$ และ $z'(t) = 1$ สำหรับ $t \in [0,1]$

$$\begin{aligned}
\int\limits_{C_2} f(z)\,dz &= \int\limits_{C_2} (y - x - 3x^2 i)\,dz \\
&= \int\limits_0^1 \left[\left(1 - t - 3(t)^2 i\right)(1)\right] dt \\
&= \int\limits_0^1 \left[1 - t - 3t^2 i\right] dt \\
&= \left[t - \frac{t^2}{2} - t^3 i\right]\Bigg|_0^1 \\
&= \left[1 - \frac{1^2}{2} - (1)^3 i\right] - \left[0 - \frac{0^2}{2} - (0)^3 i\right] \\
&= \left[\frac{1}{2} - i\right]
\end{aligned}$$

นั่นคือ $\int\limits_{C_2} f(z)\,dz = \frac{1}{2} - i$

พิจารณาเส้นโค้ง C_3 ดังต่อไปนี้

จาก $z(t) = x(t) + iy(t)$ และ

$x(t) = x_1 + (x_2 - x_1)t$

$y(t) = y_1 + (y_2 - y_1)t$

จะได้ $x(t) = 1 + (0-1)t = 1 - t$ หรือ $x = 1 - t$

และ $y(t) = 1 + (0-1)t = 1 - t$ หรือ $y = 1 - t$

นั่นคือ $z(t)=(1-t)+(1-t)i$ และ $z'(t)=-1-i$ สำหรับ $t\in\left[0,1\right]$

$$\begin{aligned}\int_{C_2} f(z)\,dz &= \int_{C_2}(y-x-3x^2i)\,dz\\ &= \int_0^1\left[\left((1-t)-(1-t)-3(1-t)^2i\right)(-1-i)\right]dt\\ &= \int_0^1\left[-3(1-t)^2i(-1-i)\right]dt\\ &= \int_0^1\left[3(1-t)^2i(1+i)\right]dt\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= 3i(1+i)\int_0^1(1-t)^2\,dt\\ &= 3i(1+i)\int_0^1\left[1-2t+t^2\right]dt\\ &= 3i(1+i)\left[t-t^2-\frac{t^3}{3}\right]\Bigg|_0^1\\ &= 3i(1+i)\left(\left[1-1^2-\frac{1^3}{3}\right]-\left[0-0^2-\frac{0^3}{3}i\right]\right)\\ &= 3i(1+i)\left[-\frac{1}{3}\right]\\ &= -i(1+i)\\ &= -1+i\end{aligned}$$

นั่นคือ $\int_{C_3} f(z)\,dz=-1+i$

จาก $\oint_C f(z)\,dz=\int_{C_1} f(z)\,dz+\int_{C_2} f(z)\,dz+\int_{C_3} f(z)\,dz$ จะได้

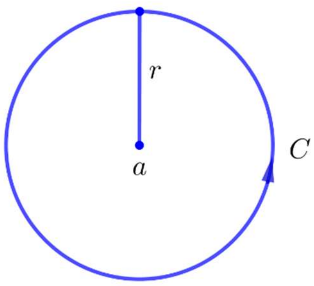
$$\oint_C f(z)\,dz=\frac{1}{2}i+\left(\frac{1}{2}-i\right)+\left(-1+i\right)=\frac{1}{2}\left(-1-i\right)$$

ดังนั้น $\oint_C f(z)\,dz=\frac{1}{2}\left(-1-i\right)$

ตัวอย่าง 4.14 จงหาค่า $\oint_C (z-a)^n\,dz$ เมื่อ C คือเส้นรอบของซึ่งมีสมการคือ

$z(t)=a+re^{it}$ เมื่อ $r>0$ และ $t\in\left[0,2\pi\right]$

วิธีทำ สามารถวาดรูปเส้นรอบขอบ C ได้ดังต่อไปนี้



จากภาพประกอบจะได้ว่า C คือเส้นรอบวงของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลาง

ที่จุด $z=a$ และรัศมียาว r หน่วยในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา

จาก $\quad z(t)=a+re^{it}$ $\quad$ จะได้

$$z'(t)=ire^{it}$$

พิจารณา 2 กรณีดังต่อไปนี้

กรณีที่ 1 กรณีที่ $n=-1$ จะได้

$$\begin{aligned}
\oint_C (z-a)^n\,dz &= \oint_C \left(\frac{1}{z-a}\right)dz \\
&= \int_0^{2\pi}\left[f\left(z(t)\right)z'(t)\right]dt \\
&= \int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{(a+re^{it})-a}(ire^{it})\right]dt \\
&= \int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{re^{it}}(ire^{it})\right]dt \\
&= i\int_0^{2\pi} 1\ dt \\
&= i\left[t\right]\Big|_0^{2\pi} \\
&= i\left[2\pi-0\right] \\
&= 2\pi i
\end{aligned}$$

กรณีที่ 2 กรณีที่ $n\neq -1$ จะได้

$$
\begin{aligned}
\oint_C (z-a)^n\,dz &= \int_0^{2\pi}\Big[f\big(z(t)\big)z'(t)\Big]dt \\
&= \int_0^{2\pi}\Big[\big((a+re^{it})-a\big)^n\,(ire^{it})\Big]dt \\
&= \int_0^{2\pi}\Big[(re^{it})^n(ire^{it})\Big]dt \\
&= i\int_0^{2\pi}\Big[r^n e^{itn} re^{it}\Big]dt \\
&= ir^{n+1}\int_0^{2\pi}\Big[e^{it(n+1)}\Big]dt \\
&= ir^{n+1}\left[\frac{e^{it(n+1)}}{i(n+1)}\right]\Bigg|_0^{2\pi} \\
&= \frac{ir^{n+1}}{i(n+1)}\Big[e^{it(n+1)}\Big]\Big|_0^{2\pi} \\
&= \frac{ir^{n+1}}{i(n+1)}\Big(\Big[e^{i2\pi(n+1)}\Big]-\Big[e^{i(0)(n+1)}\Big]\Big) \\
&= \frac{ir^{n+1}}{i(n+1)}\big(1-1\big) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $\oint_C (z-a)^n\,dz = \begin{cases} 2\pi i & ; n=-1 \\ 0 & ; n\neq -1 \end{cases}$

4.4 ปฏิยานุพันธ์

สำหรับการศึกษาทฤษฎีต่าง ๆ ของการวิเคราะห์ฟังก์ชันเชิงซ้อนคือการขยายฤษฎีบทพื้นฐานของแคลคูลัส มาสู่การหาปริพันธ์ตามเส้นรอบขอบ ซึ่งเราพบว่าภายใต้เงื่อนไขบางประการ ผลการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันเชิงซ้อนบางฟังก์ชันขึ้นกับจุดเริ่มต้นและจุดสุดท้ายของเส้นรอบขอบเท่านั้น โดยไม่ได้ขึ้นอยู่กับรูปร่างลักษณะของเส้นรอบขอบ นั่นคือ ค่าปริพันธ์เป็นอิสระจากวิถี สำหรับในหัวข้อนี้จะศึกษาทฤษฎีบทซึ่งขยายทฤษฎีบทหลักมูลแคลคูลัสเพื่อให้ง่ายต่อการคำนวณค่าปริพันธ์ตามเส้นรอบขอบ ซึ่งเกี่ยวข้องกับแนวคิดเรื่องปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชันต่อเนื่อง $f(z)$ บนโดเมน D ดังที่ประสิทธิ์ ลิ้มบุพศิริพร (2557 : 147) ได้ให้บทนิยามไว้ดังต่อไปนี้

บทนิยาม 4.6

กำหนด f เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องบนโดเมน D เรากล่าวว่า ฟังก์ชัน F เป็น**ปฏิยานุพันธ์** ของ f ใน D ถ้า

$$F'(z) = f(z)$$

สังเกตว่าปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(z)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ใน D และปฏิยานุพันธ์ของ $f(z)$ มีได้หลายฟังก์ชันซึ่งจะแตกต่างกันเพียงค่าคงตัวเท่านั้น
นั่นคือ ถ้า $F(z)$ และ $G(z)$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(z)$ แล้ว

$$\frac{d}{dz}\Big[F(z) - G(z)\Big] = \frac{d}{dz}\Big[F(z)\Big] - \frac{d}{dz}\Big[G(z)\Big] = f(z) - f(z) = 0$$

สำหรับทุก $z \in D$ ดังนั้น $F(z) - G(z) = C$ หรือ $F(z) = G(z) + C$ เมื่อ C เป็นค่าคงตัวเชิงซ้อน

ตัวอย่าง 4.15

$F(z) = \dfrac{z^2}{2}$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f(z) = z$ ใน D

เนื่องจาก $\dfrac{d}{dz}\left(\dfrac{z^2}{2}\right) = z$

$F(z) = \dfrac{z^2}{2} + 5$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f(z) = z$ ใน D

เนื่องจาก $\dfrac{d}{dz}\left(\dfrac{z^2}{2} + 5\right) = z$

$F(z) = \dfrac{(z+a)^{n+1}}{n+1}$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f(z) = (z+a)$ ใน D

เนื่องจาก $\dfrac{d}{dz}\left(\dfrac{(z+a)^{n+1}}{n+1}\right) = (z+a)$

$F(z) = \dfrac{(z+a)^{n+1}}{n+1} + C$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f(z) = (z+a)$ ใน D

เนื่องจาก $\dfrac{d}{dz}\left(\dfrac{(z+a)^{n+1}}{n+1} + C\right) = (z+a)$

เกียรติสุดา นาคประสิทธิ์ (2556 : 148-149) ได้ให้ทฤษฎีบทหลักมูลแคลคูลัสสำหรับปริพันธ์ตามเส้นรอบขอบ และทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง ดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 4.5 (ทฤษฎีบทหลักมูลแคลคูลัสสำหรับปริพันธ์ตามเส้นรอบขอบ)

ถ้าฟังก์ชัน $F(z)$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(z)$ บนเส้นรอบขอบ C ซึ่งมีสมการคือ $z = z(t)$ เมื่อ $t \in \left[a,b\right]$ แล้ว

$$\int_C f(z)\,dz = F\left(z(b)\right) - F\left(z(a)\right)$$

พิสูจน์

ให้ $\Gamma(t) = F\left(z(t)\right)$ สำหรับ $t \in \left[a,b\right]$

จะได้ว่า $\Gamma'(t) = F'\left(z(t)\right)z'(t)$ และ

$$\begin{aligned}
\int_C f(z)\,dz &= \int_a^b f\left(z(t)\right)z'(t)\ dz \\
&= \int_a^b F'\left(z(t)\right)z'(t)\ dz \\
&= \int_a^b \Gamma'(t)\ dz \\
&= \Gamma(b) - \Gamma(a) \\
&= F\left(z(b)\right) - F\left(z(a)\right)
\end{aligned}$$

ทฤษฎีบท 4.6

กำหนดให้ D เป็นโดเมนในระนาบจำนวนเชิงซ้อน C และ $f : D \to \mathbb{C}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน D แล้วข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

1. f มีฟังก์ชัน F เป็นปฏิยานุพันธ์ใน D
2. $\int_C f(z)\,dz$ เมื่อ C เป็นเส้นรอบของที่มีจุดเริ่มต้นที่ z_1 และมีจุดสิ้นสุดที่ z_2

   มีค่าเท่ากันซึ่งเท่ากับ $\int_C f(z)\,dz = F(z_2) - F(z_1)$

   เมื่อ $F(z)$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(z)$

ทฤษฎีบท 4.6 (ต่อ)

3. $\oint_C f(z)\,dz = 0$ สำหรับทุกเส้นรอบขอบปิด C ใน D

ตัวอย่าง 4.16

1. เนื่องจากฟังก์ชัน $\dfrac{(z+a)^5}{5}$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน $(z-a)^4$ ดังนั้น

$$\oint_C (z-a)^4\,dz = 0$$

2. เนื่องจากฟงก์ชัน $\dfrac{z^4}{4}$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน z^3 ดังนั้น

$$\int_C z^3\,dz = \left[\frac{z^4}{4}\right]_0^{i+1} = \frac{(i+1)^4}{4}$$

สำหรับทุกเส้นรอบขอบ C ที่มีจุดเริ่มต้นที่ $z=0$ และมีจุดสิ้นสุดที่ $z=i+1$

ตัวอย่าง 4.17 จงหาค่า $\int_C \sin z\ dz$ เมื่อ C เป็นเส้นรอบขอบที่มีจุดเริ่มต้นที่ $z=0$ และจุดสิ้นสุดที่ $z=1-i$

วิธีทำ เนื่องจาก $\dfrac{d}{dz}\left(-\cos z\right) = \sin z$ สำหรับทุก $z \in C$ จะได้

$$\begin{aligned}\int_C \sin z\ dz &= \left[-\cos z\right]_0^{1-i} \\ &= \left[-\cos(1-i)\right] - \left[-\cos 0\right] \\ &= 1-\cos(1-i)\end{aligned}$$

ดังนั้น $\int_C \sin z\ dz = 1-\cos(1-i)$

ตัวอย่าง 4.18 จงหาค่า $\int\limits_C 2z\ dz$ เมื่อ C เป็นเส้นรอบขอบที่มีจุดเริ่มต้นที่ $z=1$ และจุดสิ้นสุดที่ $z=i$

วิธีทำ เนื่องจาก $\frac{d}{dz}\left(z^2\right)=2z$ สำหรับทุก $z\in C$ จะได้

$$\begin{aligned}\int\limits_C 2z\ dz &= \left[z^2\right]\Big|_1^i \\ &= \left[i^2\right]-\left[1^2\right] \\ &= -1-1 \\ &= -2\end{aligned}$$

ดังนั้น $\int\limits_C 2z\ dz = -2$

ตัวอย่าง 4.19 จงหาค่า $\int\limits_C 2ie^{\frac{z}{2}}\,dz$ เมื่อ C เป็นเส้นรอบขอบที่มีจุดเริ่มต้นที่ $z=3+\pi i$ และจุดสิ้นสุดที่ $z=3+3\pi i$

วิธีทำ เนื่องจาก $\frac{d}{dz}\left(ie^{\frac{z}{2}}\right)=2ie^{\frac{z}{2}}$ สำหรับทุก $z\in C$ จะได้

$$\begin{aligned}\int\limits_C 2ie^{z/2}\,dz &= \left[ie^{\frac{z}{2}}\right]\Bigg|_{3+\pi i}^{3+3\pi i} \\ &= \left[ie^{\frac{3+3\pi i}{2}}\right]-\left[ie^{\frac{3+\pi i}{2}}\right] \\ &= \left[ie^{\frac{3}{2}}e^{\frac{3\pi i}{2}}\right]-\left[ie^{\frac{3}{2}}e^{\frac{\pi i}{2}}\right] \\ &= ie^{\frac{3}{2}}\left[e^{\frac{3\pi i}{2}}\right]-\left[e^{\frac{\pi i}{2}}\right] \\ &= ie^{\frac{3}{2}}\left[e^{\frac{3\pi i}{2}}-e^{\frac{\pi i}{2}}\right]\end{aligned}$$

$$= ie^{\frac{3}{2}}\left(\left[\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right] - \left[\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right]\right)$$

$$= ie^{\frac{3}{2}}\left(\left[0 - i\right] - \left[0 + i\right]\right)$$

$$= ie^{\frac{3}{2}}(-2i)$$

$$= 2e^{\frac{3}{2}}$$

ดังนั้น $\int_C 2ie^{\frac{z}{2}}\,dz = 2e^{\frac{3}{2}}$

สมถวิล ขันเขตต์ (2558 : 86) ได้ให้ทฤษฎีบทของอสมการ ML ไว้ดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 4.7

ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนเส้นโค้ง C ซึ่งเป็นเส้นโค้งปรับเรียบเป็นช่วง ถ้า M เป็นค่าคงตัวที่ $\left|f(z)\right| \le M$ ทุก ๆ ค่า z บน C และ L เป็นความยาวส่วนโค้งของ C แล้ว

$$\left|\int_C f(z)\,dz\right| \le ML$$

และเรียกอสมการนี้ว่า อสมการ ML

พิสูจน์

จาก $\int_C f(z)\,dz = \lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^{n} f\left(\zeta_n\right)\triangle z_m$

ให้ $s_m = \sum_{m=1}^{n} f\left(\zeta_n\right)\triangle z_m$

จากอสมการอิงรูปสามเหลี่ยม

$$\left|z_1 + z_2 + \cdots + z_n\right| \le \left|z_1\right| + \left|z_2\right| + \cdots + \left|z_n\right|$$

เราจะได้ $\left|s_m\right| = \left|\sum_{m=1}^{n} f\left(\zeta_n\right)\triangle z_m\right| \le \sum_{m=1}^{n}\left|f\left(\zeta_n\right)\right|\left|\triangle z_m\right| \le M\sum_{m=1}^{n}\left|\triangle z_m\right|$

เนื่องจาก $\left|\triangle z_m\right|$ คือความขาวของคอร์ดระหว่างจุด z_{m-1} และ z_m

ดังนั้น $M\sum_{m=1}^{n}\left|\triangle z_m\right|$ จะแทนความยาว $L*$ ของเส้นซึ่งประกอบด้วยคอร์ดที่มีจุดปลายที่จุด

$a = z_0, z_1, z_2, \ldots, z_n = b$

ถ้า n เข้าใกล้อนันต์โดยที่ค่าสูงสุดของ $\left|\triangle z_m\right|$ เข้าใกล้ 0 แล้ว $L*$ จะมีค่าเข้าใกล้ความยาว L ของเส้นโค้ง C นั่นคือ

$$\lim_{n\to\infty}\left|s_m\right| = \left|\lim_{n\to\infty} s_m\right| \le M \le \lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^{n}\left|\triangle z_m\right| \le ML$$

ตัวอย่าง 4.20 จงหาขอบเขตค่าสัมบูรณ์ $\int_C z^2\,dz$ เมื่อ C เป็นส่วนของเส้นตรงจากจุด 0 ถึง $1+i$

วิธีทำ ความยาวของส่วนของเส้นตรงจากจุด 0 ถึง $1+i$ คือ $L = \sqrt{2}$

และ $\left|f(z)\right| = \left|z^2\right| \le 2 = M$

จากทฤษฎีบท 4.7 จะได้

$$\left|\int_C z^2\,dz\right| \le 2\sqrt{2} \le 2.8284$$

พิจารณาหา $\int_C z^2\,d$ ดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned}\int_C z^2\,d &= \left[\frac{z^3}{3}\right]_0^{1+i}\\ &= \left[\frac{(1+i)^3}{3}\right] - \left[\frac{0^3}{3}\right]\\ &= -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}i\end{aligned}$$

นั่นคือ

$$\begin{aligned}\left|\int_C z^2\,dz\right| &= \left|-\frac{2}{3} + \frac{2}{3}i\right|\\ &= \sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2}\end{aligned}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$= 0.9428$$

ดังนั้น $$\left| \int_C z^2\, dz \right| = 0.9428 \le 2.8284 = ML$$

4.5 ทฤษฎีบทโคชี-โคซา

หัวข้อนี้จะเริ่มต้นด้วยการศึกษาประเภทของโดเมนในระนาบจำนวนเชิงซ้อน $\mathbb{C}$ จากนั้นจะกล่าวถึงทฤษฎีบทที่มีความสำคัญอย่างยิ่งในการหาค่าปริพันธ์ของฟังก์ชันวิเคราะห์ ได้แก่ ทฤษฎีบทโคชี-โคซา ซึ่งเป็นทฤษฎีที่มีทฤษฎีบทตามมาอีกหลายทฤษฎีบทดัง เกียรติสุดา นาคประสิทธิ์ (2556 : 154) ได้ให้ไว้ดังต่อไปนี้

บทนิยาม 7.4

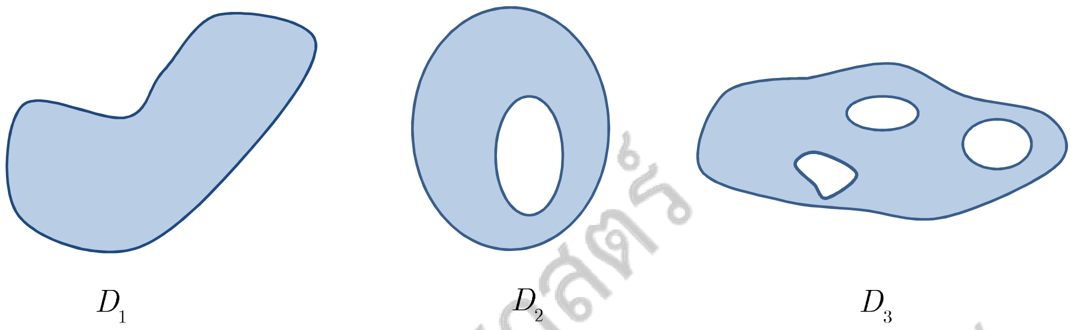
กำหนดให้ D เป็นโดเมนในระนาบจำนวนเชิงซ้อน $\mathbb{C}$ เรียก D ว่า **โดเมนเชื่อมโยงเชิงเดียว** ถ้า $C \subseteq D$ และ $I(C) \subseteq D$ สำหรับทุกเส้นรอบขอบปิดเชิงเดียว C และเรียก D ว่า**โดเมนเชื่อมโยงหลายเชิง** ถ้า D ไม่เป็นโดเมนเชื่อมโยงเชิงเดียว

นั่นคือสำหรับโดเมนใด ๆ ที่ไม่เป็นโดเมนเชื่อมโยงเชิงเดียวจะถูกเรียกว่า โดเมนเชื่อมโยงหลายเชิงซึ่งเป็นกรณีที่มีความน่าสนใจไม่น้อยไปกว่าโดเมนเชื่อมโยงเชิงเดียว เช่น โดเมนของฟังก์ชัน

$$f(z) = \frac{1}{z - z_0}$$

นั่นคือ $$D = C - \left\{ z_0 \right\}$$

เนื่องจาก f สามารถวิเคราะห์ได้ทุกจุดยกเว้น $z = z_0$ ดังนั้นโดเมนในกรณีนี้จัดเป็นโดเมนเชื่อมโยงหลายเชิง และเราสามารถแสดงโดเมนเชื่อมโยงเชิงเดียวและโดเมนเชื่อมโยงหลายเชิงได้ดังภาพประกอบ 4.3 ซึ่ง D_1, D_2 และ D_3 เป็นโดเมน โดยที่ D_1 เป็นโดเมนเชื่อมโยงเชิงเดียว ส่วน D_2 และ D_3 เป็นโดเมนเชื่อมโยงหลายเชิง



ภาพประกอบ 4.3 แสดงโดเมนเชื่อมโยงเชิงเดียวและโดเมนเชื่อมโยงหลายเชิง

ที่มา :เกียรติสุดา นาคประสิทธิ์. 2556 : 155

นอกจากทฤษฎีบทที่ได้กล่าวมาข้างต้นแล้วสมถวิล ขันเขตต์ (2558 : 88-91) ได้ให้ทฤษฎีบทปริพันธ์ของโคชีสำหรับบริเวณเชื่อมโยงเชิงเดียวไว้ดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 4.8

ถ้า R เป็นบริเวณที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้งปิดเชิงเดียว หรือบริเวณที่เชื่อมโยงหลายเชิงที่เส้นขอบ C เป็นแบบปรับเรียบเป็นช่วง $P(x,y), Q(x,y)$ เป็นฟังก์ชันค่าจริง ถ้า $\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial x}, \dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y}, \dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$ และ $\dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial y}$ เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องทั้งในบริเวณ R และบนเส้นโค้ง C แล้ว

$$\oint_C \left[P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy\right] = \iint_R \left[\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right] dxdy$$

ทฤษฎีบท 4.9 (ทฤษฎีบทปริพันธ์ของโคชีสำหรับบริเวณเชื่อมโยงเชิงเดียว)

ถ้า f เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์บนบริเวณเชื่อมโยงเชิงเดียว D และสำหรับเส้นโค้งปิดเชิงเดียว C ทุก ๆ เส้นใน D ที่มี R เป็นบริเวณเชื่อมโยงเชิงเดียวหรือบริเวณเชื่อมโยงหลายเชิงแล้วจะได้ว่า

$$\oint_C f(z)\ dz = 0$$

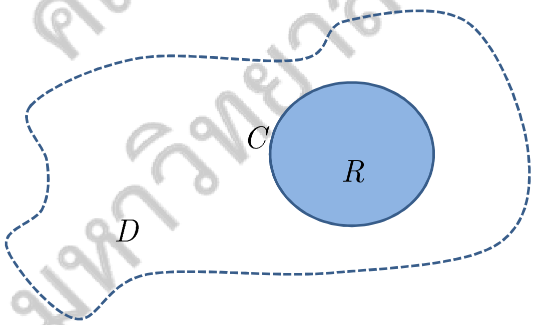
พิสูจน์

ให้ R เป็นบริเวณเชื่อมโยงเชิงเดียว

C เป็นเส้นโค้งปิดเชิงเดียว

D เป็นบริเวณเชื่อมโยงเชิงเดียว

แสดงได้ดังภาพประกอบต่อไปนี้ต่อไปนี้



ภาพประกอบ 4.4 แสดงเป็นบริเวณเชื่อมโยงเชิงเดียว R เส้นโค้งปิดเชิงเดียว C

ที่มา : สมถวิล ขันเขตต์. 2558 : 91

ให้ $C : z = z(t) = x(t) + iy(t)$ เมื่อ $t \in [a,b]$ และ

$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$

เป็นฟังก์ชันที่สอดคล้องกับเงื่อนไขในทฤษฎีบทดังนี้

$$\oint_C f(z)\ dz = \oint_C f\Big(z(t)\Big) z'(t)\,dt$$
$$= \oint_C \Big[u\Big(x(t), y(t)\Big) + iv\Big(x(t), y(t)\Big)\Big]\Big[x'(t) + iy'(t)\Big]dt$$

ให้ $x = x(t), y = y(t), u = u\Big(x(t), y(t)\Big)$ และ $v = v\Big(x(t), y(t)\Big)$

เราสามารถเขียนสมการใหม่ได้เป็น

$$= \oint_C (u + iv)(x' + iy)\,dt$$
$$= \oint_C (ux' + ivx' + iuy - vy)\,dt$$
$$= \oint_C (ux' - vy)\ dt + i\oint_C (vx' + uy)\ dt$$

จากความรู้เรื่องปริพันธ์ตามเส้นของฟังก์ชันค่าจริงเราสามารถเขียนสมการข้างต้นใหม่ได้เป็น

$$\oint_C f(z)\,dz = \oint_C (udx - vdy) + i\oint_C (vdx + udy)$$

และจากทฤษฎีบท 4.8 ทำให้ได้ว่า

$$\oint_C f(z)\,dz = \iint_R \left[-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right]dxdy + i\iint_R \left[\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial y}\right]dxdy$$

แต่ f เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ และจากสมการโคชี-รีมันต์

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ และ } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

ดังนั้น $\oint_C f(z)\,dz = \iint_R \Big[0\Big]dxdy + i\iint_R \Big[0\Big]dxdy = 0$

ตัวอย่าง 4.21 จงใช้ทฤษฎีบทของโคชีพิจารณา $\oint_C e^{2z}\ dz$ เมื่อ C เป็นเส้นโค้งปิดเชิงเดียวใด ๆ บนระนาบเชิงซ้อน

วิธีทำ ให้ $f(z) = e^{2z}$

ตรวจสอง $f(z)$ ว่าเป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่ทุกจุดในระนาบเชิงซ้อนดังต่อไปนี้

ให้ $z = x + yi$ จาก $f(z) = e^{2z}$

จะได้ $f(z) = e^{2x+2yi}$

$$= e^{2x}(\cos 2y + i\sin 2y)$$
$$= e^{2x}\cos 2y + ie^{2x}\sin 2y$$

นั่นคือ $u(x,y) = e^{2x}\cos 2y$ และ $v(x,y) = e^{2x}\sin 2y$

โดยการหาอนุพันธ์ย่อยเทียบกับตัวแปร x และ y ได้ว่า

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2e^{2x}\cos 2y \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -2e^{2x}\sin 2y \quad \text{และ}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 2e^{2x}\cos 2y \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = 2e^{2x}\sin 2y$$

พบว่า $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$ และ $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$

นั่นคือ $f(z) = e^{2z}$ สอดคล้องกับสมการโคชี – รีมันน์ สำหรับทุก z

แสดงว่า $f(z) = e^{2z}$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ทุก ๆ จุดบนระนาบเชิงซ้อน หรือเป็นฟังก์ชันทั่ว

และจากที่โจทย์กำหนดให้ว่า C เป็นเส้นโค้งปิดเชิงเดียวใด ๆ บนระนาบเชิงซ้อน

ดังนั้น จากทฤษฎีบทของโคชีจะได้ $\oint\limits_C e^{2z}\,dz = 0$

สำหรับการตรวจสอบฟังก์ชัน f ว่าเป็นฟังก์ชันวิเคราะห์นั้นเราได้ศึกษามาแล้วในบทที่ผ่านมา ดังนั้นตัวอย่างต่อไปจะเว้นการตรวจสอบฟังก์ชันดังกล่าว

ตัวอย่าง 4.22 จงใช้ทฤษฎีบทของโคชีพิจารณา $\oint\limits_C z^n\,dz$ เมื่อ $n = 0,1,2,3,\ldots$ และ C เป็นเส้นโค้งปิดเชิงเดียวใด ๆ บนระนาบเชิงซ้อน

วิธีทำ ให้ $f(z) = z^n$ เมื่อ $n = 0,1,2,3,\ldots$

จะเห็นว่า $f(z) = z^n$ เมื่อ $n = 0,1,2,3,\ldots$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ทุก ๆ จุดบนระนาบเชิงซ้อน หรือเป็นฟังก์ชันทั่ว และ C เป็นเส้นโค้งปิดเชิงเดียวใด ๆ บนระนาบเชิงซ้อน

ดังนั้น จากทฤษฎีบทของโคชีจะได้ $\oint\limits_C z^n\,dz = 0$

ตัวอย่าง 4.23 จงใช้ทฤษฎีบทของโคชีพิจารณา $\oint\limits_C \dfrac{1}{z^2+9}\,dz$

เมื่อ C เป็นวงกลมหนึ่งหน่วย $\left(|z| = 1\right)$

วิธีทำ ให้ $f(z)=\dfrac{1}{z^2+9}$

จะเห็นว่า $f(z)=\dfrac{1}{z^2+9}$ ไม่เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุด $z=\pm 3i$

และ C เป็นวงกลมหนึ่งหน่วย $\left(\left|z\right|=1\right)$ นั่นคือ C เป็นวงกลมหนึ่งหน่วย

ที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(0,0)$ และจุด $z=\pm 3i$ อยู่ภายนอกเส้นโค้ง C

ดังนั้น จากทฤษฎีบทของโคชีจะได้ $\oint\limits_C \dfrac{1}{z^2+9}\,dz=0$

ตัวอย่าง 4.24 จงหา $\oint\limits_C \dfrac{7z-6}{z-2}\,dz$ เมื่อ C เป็นวงกลมหนึ่งหน่วยที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(0,0)$

วิธีทำ
$$\oint\limits_C \frac{7z-6}{z-2}\,dz=\oint\limits_C 7+\frac{8}{z-2}\,dz$$
$$=\oint\limits_C 7\,dz+\oint\limits_C \frac{8}{z-2}\,dz$$

1. หา $\oint\limits_C 7\,dz$

ให้ $f(z)=7$ และจะได้ว่า $f(z)=7$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ทุก ๆ จุด บนระนาบเชิงซ้อน หรือเป็นฟังก์ชันทั่ว และ C เป็นเส้นโค้งปิดเชิงเดียว

จากทฤษฎีบทของโคชีจะได้ $\oint\limits_C 7\,dz=0$

2. หา $\oint\limits_C \dfrac{8}{z-2}\,dz$

ให้ $f(z)=\dfrac{8}{z-2}$ และจะได้ว่า $f(z)=\dfrac{8}{z-2}$ ไม่เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุด $z=2$ ซึ่งเป็นจุดที่อยู่ภายนอกเส้นโค้ง C

จากทฤษฎีบทของโคชีจะได้ $\oint\limits_C \dfrac{8}{z-2}\,dz=0$

จาก 1 และ 2

ดังนั้น $\oint\limits_C \dfrac{7z-6}{z-2}\,dz=0$

นอกจากทฤษฎีบทปริพันธ์ของโคชีสำหรับบริเวณเชื่อมโยงเชิงเดียวที่ได้กล่าวมาข้างต้น สมถวิล ขันเขตต์ (2558 : 93-97) ได้ให้ทฤษฎีบทปริพันธ์ของโคชีสำหรับบริเวณเชื่อมโยงเชิงเดียว เชื่อมโยงสองเชิง และเชื่อมโยงหลายเชิงดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 4.10

ให้ D เป็นบริเวณเชื่อมโยงเชิงเดียว $z_1, z_2 \in D$ และ f เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์บน D จะได้ว่า $\int_C f(z)\,dz$ มีค่าเท่ากันทุกเส้นโค้งเชิงเดียวเรียบจาก z_1 ไป z_2 ใน D

พิสูจน์

ให้ C_1 และ C_2 เป็นเส้นโค้งเชิงเดียวจาก z_1 ไป z_2 ใน D

เพราะฉะนั้น $C_1 - C_2$ จะเป็นเส้นโค้งเรียบปิดเชิงเดียว

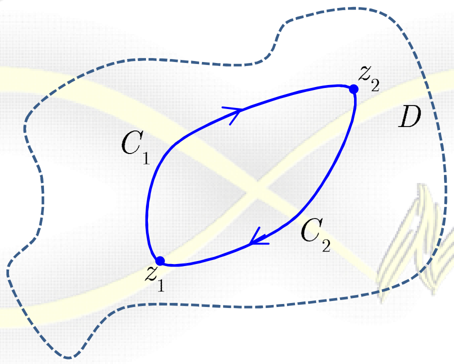
ดังนั้น $\int_{C_2 - C_1} f(z)\,dz = 0$ จากทฤษฎีบท 4.9

$$\int_{C_2} f(z)\,dz + \int_{-C_1} f(z)\,dz = 0$$

$$\int_{C_2} f(z)\,dz - \int_{C_1} f(z)\,dz = 0$$

นั่นคือ $\int_{C_2} f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz$

แสดงได้ดังภาพประกอบต่อไปนี้



ภาพประกอบ 4.5 แสดงภาพประกอบทฤษฎีบท 4.10

ที่มา : Murray R.S., Seymour L.,Jhon J.S. and Dennis S. 2009 : 124

ในการหาปริพันธ์สำหรับบริเวณเชื่อมโยงหลายเชิงนั้น เมื่อ D^* เป็นบริเวณเชื่อมโยงหลายเชิง เราสามารถตัดทำให้เป็นบริเวณเชื่อมโยงเชิงเดียวได้ (D^* ต้องไม่รวมจุดของแนวเส้นที่เกิดจากการตัด) สำหรับบริเวณเชื่อมโยงหลายเชิง D^* ที่เป็นบริเวณเชื่อมโยงสองเชิง หรือ D^* เป็นวงแหวนเราจะตัดเพียงครั้งเดียวโดยเส้น $\tilde{C}$ ซึ่งจะทำให้เส้นโค้งปิด C_1 และ C_2 ร่วมกันเป็นเส้นโค้งล้อมรอบบริเวณเชื่อมโยงเชิงเดียว C

ทฤษฎีบท 4.11 ทฤษฎีบทปริพันธ์ของโคชีสำหรับบริเวณเชื่อมโยงสองเชิง

f เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์บนวงแหวน R ที่ปิดล้อมด้วยเส้นปิดเชิงเดียว C_1 และ C_2 แล้ว

$$\oint_{C_1} f(z)\,dz = \oint_{C_2} f(z)\,dz$$

พิสูจน์

ให้ z_1 และ z_2 เป็นจุดบน C_1 และ C_2 ตามลำดับ

$\tilde{C}$ เป็นเส้นโค้งปรับเรียบที่เชื่อม z_1 กับ z_2 ในวงแหวน R

C_3 เป็นเส้นโค้งบน $\tilde{C}$ จาก z_1 ไป z_2

จะได้ $-C_3$ เป็นเส้นโค้งบน $\tilde{C}$ จาก z_2 ไป z_1

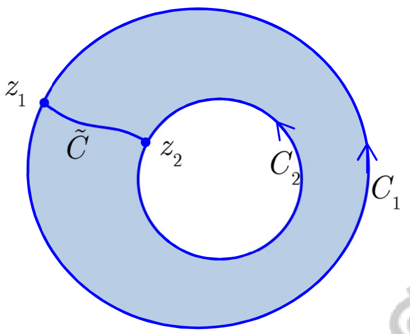
ดังนั้นเส้นโค้ง $C_1 + C_3 + \left(-C_2\right) + \left(-C_3\right)$ เป็นเส้นโค้งปิดเชิงเดียวใน R

จากทฤษฎีบท 4.9 จะได้

$$\begin{aligned} 0 &= \oint_{C} f(z)\,dz \\ &= \oint_{C_1+C_3+(-C_2)+(-C_3)} f(z)\,dz \\ &= \oint_{C_1+(-C_2)} f(z)\,dz \\ &= \oint_{C_1} f(z)\,dz - \oint_{C_2} f(z)\,dz \end{aligned}$$

$$\oint_{C_1} f(z)\,dz = \oint_{C_2} f(z)\,dz$$

แสดงได้ดังภาพประกอบต่อไปนี้



ภาพประกอบ 4.6 แสดงภาพประกอบทฤษฎีบท 4.11

ที่มา : Murray R.S., Seymour L.,Jhon J.S. and Dennis S. 2009 : 123

จากทฤษฎีบท 4.11 ถ้า f เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์บนวงแหวน R ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งปิดเชิงเดียว C_1 และ C_2

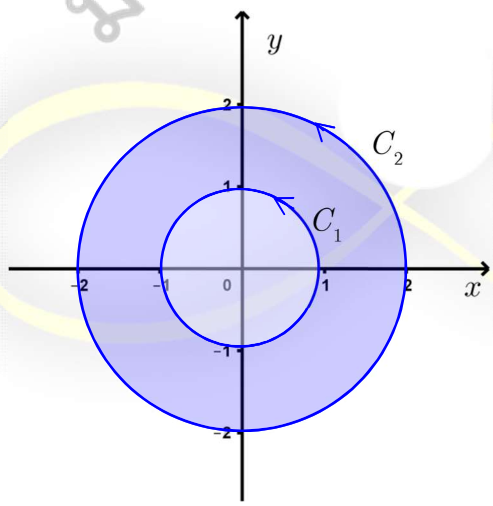
C_1 และ C_2 มีทิศทางเดียวกัน จะได้

$$\oint_{C_1} f(z)\,dz - \oint_{C_2} f(z)\,dz = 0$$

C_1 และ C_2 มีทิศทางตรงข้ามกัน จะได้

$$\oint_{C_1} f(z)\,dz + \oint_{C_2} f(z)\,dz = 0$$

ตัวอย่าง 4.25 ให้ R เป็นบริเวณรูปวงแหวนที่ปิดล้อมด้วยวงกลม $|z| = 1$ และ $|z| = 2$ ดังภาพ



วิธีทำ

1. กำหนดให้ $f(z) = z^3 + 3z^2$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ทุก ๆ จุดบนระนาบเชิงซ้อน เราจะได้

$$\oint_{|z|=1} (z^3 + 3z^2)\,dz = \oint_{|z|=2} (z^3 + 3z^2)\,dz$$

2. กำหนดให้ $f(z) = \dfrac{1}{3z}$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ทุก ๆ จุดยกเว้นที่ $z = 0$ แต่จุด $z = 0$ อยู่ภายนอกบริเวณ R ดังนั้น $f(z) = \dfrac{1}{3z}$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ทุก ๆ จุดบนบริเวณ R จะได้

$$\oint_{|z|=1} \left(\frac{1}{3z}\right) dz = \oint_{|z|=2} \left(\frac{1}{3z}\right) dz$$

ทฤษฎีบท 4.13 ทฤษฎีบทปริพันธ์ของโคชีสำหรับบริเวณเชื่อมโยงหลายเชิง

ให้ R เป็นบริเวณวงแหวนที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งปิดเรียบเชิงเดี่ยว C และ $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n$ เป็นเส้นโค้งปิดเรียบเชิงเดียวใน R ที่ไม่ตัดกัน
ถ้า f เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์บน R แล้ว

$$\oint_C f(z)\,dz = \oint_{C_1} f(z)\,dz + \oint_{C_2} f(z)\,dz + \ldots + \oint_{C_n} f(z)\,dz$$

สำหรับการพิสูจน์ใช้หลักการเดียวกันกับทฤษฎีบท 4.11

ตัวอย่าง 4.26 จงกระจาย $\displaystyle\oint_C \left(\frac{z+3}{z(z-2)(z+2)}\right) dz$ โดยใช้ทฤษฎีบท 4.12 เมื่อกำหนด C คือ $|z| = 3$ และ C_1 คือ $|z+2| = 0.5,\ C_2$ คือ $|z| = 0.5$ และ C_3 คือ $|z-2| = 0.5$

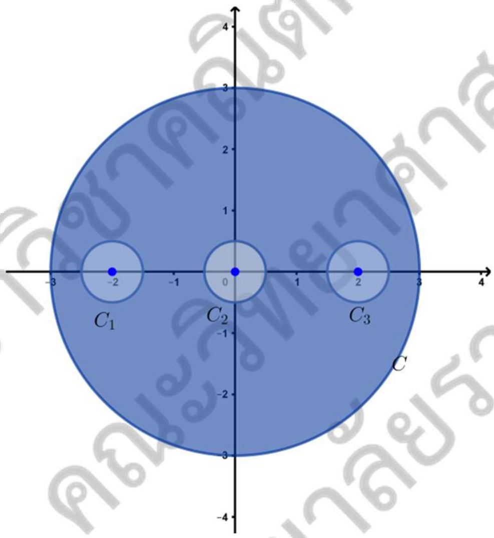
วิธีทำ จากโจทย์ให้ $f(z) = \dfrac{z+3}{z(z-2)(z+2)}$

จะได้ว่า $f(z)$ ไม่เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุด $z = -2, 0, 2$

จากทฤษฎีบท 4.12 จะได้ว่า

$$\oint_C \left(\frac{z+3}{z(z-2)(z+2)} \right) dz = \oint_{C_1} \left(\frac{z+3}{z(z-2)(z+2)} \right) dz + \oint_{C_2} \left(\frac{z+3}{z(z-2)(z+2)} \right) dz + \oint_{C_3} \left(\frac{z+3}{z(z-2)(z+2)} \right) dz$$

ดังภาพประกอบต่อไปนี้



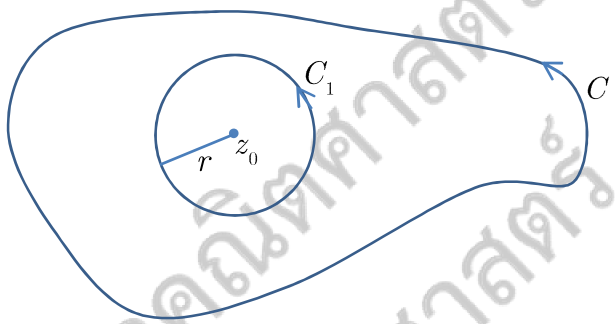
4.6 สูตรปริพันธ์โคชีและอนุพันธ์ของฟังก์ชันวิเคราะห์

ในหัวข้อที่แล้วได้แสดงให้เห็นถึงความสำคัญของทฤษฎีบทโคชี – โคซา ในการคำนวณค่าปริพันธ์ตามเส้นรอบขอบมาแล้ว ในหัวข้อนี้จะศึกษาผลลัพธ์ที่ได้ตามมาของทฤษฎีบทโคชี – โคซา ซึ่งได้แกสูตรปริพันธ์ของโคชี และการนำผลที่ได้จากสูตรปริพันธ์ของโคชีไปประยุกต์ในการหาค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันวิเคราะห์ ณัฐกร สุคันธมาลา (2559 : 131-132) ได้กล่าวไว้ดังนี้

ในกรณีที่ f เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์บนเส้นรอบขอบปิดเชิงเดียว C รวมทั้งบริเวณภายใน C ทั้งหมดถ้า z_0 ไม่ได้เป็นจุดภายใน C จะได้ว่า $\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz = 0$ เนื่องจาก $\frac{f(z)}{z-z_0}$ ยังคงเป็นฟังก์ชันวิเคราะห์บนเส้นรอบขอบปิดเชิงเดียว C รวมทั้งบริเวณภายใน C ทั้งหมด แต่ถ้า z_0 เป็นจุดภายใน C จะได้ว่า

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz = \oint_{C_1} \frac{f(z)}{z-z_0}dz$$

เมื่อ C_1 เป็นวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ z_0 ดังภาพประกอบต่อไปนี้



ภาพประกอบ 4.7 ภาพแสดง $\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz = 0$

ที่มา : ณัฐกร สุคันธมาลา. 2559 : 131

และจะได้ต่อไปว่า

$$\begin{aligned}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz &= \oint_{C_1} \frac{f(z)}{z-z_0}dz \\ &= \oint_{C_1} \frac{f(z_0)-f(z_0)+f(z)}{z-z_0}dz \\ &= f(z_0)\oint_{C_1} \frac{1}{z-z_0}dz + \oint_{C_1} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz \\ &= 2\pi i f(z_0) + \oint_{C_1} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz\end{aligned}$$

นอกจากนี้สมการดังกล่าวยังคงเป็นจริงสำหรับทุกวงกลม C_1 ที่มีจุดศูนย์กลางที่ z_0 ซึ่งมีรัศมี r ขนาดใด ๆ ต่อไปเราจะหาค่าปริพันธ์สุดท้ายทางขวามือของสมการเนื่องจาก f วิเคราะห์ที่ z_0 จึงหาอนุพันธ์ได้ที่ z_0 และจึงต่อเนื่องที่ z_0 โดยนิยามภาวะต่อเนื่องจะได้ว่า สำหรับทุก ๆ จำนวนจริง $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ที่ทำให้ $|f(z)-f(z_0)| < \varepsilon$ ถ้า $|z-z_0| < \delta$

เลือก C_1 ให้เป็นวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ z_0 ซึ่งมีรัศมี $\frac{\delta}{2}$ จะได้ว่า $\left|z - z_0\right| \le \frac{\delta}{2} < \delta$ สำหรับแต่ละ z ภายใน C_1 จึงส่งผลให้ $\left|f(z) - f(z_0)\right| < \varepsilon$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\left|\oint_{C_1} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz\right| &\le \oint_{C_1} \frac{\left|f(z) - f(z_0)\right|}{\left|z - z_0\right|}\left|dz\right| \\
&< \frac{\varepsilon}{\left(\frac{\delta}{2}\right)} \oint_{C_1} \left|dz\right| \\
&= \frac{2\varepsilon}{\delta}\left(2\pi \frac{\delta}{2}\right) \\
&= 2\pi\varepsilon
\end{aligned}$$

แต่เนื่องจาก $\varepsilon > 0$ เป็นจำนวนจริงใด ๆ ที่ไม่ได้ระบุ แสดงว่า $\oint_{C_1} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz = 0$ นั่นคือ $\oint_{C} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = 2\pi i f(z_0)$ ซึ่งเป็นที่มาของทฤษฎีบทดังที่ ณัฐกร สุคันธมาลา (2559 : 132) ได้ให้ไว้ดังต่อไปนี้

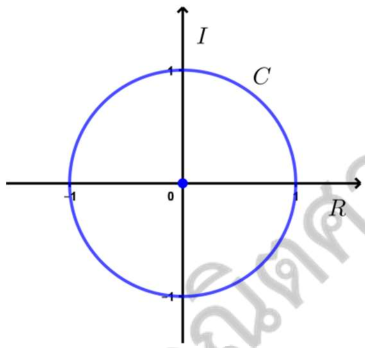
ทฤษฎีบท 4.14 สูตรปริพันธ์ของโคชี

ถ้า f เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์บนเส้นโค้งปิดเชิงเดียว C รวมทั้งบริเวณภายใน C ทั้งหมด และ z_0 เป็นจุดภายใน C แล้ว

$$\oint_{C} \frac{1}{z - z_0} f(z)\, dz = 2\pi i f(z_0)$$

ตัวอย่าง 4.27 จงหาค่าของ $\oint\limits_C \frac{1}{z(z^2-4)}dz$ เมื่อกำหนด C คือ $|z|=1$

วิธีทำ C เป็นวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(0,0)$ รัศมี 1 แสดงได้ดังภาพประกอบต่อไปนี้



เนื่องจาก $\frac{1}{z(z^2-4)}$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ภายใน C และบน C ทั้งหมด ยกเว้นที่ $z=0,\pm 2$ ซึ่งมีเฉพาะ $z=0$ อยู่ภายใน C

จากสูตรปริพันธ์ของโคชี

$$\oint\limits_C \frac{1}{z-z_0}f(z)\,dz = 2\pi i f(z_0)$$

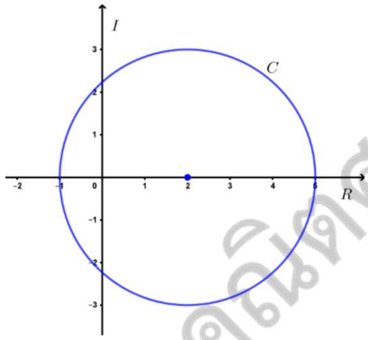
จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\oint\limits_C \frac{1}{z(z^2-4)}dz &= \oint\limits_C \frac{1}{z}\left(\frac{1}{z^2-4}\right)dz \qquad \text{เมื่อ } f(z)=\frac{1}{(z^2-4)}\\ &= 2\pi i f(0)\\ &= 2\pi i\left(\frac{1}{0^2-4}\right)\\ &= -\frac{\pi i}{2}\end{aligned}$$

ดังนั้น $\oint\limits_C \frac{1}{z(z^2-4)}dz = -\frac{\pi i}{2}$

ตัวอย่าง 4.28 จงหาค่าของ $\oint\limits_C \frac{e^{2z}+\sin z}{z}dz$ เมื่อกำหนด C เป็นวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ 2 รัศมี 3

วิธีทำ C เป็นวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ 2 รัศมี 3 แสดงได้ดังภาพประกอบต่อไปนี้



เนื่องจาก $\frac{e^{2z}+\sin z}{z}$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ภายใน C และบน C ทั้งหมด ยกเว้นที่ $z=0$ ซึ่ง จุด $z=0$ อยู่ภายใน C

จากสูตรปริพันธ์ของโคชี

$$\oint\limits_C \frac{1}{z-z_0}f(z)\,dz = 2\pi i f(z_0)$$

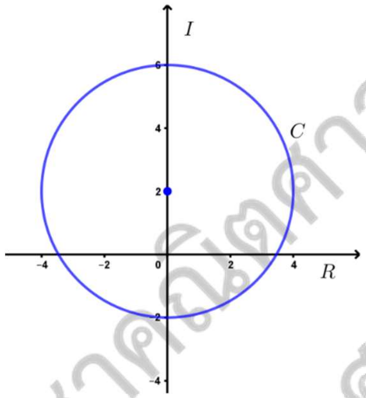
จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\oint\limits_C \frac{e^{2z}+\sin z}{z}dz &= \oint\limits_C \frac{1}{z}\left(e^{2z}+\sin z\right)dz \qquad \text{เมื่อ } f(z)=e^{2z}+\sin z\\ &= 2\pi i f(0)\\ &= 2\pi i\left(e^{2(0)}+\sin 0\right)\\ &= 2\pi i(1+0)\\ &= 2\pi i\end{aligned}$$

ดังนั้น $\oint\limits_C \frac{e^{2z}+\sin z}{z}dz = 2\pi i$

ตัวอย่าง 4.29 จงหาค่าของ $\oint_C \frac{z}{z^2+9}\,dz$ เมื่อกำหนด C เป็นวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $2i$ รัศมี 4

วิธีทำ C เป็นวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $2i$ รัศมี 4 แสดงได้ดังภาพประกอบต่อไปนี้



เนื่องจาก $\frac{z}{z^2+9}$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ภายใน C และบน C ทั้งหมดยกเว้นที่ $z=\pm 3i$ ซึ่งมีเฉพาะ $z=3i$ อยู่ภายใน C

จากสูตรปริพันธ์ของโคชี

$$\oint_C \frac{1}{z-z_0} f(z)\,dz = 2\pi i f(z_0)$$

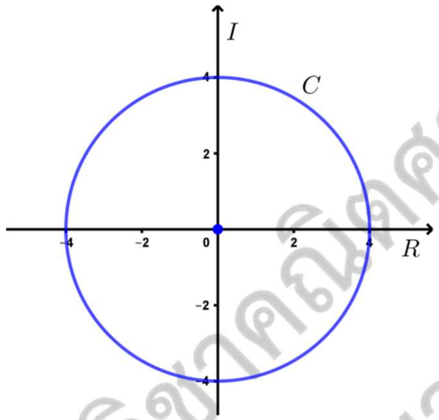
จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\oint_C \frac{z}{z^2+9}\,dz &= \oint_C \frac{z}{(z-3i)(z+3i)}\,dz \\
&= \oint_C \frac{1}{z-3i}\left(\frac{z}{z+3i}\right)dz \quad \text{เมื่อ } f(z)=\frac{z}{(z+3i)} \\
&= 2\pi i f(3i) \\
&= 2\pi i\left(\frac{3i}{(3i+3i)}\right) \\
&= 2\pi i\left(\frac{3i}{6i}\right) \\
&= \pi i
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\oint_C \frac{e^{2z}+\sin z}{z}\,dz = 2\pi i$

ตัวอย่าง 4.30 จงหาค่าของ $\oint_C \frac{z}{z^2+4}\,dz$ เมื่อกำหนด C เป็นวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ 0 รัศมี 4

วิธีทำ C เป็นวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ 0 รัศมี 4 แสดงได้ดังภาพประกอบต่อไปนี้



เนื่องจาก $\frac{z}{z^2+4}$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ภายใน C และบน C ทั้งหมด

ยกเว้นที่ $z=\pm 2i$ ซึ่ง อยู่ภายใน C

จากทฤษฎีบทปริพันธ์ของโคชีสำหรับบริเวณเชื่อมโยงหลายเชิง (ทฤษฎีบท 4.13)จะได้ว่า

$$\oint_C \frac{z}{z^2+4}\,dz = \oint_{C_1} \frac{z}{z^2+4}\,dz + \oint_{C_2} \frac{z}{z^2+4}\,dz$$

จากสูตรปริพันธ์ของโคชี

$$\oint_C \frac{1}{z-z_0} f(z)\,dz = 2\pi i f(z_0)$$

แยกใช้ปริพันธ์ทีละพจน์จะได้

$$\begin{aligned}\oint_{C_1} \frac{z}{z^2+4}\,dz &= \oint_{C_1} \frac{z}{(z-2i)(z+2i)}\,dz \\ &= \oint_{C_1} \frac{1}{z-2i}\left(\frac{z}{z+2i}\right)dz \quad \text{เมื่อ } f_1(z)=\frac{z}{z+2i} \\ &= 2\pi i f_1(2i)\end{aligned}$$

$$= 2\pi i\left(\frac{2i}{2i+2i}\right)$$

$$= 2\pi i\left(\frac{2i}{4i}\right)$$

$$= \pi i$$

และ

$$\oint_{C_2}\frac{z}{z^2+4}\,dz = \oint_{C_2}\frac{z}{(z-2i)(z+2i)}\,dz$$

$$= \oint_{C_2}\frac{1}{z-2i}\left(\frac{z}{z+2i}\right)dz \quad \text{เมื่อ } f_2(z) = \frac{z}{z-2i}$$

$$= 2\pi i f_2(-2i)$$

$$= 2\pi i\left(\frac{-2i}{-2i-2i}\right)$$

$$= 2\pi i\left(\frac{2i}{4i}\right)$$

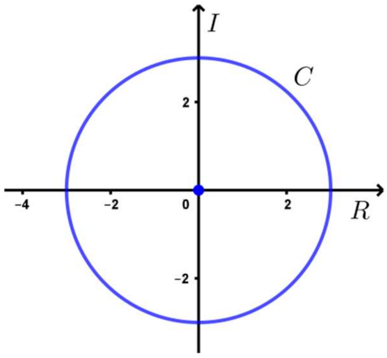
$$= \pi i$$

นั่นคือ $\oint_C \frac{z}{z^2+4}\,dz = \oint_{C_1}\frac{z}{z^2+4}\,dz + \oint_{C_2}\frac{z}{z^2+4}\,dz = \pi i + \pi i = 2\pi i$

ดังนั้น $\oint_C \frac{z}{z^2+4}\,dz = 2\pi i$

ตัวอย่าง 4.31 จงหาค่าของ $\oint_C \frac{z+3}{z(z-2)(z+2)}\,dz$ เมื่อกำหนด C เป็นวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ 0 รัศมี 3

วิธีทำ C เป็นวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ 0 รัศมี 3 แสดงได้ดังภาพประกอบต่อไปนี้



เนื่องจาก $\dfrac{z+3}{z(z-2)(z+2)}$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ภายใน C และบน C ทั้งหมด

ยกเว้นที่ $z=-2,0,2$ ซึ่ง อยู่ภายใน C

จากทฤษฎีบทปริพันธ์ของโคชีสำหรับบริเวณเชื่อมโยงหลายเชิง (ทฤษฎีบท 4.13)จะได้ว่า

$$\oint_C \frac{z+3}{z(z-2)(z+2)}\,dz = \oint_{C_1} \frac{z+3}{z(z-2)(z+2)}\,dz + \oint_{C_2} \frac{z+3}{z(z-2)(z+2)}\,dz + \oint_{C_3} \frac{z+3}{z(z-2)(z+2)}\,dz$$

จากสูตรปริพันธ์ของโคชี

$$\oint_C \frac{1}{z-z_0} f(z)\,dz = 2\pi i f(z_0)$$

แยกใช้ปริพันธ์ทีละพจน์จะได้

$$\oint_{C_1} \frac{z+3}{z(z-2)(z+2)}\,dz = \oint_{C_1} \frac{1}{z}\left(\frac{z+3}{(z-2)(z+2)}\right)dz \quad \text{เมื่อ } f_1(z) = \frac{z+3}{(z-2)(z+2)}$$

$$= 2\pi i f_1(0)$$

$$= 2\pi i\left(\frac{0+3}{(0-2)(0+2)}\right)$$

$$= 2\pi i\left(-\frac{3}{4}\right)$$

$$= -\frac{3}{2}\pi i$$

$$\oint_{C_2} \frac{z+3}{z(z-2)(z+2)}\,dz = \oint_{C_2} \frac{1}{z-2}\left(\frac{z+3}{z(z+2)}\right)dz \quad \text{เมื่อ } f_2(z) = \frac{z+3}{z(z+2)}$$

$$= 2\pi i f_2(2)$$

$$= 2\pi i\left(\frac{2+3}{2(2+2)}\right)$$

$$= 2\pi i\left(\frac{5}{8}\right)$$

$$= \frac{5}{4}\pi i$$

และ

$$\oint_{C_3} \frac{z+3}{z(z-2)(z+2)}\,dz = \oint_{C_2} \frac{1}{z+2}\left(\frac{z+3}{z(z-2)}\right)dz \text{ เมื่อ } f_2(z) = \frac{z+3}{z(z-2)}$$

$$= 2\pi i f_1(-2)$$

$$= 2\pi i\left(\frac{-2+3}{-2(-2-2)}\right)$$

$$= 2\pi i\left(\frac{1}{8}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\pi i$$

นั่นคือ $\oint_{C} \frac{z+3}{z(z-2)(z+2)}\,dz = -\frac{3}{2}\pi i + \frac{5}{4}\pi i + \frac{1}{4}\pi i = 0$

ดังนั้น $\oint_{C} \frac{z+3}{z(z-2)(z+2)}\,dz = 0$

ณัฐกร สุคันธมาลา (2559 : 135-136) ได้กล่าวไว้ดังนี้ สูตรปริพันธ์ของโคชีในทฤษฎีบทที่ผ่านมานั้นมีข้อจำกัดในการใช้ถ้าปริพันธ์เป็นฟังก์ชันตรรกยะที่ตัวส่วนมีภาวะซ้ำมากกว่าหนึ่ง เช่น ในการหาค่าปริพันธ์ $\oint_{C} \frac{z}{(z-1)^2}\,dz$ เมื่อ C เป็นวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ 0 รัศมี 2 เราไม่สามารถจัดรูปของปริพันธ์ในอยู่ในรูป $\oint_{C} \frac{1}{z-z_0} f(z)\,dz$ ได้ เนื่องจาก $\frac{1}{z-1}$ นั้นไม่เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ภายใน C จึงต้องใช้ทฤษฎีบทต่อไปในการแก้ปัญหา

ทฤษฎีบท 4.15 สูตรปริพันธ์ของโคชีสำหรับอนุพันธ์

ถ้า f เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์บนเส้นรอบของปิดเชิงเดียว C รวมทั้งบริเวณภายใน C ทั้งหมด และ z_0 เป็นจุดภายใน C แล้ว

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz \quad \text{เมื่อ } n = 0,1,2,3,\ldots$$

หรือ $$\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz = \frac{2\pi i}{n!}f^{(n)}(z_0)$$

พิสูจน์

จะพิสูจน์ทฤษฎีบทดังกล่าวโดยการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์บนค่า n

1. ในการพิสูจน์กรณีที่ $n = 0$ จะได้ข้อความที่ต้องการพิสูจน์คือ

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)}\,dz$$

หรือ $$\oint_C \frac{1}{z-z_0}f(z)\,dz = 2\pi i f(z_0)$$

ซึ่งตรงกับทฤษฎีบท 4.1.4

2. สมมติว่าข้อความเป็นจริงในกรณีที่ $n = k-1$ นั่นคือ

$$f^{(k-1)}(z_0) = \frac{(k-1)!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^k}\,dz \quad \text{สำหรับทุก ๆ จุด } z_0 \text{ ภานใน } C$$

(จะแสดงว่าข้อความเป็นจริงในกรณี $n = k$ ด้วย)

ให้ ξ เป็นจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ ภายใน C โดยสมมติฐานจะได้ว่า

$$f^{(k-1)}(\xi) = \frac{(k-1)!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-\xi)^k}\,dz$$

โดยการพิจารณาให้ปริพันธ์เป็นสมการของตัวแปรเชิงซ้อน ξ โดยการหาอนุพันธ์เทียบกับตัวแปร ξ ทั้งสองข้างของสมการจะได้ว่า

$$\frac{d}{d\xi}\left[f^{(k-1)}(\xi)\right] = \frac{d}{d\xi}\left[\frac{(k-1)!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-\xi)^k}\ dz\right]$$
$$= \frac{(k-1)!}{2\pi i}\left[\oint_C \frac{d}{d\xi}\left(\frac{f(z)}{(z-\xi)^k}\right) dz\right]$$

จะได้ว่า

$$f^{(k)}(\xi) = \frac{(k-1)!}{2\pi i}\left[\oint_C f(z)\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{(z-\xi)^k}\right) dz\right]$$
$$= \frac{(k-1)!}{2\pi i}\left[\oint_C f(z)\frac{d}{d\xi}(z-\xi)^{-k}\ dz\right]$$
$$= \frac{(k-1)!}{2\pi i}\left[\oint_C f(z)\left(k(z-\xi)^{-k-1}\right) dz\right]$$
$$= \frac{k(k-1)!}{2\pi i}\left[\oint_C \left(\frac{f(z)}{(z-\xi)^{k+1}}\right) dz\right]$$
$$= \frac{k!}{2\pi i}\oint_C \left(\frac{f(z)}{(z-\xi)^{k+1}}\right) dz$$

แต่เนื่องจาก ξ เป็นจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ ภายใน C ที่ไม่ได้ระบุ จึงเขียนได้ว่า

$$f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i}\oint_C \left(\frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}\right) dz$$

นั่นคือข้อความเป็นจริงในกรณีที่ $n = k$ ด้วย

ดังนั้นจึงสรุปว่า $f^{(n)}(z_0) = \dfrac{n!}{2\pi i}\displaystyle\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\ dz$ เมื่อ $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

ตัวอย่าง 4.32 จงหาค่าของ $\displaystyle\oint_C \frac{z}{(z-2)^2} dz$ เมื่อกำหนด C เป็นวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ 0 รัศมี 3

วิธีทำ C เป็นวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ 0 รัศมี 3

เนื่องจาก $\dfrac{z}{(z-2)^2}$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ภายใน C และบน C ทั้งหมด

ยกเว้นที่ $z = 2$ ซึ่ง อยู่ภายใน C

จากสูตรปริพันธ์โคชี

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0)$$

จะได้

$$\begin{aligned}\oint_C \frac{z}{(z-2)^2}\,dz &= \oint_C \left(\frac{1}{(z-2)^2}\right) z\,dz \qquad \text{เมื่อ } f(z)=z \text{ และ } f'(z)=1 \\ &= 2\pi i f'(2) \\ &= 2\pi i(1) \\ &= 2\pi i\end{aligned}$$

ดังนั้น $\oint_C \frac{z}{(z-2)^2}\,dz = 2\pi i$

ตัวอย่าง 4.33 จงหาค่าของ $\oint_C \frac{z+1}{z^3-3iz^2}\,dz$ เมื่อกำหนด C เป็นวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ 0 รัศมี 1

วิธีทำ C เป็นวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ 0 รัศมี 1

เนื่องจาก $\frac{z+1}{z^3-3iz^2}$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ภายใน C และบน C ทั้งหมด ยกเว้นที่ $z=0,3i$ แต่เนื่องจากมีเฉพาะ $z=0$ อยู่ภายใน C

จากสูตรปริพันธ์โคชี

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0)$$

จะได้

$$\oint_C \frac{z+1}{z^3-3iz^2}\,dz = \oint_C \frac{z+1}{z^2(z-3iz)}\,dz = \oint_C \frac{1}{z^2}\left(\frac{z+1}{z-3iz}\right)dz$$

เมื่อ $f(z) = \frac{z+1}{z-3i}$

และ $f'(z) = \frac{(z-3i)-(z+1)}{(z-3i)^2} = -\frac{3i+1}{(z-3i)^2}$

$$\oint_C \frac{1}{z^2}\left(\frac{z+1}{z-3iz}\right)dz = 2\pi i f'(0)$$
$$= 2\pi i\left(-\frac{3i+1}{(0-3i)^2}\right)$$
$$= 2\pi i\left(\frac{3i+1}{9}\right)$$
$$= \frac{-6\pi+2\pi i}{9}$$

ดังนั้น $\displaystyle\oint_C \frac{z+1}{z^3-3iz^2}dz = \frac{-6\pi+2\pi i}{9}$

ตัวอย่าง 4.34 จงหาค่าของ $\displaystyle\oint_C \frac{1}{z^5+iz^3}dz$ เมื่อกำหนด C เป็นวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ 0 รัศมี 0.5

วิธีทำ C เป็นวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ 0 รัศมี 0.5

เนื่องจาก $\dfrac{1}{z^5+iz^3} = \dfrac{1}{z^3(z^2+i)}$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ภายใน C และบน C ทั้งหมด ยกเว้นที่ $z = 0, \pm i$ แต่เนื่องจากมีเฉพาะ $z = 0$ อยู่ภายใน C

จากสูตรปริพันธ์โคชี

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz = \frac{2\pi i}{n!}f^{(n)}(z_0)$$

จะได้

$$\oint_C \frac{1}{z^5+iz^3}dz = \oint_C \frac{1}{z^3(z^2+i)}dz = \oint_C \frac{1}{z^3}\left(\frac{1}{z^2+i}\right)dz$$

เมื่อ $f(z) = \dfrac{1}{z^2+i}$

$$f'(z) = \frac{-2z(z^2+i)^{-2}}{-2} = \frac{z}{(z^2+i)^2},$$

$$f''(z) = \frac{(z^2+i)-4z^2(z^2+i)}{(z^2+i)^4}$$

$$\oint_C \frac{1}{z^3}\left(\frac{1}{z^2+i}\right)dz = 2\pi i f''(0)$$
$$= 2\pi i\left(\frac{\left(0^2+i\right)-4(0)^2\left((0)^2+i\right)}{\left((0)^2+i\right)^4}\right)$$
$$= 2\pi i\left(-i\right)$$
$$= 2\pi i$$

ดังนั้น $\oint_C \frac{1}{z^5+iz^3}\,dz = 2\pi i$

4.7 สรุปท้ายบทที่ 4

ในบทนี้กล่าวถึงการหาปริพันธ์ในรูปแบบต่าง ๆ และเรื่องแรกที่เราได้ศึกษาคือการหาปริพันธ์ฟังก์ชันค่าจริงของตัวแปรจริงนั้นคือถ้า $w(t) = u(t) + iv(t)$ และ w เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์ได้บนช่วง $\left[a,b\right]$ ถ้า $u(t)$ และ $v(t)$ เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์ได้บนช่วง $\left[a,b\right]$ นิยามโดย $\int_a^b w(t)\,dt = \int_a^b u(t)\,dt + i\int_a^b v(t)\,dt$ ต่อมาจะเป็นการศึกษาการหาปริพันธ์ตามเส้นเชิงซ้อนโดยแบ่งออกเป็น 3 วิธี ซึ่งวิธีแรกคือเป็นการหาปริพันธ์โดยวิธีการแทนเส้นวิถีหาปริพันธ์ เมื่อกำหนด $C : z(t) = x(t) + y(t)i, a \le t \le b$ และ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงโดเมน D ในระนาบจำนวนเชิงซ้อนปริพันธ์ตามเส้นรอบขอบ C ของ f นิยามโดย

$\int_C f(z)\,dz = \int_a^b f\left(z(t)\right)z'(t)\,dt$ วิธีที่ 2 คือ การหาปริพันธ์โดยใช้ปริพันธ์ไม่จำกัดเขตนั่นคือถ้าฟังก์ชัน $F(z)$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(z)$ บนเส้นรอบขอบ C ซึ่งมีสมการคือ $z = z(t)$ เมื่อ $t \in \left[a,b\right]$ แล้ว $\int_C f(z)\,dz = F\left(z(b)\right) - F\left(z(a)\right)$ และสุดท้ายเป็นการหาปริพันธ์โดยใช้ทฤษฎีบทของโคชี

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 4

1. จงหาค่าปริพันธ์ต่อไปนี้

1.1 $\int_0^1 \left(t^2+i\right)^2 dt$ 1.2 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{it}\, dt$

1.3 $\int_0^1 \left(3t^2+it\right) dt$ 1.4 $\int_\pi^{2\pi} e^{it}\, dt$

2. จงใช้ทฤษฎีบทหลักมูลแคลคูลัสหาค่าปริพันธ์ต่อไปนี้

1.1 $\int_0^1 \left(t^2+i\right)^2 dt$ 1.2 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{it}\, dt$

1.3 $\int_0^1 \left(3t^2+it\right) dt$ 1.4 $\int_\pi^{2\pi} e^{it}\, dt$;

3. จงหาสมการเส้นตรงจากจุด $2-i$ ไปยังจุด $3+2i$ ในรูปเชิงซ้อน พร้อมทั้งวาดภาพประกอบ
4. จงหาเส้นโค้ง $C: z(t)=x(t)+iy(t)$ จากจุดที่กำหนดให้ต่อไปนี้

4.1 จากจุด $2-i$ ไปยังจุด i 4.2 จากจุด $-i$ ไปยังจุด $1+i$

4.3 จากจุด 0 ไปยังจุด i 4.4 จากจุด $-i$ ไปยังจุด 0

4.5 จากจุด $2-i$ ไปยังจุด $1-i$ 4.6 จากจุด $-i$ ไปยังจุด $5i$

5. จงหาค่าของ $\int_C f(z)\,dz$ เมื่อกำหนด $f(z)$ และ C ดังต่อไปนี้

5.1 $f(z)=\overline{z}$ $C: z=e^{it}$ เมื่อ $0\le t\le 2\pi$

5.2 $f(z)=\overline{z}+i$ $C: z=1+it$ เมื่อ $0\le t\le 1$

5.3 $f(z)=3z+2$ $C: z=it$ เมื่อ $0\le t\le 1$

6. จงหาค่า $\oint_C \left(y-2x\right)dz$ เมื่อ C คือเส้นรอบรูปของรูปสามเหลี่ยมซึ่งมีจุดมุมคือ $(0,0),(1,0)$ และ $(1,1)$ ในทิศทางตามเข็มนาฬิกา

7. จงหาค่า $\oint_C \left(x+2y-1\right)dz$ เมื่อ C คือเส้นรอบรูปของรูปสี่เหลี่ยมซึ่งมีจุดมุมคือ $(0,0),(1,0),(1,1)$ และ $(0,1)$ ในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา

8. จงหาค่า $\int_C 5ie^{\frac{z}{5}}\,dz$ เมื่อ C เป็นเส้นรอบขอบที่มีจุดเริ่มต้นที่ $z=\pi i$ และจุดสิ้นสุดที่ $z=-\pi$

9. จงหาค่า $\int_C (z-2)^4\,dz$ เมื่อ C เป็นเส้นรอบขอบที่มีจุดเริ่มต้นที่ $z=0$ และจุดสิ้นสุดที่ $z=3$

10. จงใช้ทฤษฎีบทของโคชีเพื่อหาปริพันธ์ต่อไปนี้

10.1 $\oint_C e^z\,dz$ เมื่อ C เป็นเส้นโค้งปิดเชิงเดียวใด ๆ บนระนาบเชิงซ้อน

10.2 $\oint_C \dfrac{1}{z+2i}dz$ เมื่อ เมื่อ C เป็นวงกลมหนึ่งหน่วย $\left(\left|z\right|=1\right)$

10.3 $\oint_C \dfrac{z^3+5z^2+3}{z+5}dz$ เมื่อ C เป็นวงกลมหนึ่งหน่วยที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(0,0)$

11. จงหาค่า $\oint_C \dfrac{z}{z(z-2)}dz$ เมื่อกำหนดเมื่อกำหนด C เป็นวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ 0 รัศมี 1

12. จงหาค่า $\oint_C \dfrac{z-1}{(z-1)(z-2)(z+5)}dz$ เมื่อกำหนดเมื่อกำหนด C เป็นวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ i รัศมี 3

13. จงหาค่า $\oint_C \dfrac{e^z\cos z}{z(z+4)}e\,dz$ เมื่อกำหนดเมื่อกำหนด C เป็นวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ 0 รัศมี 3

14. จงหาค่า $\oint_C \frac{z}{z^2 - iz^3}\,dz$ เมื่อกำหนดเมื่อกำหนด C เป็นวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ 0 รัศมี 1

15. จงหาค่า $\oint_C \frac{z+3}{(z-1)^2(z^2+9)}\,dz$ เมื่อกำหนดเมื่อกำหนด C เป็นวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ 0 รัศมี 2

บทที่ 5

ลำดับและอนุกรมในระนาบจำนวนเชิงซ้อน

ลำดับของจำนวนเชิงซ้อนนั้นเป็นฟังก์ชันซึ่งโดเมนเป็นเซตย่อยของจำนวนเต็มบวก และมีเรนจ์เป็นเซตย่อยของจำนวนเชิงซ้อน ถ้าโดเมนเป็นเซต $\{1,2,3,...,n\}$ จะเรียกลำดับนั้นว่าลำดับจำกัด และถ้าโดเมนเป็นเซต $\{1,2,3,...\}$ จะเรียกลำดับนั้นว่าลำดับอนันต์ ถ้า $a_1,a_2,a_3,...,a_n$ เป็นลำดับจำกัดที่มี n พจน์แล้วเรียกผลบวก $a_1+a_2+a_3+...+a_n$ ว่าอนุกรมจำกัด ในกรณีที่ $a_1,a_2,a_3,...,a_n,...$ เป็นลำดับอนันต์จะเรียกผลบวก $a_1+a_2+a_3+...+a_n+...$ ว่าอนุกรมอนันต์ และสำหรับเนื้อหาในบทนี้จะศึกษาอนุกรมของจำนวนเชิงซ้อนในหลาย ๆ รูปแบบเพื่อนำไปใช้ในการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันตัวแปรเชิงซ้อนได้อีกวิธีโดยกล่าวในบทถัดไป สำหรับการหาด้วยวิธีนี้นั้นจะเป็นวิธีที่ทำให้การหาปริพันธ์ง่ายและสะดวกมากขึ้น ในการศึกษาลำดับและอนุกรมของฟังก์ชันตัวแปรเชิงซ้อนนี้ก็มีแนวคิดทำนองเดียวกับลำดับและอนุกรมของค่าคงตัวที่เราเคยศึกษามาแล้ว

5.1 ลำดับของฟังก์ชันตัวแปรเชิงซ้อน

สำหรับลำดับของฟังก์ชันตัวแปรเชิงซ้อนนั้นก็มีแนวคิดทำนองเดียวกับลำดับของค่าคงตัวที่เราเราได้ศึกษามาแล้วแต่มีเรนจ์เป็นเซตย่อยของจำนวนเชิงซ้อนเท่านั้นดัง สมถวิล ขันเขตต์ (2558 : 111) ได้กล่าวไว้ดังนี้

บทนิยาม 5.1

ลำดับของจำนวนเชิงซ้อน หมายถึงฟังก์ชันจากเซตของจำนวนนับไปยังเซตย่อยของจำนวนเชิงซ้อน จะเขียนแทนด้วยลำดับของจำนวนเชิงซ้อนด้วย $\{z_n\}$ เรียก z_n ว่า พจน์ที่ n เมื่อ $n=1,2,3,...$

ตัวอย่าง 5.1

ลำดับของจำนวนเชิงซ้อน $i,-1,-i,1,i,-1,-i,1,\ldots$ เขียนแทนด้วย $\left\{i^{n}\right\}$ และมีพจน์ที่ n คือ i^{n}

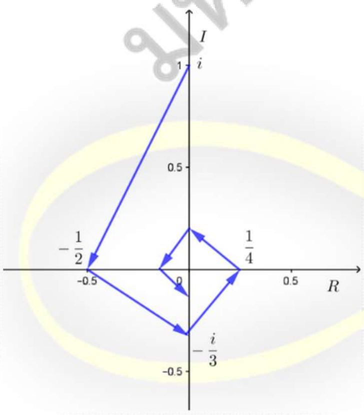
ประสิทธิ์ ลิ้มบุพศิริพร (2557 : 186-187) ได้กล่าวไว้ว่า สำหรับการศึกษาสมบัติของลำดับนั้น สิ่งหนึ่งที่เราสนในคือการศึกษาพฤติกรรมการแปรค่าของพจน์ที่ถัดกันไป แนวคิดหนึ่งที่นำมาใช้ในการศึกษาเรื่องนี้ก็คือการศึกษาเรื่องลิมิตของลำดับ พบว่าโดยความเป็นจริงแล้วการศึกษาในเรื่องนี้เป็นการศึกษาในเรื่องเดียวกับลิมิตของฟังก์ชันนั่นเอง เพื่อให้เกิดความเข้าใจในการศึกษาดังกล่าว เราจะพิจารณาจากตัวอย่างของลำดับต่อไปนี้

1. $\left\{\dfrac{i^{n}}{n}\right\}=i,-\dfrac{1}{2},-\dfrac{i}{3},-\dfrac{1}{4},\ldots$

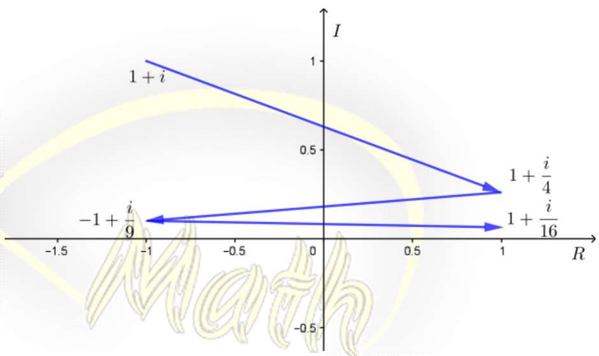
2. $\left\{(-1)^{n}+\dfrac{i}{n^{2}}\right\}=-1+i,1+\dfrac{i}{4},-1+\dfrac{i}{9},\ldots$

3. $\left\{1+in\right\}=1+i,1+2i,1+3i,\ldots$

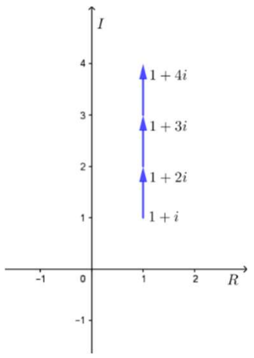
จะเห็นว่าลำดับในข้อ 1 มีลักษระที่แต่ต่างจากลำดับในข้อ 2 และ 2 กล่าวคือเมื่อ n มีค่ามาก พจน์ต่าง ๆของลำดับในข้อ 1 มีแนวโน้มที่จะเข้าใกล้จำนวนบางจำนวนในที่นี้เราอาจคาดเดาว่าคือ 0 แต่สำหรับพจน์ต่าง ๆ ของลำดับในข้อ 2 และ 3 กลับไม่เข้าใกล้ค่าใดเลย จะเห็นว่าการอธิบายพฤติกรรมของลำดับเหล่านี้เป็นเพียงอาศัยการคาดเดาอย่างคร่าว ๆ การจะตรวจสอบว่าผลการคาดเดานี้ถูกต้องหรือไม่จำเป็นต้องใช้หลักทางคณิตศาสตร์ที่ถูกต้องและรัดกุมต่อไป



ลำดับ $\left\{\dfrac{i^{n}}{n}\right\}$



ลำดับ $\left\{(-1)^{n}+\dfrac{i}{n^{2}}\right\}$



ลำดับ $\{1+in\}$

ภาพประกอบ 5.1 ภาพแสดงพจน์ต่าง ๆ ของลำดับ $\left\{\dfrac{i^n}{n}\right\},\left\{(-1)^n+\dfrac{i}{n^2}\right\}$ และ $\{1+in\}$

ที่มา : ประสิทธิ์ ลิ้มบุพศิริพร. 2557 : 187

สำหรับการจะตรวจสอบแต่ละพจน์ของ $\{z_n\}$ ว่าจะมีแนวโน้มเข้าใกล้จำนวนใด หรือไม่มีแนวโน้มเข้าใกล้จำนวนใด ๆ เลยนั้นจะพิจารณาเฉพาะจากการดูแนวโน้มของกราฟเพียงอย่างเดียวนั้นไม่เพียงพอดังนั้นจึงต้องอาศัยบทนิยามและทฤษฎีต่าง ๆ ดัง สมถวิล ขันเขตต์ (2558 : 111-114) ได้กล่าวไว้ดังนี้

บทนิยาม 5.2

ให้ $\{z_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนเชิงซ้อน l เป็นจำนวนเชิงซ้อนจะกล่าวว่าลำดับ $\{z_n\}$ **ลู่เข้า**(convergent) สู่ l เขียนแทนด้วย $\lim_{n\to\infty} z_n = l$ ก็ต่อเมื่อสำหรับทุกค่า $\varepsilon > 0$ จะต้องมีจำนวนนับ N_ε ที่ทุก ๆ จำนวนนับ n ที่ $n \geq N_\varepsilon$ แล้ว $|z_n - l| < \varepsilon$

ถ้า $\{z_n\}$ ไม่เป็นลำดับลู่เข้าเรียกลำดับนี้ว่าลำดับ**ลู่ออก**(divergent)

ทฤษฎีบท 5.1

ถ้าลำดับ $\{z_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้าแล้ว ค่าที่ z_n ลู่เข้านั้นจะมีเพียงค่าเดียว

พิสูจน์

สมมุติให้ $\lim_{n\to\infty} z_n = l_1$ และ $\lim_{n\to\infty} z_n = l_2$

ให้ $\varepsilon = \dfrac{|l_1 - l_2|}{2} > 0$

มีจำนวนเต็มบาก n_{ε_1} ซึ่งทุก ๆ จำนวนเต็มบวก n ที่ $n \geq n_{\varepsilon_1}$ แล้ว $|z_n - l_1| < \varepsilon$

และมีจำนวนเต็มบาก n_{ε_2} ซึ่งทุก ๆ จำนวนเต็มบวก n ที่ $n \geq n_{\varepsilon_2}$ แล้ว $|z_n - l_2| < \varepsilon$

เลือก $n_\varepsilon = \max\{n_{\varepsilon_1}, n_{\varepsilon_2}\}$

สำหรับทุก ๆ จำนวนเต็มบวก n ที่ $n \geq n_\varepsilon$ แล้ว $|z_n - l_1| < \varepsilon$ และ $|z_n - l_2| < \varepsilon$

พิจารณา

$$
\begin{aligned}
|l_1 - l_2| &= |l_1 - z_n + z_n - l_2| \\
&\leq |l_1 - z_{n2}| + |z_n - l_2| \\
&< \varepsilon + \varepsilon \\
&= 2\varepsilon \\
&= 2\frac{|l_1 - l_2|}{2} \\
&= |l_1 - l_2|
\end{aligned}
$$

นั้นคือ $|l_1 - l_2| < |l_1 - l_2|$ จึงเกิดข้อขัดแย้ง

แสดงว่า $l_1 \neq l_2$

ในการหาลิมิตของลำดับของจำนวนเชิงซ้อนเราจะหาโดยใช้ลิมิตของลำดับจำนวนจริงโดยหาลิมิตของลำดับของส่วนจริง และลิมิตของลำดับของส่วนจินตภาพ ซึ่งอาศัยทฤษฎีบทดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 5.2

$$\text{ให้ } z_n = x_n + y_n i\,,\ \ \lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty}\left(x_n + y_n i\right) = a + bi$$

ก็ต่อเมื่อ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ และ $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$

ตัวอย่าง 5.2 จงหา $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+i}{n+3i}\right)$

วิธีทำ จาก

$$\frac{2n+i}{n+3i} = \left(\frac{2n+i}{n+3i}\right)\left(\frac{n-3i}{n-3i}\right)$$

$$= \frac{2n^2 - 5ni + 3}{n^2+9}$$

$$= \frac{2n^2+3}{n^2+9} - \frac{5n}{n^2+9}i$$

ได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+i}{n+3i}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+3}{n^2+9} - \frac{5n}{n^2+9}i\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+3}{n^2+9}\right) - i\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n}{n^2+9}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2+\frac{3}{n^2}}{1+\frac{9}{n^2}}\right) - i\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{5}{n^2}}{1+\frac{9}{n^2}}\right)$$

$$= 2 - i(0)$$

$$= 2$$

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+i}{n+3i}\right) = 2$

จากตัวอย่าง 5.2 เรา ได้ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+i}{n+3i}\right)=2$ แสดงว่า $\left\{\dfrac{2n+i}{n+3i}\right\}$ เป็นลำดับลู่เข้า

ตัวอย่าง 5.3 จงหา $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+ni}{1+ni}\right)$

วิธีทำ จาก $\dfrac{n^2+ni}{1+ni}=\left(\dfrac{n^2+ni}{1+ni}\right)\left(\dfrac{1-ni}{1-ni}\right)$

$$=\frac{n^2+ni-n^3i+n^n}{1+n^2}$$

$$=\frac{2n^2}{1+n^2}-\frac{n-n^3}{1+n^2}i$$

เนื่องจาก $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2}{1+n^2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{\dfrac{1}{n^2}+1}\right)=2$

และ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-n^3}{1+n^2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3}{n^2}\left(\dfrac{\dfrac{1}{n^2}-1}{\dfrac{1}{n^2}+1}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\dfrac{\dfrac{1}{n^2}-1}{\dfrac{1}{n^2}+1}\right)=-\infty$

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+ni}{1+ni}\right)$ หาค่าไม่ได้

จากตัวอย่าง 5.3 เรา ได้ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+ni}{1+ni}\right)=\infty$ แสดงว่า $\left\{\dfrac{n^2+ni}{1+ni}\right\}$ เป็นลำดับลู่ออก

5.2 อนุกรมของฟังก์ชันตัวแปรเชิงซ้อน

จากที่ผ่านมาเราได้ศึกษาเรื่องลำดับตัวแปรเชิงซ้อนไปแล้วนั้นแต่ถ้าเรานำสมาชิกทุกตัวในลำดับมาบวกกันเช่น ถ้า $a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n$ เป็นลำดับจำกัดที่มี n พจน์แล้วเรียกผลบวก $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n$ ว่าอนุกรมจำกัด ในกรณีที่ $a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n,\ldots$ เป็นลำดับอนันต์จะเรียก

ผลบวก $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$ ว่าอนุกรมอนันต์ สำหรับในหัวข้อนี้นั้นเราจะศึกษาอนุกรมลำดับของอนุกรมดัง เกียรติสุดา นาคประสิทธิ์ (2556 : 195) ได้กล่าวไว้ดังนี้

บทนิยาม 5.3

ให้ $\{z_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนเชิงซ้อน **อนุกรมอนันต์** (infinite series) หรือ **อนุกรม** (series) เขียนแทนด้วย $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ หรือ $\sum z_n$ คือผลบวกในรูป

$$z_1 + z_2 + z_3 + \cdots + z_n + \cdots$$

และเรียก z_n แต่ละจำนวนว่า**พจน์ที่** n ของอนุกรม

เนื่องจากมีเพียงผลบวกของพจน์เป็นจำนวนจำกัดเท่านั้นที่สามารถหาได้โดยการบวกแบบพีชคณิตธรรมดา แต่ถ้าเป็นอนุกรมอนันต์นั้นจะไม่สามารถบวกแบบพีชคณิตธรรมดาได้ จำเป็นจะต้องศึกษาบทนิยาม และทฤษฎีบทต่าง ๆ ดังที่ สมถวิล ขันเขตต์ (2558 : 114-115) ได้กล่าวไว้ดังนี้

บทนิยาม 5.4

ให้ $\{z_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนเชิงซ้อน และ

$$\begin{aligned}
S_1 &= z_1 \\
S_2 &= z_1 + z_2 \\
S_3 &= z_1 + z_2 + z_3 \\
&\vdots \\
S_n &= z_1 + z_2 + z_3 + \cdots + z_n
\end{aligned}$$

จะเรียน S_n ว่า **ผลบวกย่อยที่** n และ เรียก $S_1, S_2, S_3, \ldots S_n, \ldots$ ว่า **ลำดับบของผลบวกย่อย** (sequence of partial sum)

สำหรับการลู่เข้าของอนุกรมนั้นเราจะไม่พิจารณาอนุกรมโดยตรงแต่เราจะพิจารณาจากลำดับของผลบวกย่อย หรือบางครั้งอาจจะพิจารณาเศษเหลือ ดัง สมเกียรติ ตั้งพูลผล (2535 : 113-114) ได้กล่าวไว้ดังนี้

อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ ลู่เข้าก็ต่อเมื่อลำดับของผลบวกย่อย $\{S_n\}$ ลู่เข้าจากบทนิยามของลำดับลู่เข้าถ้า $\{S_n\}$ ลู่เข้าหา S จะได้ว่าเมื่อกำหนด $\varepsilon > 0$ จะมี N ที่ทำให้ $|S_n - S| < \varepsilon$ เมื่อ $n > N$ ถ้าเขียน R_n แทน $S_n - S$ จะได้ $R_n = z_{n+1} + z_{n+2} + z_{n+3} + \ldots$ เรียกเศษเหลือ หลัง n พจน์

คือ $$R_n = S - S_n$$

หรือ $$R_n + S_n = S$$

ดังนั้น $|S_n - S| < \varepsilon$ อาจเขียนเป็น $|R_n| < \varepsilon$ หรือ $\left|\sum_{k=1}^{\infty} z_k - \sum_{k=1}^{n} z_k\right| < \varepsilon$

และอาจนิยามอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ ลู่เข้าก็ต่อเมื่อ $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$

และถ้า $S = \infty$ หรือหาค่าไม่ได้ เรียกอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ ลู่ออก

จากที่กล่าวมาข้างต้นนั้น เกียรติสุดา นาคประสิทธิ์ (2556 : 196-197) ได้ให้ทฤษฎีบทสำหรับตรวจสอบการลู่เข้าของอนุกรมดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 5.3

ให้ $z_n = x_n + iy_n$ สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$ และ $S = x + yi$ แล้ว

$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S$ ก็ต่อเมื่อ $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} y_n = y$

พิสูจน์

$(\Rightarrow)$ ให้ $S_N = \sum_{n=1}^{N} z_n,\ X_N = \sum_{n=1}^{N} x_n,$ และ $Y_N = \sum_{n=1}^{N} y_n$ และ $S = x + yi$

นั่นคือ $S_N = X_N + iY_N$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก N

และถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S$ แล้วจะได้ว่า $\lim_{n\to\infty} S_N = S$

จาก $S_N = X_N + iY_N$ และ $S = x + yi$ จะได้

จะได้
$$\lim_{n\to\infty}\left(X_N + iY_N\right) = x + yi$$
$$\lim_{n\to\infty} X_N + i\lim_{n\to\infty} Y_N = x + yi$$
$$\lim_{n\to\infty} X_N = x \quad \text{และ} \quad \lim_{n\to\infty} Y_N = y$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x \quad \text{และ} \quad \sum_{n=1}^{\infty} y_n = y$$

นั่นคือ ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S$ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} y_n = y$

($\Leftarrow$) ทำในทำนองเดียวกัน

ทฤษฎีบท 5.4

กำหนด $\{z_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนเชิงซ้อนถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า แล้ว $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$

พิสูจน์

กำหนดให้ $z_n = x_n + y_n i$ สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$ และ $S = x + yi$

เนื่องจาก $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า ดังนั้นจึงมีจำนวนเชิงซ้อน S ซึ่งทำให้ $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S$

จะได้ว่า
$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x \quad \text{และ} \quad \sum_{n=1}^{\infty} y_n = y$$

เนื่องจาก $x_n, y_n \in \mathbb{R}$ สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$ ดังนั้น $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ และ $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$

หรือทำให้ได้ว่า $\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} x_n + i\lim_{n\to\infty} y_n = 0 + 0i = 0$

จากทฤษฎี 4.4 ได้ข้อความที่สมมูลกันและเป็นประโยชน์อย่างยิ่งในการตรวจสอบการลู่ออกของอนุกรม ดังนี้

บทแทรก 5.1

กำหนด $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ เป็นอนุกรมของจำนวนเชิงซ้อน ถ้า $\lim_{n\to\infty} z_n \neq 0$ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก

ตัวอย่าง 5.6 จงแสดงว่า $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2ni-3}{n-1}\right)$ เป็นอนุกรมลู่ออก

วิธีทำ พิจารณา $\lim_{n\to\infty} z_n$ เมื่อ $z_n = \frac{2ni-3}{n-1}$

ได้
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2ni-3}{n-1}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2i-\frac{3}{n}}{1-\frac{1}{n}}\right)$$
$$= \frac{\lim_{n\to\infty}\left(2i-\frac{3}{n}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)}$$
$$= 2i$$
$$\neq 0$$

จากบทแทรก 5.1

ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2ni-3}{n-1}\right)$ เป็นอนุกรมลู่ออก

ตัวอย่าง 5.6 จงแสดงว่า $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ เป็นอนุกรมลู่ออก เมื่อ $|z| \geq 1$

วิธีทำ เนื่องจาก $\lim_{n\to\infty} z^n \neq 0$ สำหรับ z ซึ่ง $|z| \geq 1$

จากบทแทรก 5.1

ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ เป็นอนุกรมลู่ออก เมื่อ $|z| \geq 1$

จากบทแทรก 5.1 นั้นเหมาะสำหรับการตรวจสอบอนุกรมลู่ออก แต่ถ้าอนุกรมของที่เราตรวจสอบนั้นไม่ลู่ออกก็เป็นการยากที่จะตรวจสอบเพราะอนุกรมนั้นมีมากมายหลายรูปแบบดังนั้นเราจึงให้บทนิยามของอนุกรมรูปแบบเฉพาะพร้อมทั้งตัวอย่างการตรวจสอบว่าอนุกรมดังกล่าวลู่เข้าหรือลู่ออกในกรณีใดบาง ดัง สมถวิล ขันเขตต์ (2558 : 116 -117) ได้กล่าวไว้ดังนี้

บทนิยาม 5.5

อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ **ลู่เข้าอย่างสมบูรณ์** (absolutely convergent) ก็ต่อเมื่อ $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ ลู่เข้า

บทนิยาม 5.6

อนุกรมพี (P-series) คืออนุกรมที่เขียนในรูป

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^p}\right) = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \ldots$$ เมื่อ p เป็นจำนวนจริงใด ๆ

ในกรณีที่ $p = 1$ เรียนก**อนุกรมฮาร์โมนิค** (Harmonic series) เขียนในรูป

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$$

อนุกรมพี $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^p}\right)=\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\ldots$ จะลู่เข้าเมื่อ $p>1$ และจะลู่ออกเมื่อ $p\leq 1$ (เลิศ สิทธิโกศล, 2542 : 332)

ตัวอย่าง 5.7 จงพิจารณาการลู่เข้าของอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}i$

วิธีทำ เนื่องจาก $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}i=i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$

พิจารณา $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}=-1+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}-\frac{1}{5^2}+\ldots$

และ $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n}\right|=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}i$ ลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์

นอกจากอนุกรมพี แล้วยังมีอนุกรมอีกรูแบบหนึ่งนั่นก็คืออนุกรมเรขาคณิต ซึ่ง ดำรง ทิพย์โยธา และคณะ (2558 : 26) ได้ให้บทนิยามไว้ดังต่อไปนี้

บทนิยาม 5.7

อนุกรมเลขคณิต คืออนุกรมที่เขียนได้ในรูป

$$\sum_{n=1}^{\infty}az^{n-1}=a+az+az^2+\ldots+az^{n-1}+\ldots$$

สำหรับการตรวจสอบการลู่เข้าหรือลู่ออกของอนุกรมเรขาคณิตนั้นต้องเราจะพิจารณาดังต่อไปนี้

จาก

(1) $$\sum_{n=1}^{\infty} az^{n-1} = a + az + az^2 + \ldots + az^{n-1} + \ldots$$

ได้ ผลบวกย่อย N พจน์แรกของอนุกรมคือ

(2) $$S_N = \sum_{n=1}^{N} az^{n-1} = a + az + az^2 + \ldots + az^{N-1}$$

คูณทั้งสองข้างของสมการ (2) ด้วย z จะได้

(3) $$zS_N = za + az^2 + az^3 + \ldots + az^N$$

นำสมการ (2) – (3) ได้

$$S_N - zS_N = \left(a + az + az^2 + \ldots + az^{N-1}\right) - \left(za + az^2 + az^3 + \ldots + az^N\right)$$

$$= a - az^N$$

$$\left(1 - z\right)S_N = a - az^N$$

$$S_N = \frac{a - az^N}{1 - z}$$

หรือ $S_N = \dfrac{a(1 - z^N)}{1 - z}$ สำหรับ z ซึ่ง $z \neq 1$

เนื่องจาก $\lim\limits_{N\to\infty} z^N = 0$ สำหรับ z ซึ่ง $\left|z\right| < 1$ ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} S_N = \dfrac{a}{1 - z}$

นั่นคือ

(4) $$\frac{a}{1 - z} = a + az + az^2 + \ldots + az^{n-1} + \ldots$$ สำหรับ z ซึ่ง $\left|z\right| < 1$

และอนุกรมเรขาคณิตจะลู่ออกสำหรับ $z \in \left\{z : \left|z\right| \geq 1\right\}$

ตัวอย่าง 5.8 จงตรวจสอบว่า $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(3i - 1)^n}{12^n}$ ลู่เข้าหรือลู่ออกถ้าลู่เขาจงหาผลบวกของอนุกรม

วิธีทำ จาก $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(3i - 1)^n}{12^n} = \dfrac{3i - 1}{12} + \dfrac{(3i - 1)^2}{12^2} + \dfrac{(3i - 1)^3}{12^3} + \ldots$

ซึ่ง $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3i-1)^n}{12^n}$ เป็นอนุกรมเลขาคณิตที่มี

$$a=\frac{3i-1}{12} \quad \text{และ} \quad z=\frac{3i-1}{12}$$

เนื่องจาก

$$|z|=\left|\frac{3i-1}{12}\right|=\sqrt{\left(\frac{3}{12}\right)^2+\left(\frac{1}{12}\right)^2}=\sqrt{\frac{10}{144}}=\frac{\sqrt{10}}{12}<1$$

จาก $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3i-1)^n}{12^n}$ เป็นอนุกรมเรขาคณิตที่ $|z|<1$ จะได้

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3i-1)^n}{12^n}=\frac{\frac{3i-1}{12}}{1-\left(\frac{3i-1}{12}\right)}$$

$$=\frac{\frac{3i-1}{12}}{\frac{12-3i-1}{12}}$$

$$=\frac{3i-1}{11-3i}$$

ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3i-1)^n}{12^n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า และ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3i-1)^n}{12^n}=\frac{3i-1}{11-3i}$

ตัวอย่าง 5.9 จงตรวจสอบว่า $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(i+6)^n}{2^n}$ ลู่เข้าหรือลู่ออกถ้าลู่เขาจงหาผลบวกของอนุกรม

วิธีทำ จาก $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{i+6}{2}\right)^n=\frac{i+6}{2}+\left(\frac{i+6}{2}\right)^2+\left(\frac{i+6}{2}\right)^3+\ldots$

ซึ่ง $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(i+6)^n}{2^n}$ เป็นอนุกรมเลขาคณิต ที่มี

$$a=\frac{i+6}{2} \quad \text{และ} \quad z=\frac{i+6}{2}$$

เนื่องจาก

$$\left|z\right| = \left|\frac{i+6}{2}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{6}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{37}{4}} = \frac{\sqrt{37}}{2} > 1$$

ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(i+6)^n}{2^n}$ เป็นอนุกรมลู่ออก

จากที่ได้ศึกษาอนุกรมที่มีรูปแบบเฉพาะเช่นอนุกรมพี อนุกรมเลขาคณิต พร้อมทั้งการตรวจสอบการลู่เข้าลู่ออกของอนุกรมนั้นก็ยังไม่เพียงพอที่จะสามารถตรวจสอบทุกอนุกรมได้เพราะบางครั้งอนุกรมที่เราศึกษานั้นอาจจะไม่ได้อยู่ในรูปแบบเฉพาะก็ได้ดังนั้นเราจึงกระทำโดยการตรวจสอบอนุกรมของจำนวนจริงดัง สมเกียรติ ตั้งพูลผล (2558 : 115 -117) ได้กล่าวไว้ดังนี้

- **การทดสอบโดยการเปรียบเทียบ** (comparison test)

1. ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} \left|w_n\right|$ ลู่เข้า และ $\left|z_n\right| \le \left|w_n\right|$ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ ลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์

2. ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} \left|w_n\right|$ ลู่ออก และ $\left|z_n\right| \ge \left|w_n\right|$ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} \left|z_n\right|$ ลู่ออก

แต่ $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ อาจจะลู่เข้าหรืออาจจะลู่ออก

- การทดสอบโดยอัตราส่วน (ration test)

สำหรับ $z_n \ne 0$ ทุกค่า n และ $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = L$

ถ้า $L < 1$ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ ลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์

ถ้า $L > 1$ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ ลู่ออกถ้า

ถ้า $L = 1$ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ ไม่สามารถสรุปได้

- การทดสอบโดยรากที่ n (n^{th} rood test)

สมมติว่า $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ โดยที่ $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{z_n} = L$

ถ้า $L<1$ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ ลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์

ถ้า $L>1$ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ ลู่ออกถ้า

ถ้า $L=1$ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ ไม่สามารถสรุปได้

- **การทดสอบของราเบ** (Raba's test)

ถ้า $z_n \neq 0$ ทุกค่า n และ $\lim_{n\to\infty} n\left(1-\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|\right)=L$ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ ลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์ ถ้า $L<1$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ ลู่ออกอย่างมีเงื่อนไขถ้า $L>1$

- **การตรวจสอบอนุกรมสลับ** (alternating series test)

อนุกรมสลับ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n z_n$ เมื่อ $z_n>0$ ทุกค่า n เป็นอนุกรมลู่เข้าถ้า

ตัวอย่าง 5.10 จงแสดงว่า $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^4}=z+\frac{z^2}{2^4}+\frac{z^3}{3^4}+\frac{z^4}{4^4}+\ldots$ ลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์ที่จุด $z=-1$

วิธีทำ พิจารณาที่จุด $z=-1$ จะได้

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^4}=-1+\frac{1}{2^4}-\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}-\frac{1}{5^4}+\ldots$$

เนื่องจาก

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n^4}\right|=1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^4}+\ldots$$ เป็นอนุกรม p และ $p=4$

นั่นคือ $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n^4}\right|$ ลู่เข้า

ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^4}$ ลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์ ที่จุด $z=-1$

ตัวอย่าง 5.11 จงตรวจสอบอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2}$ ที่จุด $z=3$

วิธีทำ พิจารณาที่จุด $z=3$ จะได้

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^2}$$

ทดสอบการลู่เข้าโดยอัตราส่วน

สำหรับแต่ละ $n=1,2,...$ ให้ $z_n=\frac{3^n}{n^2}$

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{3^n}{n^2}}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{3^{n+1}}{(n+1)^2}\times\frac{n^2}{3^n}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{3n^2}{n^2+2n+1}\right| \\
&= 3
\end{aligned}$$

เนื่องจากได้ $L=3$ ซึ่ง $L>1$

ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^2}$ ลู่ออก

ต่อไปจะเป็นนิยามอนุกรมกำลัง สัมประสิทธิ์ของอนุกรมกำลัง ศูนย์กลางของอนุกรมกำลัง และรัศมีการลู่เข้า ซึ่งจะใช้ศึกษาในหัวข้อต่อไปดัง เกียรติสุดา นาคประสิทธิ์ (2556 : 203) ได้ให้ไว้ดังต่อไปนี้

บทนิยาม 5.8

ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนเชิงซ้อน และ $z_0 \in \mathbb{C}$ **อนุกรมกำลังรอบจุด** z_0 คือ อนุกรมที่อยู่ในรูปแบบ

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = a_0 + a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 + \ldots$$

และเรียก z_0 ว่า **ศูนย์กลางของอนุกรมกำลัง**

เรียกเซตของจุดทุกจุดซึ่งอยู่ภายในวงกลมซึ่งมีศูนย์กลางที่จุด z_0 และอนุกรมลู่เข้า**บริเวณการลู่เข้า**ของอนุกรมกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ และเรียกวงกลมที่ใหญ่ที่สุดซึ่งอนุกรมลู่เข้าที่ทุกจุดซึ่งอยู่ภายในว่า **วงกลมการลู่เข้า** ของอนุกรมกำลัง และเรียกรัศมีของวงกลมการลู่เข้าว่า **รัศมีการลู่เข้า** ของอนุกรมกำลัง ยิ่งไปกว่านั้น ได้ว่า อนุกรมกำลังลู่ออกที่จุดซึ่งอยู่ภายนอกวงกลมการลู่เข้า

ทฤษฎีบท 5.5

สมมติว่าอนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ ลู่เข้าที่จุด z_1 โดยที่ $z_1 \neq z_0$ จะได้ว่าอนุกรมกำลังนี้ลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์ที่ทุกจุด z ใด ๆ ซึ่ง $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$

สำหรับการพิสูจน์ทฤษฎีบทดังกล่าวนี้ ประสิทธิ์ ลิ้มบุพศิริพร (2557 : 198-200) ได้แสดงการพิสูจน์พร้อมทั้งได้อธิบายการลู่เข้าลู่ออกของอนุกรมและตัวอย่างการหารัศมีการลู่เข้าดังต่อไปนี้

พิสูจน์

เนื่องจาก $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ ลู่เข้าดังนั้นโดยทฤษฎีบท 5.4 จะได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty} a_n(z-z_0)^n = 0$$

โดยบทนิยามของลิมิตจะได้ว่ามีจำนวนนับ N ซึ่งมีสมบัติว่า

$$\left|a_n(z-z_0)^n\right| < 1 \qquad \text{ทุก } n \geq N$$

สำหรับจุด z ใด ๆ ซึ่ง $\left|z-z_0\right| < \left|z_1-z_0\right|$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\left|a_n(z-z_0)^n\right| &= \left|\frac{(z-z_0)^n}{(z_1-z_0)^n}\right|\left|a_n(z-z_0)^n\right| \\ &< \left|\frac{z-z_0}{z_1-z_0}\right|^n \qquad \text{ทุก } n \geq N\end{aligned}$$

สังเกตว่าอนุกรม $\sum_{n=N}^{\infty}\left|\frac{z-z_0}{z_1-z_0}\right|^n$ ลู่เข้าทั้งนี้เพราะเป็นอนุกรมเลขาคณิตที่ $\left|\frac{z-z_0}{z_1-z_0}\right| < 1$

จะได้ว่า $\sum_{n=0}^{\infty}\left|a_n(z-z_0)^n\right|$ ลู่เข้าซึ่งทำให้ได้ว่าอนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ ลู่เข้าด้วย

เพราะฉะนั้นอนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ ลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์

จากทฤษฎีบทดังกล่าวจะได้ว่าการลู่เข้าของอนุกรมกำลังเกิดขึ้นได้เพียง 3 กรณีต่อไปนี้เท่านั้น

1. อนุกรมกำลังลู่เข้าที่จุด z_0 เพียงจุดเดียวในกรณีนี้เรากล่าวว่า อนุกรมกำลังมีรัศมีการลู่เข้าเป็นศูนย์

2. อนุกรมกำลังลู่เข้า (อย่างสัมบูรณ์) ที่ทุกจุด ในกรณีนี้เรากล่าวว่าอนุกรมกำลังมีรัศมีการลู่เข้าเป็นอนันต์

3. อนุกรมกำลังลู่เข้าที่จุดบางจุด (ที่ไม่ใช่จุด z_0) และลู่ออกที่บางจุด ดังนั้นถ้าให้

$$R = \inf\left\{\ \left|\xi - z_0\right| \,\middle|\, \xi \text{ เป็นจุดที่อนุกรมลู่ออก } \right\}$$

แล้วจะได้ว่า

- อนุกรมกำลังลู่เข้า(อย่างสัมบูรณ์) ที่ทุกจุด z ซึ่ง $\left|z-z_0\right| < R$
- อนุกรมกำลังลู่ออกที่ทุกจุด z ซึ่ง $\left|z-z_0\right| > R$

ในกรณีนี้เราเรียก R ว่า รัศมีการลู่เข้า

สำหรับจุดที่อยู่ที่ขอบของจานเปิดของการลู่เข้า อนุกรมอาจลู่เข้าหรือลู่ออกก็ได้ ถ้าเราให้ R แทนรัศมีการลู่เข้าของอนุกรมกำลังแล้วเรานิยาม R (ตามกรณีต่าง ๆ ข้างต้น) ได้เป็น 3 แบบคือ $R=0, R=\infty$ และ $R<\infty$ ซึ่งในแต่กรณีจะสังเกตได้ว่า

1. เมื่อ $R=0$ อาจกล่าวได้ว่าบริเวณของการลู่เข้าของอนุกรมกำลังคือเซตของจุด z โดยที่ $\left|z-z_0\right|=0$ หรือก็คือ $\left\{z_0\right\}$

2. เมื่อ $R=\infty$ อาจกล่าวได้ว่าบริเวณของการลู่เข้าของอนุกรมกำลังคือเซตของจุด z โดยที่ $\left|z-z_0\right|<\infty$ หรือก็คือเซตของจำนวนเชิงซ้อนทั้งหมด

3. เมื่อ $R<\infty$ อาจกล่าวได้ว่าบริเวณของการลู่เข้าของอนุกรมกำลังคือเซตของจุด z โดยที่ $\left|z-z_0\right|<R$ หรือก็คือ $N_R(z_0)$

ตัวอย่าง 5.12 จงหารัศมีการลู่เข้าและวงกลมการลู่เข้าของอนุกรมกำลัง

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{n}(z-1+i)^n$$

วิธีทำ ทดสอบการลู่เข้าโดยอัตราส่วน

สำหรับแต่ละ $n=1,2,\ldots$ ให้ $z_n=\dfrac{(-1)^n 2^n}{n}(z-1+i)^n$

$$
\begin{aligned}
L &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{(-1)^{n+1}2^{n+1}}{n+1}(z-1+i)^{n+1}}{\dfrac{(-1)^n 2^n}{n}(z-1+i)^n}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{(-1)^{n+1}2^{n+1}(z-1+i)^{n+1}}{n+1}}{\dfrac{(-1)^n 2^n(z-1+i)^n}{n}}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}2^{n+1}(z-1+i)^{n+1}}{n+1}\times\frac{n}{(-1)^n 2^n(z-1+i)^n}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{-2n(z-1+i)}{n+1}\right|
\end{aligned}
$$

$$= \left|-2(z-1+i)\right|$$

$$= 2\left|z-1+i\right|$$

อนุกรมจะลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์เมื่อ $L < 1$

จะได้อนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n}(z-1+i)^n$ ลู่เข้าเมื่อ

$$2\left|z-1+i\right| < 1$$

หรือ $\left|z-1+i\right| < \frac{1}{2}$

ดังนั้น อนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n}(z-1+i)^n$ ลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์ที่ทุกจุด z ซึ่ง $\left|z-1+i\right| < \frac{1}{2}$ และรัศมีการลู่เข้าของอนุกรมคือ $\frac{1}{2}$

สำหรับการหารัศมีการลู่เข้านั้นนอกจากใช้วิธีการดังตัวอย่าง 5.12 แล้วเราสามารถหาได้โดยอาศัยทฤษฎีบทอื่น ๆ ได้อีกซึ่ง สมถวิล ขันเขตต์ (2558 : 120-122) ได้กล่าวไว้ดังนี้

ทฤษฎีบท 5.6

ถ้า $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$ แล้ว $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ ลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์ที่ทุก ๆ จุดภายในของวงกลม $\left|z-a\right| = \frac{1}{L}$ ลู่ออกทุก ๆ จุดที่อยู่ภายนอกวงกลม และอาจจะลู่เข้าสัมบูรณ์ หรือลู่เข้าอย่างมีเงื่อนไข หรือลู่ออกที่จุดบนเส้นรอบวงของวงกลม

พิสูจน์

สมมุติให้ $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$ และทดสอบการลู่เข้าโดยอัตราส่วนจะได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}(z-z_0)^{n+1}}{a_n(z-z_0)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}(z-z_0)}{a_n}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\left|z-z_0\right|$$

$$= L\left|z-z_0\right|$$

ดังนั้นอนุกรมลู่เข้าสัมบูรณ์เมื่อ $L\left|z-z_0\right|<1$ หรือ $\left|z-z_0\right|<\dfrac{1}{L}$

และอนุกรมลู่ออกเมื่อ $L\left|z-z_0\right|>1$ หรือ $\left|z-z_0\right|>\dfrac{1}{L}$

และไม่สามารถใช้วิธีตรวจสอบโดยอัตราส่วนได้เมื่อ

$$L\left|z-z_0\right|=1 \text{ หรือ } \left|z-z_0\right|=\frac{1}{L}$$

บทนิยาม 5.9

กำหนด $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ และ $\lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=L$ ให้ $r=\dfrac{1}{L}>0$ เรียก r ว่า **รัศมีการลู่เข้า** (radius of convergence) ของอนุกรมกำลัง เรียกวงกลม $\left|z-z_0\right|=r$ ว่า**วงกลมของการลู่เข้า** (circle of convergence)

ถ้า $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ ลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์ที่ $z=z_0$ เท่านั้นนั่นคือรัศมีการลู่เข้าเป็น 0

ถ้า $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ ลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์ทุก ๆ ค่า z นั่นคือรัศมีการลู่เข้าเป็น ∞

ทฤษฎีบท 5.7

กำหนดให้ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ ถ้า $\lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|=r>0$ แล้ว r เป็นรัศมีการลู่เข้าของอนุกรมกำลัง

พิสูจน์ สมมติให้ $\lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|=r>0$ และทดสอบการลู่เข้าโดยอัตราส่วนจะได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}(z-z_0)^{n+1}}{a_n(z-z_0)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}(z-z_0)}{a_n}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\left|z-z_0\right|$$

$$= \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}\left|z - z_0\right|$$

$$= \frac{\left|z - z_0\right|}{r}$$

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ ลู่เข้า เมื่อ $\frac{\left|z - z_0\right|}{r} < 1$ หรือ $\left|z - z_0\right| < r$

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ ลู่ออก เมื่อ $\frac{\left|z - z_0\right|}{r} > 1$ หรือ $\left|z - z_0\right| > r$

พิจารณาที่จุด $z = z_0$ พบว่า $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}(z - z_0)^{n+1}}{a_n (z - z_0)^n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\left|z - z_0\right| = 0$

ถ้า $r = 0$ แล้ว $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}(z - z_0)^{n+1}}{a_n (z - z_0)^n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\left|z - z_0\right| = \infty$

นั่นคือ r เป็นรัศมีการลู่เข้าของ $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$

ทฤษฎีบท 5.8

กำหนดให้ $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ ถ้า $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\left|a_n\right|^{\frac{1}{n}}} = r > 0$ แล้ว r เป็นรัศมีการลู่เข้าของอนุกรมกำลัง

พิสูจน์

สมมุติให้ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\left|a_n\right|^{\frac{1}{n}}} = r > 0$

เพราะว่า

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left|a_n(z-z_0)^n\right|^{\frac{1}{n}} &= \lim_{n\to\infty}\left|a_n\right|^{\frac{1}{n}}\left|z-z_0\right| \\
&= \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\left|a_n\right|^{\frac{1}{n}}}}\left|z-z_0\right| \\
&= \frac{1}{r}\left|z-z_0\right| \\
&= \frac{\left|z-z_0\right|}{r}
\end{aligned}$$

ทดสอบการลู่เข้าโดยการทดสอบโดยรากที่ n ของอนุกรมกำลังจะได้ว่า

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ ลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์ เมื่อ $\dfrac{\left|z-z_0\right|}{r} < 1$ หรือ $\left|z-z_0\right| < r$

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ ลู่ออก เมื่อ $\dfrac{\left|z-z_0\right|}{r} > 1$ หรือ $\left|z-z_0\right| > r$

พิจารณาที่จุด $z = a$ พบว่า $\lim\limits_{n\to\infty}\left|a_n(z-z_0)^n\right|^{\frac{1}{n}} = 0$

ถ้า $r = 0$ แล้ว $\lim\limits_{n\to\infty}\left|a_n(z-z_0)^n\right|^{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\left|a_n\right|^{\frac{1}{n}}\left|z-z_0\right| = \infty$

นั่นคือ แล้ว r เป็นรัศมีการลู่เข้าของอนุกรม

ตัวอย่าง 5.13 จงหารัศมีการลู่เข้าของ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(z-1)^n}{3n}$

วิธีทำ อนุกรมที่กำหนดให้เป็นอนุกรมรอบจุด $z = 1$ ซึ่งมี $a_n = \dfrac{1}{3n}$ และ $a_{n+1} = \dfrac{1}{3(n+1)}$

จากทฤษฎีบท 5.7 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
r &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{1}{3n}}{\dfrac{1}{3(n+1)}}\right|
\end{aligned}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{3n}\times 3(n+1)\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{3n+1}{3n}\right|$$

$$= 1$$

ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{3n}$ ลู่เข้าทุกค่า z ที่ $\left|z\right| < 1$ หรือรัศมีการลู่เข้าคือ 1

ตัวอย่าง 5.14 จงหารัศมีการลู่เข้าและวงกลมของการลู่เข้าของ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+3)^4 2^n}(z-4)^n$

วิธีทำ จากอนุกรมที่กำหนดให้เป็นอนุกรมรอบจุด $z = 4$ ซึ่งมี

$$a_n = \frac{1}{(n+3)^4 2^n} \qquad \text{และ} \qquad a_{n+1} = \frac{1}{(n+4)^4 2^{n+1}}$$

จากทฤษฎีบท 5.7 จะได้ว่า

$$r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{(n+3)^4 2^n}}{\frac{1}{(n+4)^4 2^{n+1}}}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{(n+3)^4 2^n}\times (n+4)^4 2^{n+1}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2(n+4)^4}{(n+3)^4}\right|$$

$$= 2$$

จะได้ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+3)^4 2^n}(z-4)^n$ มีรัศมีการลู่เข้าเท่ากับ 2

และ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+3)^4 2^n}(z-4)^n$] ลู่เข้าทุกค่า z ที่ $\left|z-4\right| < 2$

พิจารณาค่า z ที่อยู่บนเส้นรอบวงของวงกลม นั่นคือ $\left|z-4\right| = 2$ จะได้

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{(n+3)^4 2^n}(z-4)^n\right| &= \left|\frac{1}{(n+3)^4 2^n}\right|\left|(z-4)^n\right| \\
&= \left|\frac{1}{(n+3)^4 2^n}\right|\left|2^n\right| \\
&= \left|\frac{1}{(n+3)^4 2^n}2^n\right| \\
&= \left|\frac{1}{(n+3)^4}\right| \\
&\le \frac{1}{n^4}
\end{aligned}$$

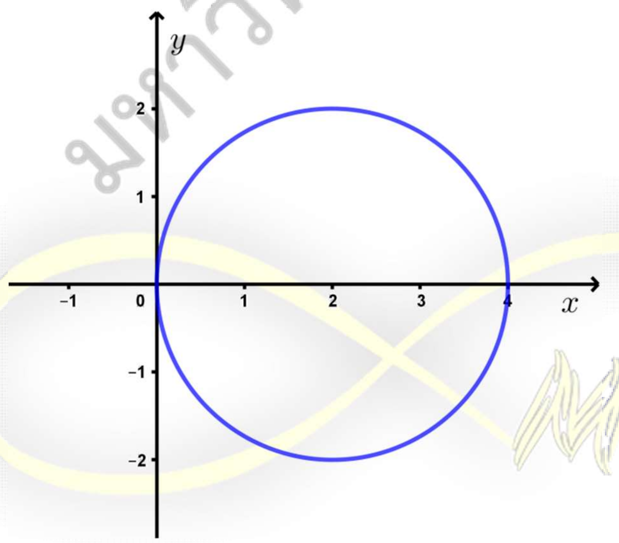
เนื่องจาก $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า (อนุกรมพีที่ $p>1$)

ทดสอบการลู่เข้าโดยการเปรียบเทียบ

จะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+3)^4 2^n}(z-4)^n$ ลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์บนเส้นรอบวงของ $\left|z-4\right|=2$

ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+3)^4 2^n}(z-4)^n$ ลู่เข้าทุกค่า z ที่ $\left|z-4\right|\le 2$

แสดงได้ดังภาพต่อไปนี้



ตัวอย่าง 5.15 จงหารัศมีการลู่เข้าของ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

วิธีทำ จากอนุกรมที่กำหนดให้ เป็นอนุกรมรอบจุด $z = 0$ ซึ่งมี

$$a_n = \frac{1}{n!} \qquad \text{และ} \qquad a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}$$

จากทฤษฎีบท 5.7 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} r &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \\ &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} \right| \\ &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)!}{n!} \right| \\ &= \lim_{n\to\infty} \left| n+1 \right| \\ &= \infty \end{aligned}$$

แสดงว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ ซึ่งเป็นอนุกรมกำลังรอบจุด 0 มีรัศมีลู่เข้าเท่ากับ ∞

ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ มีรัศมีลู่เข้าเท่ากับ ∞

ตัวอย่าง 5.16 จงหารัศมีการลู่เข้าและบริเวณการลู่เข้าของอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(3n+2)!} z^{n+1}$

วิธีทำ จากอนุกรมที่กำหนดให้ เป็นอนุกรมรอบจุด $z = 0$ ซึ่งมี

$$a_n = \frac{(-1)^n}{(3n+2)!} \qquad \text{และ} \qquad a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{(3n+4)!}$$

จากทฤษฎีบท 5.7 จะได้ว่า

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n}{(3n+2)!}\times\frac{(3n+4)!}{(-1)^{n+1}}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(3n+4)(3n+4)}{-1}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|(3n+4)(3n+4)\right|$$

$$= \infty$$

แสดงว่า $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(3n+2)!}\ z^{n+1}$ ซึ่งเป็นอนุกรมกำลังรอบจุด 0 มีรัศมีลู่เข้าเป็นค่าอนันต์

ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(3n+2)!}\ z^{n+1}$ ลู่เข้าทุกค่า z ที่ $\left|z\right| < \infty$

5.3 อนุกรมกำลังของฟังก์ชันพื้นฐาน

อนุกรมกำลังของฟังก์ชันพื้นฐานเราสามารถหาได้โดยใช้อนุกรมเทย์เลอร์ หรืออนุกรมแมคลอริน ซึ่งเรามีวิธีพิจารณาได้เช่นเดียวกับอนุกรมเทเลอร์ หรือแมคลอรินในฟังก์ชันตัวแปรจริงที่เราเคยศึกษามาแล้วในวิชาแคลคูลัส ซึ่งมีฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องดัง ณัฐกร สุคันธมาลา (2559 : 143) ได้กล่าวไว้ดังนี้

ทฤษฎีบท 5.9 (ทฤษฎีบทของเทย์เลอร์)

ถ้า f เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ในโดเมน D และ C เป็นวงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางที่ $z_0 \in D$ และมีรัศมีที่ทำให้ C อยู่ภายใน D แล้วจะได้ว่าสำหรับทุก ๆ z ภายใน C

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\ (z-z_0)^n$$

สำหรับอนุกรมเทเลอร์ หรือแมคลอริน นั้น ธนิต มาลากร (2556 : 271) ได้ให้บทนิยามดังต่อไปนี้

บทนิยาม 5.10

ให้ $f(z)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุด z_0 แล้วอนุกรมอนันต์

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n \\
&= f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + \frac{1}{2} f''(z_0)(z-z_0)^2 \\
&\quad + \frac{1}{3!} f'''(z_0)(z-z_0)^3 + \ldots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)(z-z_0)^n + \ldots
\end{aligned}
$$

เรียกว่า **อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor series)** ของ f รอบจุด z_0 ในกรณีที่จุด $z_0 = 0$ อนุกรมดังกล่าวจะเรียกว่า**อนุกรมแมคลอริน(Maclaurin series)** ของ f

สำหรับการกระจายฟังก์ชัน $f(z)$ เป็นอนุกรมเทย์เลอร์ ถ้าทราบว่า f เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์บนบริเวณภายในวงกลมจุดศุนย์กลาง z_0 โดยทฤษฎบทของเทเลอร์จะได้ว่า อนุกรมเทย์เลอร์รอบจุด z_0 ลู่เข้าสู่ $f(z)$ สำหรับแต่ละค่า z ในวงกลมถ้าต้องการหารัศมีการลู่เข้าของอนุกรมเมื่อทราบจุดเอกฐานของ f ที่อยู่ใกล้จุด z_0 มากที่สุด ดังบทแทรกต่อไปนี้

บทนิยาม 5.11

กำหนดให้ $f(z)$ เป็นฟังก์ชันค่าเชิงซ้อนและ $z_0 \in \mathbb{C}$ z_0 เป็น**จุดเอกฐาน** (singularity) ของ f ถ้า f ไม่มีภาวะวิเคราะห์ที่จุด $z = z_0$ แต่ f มีภาวะวิเคราะห์ที่บางจุดในทุกย่านใกล้เคียงของ z_0

บทแทรก 5.2

ถ้า f เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ในบริเวณ D และ

$$f(z) = z_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$ มีรัศมีลู่เข้า r และ

z_1 เป็นจุดเอกฐานของ $f(z)$ ที่อยู่ใกล้ z_0 มากที่สุด จะได้ว่า $r = |z_1 - z_0|$

ตัวอย่าง 5.17 จงหารัศมีของการลู่เข้าของอนุกรมเทย์เลอร์รอบจุด z_0

1. $f(z) = \dfrac{1}{z-1}$, $z_0 = i$

2. $f(z) = \dfrac{z}{(z-2)(z-i)}$, $z_0 = 1$

วิธีทำ 1. จาก $f(z) = \dfrac{1}{z-1}$ ซึ่ง $f(z)$ ไม่เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุด $z = 1$

แสดงว่า $z = 1$ เป็นจุดเอกฐานของ $f(z)$

จากบทแทรก 5.2 แสดงว่า

จะได้ $r = |z - z_0|$

$= |1 - i|$

$= \sqrt{1^2 + (-1)^2}$

$= \sqrt{2}$

ดังนั้น รัศมีการลู่เข้าคือ $\sqrt{2}$

2. จาก $f(z) = \dfrac{z}{(z-2)(z-i)}$ ซึ่ง $f(z)$ ไม่เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุด $z = 2, i$

แสดงว่า $z = 2, i$ เป็นจุดเอกฐานของ $f(z)$

ให้ r_1 ระยะทางระหว่างจุด 2 และ 1

จะได้ $r_1 = |z - z_0|$

$= |2 - 1|$

$= 1$

ให้ r_2 ระยะทางระหว่างจุด i และ 1

จะได้ $r_1 = |z - z_0|$

$= |i - 1|$

$= \sqrt{1^2 + (-1)^2}$

$= \sqrt{2}$

ระยะทางที่สั้นที่สุดจากจุด $z = 2, i$ ไปยัง 1 คือ 1

ดังนั้น รัศมีการลู่เข้าคือ 1

ตัวอย่าง 5.18 จงกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ของ $f(z)=\dfrac{1}{z}$ รอบจุด $z_0=1$ พร้อมทั้งหารัศมีการลู่เข้า

วิธีทำ จาก $f(z)=\dfrac{1}{z}$ และ $f(1)=\dfrac{1}{1}=1$

จะได้ $f'(z)=\dfrac{d}{dz}\left(\dfrac{1}{z}\right)=-\dfrac{1}{z^2}$ และ $f'(1)=-\dfrac{1}{1^2}=-1$

$f''(z)=\dfrac{d}{dz}\left(-\dfrac{1}{z^2}\right)=\dfrac{2}{z^3}$ และ $f''(1)=\dfrac{2}{1^3}=2=2!$

$f'''(z)=\dfrac{d}{dz}\left(\dfrac{2}{z^3}\right)=-\dfrac{6}{z^4}$ และ $f'''(1)=-\dfrac{6}{1^4}=-6=-3!$

$f^{(4)}(z)=\dfrac{d}{dz}\left(-\dfrac{6}{z^4}\right)=\dfrac{24}{z^5}$ และ $f^{(4)}(1)=\dfrac{24}{1^5}=24=4!$

$\vdots$

จากทฤษฎีบทของเทย์เลอร์ที่จุด $z=1$ จะได้

$$f(z)=f(1)+\frac{f'(1)(z-1)}{1!}+\frac{f''(1)(z-1)^2}{2!}+\frac{f'''(z_0)(z-z_0)^3}{3!}+\ldots$$

$$\frac{1}{z}=1-\frac{1!(z-1)}{1!}+\frac{2!(z-1)^2}{2!}-\frac{3!(z-1)^3}{3!}+\ldots$$

$$\frac{1}{z}=1-(z-1)+(z-1)^2-(z-1)^3+\ldots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n$$

ต่อไปหารัศมีของการลู่เข้าของอนุกรมเทย์เลอร์รอบจุด $z_0=1$

จาก $f(z)=\dfrac{1}{z}$ ซึ่ง $f(z)$ ไม่เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุด $z=0$

แสดงว่า $z=0$ เป็นจุดเอกฐานของ $f(z)$

จากบทแทรก 5.2 แสดงว่า

จะได้ $r=\left|z-z_0\right|=\left|0-1\right|=1$

ดังนั้น อนุกรมเทย์เลอร์ของ $f(z)=\dfrac{1}{z}$ รอบจุด $z_0=1$ คือ $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n$ และมีรัศมีลู่เข้าคือ 1

ตัวอย่าง 5.19 จงกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ของ $f(z)=\log z$ รอบ $z_0=1$ พร้อมทั้งหารัศมีการลู่เข้า

วิธีทำ จาก $f(z)=\log z$ และ $f(1)=\log 1=0$

จะได้ $f'(z)=\dfrac{d}{dz}\log z=\dfrac{1}{z}$ และ $f'(1)=\dfrac{1}{1}=1$

$f''(z)=\dfrac{d}{dz}\left(-\dfrac{1}{z}\right)=-\dfrac{1}{z^2}$ และ $f''(1)=-\dfrac{1}{1^2}=-1$

$f'''(z)=\dfrac{d}{dz}\left(-\dfrac{1}{z^2}\right)=\dfrac{2}{z^3}$ และ $f'''(1)=\dfrac{2}{1^3}=2$

$f^{(4)}(z)=\dfrac{d}{dz}\left(\dfrac{2}{z^3}\right)=-\dfrac{6}{z^4}$ และ $f^{(4)}(1)=-\dfrac{6}{1^4}=-6$

จากทฤษฎีบทของเทย์เลอร์ที่จุด $z=1$ จะได้

$$
\begin{aligned}
f(z) &= f(1)+\frac{f'(1)(z-1)}{1!}+\frac{f''(1)(z-1)^2}{2!}+\frac{f'''(z_0)(z-z_0)^3}{3!}+\ldots \\
\log z &= 0+\frac{1!(z-1)}{1!}-\frac{1!(z-1)^2}{2!}+\frac{2!(z-1)^3}{3!}-\frac{3!(z-1)^4}{4!}\ldots \\
\log z &= 0+(z-1)-\frac{(z-1)^2}{2}+\frac{(z-1)^3}{3}-\frac{(z-1)^4}{4}+\ldots \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(z-1)^n}{n}
\end{aligned}
$$

ต่อไปหารัศมีของการลู่เข้าของอนุกรมเทย์เลอร์รอบจุด $z_0=1$

จาก $f(z)=\log z$ ซึ่ง $f(z)$ ไม่เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุด $z=0$

แสดงว่า $z=0$ เป็นจุดเอกฐานของ $f(z)$

จากบทแทรก 5.2 แสดงว่า

จะได้
$$
\begin{aligned}
r &= |z-z_0| \\
&= |0-1| \\
&= 1
\end{aligned}
$$

ดังนั้น อนุกรมเทย์เลอร์ของ $f(z)=\log z$ รอบจุด $z_0=1$ คือ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(z-1)^n}{n}$

และมีรัศมีลู่เข้าคือ 1 วงกลมการลู่เข้า คือ $\left\{z \,\middle|\, |z-1|=1\right\}$

ตัวอย่าง 5.20 จงกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ของ $f(z)=\sin z$ รอบจุด $z_0=\dfrac{\pi}{4}$

วิธีทำ จาก $f(z)=\sin z$ และ $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

จะได้ $f'(z)=\dfrac{d}{dz}\sin z=\cos z$ และ $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\cos\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$f''(z)=\dfrac{d}{dz}\left(\cos z\right)=-\sin z$ และ $f''\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=-\sin\dfrac{\pi}{4}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$f'''(z)=\dfrac{d}{dz}(-\sin z)=-\cos z$ และ $f'''\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=-\cos\dfrac{\pi}{4}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$f^{(4)}(z)=\dfrac{d}{dz}\left(-\cos z\right)=\sin z$ และ $f^{(4)}\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

จากทฤษฎีบทของเทย์เลอร์ที่จุด $z_0=\dfrac{\pi}{4}$ จะได้

$$f(z)=f\left(\frac{\pi}{4}\right)+\frac{f'\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(z-\frac{\pi}{4}\right)}{1!}+\frac{f''\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^2}{2!}+\frac{f'''\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^3}{3!}+\ldots$$

$$\sin z=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\left(z-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\sqrt{2}}{2\cdot 2!}\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^2-\frac{\sqrt{2}}{2\cdot 3!}\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^3\ldots$$

$$\sin z=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[1+\left(z-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2!}\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^2-\frac{1}{3!}\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^3\right]+\ldots$$

ดังนั้น อนุกรมเทย์เลอร์ของ $f(z)=\sin z$ รอบจุด $z_0=\dfrac{\pi}{4}$ คือ

$$\sin z=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[1+\left(z-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2!}\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^2-\frac{1}{3!}\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^3\right]+\ldots$$

ตัวอย่าง 5.21 กำหนดให้ $f(z)=\ln(1+z)$ จงกระจายอนุกรมแมคลอรินของ $f(z)$ พร้อมทั้งหารัศมีการลู่เข้า

วิธีทำ จาก $f(z)=\ln(1+z)$ และ $f(0)=\ln(1+0)=0$

จะได้ $f'(z)=\dfrac{1}{1+z}$ และ $f'\left(0\right)=\dfrac{1}{1+0}=1$

$f''(z)=-\dfrac{1}{(1+z)^2}$ และ $f''\left(0\right)=-\dfrac{1}{(1+0)^2}=-1$

$f'''(z)=\dfrac{2}{(1+z)^3}$ และ $f'''(0)=\dfrac{2}{(1+0)^3}=2=2!$

$f^{(4)}(z)=-\dfrac{6}{(1-z)^4}$ และ $f^{(4)}\left(0\right)=-\dfrac{6}{(1-0)^4}=-6=-3!$

จากอนุกรมแมคลอรินของ $f(z)$ จะได้

$$f(z)=f(0)+\frac{f'(1)z}{1!}+\frac{f''(0)(z)^2}{2!}+\frac{f'''(0)(z)^3}{3!}+\dots$$

$$\log(1+z)=0+z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}\dots$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}z^n}{n}$$

ต่อไปหารัศมีของการลู่เข้าของอนุกรมแมคลอริน

จาก $f(z)=\ln(1+z)$ ซึ่ง $f(z)$ ไม่เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุด $z=-1$

แสดงว่า $z=-1$ เป็นจุดเอกฐานของ $f(z)$

จากบทแทรก 5.2 แสดงว่า

จะได้ $r=\left|z-z_0\right|$

$=\left|-1-0\right|$

$=1$

ดังนั้น อนุกรมแมคลอรินของ $f(z)=\ln(1+z)$ คือ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}z^n}{n}$

และมีรัศมีลู่เข้าคือ 1 วงกลมการลู่เข้า คือ $\left\{z\,\middle|\,|z|=1\right\}$

5.4 การหาอนุกรมกำลังของฟังก์ชันอื่น ๆ

การกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ และอนุกรมแมคลอรินในหัวข้อที่ผ่านมานั้นจะเห็นว่าฟังก์ชัน $f(z)$ ที่กำหนดให้นั้นไม่ซับซ้อนทำให้สามารถกระจายอนุกรมต่าง ๆได้ตามทฤษฎีบทที่ให้มาได้ แต่ถ้าบางครั้งที่ $f(z)$ ที่กำหนดให้นั้นอยู่ในภาพที่ซับซ้อน การคำนวณหาสัมประสิทธิ์ของอนุกรมเทย์เลอร์และอนุกรมแมคลอรินโดยวิธีที่ได้จากทฤษฎีบทนั้นจะค่อนข้างยุ่งยาก และเสียเวลา ดังนั้นในหัวข้อนี้จะแสดงวิธีที่ใช้ในการคำนวนหาอนุกรมที่ซับซ้อนให้ง่ายขึ้น ดังต่อไปนี้

5.4.1 การแทนในฟังก์ชันพื้นฐาน

สำหรับการกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ และอนุกรมแมคลอรินโดยวิธีการแทนในฟังก์ชันพื้นฐานนั้นก่อนอื่นเราต้องทราบอนุกมแมคคลอรินฟังก์ชั้นพื้นฐานที่สำคัญดังที่ สมถวิล ขันเขตต์ (2558 : 130) ได้กล่าวไว้ดังนี้

1. $\dfrac{1}{z} = 1-(z-1)+(z-1)^2-(z-1)^3+\dots$ เมื่อ $0<|z|\le 1$

2. $\dfrac{1}{1-z} = 1+z+z^2+z^3+\dots$ เมื่อ $|z|<1$

3. $\dfrac{1}{1+z} = 1-z+z^2-z^3+\dots$ เมื่อ $|z|<1$

4. $\ln(1+z) = z-\dfrac{z^2}{2}+\dfrac{z^3}{3}-\dfrac{z^4}{4}+\dots$ เมื่อ $|z|\le 1$

5. $e^z = 1+\dfrac{z}{1!}+\dfrac{z^2}{2!}+\dfrac{z^3}{3!}+\dots$ เมื่อ $|z|<\infty$

6. $\sin z = z-\dfrac{z^3}{3!}+\dfrac{z^5}{5!}-\dfrac{z^7}{7!}+\dots$ เมื่อ $|z|<\infty$

7. $\cos z = 1-\dfrac{z^2}{2!}+\dfrac{z^4}{4!}-\dfrac{z^6}{6!}+\dots$ เมื่อ $|z|<\infty$

8. $\tan z = z+\dfrac{z^3}{3}+\dfrac{2z^5}{15}+\dots$ เมื่อ $|z|<\dfrac{\pi}{2}$

9. $\cot z = \dfrac{1}{z}-\dfrac{z}{3}-\dfrac{z^3}{45}-\dots$ เมื่อ $|z|<\dfrac{\pi}{2}$

10. $\sec z = 1+\dfrac{z^2}{2}+\dfrac{5z^4}{24}+\dots$ เมื่อ $|z|<\dfrac{\pi}{2}$

11. $\csc z = \dfrac{1}{z}+\dfrac{z}{6}+\dfrac{7z^3}{360}+\dots$ เมื่อ $0<|z|<\pi$

เมื่อเราทราบอนุกมแมคคลอรินฟังก์ชั้นพื้นฐานแล้วเราสามารถนำฟังก์ชันพื้นฐานนี้ไปช่วยในการกระจายอนุกรมแมคคลอรินที่ซับซ้อน ดังจะแสดงในตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 5.22 กำหนดให้ $f(z)=\dfrac{1}{1+z^3}$ จงกระจายอนุกรมแมคคลอริน ของ $f(z)$

วิธีทำ จากอนุกรมแมคคลอรินของ

$$\frac{1}{1+z}=1-z+z^2-z^3+\ldots \quad \text{เมื่อ } |z|<1$$

แทน z ด้วย z^3 จะได้

$$\frac{1}{1+z^3}=1-z^3+\left(z^3\right)^2-\left(z^3\right)^3+\ldots \quad \text{เมื่อ } |z|<1$$

ดังนั้น $\dfrac{1}{1+z^3}=1-z^3+z^6-z^9+\ldots$ เมื่อ $|z|<1$

ตัวอย่าง 5.23 กำหนดให้ $f(z)=\ln(1+z^2)$ จงกระจายอนุกรมแมคคลอริน ของ $f(z)$

วิธีทำ จากอนุกรมแมคคลอรินของ

$$\ln(1+z)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}+\ldots \quad \text{เมื่อ } |z|\le 1$$

แทน z ด้วย z^2 จะได้

$$\ln(1+z^2)=z^2-\frac{\left(z^2\right)^2}{2}+\frac{\left(z^2\right)^3}{3}-\frac{\left(z^2\right)^4}{4}+\ldots \quad \text{เมื่อ } |z|<1$$

ดังนั้น $\ln(1+z^2)=z^2-\dfrac{z^4}{2}+\dfrac{z^6}{3}-\dfrac{z^8}{4}+\ldots$ เมื่อ $|z|<1$

ตัวอย่าง 5.24 กำหนดให้ $f(z)=\cos(z^2+1)$ จงกระจายอนุกรมแมคคลอริน ของ $f(z)$

วิธีทำ จากอนุกรมแมคคลอรินของ

$$\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\ldots \quad \text{เมื่อ } |z|<\infty$$

แทน z ด้วย z^2+1 จะได้

$$\cos(z^2+1)=1-\frac{(z^2+1)^2}{2!}+\frac{(z^2+1)^4}{4!}-\frac{(z^2+1)^6}{6!}+\ldots \quad \text{เมื่อ } |z|<\infty$$

ดังนั้น $\cos(z^2+1)=1-\dfrac{(z^2+1)^2}{2!}+\dfrac{(z^2+1)^4}{4!}-\dfrac{(z^2+1)^6}{6!}+\ldots$ เมื่อ $|z|<\infty$

สำหรับการกระจายอนุกรมเทย์เลอร์โดยใช้วิธีการแทนในฟังก์ชั้นพื้นฐานนั้นก็ยังมีข้อจำกัดในการกระจายเพราะไม่ใช่ทุกฟังก์ชันจะสามารถใช้โดยวิธีนี้ได้ดังนั้นจึงมีคนที่คิดค้นวิธีการอื่น ๆ ได้อีก

5.4.1 ใช้ทฤษฎีบททวินามและเศษส่วนย่อย

สมถวิล ขันเขตต์ (2558 : 132) ได้แสดงการใช้ทฤษฎีบททวินามและเศษส่วนย่อยในการกระจายกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ดังต่อไปนี้

จากทฤษฎีบททวินาม คือ

$$(x+y)^n = x^n + \frac{n}{1!}x^{n-1}y^1 + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}y^2 + \ldots + \frac{n}{1!}x^1y^{n-1} + y^n$$

แทนค่า $x=1,\ y=z$ และ $n=m$ ในทฤษฎีบททวินามจะได้

$$(1+z)^m = 1 + mz + \frac{m(m-1)}{2!}z^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{2!}z^3 \ldots$$

แทนค่า m ด้วย $-m$ จะได้

$$\begin{aligned}(1+z)^{-m} &= \frac{1}{(1+z)^m}\\ &= 1 - mz + \frac{m(m+1)}{2!}z^2 - \frac{m(m+1)(m+2)}{2!}z^3 \ldots\end{aligned}$$

นั่นคือ

(5) $$(1+z)^{-m} = 1 - mz + \frac{m(m+1)}{2!}z^2 - \frac{m(m+1)(m+2)}{3!}z^3 + \ldots$$

ตัวอย่าง 5.25 จงหาอนุกรมเทย์เลอร์ของ $f(z)=\dfrac{z^2+3z-1}{z^3-3z-2}$ รอบจุด $z=1$ พร้อมทั้งรัศมีการลู่เข้าของอนุกรม

วิธีทำ จาก $f(z)=\dfrac{z^2+3z-1}{z^3-3z-2}$ g\

เขียนให้อยู่ในรูปของเศษส่วนย่อยจะได้

$$f(z) = \frac{1}{z^2+2z+1} + \frac{1}{z-2}$$

เขียนให้อยู่ในรูปเทอมของ $z-1$ ได้ดังต่อไปนี้

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{z^2+2z+1}+\frac{1}{z-2} \\
&= \frac{1}{(z+1)^2}+\frac{1}{(z-1)-1} \\
&= \frac{1}{\left[(z-1)+2\right]^2}-\frac{1}{1-(z-1)} \\
&= \frac{1}{\left[2\left(\dfrac{z-1}{2}+1\right)\right]^2}-\frac{1}{1-(z-1)} \\
&= \frac{1}{4\left(\dfrac{z-1}{2}+1\right)^2}-\frac{1}{1-(z-1)} \\
&= \frac{1}{4}\left(1+\frac{z-1}{2}\right)^{-2}-\frac{1}{1-(z-1)}
\end{aligned}
$$

พิจารณา $\left(1+\dfrac{z-1}{2}\right)^{-2}$ ซึ่งอยู่ในรูปของทฤษฎีบททวินาม

แทนค่า $z=\dfrac{z-1}{2}$ และ $m=2$ ในสมการ (5) จะได้

$$
\begin{aligned}
\left(1+\frac{z-1}{2}\right)^{-2} &= 1-2\left(\frac{z-1}{2}\right)+\frac{2(2+1)}{2!}\left(\frac{z-1}{2}\right)^2-\frac{2(2+1)(2+2)}{3!}\left(\frac{z-1}{2}\right)^3+\ldots \\
&= 1-(z-1)+\frac{3}{4}(z-1)^2-\frac{1}{2}(z-1)^3+\ldots
\end{aligned}
$$

พิจารณา $\dfrac{1}{1-(z-1)}$

จากอนุกรมแมคลอรินของ $\dfrac{1}{1-z}=1+z+z^2+z^3+\ldots$ เมื่อ $|z|<1$

แทน z ด้วย $z-1$ จะได้

$$\frac{1}{1-(z-1)}=1+(z-1)+(z-1)^2+(z-1)^3+\ldots$$

แสดงว่า

$$\begin{aligned}\frac{z^2+3z-1}{z^3-3z-2} &= \frac{1}{4}\left(1+\frac{z-1}{2}\right)^{-2} - \frac{1}{1-(z-1)} \\ &= \frac{1}{4}\left[1-(z-1)+\frac{3}{4}(z-1)^2-\frac{1}{2}(z-1)^3+...\right] \\ &\quad -\left[1+(z-1)+(z-1)^2+(z-1)^3+...\right] \\ &= \left[\frac{1}{4}-\frac{1}{4}(z-1)+\frac{3}{16}(z-1)^2-\frac{1}{8}(z-1)^3+...\right] \\ &\quad -\left[1+(z-1)+(z-1)^2+(z-1)^3+...\right]\end{aligned}$$

$$\frac{z^2+3z-1}{z^3-3z-2} = -\frac{3}{4}-\frac{5}{4}(z-1)-\frac{13}{16}(z-1)^2-\frac{9}{8}(z-1)^3-...$$

เนื่องจาก $f(z)=\dfrac{z^2+3z-1}{z^3-3z-2}$ มีจุดเอกฐานที่ $z=-1,2$

และ $z=2$ จุดเอกฐานที่ใกล้ที่สุดกับจุดศูนย์กลาง $z=1$

นั่นคือ อนุกรมนี้ลู่เข้าภายในวงกรม $|z-1|<1$ และรัศมีการลู่เข้าคือ 1

ดังนั้น $\dfrac{z^2+3z-1}{z^3-3z-2} = -\dfrac{3}{4}-\dfrac{5}{4}(z-1)-\dfrac{13}{16}(z-1)^2-\dfrac{9}{8}(z-1)^3-...$

และรัศมีการลู่เข้าคือ 1

5.5 อนุกรมลอเรนต์

การกระจายฟังก์ชันเป็นอนุกรมเทย์เลอร์รอบจุดใด ๆ จะลู่เข้าเมื่องฟังก์ชันวิเคราะห์ในย่านจุดของจุดนั้น ๆ สำหรับฟังก์ชันที่ไม่วิเคราะห์ที่จุดใดจุดหนึ่งจะไม่สามารถกระจายให้เป็นอนุกรมเทย์เลอร์รอบจุดนั้นได้ เช่น $f(z)=\dfrac{1}{z}$ จะไม่มีอนุกรมเทย์เลอร์รอบจุด $z=0$ แต่บางครั้งจำเป็นต้องกระจายฟังก์ชัน $f(z)$ รอบ ๆ จุดเอกฐาน ของ $f(z)$ ด้วย ซึ่งทฤของเทย์เลอร์ไม่สามารถนำมาประยุกต์ใช้ได้ในกรณีนี้ ดังนั้นจึงมีอีกอนุกรมหนึ่งที่สามารถกระจาย $f(z)$ รอบจุดเอกฐาน ซึ่งเรียกอนุกรมนี้ว่าอนุกรมลอเรนต์ การกระจายลักษณะนี้มีบทบาทสำคัญในการศึกษาเรื่องจุดเอกฐานของฟังก์ชัน และทฤษฎีบทตกค้างซึ่งจะได้ศึกษาในบทถัดไป และ ณัฐกร สุคันธมาลา (2559 : 151) ได้ให้ทฤษฎีบทของอนุกรมลอเรนต์ไว้ดังต่อไปนี้

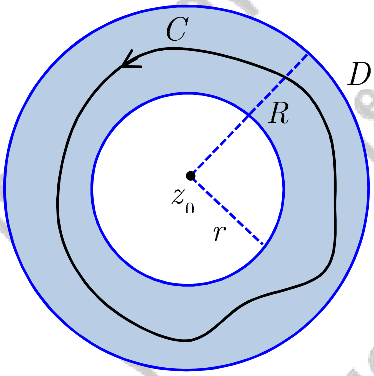
ทฤษฎีบท 5.10 (ทฤษฎีบทของลอเรนต์)

ถ้า f เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ในแผ่นวงแหวน D ซึ่งนิยามโดย $r < |z - z_0| < R$ แล้วจะได้ว่าสำหรับทุก ๆ z ภายใน D

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

โดยที่ $a_n = \dfrac{1}{2\pi i} \oint_C \dfrac{f(t)}{(t - z_0)^{n+1}} dt, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ เมื่อ C เป็นเส้นโค้งปิดเชิงเดียวภายใน D ที่รอบรอบ z_0 ดังภาพประกอบ

จากทฤษฎีบท 5.11 แสดงได้ดังภาพประกอบต่อไปนี้



ภาพประกอบ 5.2 วงแหวนที่ถูกล้อมรอบด้วยวงกลม C_1 และ C_2

ที่มา : ณัฐกร สุคันธมาลา. 2559 : 151

บทนิยาม 5.12

f เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์บนโดเมนรูปวงแหวน D ซึ่งนิยามโดย $r < |z - z_0| < R$ แล้วเรียกอนุกรม $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ โดยที่ $a_n = \dfrac{1}{2\pi i} \oint_C \dfrac{1}{(z - z_0)^{n+1}} f(z)\, dz, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ เมื่อ C เป็นเส้นโค้งปิดเชิงเดียวภายใน D ที่รอบรอบ z_0 ว่า **อนุกรมลอเรนต์** (Laurent series) ของ f รอบ z_0 และเรียกเซต $\{z \mid r < |z - z_0| < R\}$ ว่า**วงแหวนของการลู่เข้า** (annulus of convergence)

ตัวอย่าง 5.26 จงกระจาย $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-3)}$ ให้เป็นอนุกรมลอเรนต์รอบจุด $z=0$ สำหรับโดเมนรูปวงแหวนซึ่งนิยามโดย $1<\left|z\right|<3$

วิธีทำ จาก $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-3)}$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์บนวงแหวน $1<\left|z\right|<3$

จะได้อนุกรมลอเรนต์รอบจุด $z=0$ คือ

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z)^n \quad \text{เมื่อ}$$

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{1}{(z-t)^{n+1}} f(t)\,dt$$ สำหรับทุกจำนวนเต็ม n และ C เป็นวงกลมจุดศูนย์กลางที่ $z=0$ รัศมี r ซึ่ง $1<r<3$

ในกรณีที่ $n\geq 0$ จะได้ว่า จะได้ว่า $a_n=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_C \dfrac{1}{(t-1)(t-3)t^{n+1}}dt$

พิจารณา $\dfrac{1}{(t-1)(t-3)z^{n+1}}$ โดยการแยกเศษส่วนย่อยจะได้

$$\frac{1}{(t-1)(t-3)t^{n+1}}=\frac{A_1}{t-1}+\frac{A_2}{t-3}+\frac{B_1}{t}+\frac{B_2}{t^2}+\ldots+\frac{B_{n+1}}{t^{n+1}}$$

เมื่อ A_i และ B_i เป็นค่าคงตัว

เนื่องจาก C ไม่บรรจุ $z=3$ จากทฤษฎีบทของโคชี จึงได้ว่า

$$\oint_C \frac{A_2}{(t-3)}dt=0$$

และเนื่องจาก C เป็นวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ $z=0$ จึงได้ว่า

$$\oint_C \frac{B_i}{t^i}dz=0 \text{ สำหรับทุก ๆ ค่า } i>2$$

(จาก $\oint_C (z-z_0)^n\,dz=\begin{cases}0, & n\neq -1\\ 2\pi i, & n=-1\end{cases}$)

ทำให้

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\left(\frac{A_1}{t-1}+\frac{B_1}{t}\right)dz$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{A_1}{t-1}dz+=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{B_1}{t}dz$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\left(2\pi i A_1\right) + \frac{1}{2\pi i}\left(2\pi i B_1\right)$$
$$= A_1 + B_1$$

และจาก

$$\frac{1}{(t-1)(t-3)t^{n+1}} = \frac{A_1}{t-1} + \frac{A_2}{t-3} + \frac{B_1}{t} + \frac{B_2}{t^2} + \dots + \frac{B_{n+1}}{t^{n+1}}$$

จะได้

$$1 = A_1(t-3)t^{n+1} + A_2(t-1)t^{n+1} + B_1(t-1)(t-3)t^n$$
$$+ B_2(t-1)(t-3)t^{n-1} + \dots + B_{n+1}(t-1)(t-3)$$

แทนค่า $t = 1$ จะได้

$$1 = A_1(1-3)1^{n+1}$$
$$A_1 = -\frac{1}{2}$$

แทนค่า $t = 3$ จะได้

$$1 = A_2(3-1)3^{n+1}$$
$$A_2 = \frac{1}{2 \cdot 3^{n+1}}$$

คูณ t ตลอดสมการ

$$\frac{1}{(t-1)(t-3)t^{n+1}} = \frac{A_1}{t-1} + \frac{A_2}{t-3} + \frac{B_1}{t} + \frac{B_2}{t^2} + \dots + \frac{B_{n+1}}{t^{n+1}}$$

จะได้

$$\frac{1}{(t-1)(t-3)t^n} = \frac{A_1 t}{t-1} + \frac{A_2 t}{t-3} + B_1 + \frac{B_2}{t} + \dots + \frac{B_{n+1}}{t^n}$$

พิจารณา

$$\lim_{z\to\infty} \frac{1}{(t-1)(t-3)t^n} = \lim_{z\to\infty} \frac{A_1 t}{t-1} + \frac{A_2 t}{t-3} + B_1 + \frac{B_2}{t} + \dots + \frac{B_{n+1}}{t^n}$$
$$0 = A_1 + A_2 + B_1$$
$$B_1 = -A_1 - A_2$$

แทนค่า $A_1 = -\frac{1}{2}$ และ $A_2 = \frac{1}{2 \cdot 3^{n+1}}$ จะได้

$$B_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3^{n+1}}$$

จาก $a_n = A_1 + B_1$ จะได้

$$a_n = -\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3^{n+1}}\right) = -\frac{1}{2 \cdot 3^{n+1}}$$

ในกรณีที่ $n < 0$ จะได้ว่า จะได้ว่า

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{1}{(t-1)(t-3)z^{n+1}}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{\left(\dfrac{t^{-n-1}}{t-3}\right)}{(t-1)}\,dz$$

จะเห็นว่า $\dfrac{t^{-n-1}}{t-3}$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ภายในและบน C ดังนั้นโดยสูตรปริพันธ์ของโคชี จะได้ว่า

$$\oint_C \frac{\left(\dfrac{t^{-n-1}}{t-3}\right)}{(t-1)}\,dt = -\frac{1}{2}(2\pi i) = -\pi i$$

นั่นคือ $a_n = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\oint_C \frac{\left(\dfrac{t^{-n-1}}{t-3}\right)}{(t-1)}\,dt = \dfrac{1}{2\pi i}(-\pi i) = -\dfrac{1}{2}$

จาก $\quad f(z) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$

จะได้ $\quad f(z) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$

$$= \sum_{n=-\infty}^{-1}\left(-\frac{1}{2}z^n\right) + \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2\cdot 3^{n+1}}\right)z^n$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z^n}{3^{n+1}}\right)$$

ดังนั้น อนุกรมลอเรนต์ของ $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-3)}$ รอบจุด $z = 0$ คือ

$$f(z) = -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z^n}{3^{n+1}}\right) \text{ สำหรับ } 1 < |z| < 3$$

จากตัวอย่างที่ผ่านมาจะเห็นว่าการกระจายฟังก์ชันเป็นอนุกรมลอเรนต์โดยใช้ทฤษฎีบทนั้นมีความยุ่งยากในขั้นตอนการหาสัมประสิทธิ์ a_n สำหรับตัวอย่างต่อไปจะจะไม่ใช้ทฤษฎีบทโดยตรงแต่จะแสดงการกระจายโดยใช้วิธีการการะจายอนุกรมเรขาคณิต อนุกรมเทย์เลอร์ และอนุกรมแมคลอริน ในหัวข้อที่ผ่านมากระจายให้อยู่ในรูปแบบตามต้องการ

ตัวอย่าง 5.27 จงกระจาย $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-3)}$ ให้เป็นอนุกรมลอเรนต์รอบจุด $z=0$ สำหรับโดเมนรูปวงแหวนซึ่งนิยามโดย $1<\left|z\right|<3$

วิธีทำ กำหนดให้ $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-3)}$ จากการแยกเศษส่วนย่อยจะได้

(1) $$\frac{1}{(z-1)(z-3)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(z-3)}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(z-1)}$$

ต่อไปจะการะจาย $\dfrac{1}{z-3}$ และ $\dfrac{1}{z-1}$ ให้เป็นอนุกรมในรูป $\sum a_n z^n$

โดยใช้เงื่อนไข $1<\left|z\right|<3$ ที่เหมาะสม

เนื่องจาก $\left|z\right|<3$ จะได้ $\left|\dfrac{z}{3}\right|<1$

พิจารณา $\dfrac{1}{z-3}=\dfrac{1}{-3\left(1-\dfrac{z}{3}\right)}=-\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{\left(1-\dfrac{z}{3}\right)}$

และจาก $\dfrac{1}{1-z}=1+z+z^2+z^3+\ldots$ เมื่อ $\left|z\right|<1$

จะได้ $$\frac{1}{z-3}=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\left(1-\dfrac{z}{3}\right)} \text{ เมื่อ } \left|\frac{z}{3}\right|<1$$

$$=-\frac{1}{3}\cdot\left(1+\frac{z}{3}+\left(\frac{z}{3}\right)^2+\left(\frac{z}{3}\right)^3+\ldots\right)$$

เนื่องจาก $\left|z\right|>1$ ดังนั้น $\left|\dfrac{1}{z}\right|<1$

พิจารณา $\dfrac{1}{z-1}=\dfrac{1}{z\left(1-\dfrac{1}{z}\right)}=\dfrac{1}{z}\cdot\dfrac{1}{\left(1-\dfrac{1}{z}\right)}$

และ จาก $\dfrac{1}{1-z}=1+z+z^2+z^3+\ldots$ เมื่อ $\left|z\right|<1$

จะได้ $\dfrac{1}{z-1}=\dfrac{1}{z}\cdot\dfrac{1}{\left(1-\dfrac{1}{z}\right)}$ เมื่อ $\left|\dfrac{1}{z}\right|<1$

$$\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z}\cdot\left(1+\frac{1}{z}+\left(\frac{1}{z}\right)^2+\left(\frac{1}{z}\right)^3+\ldots\right)$$

แทน $\dfrac{1}{z-3}$ และ $\dfrac{1}{z-1}$ ในสมการ (1) จะได้

$$\begin{aligned}
f(z)&=\frac{1}{(z-1)(z-3)} \quad \text{เมื่อ } \left|\frac{1}{z}\right|<1\\
&=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(z-3)}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(z-1)}\\
&=-\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{3}\left(1+\frac{z}{3}+\left(\frac{z}{3}\right)^2+\left(\frac{z}{3}\right)^3+\ldots\right)\right]-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\left(\frac{1}{z}\right)^2+\left(\frac{1}{z}\right)^3+\ldots\right)\right]\\
&=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{z}{3^2}+\frac{z^2}{3^3}+\frac{z^3}{3^4}+\ldots\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^4}+\ldots\right)\\
&=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z^n}{3^{n+1}}\right)-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z^n}\right)\\
&=-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z^n}\right)-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z^n}{3^{n+1}}\right)
\end{aligned}$$

ดังนั้น อนุกรมลอเรนต์ของ $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-3)}$ รอบจุด $z=0$ คือ

$$f(z)=-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z^n}{3^{n+1}}\right) \quad \text{สำหรับ } 1<\left|z\right|<3$$

ตัวอย่าง 5.28 จงกระจาย $f(z)=\dfrac{1}{z(z-1)}$ ให้เป็นอนุกรมลอเรนต์สำหรับโดเมนรูปวงแหวน $0<\left|z\right|<1$

วิธีทำ ในการกระจาย $f(z)=\dfrac{1}{z(z-1)}$ ให้เป็นอนุกรมลอเรนต์สำหรับโดเมนรูปวงแหวน $0<\left|z\right|<1$ จะเห็นว่าถึงแม้โจทย์ไม่ได้กำหนด z_0 แต่การนิยามวงแหวน $0<\left|z\right|<1$ นั้นหมายความว่าให้กระจายรอบ $z_0=0$ ซึ่งเป็นจุดศูนย์กลางของวงแหวน

เนื่องจาก $\left|z\right|<1$

พิจารณา $$f(z)=\frac{1}{z(z-1)}=-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-z}$$

และ จาก $\dfrac{1}{1-z}=1+z+z^2+z^3+\ldots$ เมื่อ $\left|z\right|<1$

จะได้ $$\begin{aligned} f(z)&=-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-z} \text{ เมื่อ } \left|z\right|<1\\ &=-\frac{1}{z}\left(1+z+z^2+z^3+\ldots\right)\\ &=-\left(\frac{1}{z}+1+z+z^2+\ldots\right)\\ &=-\sum_{n=1}^{\infty}\left(z^{n-2}\right)\end{aligned}$$

ดังนั้น อนุกรมลอเรนต์ของ $f(z)=\dfrac{1}{z(z-1)}$ สำหรับโดเมนรูปวงแหวน $0<\left|z\right|<1$ คือ

$$f(z)=-\sum_{n=1}^{\infty}\left(z^{n-2}\right) \text{ สำหรับ } 1<\left|z\right|<3$$

ตัวอย่าง 5.29 จงกระจาย $f(z)=\dfrac{1}{z(z-1)}$ ให้เป็นอนุกรมลอเรนต์สำหรับโดเมนรูปวงแหวน $1<\left|z\right|$

วิธีทำ ในการกระจาย $f(z)=\dfrac{1}{z(z-1)}$ ให้เป็นอนุกรมลอเรนต์สำหรับโดเมนรูปวงแหวน $1<\left|z\right|$ จะเห็นว่าถึงแม้โจทย์ไม่ได้กำหนด z_0 แต่การนิยามวงแหวน $1<\left|z\right|$ นั้นหมายความว่าให้กระจายรอบ $z_0=0$ ซึ่งเป็นจุดศูนย์กลางของวงแหวน

จาก $1<\left|z\right|$ นั่นคือ $\left|\dfrac{1}{z}\right|<1$

พิจารณา $f(z)=\dfrac{1}{z(z-1)}=-\dfrac{1}{z}\cdot\left(\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{z}}\right)$

และ จาก $\dfrac{1}{1-z}=1+z+z^2+z^3+\ldots$ เมื่อ $|z|<1$

จะได้

$$f(z)=-\frac{1}{z}\cdot\left(\frac{1}{1-\dfrac{1}{z}}\right) \quad \text{เมื่อ } \left|\frac{1}{z}\right|<1$$

$$=-\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\left(\frac{1}{z}\right)^2+\left(\frac{1}{z}\right)^3+\ldots\right)$$

$$=-\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^4}+\ldots\right)$$

$$=-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z^n}\right)$$

ดังนั้น อนุกรมลอเรนต์ของ $f(z)=\dfrac{1}{z(z-1)}$ สำหรับโดเมนรูปวงแหวน $1<|z|$ คือ

$$f(z)=-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z^n}\right) \text{ สำหรับ } 1<|z|$$

ตัวอย่าง 5.30 จงกระจาย $f(z)=\dfrac{1}{z(z-1)}$ ให้เป็นอนุกรมลอเรนต์สำหรับโดเมนรูปวงแหวน $0<|z-1|<1$

วิธีทำ ในการกระจาย $f(z)=\dfrac{1}{z(z-1)}$ ให้เป็นอนุกรมลอเรนต์สำหรับโดเมนรูปวงแหวน $0<|z-1|<1$ จะเห็นว่าถึงแม้โจทย์ไม่ได้กำหนด z_0 แต่การนิยามวงแหวน $0<|z-1|<1$ นั้นหมายความว่าให้กระจายรอบ $z_0=1$ ซึ่งเป็นจุดศุนย์กลางของวงแหวน

จาก $|z-1|<1$

พิจารณา $f(z)=\dfrac{1}{z(z-1)}=\dfrac{1}{z-1}\cdot\left[\dfrac{1}{1+(z-1)}\right]$

และจาก $\dfrac{1}{1+z}=1-z+z^2-z^3+\ldots$ สำหรับ $|z|<1$

จะได้ $$f(z)=\frac{1}{z-1}\cdot\left[\frac{1}{1+(z-1)}\right] \quad \text{เมื่อ } \left|z-1\right|<1$$

$$=\frac{1}{z-1}\left[1-(z-1)+(z-1)^2-(z-1)^3+\ldots\right]$$

$$=\frac{1}{z-1}-1+(z-1)-(z-1)^2+\ldots$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^{n+1}\left(z-1\right)^{n-2}$$

ดังนั้น อนุกรมลอเรนต์ของ $f(z)=\dfrac{1}{z(z-1)}$ สำหรับโดเมนรูปวงแหวน $0<\left|z-1\right|<1$ คือ

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^{n+1}\left(z-1\right)^{n-2} \quad \text{สำหรับ } 0<\left|z-1\right|<1$$

ตัวอย่าง 5.31 จงกระจาย $f(z)=\dfrac{1}{z(z-1)}$ ให้เป็นอนุกรมลอเรนต์สำหรับโดเมนรูปวงแหวน $1<\left|z-1\right|<\infty$

วิธีทำ ในการกระจาย $f(z)=\dfrac{1}{z(z-1)}$ ให้เป็นอนุกรมลอเรนต์สำหรับโดเมนรูปวงแหวน $1<\left|z-1\right|<\infty$ จะเห็นว่าถึงแม้โจทย์ไม่ได้กำหนด z_0 แต่การนิยามวงแหวน $1<\left|z-1\right|<\infty$ นั้นหมายความว่าให้กระจายรอบ $z_0=1$ ซึ่งเป็นจุดศุนย์กลางของวงแหวน

จาก $1<\left|z-1\right|$ จะได้ $\left|\dfrac{1}{z-1}\right|<1$

พิจารณา $$f(z)=\frac{1}{z(z-1)}$$

$$=\frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{z}$$

$$=\frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{1+(z-1)}$$

$$=\frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{z-1}\left(\frac{1}{\frac{1}{z-1}+1}\right)$$

$$=\frac{1}{(z-1)^2}\left(\frac{1}{\frac{1}{z-1}+1}\right)$$

และจาก $\dfrac{1}{1+z}=1-z+z^2-z^3+\ldots$ สำหรับ $|z|<1$

จะได้ $$f(z)=\frac{1}{(z-1)^2}\left(\frac{1}{\frac{1}{z-1}+1}\right) \quad \text{เมื่อ } \left|\frac{1}{z-1}\right|<1$$

$$=\frac{1}{(z-1)^2}\left[1-\frac{1}{z-1}+\left(\frac{1}{z-1}\right)^2-\left(\frac{1}{z-1}\right)^3+\ldots\right]$$

$$=\left(\frac{1}{z-1}\right)^2-\left(\frac{1}{z-1}\right)^3+\left(\frac{1}{z-1}\right)^4-\left(\frac{1}{z-1}\right)^5+\ldots$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{z-1}\right)^{n+1}$$

ดังนั้น อนุกรมลอเรนต์ของ $f(z)=\dfrac{1}{z(z-1)}$ สำหรับโดเมนรูปวงแหวน $1<|z-1|<\infty$ คือ

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{z-1}\right)^{n+1} \quad \text{สำหรับ } 1<|z-1|<\infty$$

ตัวอย่าง 5.32 จงกระจาย $f(z)=\dfrac{\cos z}{z^3}$ ให้เป็นอนุกรมลอเรนต์สำหรับโดเมนรูปวงแหวน $|z|<\infty$

วิธีทำ ในการกระจาย $f(z)=\dfrac{\cos z}{z^3}$ ให้เป็นอนุกรมลอเรนต์สำหรับโดเมนรูปวงแหวน $|z|<\infty$ จะเห็นว่าถึงแม้โจทย์ไม่ได้กำหนด z_0 แต่การนิยามวงแหวน $|z|<\infty$ นั้นหมายความว่าให้กระจายรอบ $z_0=0$ ซึ่งเป็นจุดศุนย์กลางของวงแหวน

จาก $\cos z=1-\dfrac{z^2}{2!}+\dfrac{z^4}{4!}-\dfrac{z^6}{6!}+\ldots$ เมื่อ $|z|<\infty$

จะได้ $$f(z)=\frac{\cos z}{z^3}$$

$$=\frac{1}{z^3}\left[1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\ldots\right]$$

$$=\frac{1}{z^3}-\frac{1}{2!z}+\frac{z}{4!}-\frac{z^2}{6!}+\ldots$$

ดังนั้น อนุกรมลอเรนต์ของ $f(z)=\dfrac{\cos z}{z^3}$ สำหรับโดเมนรูปวงแหวน $|z|<\infty$ คือ

$$f(z)=\frac{1}{z^3}-\frac{1}{2!z}+\frac{z}{4!}-\frac{z^2}{6!}+\ldots \quad \text{สำหรับ } |z|<\infty$$

5.6 สรุปท้ายบทที่ 5

ในบทนี้ได้ศึกษาลำดับของฟังก์ชันตัวแปรเชิงซ้อนนั้นก็มีแนวคิดทำนองเดียวกับลำดับของค่าคงตัวที่เราเราได้ศึกษามาแล้วแต่มีเรนจ์เป็นเซตย่อยของจำนวนเชิงซ้อนเท่านั้นถ้าเราสมาชิกทุกตัวในลำดับมาบวกกันเช่น ถ้า เป็นลำดับจำกัดที่มี n พจน์แล้วเรียกผลบวกว่าอนุกรมจำกัด ในกรณีที่เป็นลำดับอนันต์จะเรียกผลบวกว่าอนุกรมอนันต์ พร้อมทั้งทดสอบการลู่เข้าของอนุกรม การหารัศมีการลู่เข้าของอนุกรม นอกจากนี้เรายังนำอนุกรมกำลังของฟังก์ชันพื้นฐาน เช่น อนุกรมเทย์เลอร์ และอนุกรมแมคลอริน นำมาช่วยหาอนุกรมของฟังก์ชันอื่น ๆ และถ้าฟังก์ชันมีความซับซ้อนมาก ๆ สามารถนำเศษส่วนย่อยมาช่วยในการหาอนุกรมกำลังของฟังก์ชั้นนั้น จะทำให้หาอนุกรมกำลังฟังนั้นนั้นได้ง่ายขึ้น แต่การการกระจายฟังก์ชันเป็นอนุกรมเทย์เลอร์รอบจุดใด ๆ จะลู่เข้าเมื่องฟังก์ชันวิเคราะห์ในย่านจุดของจุดนั้น ๆ สำหรับฟังก์ชันที่ไม่วิเคราะห์ที่จุดใดจุดหนึ่งจะไม่สามารถกระจายให้เป็นอนุกรมเทย์เลอร์รอบจุดนั้นได้ ซึ่งทฤษของเทย์เลอร์ไม่สามารถนำมาประยุกต์ใช้ได้ในกรณีนี้ได้ดังนั้นจึงมีอีกอนุกรมอนุกรมลอเรนต์ ซึ่งสามารถกระจาย f รอบจุดเอกฐาน

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 5

1. จงตรวจสอบว่าอนุกรมที่กำหนดให้ต่อไปนี้ ลู่เข้าหรือลู่ออกถ้าลู่เขาจงหาผลบวกของอนุกรม

   1.1 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2i}{3^{n+1}}\right)$ 1.2 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{i}{5^{n}}\right)$

   1.3 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3i}{2^{n}}\right)$ 1.4 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{i+3}{3^{n}}\right)$

2. จงแสดงว่าอนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่ออก

   2.1 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{ni-3i}{2n-1}\right)$ 2.2 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n^{2}-3i}{i-n^{2}}\right)$

   2.3 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{i-5n}\right)$ 2.4 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^{3}i-3i}{6n^{5}}\right)$

3. จงหารัศมีการลู่เข้า และวงกลมการลูเข้าของอนุกรมกำลังที่กำหนดให้

   3.1 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(1-2i)^{n+1}}\cdot(z-2i)^{n}$ 3.2 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{i}{2+i}\right)\cdot z^{n}$

   3.3 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n\cdot 2^{n}}\left(z-1-i\right)^{n}$ 3.4 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n}}{n^{n}}$

   3.5 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(1+3i)^{n}(z-i)^{n}$ 3.6 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-4+3i)^{n}}{3^{2n}}$

4. จงกระจายฟังก์ชันต่อไปนี้ให้เป็นอนุกรมแมคคลอริน และจงหารัศมีการลู่ข้าวของอนุกรม

   4.1 $f(z)=\dfrac{z}{1-z}$ 4.2 $f(z)=\dfrac{1}{5z+2}$

   4.3 $f(z)=ze^{-z}$ 4.4 $f(z)=\cos\left(\dfrac{z}{3}\right)$

5. จงกระจายฟังก์ชันต่อไปนี้ให้เป็นอนุกรมเทย์เลอร์รอบ z_0 ที่กำหนดให้ และจงหารัศมีการลู่เข้าของอนุกรม

   5.1 $f(z) = e^{-3z}, \quad z_0 = 1$
   5.2 $f(z) = \ln z, \quad z_0 = 1$
   5.3 $f(z) = \sin z \quad z_0 = \dfrac{\pi}{2}$
   5.4 $f(z) = \cos z \quad z_0 = \dfrac{\pi}{2}$

6. จงคำนวณหาอนุกรมเทย์เลอร์จาก $f(z) = \dfrac{1}{4-3z}$ รอบจุดศูนย์กลาง $z = 1 + i$

7. กำหนดให้ $f(z) = \dfrac{1}{z-3}$ จงหาอนุกรมลอเรนต์และบริเวณการลู่เข้าเมื่อ

   7.1 กำลังของ z เป็นบวก
   7.2 กำลังของ z เป็นลบ

8. จงกระจาย $f(z) = \dfrac{1}{z(z+1)}$ ให้เป็นอนุกรมลอเรนต์สำหรับวงแหวนต่อไปนี้

   8.1 $0 < |z| < 1$
   8.2 $1 < |z|$
   8.3 $0 < |z+1| < 1$
   8.4 $1 < |z-1| < 2$

9. จงกระจาย $f(z) = \dfrac{1}{z^2 - z - 2}$ ให้เป็นอนุกรมลอเรนต์สำหรับวงแหวนต่อไปนี้

   8.1 $|z| < 1$
   8.2 $1 < |z| < 2$
   8.3 $2 < |z|$
   8.4 $0 < |z-2| < 3$
   8.5 $3 < |z-2|$

10. กำหนดให้ $f(z) = \dfrac{1}{z^2+1}$ จงหาอนุกรมรอเรนต์ซึ่งลู่เข้าเมื่อ $0 < |z - i| < r$ พร้อมทั้งกำหนดบริเวณที่ถูกต้องของการลู่เข้า

บทที่ 5

ลำดับและอนุกรมในระนาบจำนวนเชิงซ้อน

ลำดับของจำนวนเชิงซ้อนนั้นเป็นฟังก์ชันซึ่งโดเมนเป็นเซตย่อยของจำนวนเต็มบวก และมีเรนจ์เป็นเซตย่อยของจำนวนเชิงซ้อน ถ้าโดเมนเป็นเซต $\{1,2,3,...,n\}$ จะเรียกลำดับนั้นว่าลำดับจำกัด และถ้าโดเมนเป็นเซต $\{1,2,3,...\}$ จะเรียกลำดับนั้นว่าลำดับอนันต์ ถ้า $a_1,a_2,a_3,...,a_n$ เป็นลำดับจำกัดที่มี n พจน์แล้วเรียกผลบวก $a_1+a_2+a_3+...+a_n$ ว่าอนุกรมจำกัด ในกรณีที่ $a_1,a_2,a_3,...,a_n,...$ เป็นลำดับอนันต์จะเรียกผลบวก $a_1+a_2+a_3+...+a_n+...$ ว่าอนุกรมอนันต์ และสำหรับเนื้อหาในบทนี้จะศึกษาอนุกรมของจำนวนเชิงซ้อนในหลาย ๆ รูปแบบเพื่อนำไปใช้ในการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันตัวแปรเชิงซ้อนได้อีกวิธีโดยกล่าวในบทถัดไป สำหรับการหาด้วยวิธีนี้นั้นจะเป็นวิธีที่ทำให้การหาปริพันธ์ง่ายและสะดวกมากขึ้น ในการศึกษาลำดับและอนุกรมของฟังก์ชันตัวแปรเชิงซ้อนนี้ก็มีแนวคิดทำนองเดียวกับลำดับและอนุกรมของค่าคงตัวที่เราเคยศึกษามาแล้ว

5.1 ลำดับของฟังก์ชันตัวแปรเชิงซ้อน

สำหรับลำดับของฟังก์ชันตัวแปรเชิงซ้อนนั้นก็มีแนวคิดทำนองเดียวกับลำดับของค่าคงตัวที่เราเราได้ศึกษามาแล้วแต่มีเรนจ์เป็นเซตย่อยของจำนวนเชิงซ้อนเท่านั้นดัง สมถวิล ขันเขตต์ (2558 : 111) ได้กล่าวไว้ดังนี้

บทนิยาม 5.1

ลำดับของจำนวนเชิงซ้อน หมายถึงฟังก์ชันจากเซตของจำนวนนับไปยังเซตย่อยของจำนวนเชิงซ้อน จะเขียนแทนด้วยลำดับของจำนวนเชิงซ้อนด้วย $\{z_n\}$ เรียก z_n ว่า พจน์ที่ n เมื่อ $n=1,2,3,...$

ตัวอย่าง 5.1

ลำดับของจำนวนเชิงซ้อน $i,-1,-i,1,i,-1,-i,1,\ldots$ เขียนแทนด้วย $\left\{i^n\right\}$ และมีพจน์ที่ n คือ i^n

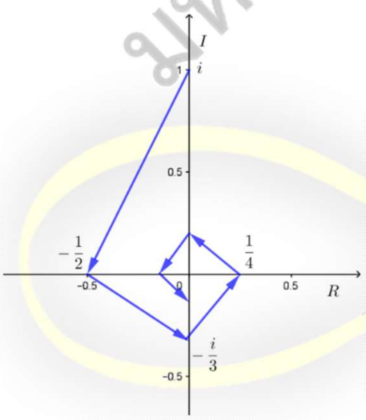
ประสิทธิ์ ลิ้มบุพศิริพร (2557 : 186-187) ได้กล่าวไว้ว่า สำหรับการศึกษาสมบัติของลำดับนั้น สิ่งหนึ่งที่เราสนในคือการศึกษาพฤติกรรมการแปรค่าของพจน์ที่ถัดกันไป แนวคิดหนึ่งที่นำมาใช้ในการศึกษาเรื่องนี้ก็คือการศึกษาเรื่องลิมิตของลำดับ พบว่าโดยความเป็นจริงแล้วการศึกษาในเรื่องนี้เป็นการศึกษาในเรื่องเดียวกับลิมิตของฟังก์ชันนั่นเอง เพื่อให้เกิดความเข้าใจในการศึกษาดังกล่าว เราจะพิจารณาจากตัวอย่างของลำดับต่อไปนี้

1. $\left\{\dfrac{i^n}{n}\right\} = i,-\dfrac{1}{2},-\dfrac{i}{3},-\dfrac{1}{4},\ldots$

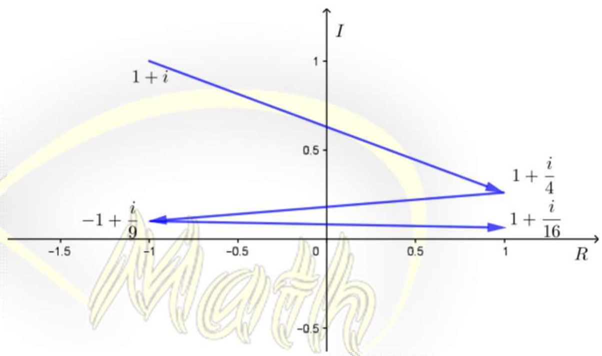
2. $\left\{(-1)^n + \dfrac{i}{n^2}\right\} = -1+i,1+\dfrac{i}{4},-1+\dfrac{i}{9},\ldots$

3. $\left\{1+in\right\} = 1+i,1+2i,1+3i,\ldots$

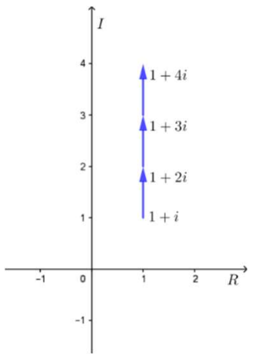
จะเห็นว่าลำดับในข้อ 1 มีลักษระที่แต่กต่างจากลำดับในข้อ 2 และ 2 กล่าวคือเมื่อ n มีค่ามาก พจน์ต่าง ๆของลำดับในข้อ 1 มีแนวโน้มที่จะเข้าใกล้จำนวนบางจำนวนในที่นี้เราอาจคาดเดาว่าคือ 0 แต่สำหรับพจน์ต่าง ๆ ของลำดับในข้อ 2 และ 3 กลับไม่เข้าใกล้ค่าใดเลย จะเห็นว่าการอธิบายพฤติกรรมของลำดับเหล่านี้เป็นเพียงอาศัยการคาดเดาอย่างคร่าว ๆ การจะตรวจสอบว่าผลการคาดเดานี้ถูกต้องหรือไม่จำเป็นต้องใช้หลักทางคณิตศาสตร์ที่ถูกต้องและรัดกุมต่อไป



ลำดับ $\left\{\dfrac{i^n}{n}\right\}$



ลำดับ $\left\{(-1)^n + \dfrac{i}{n^2}\right\}$



ลำดับ $\left\{1+in\right\}$

ภาพประกอบ 5.1 ภาพแสดงพจน์ต่าง ๆ ของลำดับ $\left\{\frac{i^n}{n}\right\},\left\{(-1)^n+\frac{i}{n^2}\right\}$ และ $\left\{1+in\right\}$

ที่มา : ประสิทธิ์ ลิ้มบุพศิริพร. 2557 : 187

สำหรับการจะตรวจสอบแต่ละพจน์ของ $\left\{z_n\right\}$ ว่าจะมีแนวโน้มเข้าใกล้จำนวนใด หรือไม่มีแนวโน้มเข้าใกล้จำนวนใด ๆ เลยนั้นจะพิจารณาเฉพาะจากการดูแนวโน้มของกราฟเพียงอย่างเดียวนั้นไม่เพียงพอดังนั้นจึงต้องอาศัยบทนิยามและทฤษฎีต่าง ๆ ดัง สมถวิล ขันเขตต์ (2558 : 111-114) ได้กล่าวไว้ดังนี้

บทนิยาม 5.2

ให้ $\left\{z_n\right\}$ เป็นลำดับของจำนวนเชิงซ้อน l เป็นจำนวนเชิงซ้อนจะกล่าวว่าลำดับ $\left\{z_n\right\}$ **ลู่เข้า**(convergent) สู่ l เขียนแทนด้วย $\lim_{n\to\infty} z_n = l$ ก็ต่อเมื่อสำหรับทุกค่า $\varepsilon > 0$ จะต้องมีจำนวนนับ N_ε ที่ทุก ๆ จำนวนนับ n ที่ $n \geq N_\varepsilon$ แล้ว $\left|z_n - l\right| < \varepsilon$

ถ้า $\left\{z_n\right\}$ ไม่เป็นลำดับลู่เข้าเรียกลำดับนี้ว่าลำดับ**ลู่ออก**(divergent)

ทฤษฎีบท 5.1

ถ้าลำดับ $\{z_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้าแล้ว ค่าที่ z_n ลู่เข้านั้นจะมีเพียงค่าเดียว

พิสูจน์

สมมุติให้ $\lim_{n\to\infty} z_n = l_1$ และ $\lim_{n\to\infty} z_n = l_2$

ให้ $\varepsilon = \dfrac{|l_1 - l_2|}{2} > 0$

มีจำนวนเต็มบาก n_{ε_1} ซึ่งทุก ๆ จำนวนเต็มบวก n ที่ $n \ge n_{\varepsilon_1}$ แล้ว $|z_n - l_1| < \varepsilon$

และมีจำนวนเต็มบาก n_{ε_2} ซึ่งทุก ๆ จำนวนเต็มบวก n ที่ $n \ge n_{\varepsilon_2}$ แล้ว $|z_n - l_2| < \varepsilon$

เลือก $n_\varepsilon = \max\{n_{\varepsilon_1}, n_{\varepsilon_2}\}$

สำหรับทุก ๆ จำนวนเต็มบวก n ที่ $n \ge n_\varepsilon$ แล้ว $|z_n - l_1| < \varepsilon$ และ $|z_n - l_2| < \varepsilon$

พิจารณา

$$
\begin{aligned}
|l_1 - l_2| &= |l_1 - z_n + z_n - l_2| \\
&\le |l_1 - z_{n2}| + |z_n - l_2| \\
&< \varepsilon + \varepsilon \\
&= 2\varepsilon \\
&= 2\frac{|l_1 - l_2|}{2} \\
&= |l_1 - l_2|
\end{aligned}
$$

นั้นคือ $|l_1 - l_2| < |l_1 - l_2|$ จึงเกิดข้อขัดแย้ง

แสดงว่า $l_1 \ne l_2$

ในการหาลิมิตของลำดับของจำนวนเชิงซ้อนเราจะหาโดยใช้ลิมิตของลำดับจำนวนจริงโดยหาลิมิตของลำดับของส่วนจริง และลิมิตของลำดับของส่วนจินตภาพ ซึ่งอาศัยทฤษฎีบทดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 5.2

ให้ $z_n = x_n + y_n i$, $\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty}(x_n + y_n i) = a + bi$

ก็ต่อเมื่อ $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ และ $\lim_{n\to\infty} y_n = b$

ตัวอย่าง 5.2 จงหา $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+i}{n+3i}\right)$

วิธีทำ จาก
$$\frac{2n+i}{n+3i} = \left(\frac{2n+i}{n+3i}\right)\left(\frac{n-3i}{n-3i}\right)$$
$$= \frac{2n^2 - 5ni + 3}{n^2+9}$$
$$= \frac{2n^2+3}{n^2+9} - \frac{5n}{n^2+9}i$$

ได้ว่า
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+i}{n+3i}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+3}{n^2+9} - \frac{5n}{n^2+9}i\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+3}{n^2+9}\right) - i\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n}{n^2+9}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2+\frac{3}{n^2}}{1+\frac{9}{n^2}}\right) - i\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{5}{n^2}}{1+\frac{9}{n^2}}\right)$$
$$= 2 - i(0)$$
$$= 2$$

ดังนั้น $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+i}{n+3i}\right) = 2$

จากตัวอย่าง 5.2 เรา ได้ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+i}{n+3i}\right)=2$ แสดงว่า $\left\{\dfrac{2n+i}{n+3i}\right\}$ เป็นลำดับลู่เข้า

ตัวอย่าง 5.3 จงหา $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+ni}{1+ni}\right)$

วิธีทำ จาก $\dfrac{n^2+ni}{1+ni}=\left(\dfrac{n^2+ni}{1+ni}\right)\left(\dfrac{1-ni}{1-ni}\right)$

$$=\frac{n^2+ni-n^3i+n^n}{1+n^2}$$

$$=\frac{2n^2}{1+n^2}-\frac{n-n^3}{1+n^2}i$$

เนื่องจาก $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2}{1+n^2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{\dfrac{1}{n^2}+1}\right)=2$

และ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-n^3}{1+n^2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3}{n^2}\left(\dfrac{\dfrac{1}{n^2}-1}{\dfrac{1}{n^2}+1}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\dfrac{\dfrac{1}{n^2}-1}{\dfrac{1}{n^2}+1}\right)=-\infty$

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+ni}{1+ni}\right)$ หาค่าไม่ได้

จากตัวอย่าง 5.3 เรา ได้ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+ni}{1+ni}\right)=\infty$ แสดงว่า $\left\{\dfrac{n^2+ni}{1+ni}\right\}$ เป็นลำดับลู่ออก

5.2 อนุกรมของฟังก์ชันตัวแปรเชิงซ้อน

จากที่ผ่านมาเราได้ศึกษาเรื่องลำดับตัวแปรเชิงซ้อนไปแล้วนั้นแต่ถ้าเรานำสมาชิกทุกตัวในลำดับมาบวกกันเช่น ถ้า $a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n$ เป็นลำดับจำกัดที่มี n พจน์แล้วเรียกผลบวก $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n$ ว่าอนุกรมจำกัด ในกรณีที่ $a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n,\ldots$ เป็นลำดับอนันต์จะเรียก

ผลบวก $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$ ว่าอนุกรมอนันต์ สำหรับในหัวข้อนี้นั้นเราจะศึกษาอนุกรมลำดับของอนุกรมดัง เกียรติสุดา นาคประสิทธิ์ (2556 : 195) ได้กล่าวไว้ดังนี้

บทนิยาม 5.3

ให้ $\{z_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนเชิงซ้อน **อนุกรมอนันต์** (infinite series) หรือ **อนุกรม** (series) เขียนแทนด้วย $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ หรือ $\sum z_n$ คือผลบวกในรูป

$$z_1 + z_2 + z_3 + \cdots + z_n + \cdots$$

และเรียก z_n แต่ละจำนวนว่า**พจน์ที่** n ของอนุกรม

เนื่องจากมีเพียงผลบวกของพจน์เป็นจำนวนจำกัดเท่านั้นที่สามารถหาได้โดยการบวกแบบพีชคณิตธรรมดา แต่ถ้าเป็นอนุกรมอนันต์นั้นจะไม่สามารถบวกแบบพีชคณิตธรรมดาได้ จำเป็นจะต้องศึกษาบทนิยาม และทฤษฎีบทต่าง ๆ ดังที่ สมถวิล ขันเขตต์ (2558 : 114-115) ได้กล่าวไว้ดังนี้

บทนิยาม 5.4

ให้ $\{z_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนเชิงซ้อน และ

$$\begin{aligned} S_1 &= z_1 \\ S_2 &= z_1 + z_2 \\ S_3 &= z_1 + z_2 + z_3 \\ &\vdots \\ S_n &= z_1 + z_2 + z_3 + \cdots + z_n \end{aligned}$$

จะเรียน S_n ว่า **ผลบวกย่อยที่** n และ เรียก $S_1, S_2, S_3, \ldots S_n, \ldots$ ว่า **ลำดับบของผลบวกย่อย** (sequence of partial sum)

สำหรับการลู่เข้าของอนุกรมนั้นเราจะไม่พิจารณาอนุกรมโดยตรงแต่เราจะพิจารณาจากลำดับของผลบวกย่อย หรือบางครั้งอาจจะพิจารณาเศษเหลือ ดัง สมเกียรติ ตั้งพูลผล (2535 : 113-114) ได้กล่าวไว้ดังนี้

อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ ลู่เข้าก็ต่อเมื่อลำดับของผลบวกย่อย $\{S_n\}$ ลู่เข้าจากบทนิยามของลำดับลู่เข้าถ้า $\{S_n\}$ ลู่เข้าหา S จะได้ว่าเมื่อกำหนด $\varepsilon > 0$ จะมี N ที่ทำให้ $|S_n - S| < \varepsilon$ เมื่อ $n > N$ ถ้าเขียน R_n แทน $S_n - S$ จะได้ $R_n = z_{n+1} + z_{n+2} + z_{n+3} + \ldots$ เรียกเศษเหลือ หลัง n พจน์

คือ $$R_n = S - S_n$$

หรือ $$R_n + S_n = S$$

ดังนั้น $|S_n - S| < \varepsilon$ อาจเขียนเป็น $|R_n| < \varepsilon$ หรือ $\left|\sum_{k=1}^{\infty} z_k - \sum_{k=1}^{n} z_k\right| < \varepsilon$

และอาจนิยามอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ ลู่เข้าก็ต่อเมื่อ $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$

และถ้า $S = \infty$ หรือหาค่าไม่ได้ เรียกอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ ลู่ออก

จากที่กล่าวมาข้างต้นนั้น เกียรติสุดา นาคประสิทธิ์ (2556 : 196-197) ได้ให้ทฤษฎีบทสำหรับตรวจสอบการลู่เข้าของอนุกรมดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 5.3

ให้ $z_n = x_n + iy_n$ สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$ และ $S = x + yi$ แล้ว

$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S$ ก็ต่อเมื่อ $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} y_n = y$

พิสูจน์

$(\Rightarrow)$ ให้ $S_N = \sum_{n=1}^{N} z_n,\ X_N = \sum_{n=1}^{N} x_n,$ และ $Y_N = \sum_{n=1}^{N} y_n$ และ $S = x + yi$

นั่นคือ $S_N = X_N + iY_N$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก N

และถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S$ แล้วจะได้ว่า $\lim_{n\to\infty} S_N = S$

จาก $S_N = X_N + iY_N$ และ $S = x + yi$ จะได้

จะได้
$$\lim_{n\to\infty}\left(X_N + iY_N\right) = x + yi$$
$$\lim_{n\to\infty} X_N + i\lim_{n\to\infty} Y_N = x + yi$$
$$\lim_{n\to\infty} X_N = x \text{ และ } \lim_{n\to\infty} Y_N = y$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x \quad \text{ และ } \sum_{n=1}^{\infty} y_n = y$$

นั้นคือ ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S$ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} y_n = y$

($\Leftarrow$) ทำในทำนองเดียวกัน

ทฤษฎีบท 5.4

กำหนด $\{z_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนเชิงซ้อนถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า แล้ว $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$

พิสูจน์

กำหนดให้ $z_n = x_n + y_n i$ สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$ และ $S = x + yi$

เนื่องจาก $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า ดังนั้นจึงมีจำนวนเชิงซ้อน S ซึ่งทำให้ $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S$

จะได้ว่า
$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x \text{ และ } \sum_{n=1}^{\infty} y_n = y$$

เนื่องจาก $x_n, y_n \in \mathbb{R}$ สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$ ดังนั้น $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ และ $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$

หรือทำให้ได้ว่า $\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} x_n + i\lim_{n\to\infty} y_n = 0 + 0i = 0$

จากทฤษฎี 4.4 ได้ข้อความที่สมมูลกันและเป็นประโยชน์อย่างยิ่งในการตรวจสอบการลู่ออกของอนุกรม ดังนี้

บทแทรก 5.1

กำหนด $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ เป็นอนุกรมของจำนวนเชิงซ้อน ถ้า $\lim_{n\to\infty} z_n \neq 0$ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก

ตัวอย่าง 5.6 จงแสดงว่า $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2ni-3}{n-1}\right)$ เป็นอนุกรมลู่ออก

วิธีทำ พิจารณา $\lim_{n\to\infty} z_n$ เมื่อ $z_n = \frac{2ni-3}{n-1}$

ได้
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2ni-3}{n-1}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2i-\frac{3}{n}}{1-\frac{1}{n}}\right)$$
$$= \frac{\lim_{n\to\infty}\left(2i-\frac{3}{n}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)}$$
$$= 2i$$
$$\neq 0$$

จากบทแทรก 5.1

ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2ni-3}{n-1}\right)$ เป็นอนุกรมลู่ออก

ตัวอย่าง 5.6 จงแสดงว่า $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ เป็นอนุกรมลู่ออก เมื่อ $|z| \geq 1$

วิธีทำ เนื่องจาก $\lim_{n\to\infty} z^n \neq 0$ สำหรับ z ซึ่ง $|z| \geq 1$

จากบทแทรก 5.1

ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ เป็นอนุกรมลู่ออก เมื่อ $|z| \geq 1$

จากบทแทรก 5.1 นั้นเหมาะสำหรับการตรวจสอบอนุกรมลู่ออก แต่ถ้าอนุกรมของที่เราตรวจสอบนั้นไม่ลู่ออกก็เป็นการยากที่จะตรวจสอบเพราะอนุกรมนั้นมีมากมายหลายรูปแบบดังนั้นเราจึงให้บทนิยามของอนุกรมรูปแบบเฉพาะพร้อมทั้งตัวอย่างการตรวจสอบว่าอนุกรมดังกล่าวลู่เข้าหรือลู่ออกในกรณีใดบาง ดัง สมถวิล ขันเขตต์ (2558 : 116 -117) ได้กล่าวไว้ดังนี้

บทนิยาม 5.5

อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ **ลู่เข้าอย่างสมบูรณ์** (absolutely convergent) ก็ต่อเมื่อ $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ ลู่เข้า

บทนิยาม 5.6

อนุกรมพี (P-series) คืออนุกรมที่เขียนในรูป

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^p}\right) = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \ldots$$ เมื่อ p เป็นจำนวนจริงใด ๆ

ในกรณีที่ $p = 1$ เรียนกอนุกรมฮาร์โมนิค** (Harmonic series) เขียนในรูป

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$$

อนุกรมพี $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^{p}}\right)=\frac{1}{1^{p}}+\frac{1}{2^{p}}+\frac{1}{3^{p}}+\ldots$ จะลู่เข้าเมื่อ $p>1$ และจะลู่ออกเมื่อ $p\leq 1$ (เลิศ สิทธิโกศล, 2542 : 332)

ตัวอย่าง 5.7 จงพิจารณาการลู่เข้าของอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n}}{n}i$

วิธีทำ เนื่องจาก $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n}}{n}i=i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n}}{n}$

พิจารณา $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n}}{n}=-1+\frac{1}{2^{2}}-\frac{1}{3^{2}}+\frac{1}{4^{2}}-\frac{1}{5^{2}}+\ldots$

และ $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\left(-1\right)^{n}}{n}\right|=1+\frac{1}{2^{2}}+\frac{1}{3^{2}}+\frac{1}{4^{2}}+\frac{1}{5^{2}}+\ldots$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2}}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n}}{n}i$ ลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์

นอกจากอนุกรมพี แล้วยังมีอนุกรมอีกรูแบบหนึ่งนั่นก็คืออนุกรมเรขาคณิต ซึ่ง ดำรง ทิพย์โยธา และคณะ (2558 : 26) ได้ให้บทนิยามไว้ดังต่อไปนี้

บทนิยาม 5.7

อนุกรมเลขคณิต คืออนุกรมที่เขียนได้ในรูป

$$\sum_{n=1}^{\infty}az^{n-1}=a+az+az^{2}+\ldots+az^{n-1}+\ldots$$

สำหรับการตรวจสอบการลู่เข้าหรือลู่ออกของอนุกรมเรขาคณิตนั้นต้องเราจะพิจารณาดังต่อไปนี้

จาก

(1) $$\sum_{n=1}^{\infty} az^{n-1} = a + az + az^2 + \ldots + az^{n-1} + \ldots$$

ได้ ผลบวกย่อย N พจน์แรกของอนุกรมคือ

(2) $$S_N = \sum_{n=1}^{N} az^{n-1} = a + az + az^2 + \ldots + az^{N-1}$$

คูณทั้งสองข้างของสมการ (2) ด้วย z จะได้

(3) $$zS_N = za + az^2 + az^3 + \ldots + az^N$$

นำสมการ (2) – (3) ได้

$$S_N - zS_N = \left(a + az + az^2 + \ldots + az^{N-1}\right) - \left(za + az^2 + az^3 + \ldots + az^N\right)$$

$$= a - az^N$$

$$\left(1 - z\right)S_N = a - az^N$$

$$S_N = \frac{a - az^N}{1 - z}$$

หรือ $S_N = \dfrac{a(1 - z^N)}{1 - z}$ สำหรับ z ซึ่ง $z \neq 1$

เนื่องจาก $\lim\limits_{N\to\infty} z^N = 0$ สำหรับ z ซึ่ง $|z| < 1$ ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} S_N = \dfrac{a}{1-z}$

นั่นคือ

(4) $$\frac{a}{1-z} = a + az + az^2 + \ldots + az^{n-1} + \ldots \text{ สำหรับ } z \text{ ซึ่ง } |z| < 1$$

และอนุกรมเรขาคณิตจะลู่ออกสำหรับ $z \in \left\{z : |z| \geq 1\right\}$

ตัวอย่าง 5.8 จงตรวจสอบว่า $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(3i-1)^n}{12^n}$ ลู่เข้าหรือลู่ออกถ้าลู่เขาจงหาผลบวกของอนุกรม

วิธีทำ จาก $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(3i-1)^n}{12^n} = \dfrac{3i-1}{12} + \dfrac{(3i-1)^2}{12^2} + \dfrac{(3i-1)^3}{12^3} + \ldots$

ซึ่ง $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3i-1)^n}{12^n}$ เป็นอนุกรมเลขาคณิตที่มี

$$a=\frac{3i-1}{12} \quad \text{และ} \quad z=\frac{3i-1}{12}$$

เนื่องจาก

$$|z|=\left|\frac{3i-1}{12}\right|=\sqrt{\left(\frac{3}{12}\right)^2+\left(\frac{1}{12}\right)^2}=\sqrt{\frac{10}{144}}=\frac{\sqrt{10}}{12}<1$$

จาก $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3i-1)^n}{12^n}$ เป็นอนุกรมเรขาคณิตที่ $|z|<1$ จะได้

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3i-1)^n}{12^n}=\frac{\frac{3i-1}{12}}{1-\left(\frac{3i-1}{12}\right)}$$

$$=\frac{\frac{3i-1}{12}}{\frac{12-3i-1}{12}}$$

$$=\frac{3i-1}{11-3i}$$

ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3i-1)^n}{12^n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า และ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3i-1)^n}{12^n}=\frac{3i-1}{11-3i}$

ตัวอย่าง 5.9 จงตรวจสอบว่า $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(i+6)^n}{2^n}$ ลู่เข้าหรือลู่ออกถ้าลู่เขาจงหาผลบวกของอนุกรม

วิธีทำ จาก $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{i+6}{2}\right)^n=\frac{i+6}{2}+\left(\frac{i+6}{2}\right)^2+\left(\frac{i+6}{2}\right)^3+\ldots$

ซึ่ง $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(i+6)^n}{2^n}$ เป็นอนุกรมเลขาคณิต ที่มี

$$a=\frac{i+6}{2} \quad \text{และ} \quad z=\frac{i+6}{2}$$

เนื่องจาก

$$\left|z\right| = \left|\frac{i+6}{2}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{6}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{37}{4}} = \frac{\sqrt{37}}{2} > 1$$

ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(i+6)^n}{2^n}$ เป็นอนุกรมลู่ออก

จากที่ได้ศึกษาอนุกรมที่มีรูปแบบเฉพาะเช่นอนุกรมพี อนุกรมเลขาคณิต พร้อมทั้งการตรวจสอบการลู่เข้าลู่ออกของอนุกรมนั้นก็ยังไม่เพียงพอที่จะสามารถตรวจสอบทุกอนุกรมได้เพราะบางครั้งอนุกรมที่เราศึกษานั้นอาจจะไม่ได้อยู่ในรูปแบบเฉพาะก็ได้ดังนั้นเราจึงกระทำโดยการตรวจสอบอนุกรมของจำนวนจริงดัง สมเกียรติ ตั้งพูลผล (2558 : 115 -117) ได้กล่าวไว้ดังนี้

- **การทดสอบโดยการเปรียบเทียบ** (comparison test)

1. ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty}\left|w_n\right|$ ลู่เข้า และ $\left|z_n\right| \le \left|w_n\right|$ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ ลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์

2. ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty}\left|w_n\right|$ ลู่ออก และ $\left|z_n\right| \ge \left|w_n\right|$ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty}\left|z_n\right|$ ลู่ออก

แต่ $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ อาจจะลู่เข้าหรืออาจจะลู่ออก

- **การทดสอบโดยอัตราส่วน** (ration test)

สำหรับ $z_n \ne 0$ ทุกค่า n และ $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = L$

ถ้า $L < 1$ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ ลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์

ถ้า $L > 1$ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ ลู่ออกถ้า

ถ้า $L = 1$ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ ไม่สามารถสรุปได้

- **การทดสอบโดยรากที่** n (n^{th} rood test)

สมมติว่า $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ โดยที่ $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{z_n} = L$

ถ้า $L<1$ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ ลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์

ถ้า $L>1$ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ ลู่ออกถ้า

ถ้า $L=1$ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ ไม่สามารถสรุปได้

- **การทดสอบของราเบ** (Raba's test)

ถ้า $z_n \neq 0$ ทุกค่า n และ $\lim_{n\to\infty} n\left(1-\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|\right)=L$ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ ลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์ ถ้า $L<1$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ ลู่ออกอย่างมีเงื่อนไขถ้า $L>1$

- **การตรวจสอบอนุกรมสลับ** (alternating series test)

อนุกรมสลับ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n z_n$ เมื่อ $z_n>0$ ทุกค่า n เป็นอนุกรมลู่เข้าถ้า

ตัวอย่าง 5.10 จงแสดงว่า $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^4}=z+\frac{z^2}{2^4}+\frac{z^3}{3^4}+\frac{z^4}{4^4}+\ldots$ ลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์ที่จุด $z=-1$

วิธีทำ พิจารณาที่จุด $z=-1$ จะได้

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^4}=-1+\frac{1}{2^4}-\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}-\frac{1}{5^4}+\ldots$$

เนื่องจาก

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n^4}\right|=1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^4}+\ldots$$ เป็นอนุกรม p และ $p=4$

นั่นคือ $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n^4}\right|$ ลู่เข้า

ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^4}$ ลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์ ที่จุด $z=-1$

ตัวอย่าง 5.11 จงตรวจสอบอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ ที่จุด $z = 3$

วิธีทำ พิจารณาที่จุด $z = 3$ จะได้

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2}$$

ทดสอบการลู่เข้าโดยอัตราส่วน

สำหรับแต่ละ $n = 1, 2, \ldots$ ให้ $z_n = \frac{3^n}{n^2}$

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| \\ &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{3^n}{n^2}} \right| \\ &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{3^{n+1}}{(n+1)^2} \times \frac{n^2}{3^n} \right| \\ &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{3n^2}{n^2 + 2n + 1} \right| \\ &= 3 \end{aligned}$$

เนื่องจากได้ $L = 3$ ซึ่ง $L > 1$

ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2}$ ลู่ออก

ต่อไปจะเป็นนิยามอนุกรมกำลัง สัมประสิทธิ์ของอนุกรมกำลัง ศูนย์กลางของอนุกรมกำลัง และรัศมีการลู่เข้า ซึ่งจะใช้ศึกษาในหัวข้อต่อไปดัง เกียรติสุดา นาคประสิทธิ์ (2556 : 203) ได้ให้ไว้ดังต่อไปนี้

บทนิยาม 5.8

ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนเชิงซ้อน และ $z_0 \in \mathbb{C}$ **อนุกรมกำลังรอบจุด** z_0 คือ อนุกรมที่อยุ่ในรูปแบบ

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \ldots$$

และเรียก z_0 ว่า **ศูนย์กลางของอนุกรมกำลัง**

เรียกเซตของจุดทุกจุดซึ่งอยู่ภายในวงกลมซึ่งมีศูนย์กลางที่จุด z_0 และอนุกรมลู่เข้า**บริเวณการลู่เข้า**ของอนุกรมกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ และเรียกวงกลมที่ใหญ่ที่สุดซึ่งอนุกรมลู่เข้าที่ทุกจุดซึ่งอยู่ภายในว่า **วงกลมการลู่เข้า** ของอนุกรมกำลัง และเรียกรัศมีของวงกลมการลู่เข้าว่า **รัศมีการลู่เข้า** ของอนุกรมกำลัง ยิ่งไปกว่านั้น ได้ว่าอนุกรมกำลังลู่ออกที่จุดซึ่งอยู่ภายนอกวงกลมการลู่เข้า

ทฤษฎีบท 5.5

สมมติว่าอนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ ลู่เข้าที่จุด z_1 โดยที่ $z_1 \neq z_0$ จะได้ว่าอนุกรมกำลังนี้ลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์ที่ทุกจุด z ใด ๆ ซึ่ง $|z-z_0| < |z_1 - z_0|$

สำหรับการพิสูจน์ทฤษฎีบทดังกล่าวนี้ ประสิทธิ์ ลิ้มบุพศิริพร (2557 : 198-200) ได้แสดงการพิสูจน์พร้อมทั้งได้อธิบายการลู่เข้าลู่ออกของอนุกรมและตัวอย่างการหารัศมีการลู่เข้าดังต่อไปนี้

พิสูจน์

เนื่องจาก $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ ลู่เข้าดังนั้นโดยทฤษฎีบท 5.4 จะได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty} a_n (z-z_0)^n = 0$$

โดยบทนิยามของลิมิตจะได้ว่ามีจำนวนนับ N ซึ่งมีสมบัติว่า

$$\left|a_n (z-z_0)^n\right| < 1 \qquad \text{ทุก } n \geq N$$

สำหรับจุด z ใด ๆ ซึ่ง $\left|z-z_0\right| < \left|z_1 - z_0\right|$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\left|a_n (z-z_0)^n\right| &= \left|\frac{(z-z_0)^n}{(z_1-z_0)^n}\right| \left|a_n (z-z_0)^n\right| \\ &< \left|\frac{z-z_0}{z_1-z_0}\right|^n \qquad \text{ทุก } n \geq N\end{aligned}$$

สังเกตว่าอนุกรม $\sum_{n=N}^{\infty} \left|\frac{z-z_0}{z_1-z_0}\right|^n$ ลู่เข้าทั้งนี้เพราะเป็นอนุกรมเลขาคณิตที่ $\left|\frac{z-z_0}{z_1-z_0}\right| < 1$

จะได้ว่า $\sum_{n=0}^{\infty} \left|a_n (z-z_0)^n\right|$ ลู่เข้าซึ่งทำให้ได้ว่าอนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ ลู่เข้าด้วย

เพราะฉะนั้นอนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ ลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์

จากทฤษฎีบทดังกล่าวจะได้ว่าการลู่เข้าของอนุกรมกำลังเกิดขึ้นได้เพียง 3 กรณีต่อไปนี้เท่านั้น

1. อนุกรมกำลังลู่เข้าที่จุด z_0 เพียงจุดเดียวในกรณีนี้เรากล่าวว่า อนุกรมกำลังมีรัศมีการลู่เข้าเป็นศูนย์

2. อนุกรมกำลังลู่เข้า (อย่างสัมบูรณ์) ที่ทุกจุด ในกรณีนี้เรากล่าวว่าอนุกรมกำลังมีรัศมีการลู่เข้าเป็นอนันต์

3. อนุกรมกำลังลู่เข้าที่จุดบางจุด (ที่ไม่ใช่จุด z_0) และลู่ออกที่บางจุด ดังนั้นถ้าให้

$$R = \inf\left\{ \ \left|\xi - z_0\right| \middle| \xi \text{ เป็นจุดที่อนุกรมลู่ออก } \right\}$$

แล้วจะได้ว่า

- อนุกรมกำลังลู่เข้า(อย่างสัมบูรณ์) ที่ทุกจุด z ซึ่ง $\left|z-z_0\right| < R$
- อนุกรมกำลังลู่ออกที่ทุกจุด z ซึ่ง $\left|z-z_0\right| > R$

ในกรณีนี้เราเรียก R ว่า รัศมีการลู่เข้า

สำหรับจุดที่อยู่ที่ขอบของจานเปิดของการลู่เข้า อนุกรมอาจลู่เข้าหรือลู่ออกก็ได้ ถ้าเราให้ R แทนรัศมีการลู่เข้าของอนุกรมกำลังแล้วเรานิยาม R (ตามกรณีต่าง ๆ ข้างต้น) ได้เป็น 3 แบบคือ $R = 0, R = \infty$ และ $R < \infty$ ซึ่งในแต่กรณีจะสังเกตได้ว่า

1. เมื่อ $R = 0$ อาจกล่าวได้ว่าบริเวณของการลู่เข้าของอนุกรมกำลังคือเซตของจุด z โดยที่ $\left|z - z_0\right| = 0$ หรือก็คือ $\left\{z_0\right\}$

2. เมื่อ $R = \infty$ อาจกล่าวได้ว่าบริเวณของการลู่เข้าของอนุกรมกำลังคือเซตของจุด z โดยที่ $\left|z - z_0\right| < \infty$ หรือก็คือเซตของจำนวนเชิงซ้อนทั้งหมด

3. เมื่อ $R < \infty$ อาจกล่าวได้ว่าบริเวณของการลู่เข้าของอนุกรมกำลังคือเซตของจุด z โดยที่ $\left|z - z_0\right| < R$ หรือก็คือ $N_R(z_0)$

ตัวอย่าง 5.12 จงหารัศมีการลู่เข้าและวงกลมการลู่เข้าของอนุกรมกำลัง

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n}(z - 1 + i)^n$$

วิธีทำ ทดสอบการลู่เข้าโดยอัตราส่วน

สำหรับแต่ละ $n = 1, 2, \ldots$ ให้ $z_n = \dfrac{(-1)^n 2^n}{n}(z - 1 + i)^n$

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\dfrac{(-1)^{n+1} 2^{n+1}}{n+1}(z - 1 + i)^{n+1}}{\dfrac{(-1)^n 2^n}{n}(z - 1 + i)^n}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\dfrac{(-1)^{n+1} 2^{n+1}(z - 1 + i)^{n+1}}{n+1}}{\dfrac{(-1)^n 2^n (z - 1 + i)^n}{n}}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(-1)^{n+1} 2^{n+1}(z - 1 + i)^{n+1}}{n+1} \times \frac{n}{(-1)^n 2^n (z - 1 + i)^n}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{-2n(z - 1 + i)}{n+1}\right|
\end{aligned}$$

$$= \left|-2(z-1+i)\right|$$

$$= 2\left|z-1+i\right|$$

อนุกรมจะลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์เมื่อ $L < 1$

จะได้อนุกรม $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n}(z-1+i)^n$ ลู่เข้าเมื่อ

$$2\left|z-1+i\right| < 1$$

หรือ $\left|z-1+i\right| < \dfrac{1}{2}$

ดังนั้น อนุกรม $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n}(z-1+i)^n$ ลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์ที่ทุกจุด z ซึ่ง $\left|z-1+i\right| < \dfrac{1}{2}$ และรัศมีการลู่เข้าของอนุกรมคือ $\dfrac{1}{2}$

สำหรับการหารัศมีการลู่เข้านั้นนอกจากใช้วิธีการดังตัวอย่าง 5.12 แล้วเราสามารถหาได้โดยอาศัยทฤษฎีบทอื่น ๆ ได้อีกซึ่ง สมถวิล ขันเขตต์ (2558 : 120-122) ได้กล่าวไว้ดังนี้

ทฤษฎีบท 5.6

ถ้า $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$ แล้ว $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ ลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์ที่ทุก ๆ จุดภายในของวงกลม $\left|z-a\right| = \dfrac{1}{L}$ ลู่ออกทุก ๆ จุดที่อยู่ภายนอกวงกลม และอาจจะลู่เข้าสัมบูรณ์ หรือลู่เข้าอย่างมีเงื่อนไข หรือลู่ออกที่จุดบนเส้นรอบวงของวงกลม

พิสูจน์

สมมุติให้ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$ และทดสอบการลู่เข้าโดยอัตราส่วนจะได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}(z-z_0)^{n+1}}{a_n(z-z_0)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}(z-z_0)}{a_n}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\left|z-z_0\right|$$

$$= L\left|z-z_0\right|$$

ดังนั้นอนุกรมลู่เข้าสัมบูรณ์เมื่อ $L\left|z-z_0\right|<1$ หรือ $\left|z-z_0\right|<\dfrac{1}{L}$

และอนุกรมลู่ออกเมื่อ $L\left|z-z_0\right|>1$ หรือ $\left|z-z_0\right|>\dfrac{1}{L}$

และไม่สามารถใช้วิธีตรวจสอบโดยอัตราส่วนได้เมื่อ

$$L\left|z-z_0\right|=1 \text{ หรือ } \left|z-z_0\right|=\frac{1}{L}$$

บทนิยาม 5.9

กำหนด $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ และ $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=L$ ให้ $r=\dfrac{1}{L}>0$ เรียก r ว่า **รัศมีการลู่เข้า** (radius of convergence) ของอนุกรมกำลัง เรียกวงกลม $\left|z-z_0\right|=r$ ว่า**วงกลมของการลู่เข้า** (circle of convergence)

ถ้า $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ ลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์ที่ $z=z_0$ เท่านั้นนั่นคือรัศมีการลู่เข้าเป็น 0

ถ้า $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ ลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์ทุก ๆ ค่า z นั่นคือรัศมีการลู่เข้าเป็น ∞

ทฤษฎีบท 5.7

กำหนดให้ $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ ถ้า $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|=r>0$ แล้ว r เป็นรัศมีการลู่เข้าของอนุกรมกำลัง

พิสูจน์ สมมติให้ $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|=r>0$ และทดสอบการลู่เข้าโดยอัตราส่วนจะได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}(z-z_0)^{n+1}}{a_n(z-z_0)^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}(z-z_0)}{a_n}\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\left|z-z_0\right|$$

$$= \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}\left|z-z_0\right|$$

$$= \frac{\left|z-z_0\right|}{r}$$

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ ลู่เข้า เมื่อ $\frac{\left|z-z_0\right|}{r} < 1$ หรือ $\left|z-z_0\right| < r$

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ ลู่ออก เมื่อ $\frac{\left|z-z_0\right|}{r} > 1$ หรือ $\left|z-z_0\right| > r$

พิจารณาที่จุด $z = z_0$ พบว่า $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}(z-z_0)^{n+1}}{a_n(z-z_0)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\left|z-z_0\right| = 0$

ถ้า $r = 0$ แล้ว $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}(z-z_0)^{n+1}}{a_n(z-z_0)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\left|z-z_0\right| = \infty$

นั่นคือ r เป็นรัศมีการลู่เข้าของ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$

ทฤษฎีบท 5.8

กำหนดให้ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ ถ้า $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left|a_n\right|^{\frac{1}{n}}} = r > 0$ แล้ว r เป็นรัศมีการลู่เข้าของอนุกรมกำลัง

พิสูจน์

สมมุติให้ $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left|a_n\right|^{\frac{1}{n}}} = r > 0$

เพราะว่า

$$\lim_{n\to\infty}\left|a_n(z-z_0)^n\right|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\left|a_n\right|^{\frac{1}{n}}\left|z-z_0\right|$$

$$= \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\left|a_n\right|^{\frac{1}{n}}}}\left|z-z_0\right|$$

$$= \frac{1}{r}\left|z-z_0\right|$$

$$= \frac{\left|z-z_0\right|}{r}$$

ทดสอบการลู่เข้าโดยการทดสอบโดยรากที่ n ของอนุกรมกำลังจะได้ว่า

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ ลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์ เมื่อ $\dfrac{\left|z-z_0\right|}{r}<1$ หรือ $\left|z-z_0\right|<r$

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ ลู่ออก เมื่อ $\dfrac{\left|z-z_0\right|}{r}>1$ หรือ $\left|z-z_0\right|>r$

พิจารณาที่จุด $z=a$ พบว่า $\lim\limits_{n\to\infty}\left|a_n(z-z_0)^n\right|^{\frac{1}{n}}=0$

ถ้า $r=0$ แล้ว $\lim\limits_{n\to\infty}\left|a_n(z-z_0)^n\right|^{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\left|a_n\right|^{\frac{1}{n}}\left|z-z_0\right| = \infty$

นั่นคือ แล้ว r เป็นรัศมีการลู่เข้าของอนุกรม

ตัวอย่าง 5.13 จงหารัศมีการลู่เข้าของ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(z-1)^n}{3n}$

วิธีทำ อนุกรมที่กำหนดให้เป็นอนุกรมรอบจุด $z=1$ ซึ่งมี $a_n=\dfrac{1}{3n}$ และ $a_{n+1}=\dfrac{1}{3(n+1)}$

จากทฤษฎีบท 5.7 จะได้ว่า

$$r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{3n}}{\frac{1}{3(n+1)}}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{3n}\times 3(n+1)\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{3n+1}{3n}\right|$$

$$= 1$$

ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{3n}$ ลู่เข้าทุกค่า z ที่ $\left|z\right|<1$ หรือรัศมีการลู่เข้าคือ 1

ตัวอย่าง 5.14 จงหารัศมีการลู่เข้าและวงกลมของการลู่เข้าของ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+3)^4 2^n}(z-4)^n$

วิธีทำ จากอนุกรมที่กำหนดให้เป็นอนุกรมรอบจุด $z=4$ ซึ่งมี

$$a_n = \frac{1}{(n+3)^4 2^n} \qquad \text{และ} \qquad a_{n+1} = \frac{1}{(n+4)^4 2^{n+1}}$$

จากทฤษฎีบท 5.7 จะได้ว่า

$$r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{(n+3)^4 2^n}}{\frac{1}{(n+4)^4 2^{n+1}}}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{(n+3)^4 2^n}\times (n+4)^4 2^{n+1}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2(n+4)^4}{(n+3)^4}\right|$$

$$= 2$$

จะได้ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+3)^4 2^n}(z-4)^n$ มีรัศมีการลู่เข้าเท่ากับ 2

และ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+3)^4 2^n}(z-4)^n$] ลู่เข้าทุกค่า z ที่ $\left|z-4\right|<2$

พิจารณาค่า z ที่อยู่บนเส้นรอบวงของวงกลม นั่นคือ $\left|z-4\right|=2$ จะได้

$$\left|\frac{1}{(n+3)^4 2^n}(z-4)^n\right| = \left|\frac{1}{(n+3)^4 2^n}\right|\left|(z-4)^n\right|$$

$$= \left|\frac{1}{(n+3)^4 2^n}\right|\left|2^n\right|$$

$$= \left|\frac{1}{(n+3)^4 2^n}2^n\right|$$

$$= \left|\frac{1}{(n+3)^4}\right|$$

$$\leq \frac{1}{n^4}$$

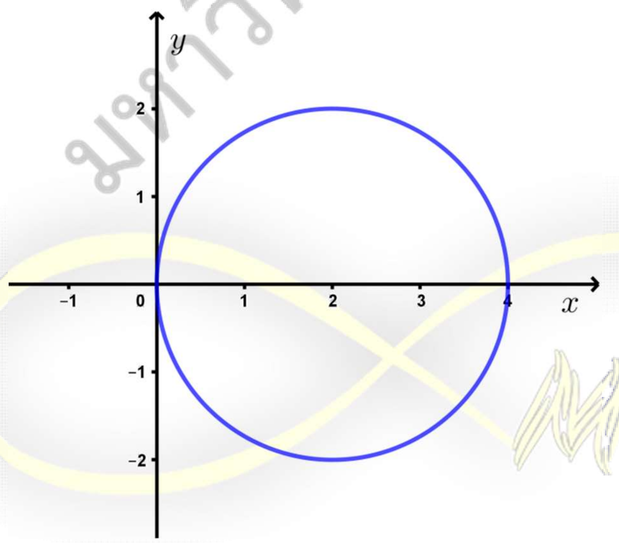
เนื่องจาก $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า (อนุกรมพีที่ $p>1$)

ทดสอบการลู่เข้าโดยการเปรียบเทียบ

จะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+3)^4 2^n}(z-4)^n$ ลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์บนเส้นรอบวงของ $\left|z-4\right|=2$

ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+3)^4 2^n}(z-4)^n$ ลู่เข้าทุกค่า z ที่ $\left|z-4\right|\leq 2$

แสดงได้ดังภาพต่อไปนี้



ตัวอย่าง 5.15 จงหารัศมีการลู่เข้าของ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

วิธีทำ จากอนุกรมที่กำหนดให้ เป็นอนุกรมรอบจุด $z = 0$ ซึ่งมี

$$a_n = \frac{1}{n!} \qquad \text{และ} \qquad a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}$$

จากทฤษฎีบท 5.7 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} r &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \\ &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} \right| \\ &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)!}{n!} \right| \\ &= \lim_{n\to\infty} \left| n+1 \right| \\ &= \infty \end{aligned}$$

แสดงว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ ซึ่งเป็นอนุกรมกำลังรอบจุด 0 มีรัศมีลู่เข้าเท่ากับ ∞

ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ มีรัศมีลู่เข้าเท่ากับ ∞

ตัวอย่าง 5.16 จงหารัศมีการลู่เข้าและบริเวณการลู่เข้าของอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(3n+2)!} z^{n+1}$

วิธีทำ จากอนุกรมที่กำหนดให้ เป็นอนุกรมรอบจุด $z = 0$ ซึ่งมี

$$a_n = \frac{(-1)^n}{(3n+2)!} \qquad \text{และ} \qquad a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{(3n+4)!}$$

จากทฤษฎีบท 5.7 จะได้ว่า

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n}{(3n+2)!}\times\frac{(3n+4)!}{(-1)^{n+1}}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(3n+4)(3n+4)}{-1}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|(3n+4)(3n+4)\right|$$

$$= \infty$$

แสดงว่า $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(3n+2)!}\, z^{n+1}$ ซึ่งเป็นอนุกรมกำลังรอบจุด 0 มีรัศมีลู่เข้าเป็นค่าอนันต์

ดังนั้น $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(3n+2)!}\, z^{n+1}$ ลู่เข้าทุกค่า z ที่ $|z| < \infty$

5.3 อนุกรมกำลังของฟังก์ชันพื้นฐาน

อนุกรมกำลังของฟังก์ชันพื้นฐานเราสามารถหาได้โดยใช้อนุกรมเทย์เลอร์ หรืออนุกรมแมคลอริน ซึ่งเรามีวิธีพิจารณาได้เช่นเดียวกับอนุกรมเทเลอร์ หรือแมคลอรินในฟังก์ชันตัวแปรจริงที่เราเคยศึกษามาแล้วในวิชาแคลคูลัส ซึ่งมีฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องดัง ณัฐกร สุคันธมาลา (2559 : 143) ได้กล่าวไว้ดังนี้

ทฤษฎีบท 5.9 (ทฤษฎีบทของเทย์เลอร์)

ถ้า f เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ในโดเมน D และ C เป็นวงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางที่ $z_0 \in D$ และมีรัศมีที่ทำให้ C อยู่ภายใน D แล้วจะได้ว่าสำหรับทุก ๆ z ภายใน C

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\,(z-z_0)^n$$

สำหรับอนุกรมเทเลอร์ หรือแมคลอริน นั้น ธนิต มาลากร (2556 : 271) ได้ให้บทนิยามดังต่อไปนี้

บทนิยาม 5.10

ให้ $f(z)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุด z_0 แล้วอนุกรมอนันต์

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n \\ &= f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + \frac{1}{2}f''(z_0)(z-z_0)^2 \\ &\quad + \frac{1}{3!}f'''(z_0)(z-z_0)^3 + \ldots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0)(z-z_0)^n + \ldots \end{aligned}$$

เรียกว่า **อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor series)** ของ f รอบจุด z_0 ในกรณีที่จุด $z_0 = 0$ อนุกรมดังกล่าวจะเรียกว่า**อนุกรมแมคลอริน(Maclaurin series)** ของ f

สำหรับการกระจายฟังก์ชัน $f(z)$ เป็นอนุกรมเทย์เลอร์ ถ้าทราบว่า f เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์บนบริเวณภายในวงกลมจุดศุนย์กลาง z_0 โดยทฤษฎบทของเทเลอร์จะได้ว่า อนุกรมเทย์เลอร์รอบจุด z_0 ลู่เข้าสู่ $f(z)$ สำหรับแต่ละค่า z ในวงกลมถ้าต้องการหารัศมีการลู่เข้าของอนุกรมเมื่อทราบจุดเอกฐานของ f ที่อยู่ใกล้จุด z_0 มากที่สุด ดังบทแทรกต่อไปนี้

บทนิยาม 5.11

กำหนดให้ $f(z)$ เป็นฟังก์ชันค่าเชิงซ้อนและ $z_0 \in \mathbb{C}$ z_0 เป็น**จุดเอกฐาน** (singularity) ของ f ถ้า f ไม่มีภาวะวิเคราะห์ที่จุด $z = z_0$ แต่ f มีภาวะวิเคราะห์ที่บางจุดในทุกย่านใกล้เคียงของ z_0

บทแทรก 5.2

ถ้า f เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ในบริเวณ D และ

$$f(z) = z_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$ มีรัศมีลู่เข้า r และ

z_1 เป็นจุดเอกฐานของ $f(z)$ ที่อยู่ใกล้ z_0 มากที่สุด จะได้ว่า $r = |z_1 - z_0|$

ตัวอย่าง 5.17 จงหารัศมีของการลู่เข้าของอนุกรมเทย์เลอร์รอบจุด z_0

1. $f(z)=\dfrac{1}{z-1}\,,\quad z_0=i$

2. $f(z)=\dfrac{z}{(z-2)(z-i)}\,,\quad z_0=1$

วิธีทำ 1. จาก $f(z)=\dfrac{1}{z-1}$ ซึ่ง $f(z)$ ไม่เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุด $z=1$

แสดงว่า $z=1$ เป็นจุดเอกฐานของ $f(z)$

จากบทแทรก 5.2 แสดงว่า

จะได้ $\begin{aligned} r &= \left|z-z_0\right| \\ &= \left|1-i\right| \\ &= \sqrt{1^2+(-1)^2} \\ &= \sqrt{2} \end{aligned}$

ดังนั้น รัศมีการลู่เข้าคือ $\sqrt{2}$

2. จาก $f(z)=\dfrac{z}{(z-2)(z-i)}$ ซึ่ง $f(z)$ ไม่เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุด $z=2,i$

แสดงว่า $z=2,i$ เป็นจุดเอกฐานของ $f(z)$

ให้ r_1 ระยะทางระหว่างจุด 2 และ 1

จะได้ $\begin{aligned} r_1 &= \left|z-z_0\right| \\ &= \left|2-1\right| \\ &= 1 \end{aligned}$

ให้ r_2 ระยะทางระหว่างจุด i และ 1

จะได้ $\begin{aligned} r_1 &= \left|z-z_0\right| \\ &= \left|i-1\right| \\ &= \sqrt{1^2+(-1)^2} \\ &= \sqrt{2} \end{aligned}$

ระยะทางที่สั้นที่สุดจากจุด $z=2,i$ ไปยัง 1 คือ 1

ดังนั้น รัศมีการลู่เข้าคือ 1

ตัวอย่าง 5.18 จงกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ของ $f(z)=\dfrac{1}{z}$ รอบจุด $z_0=1$ พร้อมทั้งหารัศมีการลู่เข้า

วิธีทำ จาก $f(z)=\dfrac{1}{z}$ และ $f(1)=\dfrac{1}{1}=1$

จะได้ $f'(z)=\dfrac{d}{dz}\left(\dfrac{1}{z}\right)=-\dfrac{1}{z^2}$ และ $f'(1)=-\dfrac{1}{1^2}=-1$

$f''(z)=\dfrac{d}{dz}\left(-\dfrac{1}{z^2}\right)=\dfrac{2}{z^3}$ และ $f''(1)=\dfrac{2}{1^3}=2=2!$

$f'''(z)=\dfrac{d}{dz}\left(\dfrac{2}{z^3}\right)=-\dfrac{6}{z^4}$ และ $f'''(1)=-\dfrac{6}{1^4}=-6=-3!$

$f^{(4)}(z)=\dfrac{d}{dz}\left(-\dfrac{6}{z^4}\right)=\dfrac{24}{z^5}$ และ $f^{(4)}(1)=\dfrac{24}{1^5}=24=4!$

$\vdots$

จากทฤษฎีบทของเทย์เลอร์ที่จุด $z=1$ จะได้

$$f(z)=f(1)+\frac{f'(1)(z-1)}{1!}+\frac{f''(1)(z-1)^2}{2!}+\frac{f'''(z_0)(z-z_0)^3}{3!}+\ldots$$

$$\frac{1}{z}=1-\frac{1!(z-1)}{1!}+\frac{2!(z-1)^2}{2!}-\frac{3!(z-1)^3}{3!}+\ldots$$

$$\frac{1}{z}=1-(z-1)+(z-1)^2-(z-1)^3+\ldots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n$$

ต่อไปหารัศมีของการลู่เข้าของอนุกรมเทย์เลอร์รอบจุด $z_0=1$

จาก $f(z)=\dfrac{1}{z}$ ซึ่ง $f(z)$ ไม่เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุด $z=0$

แสดงว่า $z=0$ เป็นจุดเอกฐานของ $f(z)$

จากบทแทรก 5.2 แสดงว่า

จะได้ $r=\left|z-z_0\right|=\left|0-1\right|=1$

ดังนั้น อนุกรมเทย์เลอร์ของ $f(z)=\dfrac{1}{z}$ รอบจุด $z_0=1$ คือ $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n$ และมีรัศมีลู่เข้าคือ 1

ตัวอย่าง 5.19 จงกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ของ $f(z)=\log z$ รอบ $z_0=1$ พร้อมทั้งหารัศมีการลู่เข้า

วิธีทำ จาก $f(z)=\log z$ และ $f(1)=\log 1=0$

จะได้ $f'(z)=\dfrac{d}{dz}\log z=\dfrac{1}{z}$ และ $f'(1)=\dfrac{1}{1}=1$

$f''(z)=\dfrac{d}{dz}\left(-\dfrac{1}{z}\right)=-\dfrac{1}{z^2}$ และ $f''(1)=-\dfrac{1}{1^2}=-1$

$f'''(z)=\dfrac{d}{dz}\left(-\dfrac{1}{z^2}\right)=\dfrac{2}{z^3}$ และ $f'''(1)=\dfrac{2}{1^3}=2$

$f^{(4)}(z)=\dfrac{d}{dz}\left(\dfrac{2}{z^3}\right)=-\dfrac{6}{z^4}$ และ $f^{(4)}(1)=-\dfrac{6}{1^4}=-6$

จากทฤษฎีบทของเทย์เลอร์ที่จุด $z=1$ จะได้

$$f(z)=f(1)+\frac{f'(1)(z-1)}{1!}+\frac{f''(1)(z-1)^2}{2!}+\frac{f'''(z_0)(z-z_0)^3}{3!}+\dots$$

$$\log z=0+\frac{1!(z-1)}{1!}-\frac{1!(z-1)^2}{2!}+\frac{2!(z-1)^3}{3!}-\frac{3!(z-1)^4}{4!}\dots$$

$$\log z=0+(z-1)-\frac{(z-1)^2}{2}+\frac{(z-1)^3}{3}-\frac{(z-1)^4}{4}+\dots$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(z-1)^n}{n}$$

ต่อไปหารัศมีของการลู่เข้าของอนุกรมเทย์เลอร์รอบจุด $z_0=1$

จาก $f(z)=\log z$ ซึ่ง $f(z)$ ไม่เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุด $z=0$

แสดงว่า $z=0$ เป็นจุดเอกฐานของ $f(z)$

จากบทแทรก 5.2 แสดงว่า

จะได้ $r=|z-z_0|$

$=|0-1|$

$=1$

ดังนั้น อนุกรมเทย์เลอร์ของ $f(z)=\log z$ รอบจุด $z_0=1$ คือ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(z-1)^n}{n}$

และมีรัศมีลู่เข้าคือ 1 วงกลมการลู่เข้า คือ $\{z\,\|z-1|=1\}$

ตัวอย่าง 5.20 จงกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ของ $f(z)=\sin z$ รอบจุด $z_0=\dfrac{\pi}{4}$

วิธีทำ จาก $\quad f(z)=\sin z \qquad$ และ $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

จะได้ $\quad f'(z)=\dfrac{d}{dz}\sin z=\cos z \qquad$ และ $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\cos\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$f''(z)=\dfrac{d}{dz}\left(\cos z\right)=-\sin z \qquad$ และ $f''\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=-\sin\dfrac{\pi}{4}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$f'''(z)=\dfrac{d}{dz}(-\sin z)=-\cos z \qquad$ และ $f'''\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=-\cos\dfrac{\pi}{4}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$f^{(4)}(z)=\dfrac{d}{dz}\left(-\cos z\right)=\sin z \qquad$ และ $f^{(4)}\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

จากทฤษฎีบทของเทย์เลอร์ที่จุด $z_0=\dfrac{\pi}{4}$ จะได้

$$f(z)=f\left(\frac{\pi}{4}\right)+\frac{f'\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(z-\frac{\pi}{4}\right)}{1!}+\frac{f''\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^2}{2!}+\frac{f'''\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^3}{3!}+\ldots$$

$$\sin z=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\left(z-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\sqrt{2}}{2\cdot 2!}\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^2-\frac{\sqrt{2}}{2\cdot 3!}\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^3\ldots$$

$$\sin z=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[1+\left(z-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2!}\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^2-\frac{1}{3!}\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^3\right]+\ldots$$

ดังนั้น อนุกรมเทย์เลอร์ของ $f(z)=\sin z$ รอบจุด $z_0=\dfrac{\pi}{4}$ คือ

$$\sin z=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[1+\left(z-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2!}\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^2-\frac{1}{3!}\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^3\right]+\ldots$$

ตัวอย่าง 5.21 กำหนดให้ $f(z)=\ln(1+z)$ จงกระจายอนุกรมแมคลอรินของ $f(z)$ พร้อมทั้งหารัศมีการลู่เข้า

วิธีทำ จาก $f(z)=\ln(1+z)$ และ $f(0)=\ln(1+0)=0$

จะได้ $f'(z)=\dfrac{1}{1+z}$ และ $f'\left(0\right)=\dfrac{1}{1+0}=1$

$f''(z)=-\dfrac{1}{(1+z)^2}$ และ $f''\left(0\right)=-\dfrac{1}{(1+0)^2}=-1$

$f'''(z)=\dfrac{2}{(1+z)^3}$ และ $f'''(0)=\dfrac{2}{(1+0)^3}=2=2!$

$f^{(4)}(z)=-\dfrac{6}{(1-z)^4}$ และ $f^{(4)}\left(0\right)=-\dfrac{6}{(1-0)^4}=-6=-3!$

จากอนุกรมแมคลอรินของ $f(z)$ จะได้

$$f(z)=f(0)+\frac{f'(1)z}{1!}+\frac{f''(0)(z)^2}{2!}+\frac{f'''(0)(z)^3}{3!}+\ldots$$

$$\log(1+z)=0+z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}\ldots$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}z^n}{n}$$

ต่อไปหารัศมีของการลู่เข้าของอนุกรมแมคลอริน

จาก $f(z)=\ln(1+z)$ ซึ่ง $f(z)$ ไม่เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุด $z=-1$

แสดงว่า $z=-1$ เป็นจุดเอกฐานของ $f(z)$

จากบทแทรก 5.2 แสดงว่า

จะได้ $r=\left|z-z_0\right|$

$=\left|-1-0\right|$

$=1$

ดังนั้น อนุกรมแมคลอรินของ $f(z)=\ln(1+z)$ คือ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}z^n}{n}$

และมีรัศมีลู่เข้าคือ 1 วงกลมการลู่เข้า คือ $\left\{z\middle|\left|z\right|=1\right\}$

5.4 การหาอนุกรมกำลังของฟังก์ชันอื่น ๆ

การกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ และอนุกรมแมคลอรินในหัวข้อที่ผ่านมานั้นจะเห็นว่าฟังก์ชัน $f(z)$ ที่กำหนดให้นั้นไม่ซับซ้อนทำให้สามารถกระจายอนุกรมต่าง ๆได้ตามทฤษฎีบทที่ให้มาได้ แต่ถ้าบางครั้งที่ $f(z)$ ที่กำหนดให้นั้นอยู่ในภาพที่ซับซ้อน การคำนวณหาสัมประสิทธิ์ของอนุกรมเทย์เลอร์และอนุกรมแมคลอรินโดยวิธีที่ได้จากทฤษฎีบทนั้นจะค่อนข้างยุ่งยาก และเสียเวลา ดังนั้นในหัวข้อนี้จะแสดงวิธีที่ใช้ในการคำนวนหาอนุกรมที่ซับซ้อนให้ง่ายขึ้น ดังต่อไปนี้

5.4.1 การแทนในฟังก์ชันพื้นฐาน

สำหรับการกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ และอนุกรมแมคลอรินโดยวิธีการแทนในฟังก์ชันพื้นฐานนั้นก่อนอื่นเราต้องทราบอนุกมแมคคลอรินฟังก์ชั้นพื้นฐานที่สำคัญดังที่ สมถวิล ขันเขตต์ (2558 : 130) ได้กล่าวไว้ดังนี้

1. $\dfrac{1}{z} = 1-(z-1)+(z-1)^2-(z-1)^3+\dots$ เมื่อ $0<\left|z\right|\le 1$
2. $\dfrac{1}{1-z} = 1+z+z^2+z^3+\dots$ เมื่อ $\left|z\right|<1$
3. $\dfrac{1}{1+z} = 1-z+z^2-z^3+\dots$ เมื่อ $\left|z\right|<1$
4. $\ln(1+z) = z-\dfrac{z^2}{2}+\dfrac{z^3}{3}-\dfrac{z^4}{4}+\dots$ เมื่อ $\left|z\right|\le 1$
5. $e^z = 1+\dfrac{z}{1!}+\dfrac{z^2}{2!}+\dfrac{z^3}{3!}+\dots$ เมื่อ $\left|z\right|<\infty$
6. $\sin z = z-\dfrac{z^3}{3!}+\dfrac{z^5}{5!}-\dfrac{z^7}{7!}+\dots$ เมื่อ $\left|z\right|<\infty$
7. $\cos z = 1-\dfrac{z^2}{2!}+\dfrac{z^4}{4!}-\dfrac{z^6}{6!}+\dots$ เมื่อ $\left|z\right|<\infty$
8. $\tan z = z+\dfrac{z^3}{3}+\dfrac{2z^5}{15}+\dots$ เมื่อ $\left|z\right|<\dfrac{\pi}{2}$
9. $\cot z = \dfrac{1}{z}-\dfrac{z}{3}-\dfrac{z^3}{45}-\dots$ เมื่อ $\left|z\right|<\dfrac{\pi}{2}$
10. $\sec z = 1+\dfrac{z^2}{2}+\dfrac{5z^4}{24}+\dots$ เมื่อ $\left|z\right|<\dfrac{\pi}{2}$
11. $\csc z = \dfrac{1}{z}+\dfrac{z}{6}+\dfrac{7z^3}{360}+\dots$ เมื่อ $0<\left|z\right|<\pi$

เมื่อเราทราบอนุกมแมคคลอรินฟังก์ชั้นพื้นฐานแล้วเราสามารถนำฟังก์ชันพื้นฐานนี้ไปช่วยในการกระจายอนุกรมแมคคลอรินที่ซับซ้อน ดังจะแสดงในตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 5.22 กำหนดให้ $f(z) = \dfrac{1}{1+z^3}$ จงกระจายอนุกรมแมคลอริน ของ $f(z)$

วิธีทำ จากอนุกรมแมคลอรินของ

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \ldots \quad \text{เมื่อ } |z| < 1$$

แทน z ด้วย z^3 จะได้

$$\frac{1}{1+z^3} = 1 - z^3 + \left(z^3\right)^2 - \left(z^3\right)^3 + \ldots \quad \text{เมื่อ } |z| < 1$$

ดังนั้น $\dfrac{1}{1+z^3} = 1 - z^3 + z^6 - z^9 + \ldots$ เมื่อ $|z| < 1$

ตัวอย่าง 5.23 กำหนดให้ $f(z) = \ln(1+z^2)$ จงกระจายอนุกรมแมคลอริน ของ $f(z)$

วิธีทำ จากอนุกรมแมคลอรินของ

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \ldots \quad \text{เมื่อ } |z| \le 1$$

แทน z ด้วย z^2 จะได้

$$\ln(1+z^2) = z^2 - \frac{\left(z^2\right)^2}{2} + \frac{\left(z^2\right)^3}{3} - \frac{\left(z^2\right)^4}{4} + \ldots \quad \text{เมื่อ } |z| < 1$$

ดังนั้น $\ln(1+z^2) = z^2 - \dfrac{z^4}{2} + \dfrac{z^6}{3} - \dfrac{z^8}{4} + \ldots$ เมื่อ $|z| < 1$

ตัวอย่าง 5.24 กำหนดให้ $f(z) = \cos(z^2+1)$ จงกระจายอนุกรมแมคลอริน ของ $f(z)$

วิธีทำ จากอนุกรมแมคลอรินของ

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \ldots \quad \text{เมื่อ } |z| < \infty$$

แทน z ด้วย z^2+1 จะได้

$$\cos(z^2+1) = 1 - \frac{(z^2+1)^2}{2!} + \frac{(z^2+1)^4}{4!} - \frac{(z^2+1)^6}{6!} + \ldots \quad \text{เมื่อ } |z| < \infty$$

ดังนั้น $\cos(z^2+1) = 1 - \dfrac{(z^2+1)^2}{2!} + \dfrac{(z^2+1)^4}{4!} - \dfrac{(z^2+1)^6}{6!} + \ldots$ เมื่อ $|z| < \infty$

สำหรับการกระจายอนุกรมเทย์เลอร์โดยใช้วิธีการแทนในฟังก์ชั้นพื้นฐานนั้นก็ยังมีข้อจำกัดในการกระจายเพราะไม่ใช่ทุกฟังก์ชันจะสามารถใช้โดยวิธีนี้ได้ดังนั้นจึงมีคนที่คิดค้นวิธีการอื่น ๆ ได้อีก

5.4.1 ใช้ทฤษฎีบททวินามและเศษส่วนย่อย

สมถวิล ขันเขตต์ (2558 : 132) ได้แสดงการใช้ทฤษฎีบททวินามและเศษส่วนย่อยในการกระจายกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ดังต่อไปนี้

จากทฤษฎีบททวินาม คือ

$$(x+y)^n = x^n + \frac{n}{1!}x^{n-1}y^1 + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}y^2 + \ldots + \frac{n}{1!}x^1y^{n-1} + y^n$$

แทนค่า $x=1,\ y=z$ และ $n=m$ ในทฤษฎีบททวินามจะได้

$$(1+z)^m = 1 + mz + \frac{m(m-1)}{2!}z^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{2!}z^3 \ldots$$

แทนค่า m ด้วย $-m$ จะได้

$$(1+z)^{-m} = \frac{1}{(1+z)^m}$$

$$= 1 - mz + \frac{m(m+1)}{2!}z^2 - \frac{m(m+1)(m+2)}{2!}z^3 \ldots$$

นั่นคือ

(5) $$(1+z)^{-m} = 1 - mz + \frac{m(m+1)}{2!}z^2 - \frac{m(m+1)(m+2)}{3!}z^3 + \ldots$$

ตัวอย่าง 5.25 จงหาอนุกรมเทย์เลอร์ของ $f(z) = \dfrac{z^2+3z-1}{z^3-3z-2}$ รอบจุด $z=1$ พร้อมทั้งรัศมีการลู่เข้าของอนุกรม

วิธีทำ จาก $$f(z) = \frac{z^2+3z-1}{z^3-3z-2}$$ g\

เขียนให้อยู่ในรูปของเศษส่วนย่อยจะได้

$$f(z) = \frac{1}{z^2+2z+1} + \frac{1}{z-2}$$

เขียนให้อยู่ในรูปเทอมของ $z-1$ ได้ดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{z^2+2z+1}+\frac{1}{z-2} \\
&= \frac{1}{(z+1)^2}+\frac{1}{(z-1)-1} \\
&= \frac{1}{\left[(z-1)+2\right]^2}-\frac{1}{1-(z-1)} \\
&= \frac{1}{\left[2\left(\frac{z-1}{2}+1\right)\right]^2}-\frac{1}{1-(z-1)} \\
&= \frac{1}{4\left(\frac{z-1}{2}+1\right)^2}-\frac{1}{1-(z-1)} \\
&= \frac{1}{4}\left(1+\frac{z-1}{2}\right)^{-2}-\frac{1}{1-(z-1)}
\end{aligned}$$

พิจารณา $\left(1+\frac{z-1}{2}\right)^{-2}$ ซึ่งอยู่ในรูปของทฤษฎีบททวินาม

แทนค่า $z=\frac{z-1}{2}$ และ $m=2$ ในสมการ (5) จะได้

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{z-1}{2}\right)^{-2} &= 1-2\left(\frac{z-1}{2}\right)+\frac{2(2+1)}{2!}\left(\frac{z-1}{2}\right)^2-\frac{2(2+1)(2+2)}{3!}\left(\frac{z-1}{2}\right)^3+\ldots \\
&= 1-(z-1)+\frac{3}{4}(z-1)^2-\frac{1}{2}(z-1)^3+\ldots
\end{aligned}$$

พิจารณา $\frac{1}{1-(z-1)}$

จากอนุกรมแมคลอรินของ $\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+z^3+\ldots$ เมื่อ $|z|<1$

แทน z ด้วย $z-1$ จะได้

$$\frac{1}{1-(z-1)}=1+(z-1)+(z-1)^2+(z-1)^3+\ldots$$

แสดงว่า

$$\frac{z^2+3z-1}{z^3-3z-2} = \frac{1}{4}\left(1+\frac{z-1}{2}\right)^{-2} - \frac{1}{1-(z-1)}$$

$$= \frac{1}{4}\left[1-(z-1)+\frac{3}{4}(z-1)^2-\frac{1}{2}(z-1)^3+...\right]$$
$$-\left[1+(z-1)+(z-1)^2+(z-1)^3+...\right]$$

$$= \left[\frac{1}{4}-\frac{1}{4}(z-1)+\frac{3}{16}(z-1)^2-\frac{1}{8}(z-1)^3+...\right]$$
$$-\left[1+(z-1)+(z-1)^2+(z-1)^3+...\right]$$

$$\frac{z^2+3z-1}{z^3-3z-2} = -\frac{3}{4}-\frac{5}{4}(z-1)-\frac{13}{16}(z-1)^2-\frac{9}{8}(z-1)^3-...$$

เนื่องจาก $f(z)=\dfrac{z^2+3z-1}{z^3-3z-2}$ มีจุดเอกฐานที่ $z=-1,2$

และ $z=2$ จุดเอกฐานที่ใกล้ที่สุดกับจุดศูนย์กลาง $z=1$

นั่นคือ อนุกรมนี้ลู่เข้าภายในวงกรม $\left|z-1\right|<1$ และรัศมีการลู่เข้าคือ 1

ดังนั้น $\dfrac{z^2+3z-1}{z^3-3z-2} = -\dfrac{3}{4}-\dfrac{5}{4}(z-1)-\dfrac{13}{16}(z-1)^2-\dfrac{9}{8}(z-1)^3-...$

และรัศมีการลู่เข้าคือ 1

5.5 อนุกรมลอเรนต์

การกระจายฟังก์ชันเป็นอนุกรมเทย์เลอร์รอบจุดใด ๆ จะลู่เข้าเมื่อฟังก์ชันวิเคราะห์ในย่านจุดของจุดนั้น ๆ สำหรับฟังก์ชันที่ไม่วิเคราะห์ที่จุดใดจุดหนึ่งจะไม่สามารถกระจายให้เป็นอนุกรมเทย์เลอร์รอบจุดนั้นได้ เช่น $f(z)=\dfrac{1}{z}$ จะไม่มีอนุกรมเทย์เลอร์รอบจุด $z=0$ แต่บางครั้งจำเป็นต้องกระจายฟังก์ชัน $f(z)$ รอบ ๆ จุดเอกฐาน ของ $f(z)$ ด้วย ซึ่งทฤษของเทย์เลอร์ไม่สามารถนำมาประยุกต์ใช้ได้ในกรณีนี้ ดังนั้นจึงมีอีกอนุกรมหนึ่งที่สามารถกระจาย $f(z)$ รอบจุดเอกฐาน ซึ่งเรียกอนุกรมนี้ว่าอนุกรมลอเรนต์ การกระจายลักษณะนี้มีบทบาทสำคัญในการศึกษาเรื่องจุดเอกฐานของฟังก์ชัน และทฤษฎีบทตกค้างซึ่งจะได้ศึกษาในบทถัดไป และ ณัฐกร สุคันธมาลา (2559 : 151) ได้ให้ทฤษฎีบทของอนุกรมลอเรนต์ไว้ดังต่อไปนี้

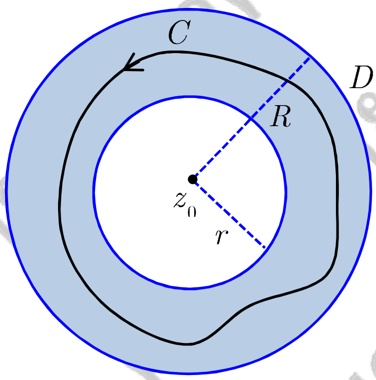
ทฤษฎีบท 5.10 (ทฤษฎีบทของลอเรนต์)

ถ้า f เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ในแผ่นวงแหวน D ซึ่งนิยามโดย $r < |z - z_0| < R$ แล้วจะได้ว่าสำหรับทุก ๆ z ภายใน D

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

โดยที่ $a_n = \dfrac{1}{2\pi i} \oint_C \dfrac{f(t)}{(t - z_0)^{n+1}} dt, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ เมื่อ C เป็นเส้นโค้งปิดเชิงเดียวภายใน D ที่รอบรอบ z_0 ดังภาพประกอบ

จากทฤษฎีบท 5.11 แสดงได้ดังภาพประกอบต่อไปนี้



ภาพประกอบ 5.2 วงแหวนที่ถูกล้อมรอบด้วยวงกลม C_1 และ C_2

ที่มา : ณัฐกร สุคันธมาลา. 2559 : 151

บทนิยาม 5.12

f เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์บนโดเมนรูปวงแหวน D ซึ่งนิยามโดย $r < |z - z_0| < R$ แล้วเรียกอนุกรม $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ โดยที่ $a_n = \dfrac{1}{2\pi i} \oint_C \dfrac{1}{(z - z_0)^{n+1}} f(z)\, dz, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ เมื่อ C เป็นเส้นโค้งปิดเชิงเดียวภายใน D ที่รอบรอบ z_0 ว่า **อนุกรมลอเรนต์** (Laurent series) ของ f รอบ z_0 และเรียกเซต $\{z \,|\, r < |z - z_0| < R\}$ ว่า**วงแหวนของการลู่เข้า** (annulus of convergence)

ตัวอย่าง 5.26 จงกระจาย $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-3)}$ ให้เป็นอนุกรมลอเรนต์รอบจุด $z=0$ สำหรับโดเมนรูปวงแหวนซึ่งนิยามโดย $1<\left|z\right|<3$

วิธีทำ จาก $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-3)}$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์บนวงแหวน $1<\left|z\right|<3$

จะได้อนุกรมลอเรนต์รอบจุด $z=0$ คือ

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_{n}(z)^{n} \quad \text{เมื่อ}$$

$a_{n}=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_{C}\dfrac{1}{(z-t)^{n+1}}f(t)\,dt$ สำหรับทุกจำนวนเต็ม n และ C เป็นวงกลมจุดศูนย์กลางที่ $z=0$ รัศมี r ซึ่ง $1<r<3$

ในกรณีที่ $n\geq 0$ จะได้ว่า จะได้ว่า $a_{n}=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_{C}\dfrac{1}{(t-1)(t-3)t^{n+1}}dt$

พิจารณา $\dfrac{1}{(t-1)(t-3)z^{n+1}}$ โดยการแยกเศษส่วนย่อยจะได้

$$\frac{1}{(t-1)(t-3)t^{n+1}}=\frac{A_{1}}{t-1}+\frac{A_{2}}{t-3}+\frac{B_{1}}{t}+\frac{B_{2}}{t^{2}}+\ldots+\frac{B_{n+1}}{t^{n+1}}$$

เมื่อ A_{i} และ B_{i} เป็นค่าคงตัว

เนื่องจาก C ไม่บรรจุ $z=3$ จากทฤษฎีบทของโคชี จึงได้ว่า

$$\oint_{C}\frac{A_{2}}{(t-3)}dt=0$$

และเนื่องจาก C เป็นวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ $z=0$ จึงได้ว่า

$$\oint_{C}\frac{B_{i}}{t^{i}}dz=0 \text{ สำหรับทุก ๆ ค่า } i>2$$

(จาก $\oint_{C}(z-z_{0})^{n}\,dz=\begin{cases}0, & n\neq -1\\ 2\pi i, & n=-1\end{cases}$)

ทำให้

$$a_{n}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C}\left(\frac{A_{1}}{t-1}+\frac{B_{1}}{t}\right)dz$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C}\frac{A_{1}}{t-1}dz+=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C}\frac{B_{1}}{t}dz$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\left(2\pi i A_1\right) + \frac{1}{2\pi i}\left(2\pi i B_1\right)$$

$$= A_1 + B_1$$

และจาก

$$\frac{1}{(t-1)(t-3)t^{n+1}} = \frac{A_1}{t-1} + \frac{A_2}{t-3} + \frac{B_1}{t} + \frac{B_2}{t^2} + \ldots + \frac{B_{n+1}}{t^{n+1}}$$

จะได้

$$1 = A_1(t-3)t^{n+1} + A_2(t-1)t^{n+1} + B_1(t-1)(t-3)t^n$$
$$+ B_2(t-1)(t-3)t^{n-1} + \ldots + B_{n+1}(t-1)(t-3)$$

แทนค่า $t = 1$ จะได้

$$1 = A_1(1-3)1^{n+1}$$
$$A_1 = -\frac{1}{2}$$

แทนค่า $t = 3$ จะได้

$$1 = A_2(3-1)3^{n+1}$$
$$A_2 = \frac{1}{2\cdot 3^{n+1}}$$

คูณ t ตลอดสมการ

$$\frac{1}{(t-1)(t-3)t^{n+1}} = \frac{A_1}{t-1} + \frac{A_2}{t-3} + \frac{B_1}{t} + \frac{B_2}{t^2} + \ldots + \frac{B_{n+1}}{t^{n+1}}$$

จะได้

$$\frac{1}{(t-1)(t-3)t^n} = \frac{A_1 t}{t-1} + \frac{A_2 t}{t-3} + B_1 + \frac{B_2}{t} + \ldots + \frac{B_{n+1}}{t^n}$$

พิจารณา

$$\lim_{z\to\infty}\frac{1}{(t-1)(t-3)t^n} = \lim_{z\to\infty}\frac{A_1 t}{t-1} + \frac{A_2 t}{t-3} + B_1 + \frac{B_2}{t} + \ldots + \frac{B_{n+1}}{t^n}$$

$$0 = A_1 + A_2 + B_1$$

$$B_1 = -A_1 - A_2$$

แทนค่า $A_1 = -\frac{1}{2}$ และ $A_2 = \frac{1}{2\cdot 3^{n+1}}$ จะได้

$$B_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3^{n+1}}$$

จาก $a_n = A_1 + B_1$ จะได้

$$a_n = -\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3^{n+1}}\right) = -\frac{1}{2 \cdot 3^{n+1}}$$

ในกรณีที่ $n < 0$ จะได้ว่า จะได้ว่า

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{1}{(t-1)(t-3)z^{n+1}} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{\left(\dfrac{t^{-n-1}}{t-3}\right)}{(t-1)} dz$$

จะเห็นว่า $\dfrac{t^{-n-1}}{t-3}$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ภายในและบน C ดังนั้นโดยสูตรปริพันธ์ของโคชี จะได้ว่า

$$\oint_C \frac{\left(\dfrac{t^{-n-1}}{t-3}\right)}{(t-1)} dt = -\frac{1}{2}(2\pi i) = -\pi i$$

นั่นคือ $a_n = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\oint_C \frac{\left(\dfrac{t^{-n-1}}{t-3}\right)}{(t-1)} dt = \dfrac{1}{2\pi i}(-\pi i) = -\dfrac{1}{2}$

จาก $\quad f(z) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$

จะได้ $\quad f(z) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$

$$= \sum_{n=-\infty}^{-1} \left(-\frac{1}{2} z^n\right) + \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2 \cdot 3^{n+1}}\right) z^n$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z^n}{3^{n+1}}\right)$$

ดังนั้น อนุกรมลอเรนต์ของ $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-3)}$ รอบจุด $z = 0$ คือ

$$f(z) = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z^n}{3^{n+1}}\right) \text{ สำหรับ } 1 < |z| < 3$$

จากตัวอย่างที่ผ่านมาจะเห็นว่าการกระจายฟังก์ชันเป็นอนุกรมลอเรนต์โดยใช้ทฤษฎีบทนั้นมีความยุ่งยากในขั้นตอนการหาสัมประสิทธิ์ a_n สำหรับตัวอย่างต่อไปจะจะไม่ใช้ทฤษฎีบทโดยตรงแต่จะแสดงการกระจายโดยใช้วิธีการการะจายอนุกรมเรขาคณิต อนุกรมเทย์เลอร์ และอนุกรมแมคลอริน ในหัวข้อที่ผ่านมากระจายให้อยู่ในรูปแบบตามต้องการ

ตัวอย่าง 5.27 จงกระจาย $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-3)}$ ให้เป็นอนุกรมลอเรนต์รอบจุด $z=0$ สำหรับโดเมนรูปวงแหวนซึ่งนิยามโดย $1<\left|z\right|<3$

วิธีทำ กำหนดให้ $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-3)}$ จากการแยกเศษส่วนย่อยจะได้

(1) $$\frac{1}{(z-1)(z-3)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(z-3)}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(z-1)}$$

ต่อไปจะการะจาย $\dfrac{1}{z-3}$ และ $\dfrac{1}{z-1}$ ให้เป็นอนุกรมในรูป $\sum a_n z^n$

โดยใช้เงื่อนไข $1<\left|z\right|<3$ ที่เหมาะสม

เนื่องจาก $\left|z\right|<3$ จะได้ $\left|\dfrac{z}{3}\right|<1$

พิจารณา $\dfrac{1}{z-3}=\dfrac{1}{-3\left(1-\dfrac{z}{3}\right)}=-\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{\left(1-\dfrac{z}{3}\right)}$

และจาก $\dfrac{1}{1-z}=1+z+z^2+z^3+\dots$ เมื่อ $\left|z\right|<1$

จะได้ $$\frac{1}{z-3}=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\left(1-\dfrac{z}{3}\right)} \text{ เมื่อ } \left|\frac{z}{3}\right|<1$$

$$=-\frac{1}{3}\cdot\left(1+\frac{z}{3}+\left(\frac{z}{3}\right)^2+\left(\frac{z}{3}\right)^3+\dots\right)$$

เนื่องจาก $\left|z\right|>1$ ดังนั้น $\left|\dfrac{1}{z}\right|<1$

พิจารณา $\dfrac{1}{z-1}=\dfrac{1}{z\left(1-\dfrac{1}{z}\right)}=\dfrac{1}{z}\cdot\dfrac{1}{\left(1-\dfrac{1}{z}\right)}$

และ จาก $\dfrac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \ldots$ เมื่อ $|z| < 1$

จะได้ $\dfrac{1}{z-1} = \dfrac{1}{z} \cdot \dfrac{1}{\left(1 - \dfrac{1}{z}\right)}$ เมื่อ $\left|\dfrac{1}{z}\right| < 1$

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z} \cdot \left(1 + \frac{1}{z} + \left(\frac{1}{z}\right)^2 + \left(\frac{1}{z}\right)^3 + \ldots\right)$$

แทน $\dfrac{1}{z-3}$ และ $\dfrac{1}{z-1}$ ในสมการ (1) จะได้

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{(z-1)(z-3)} \quad \text{เมื่อ } \left|\frac{1}{z}\right| < 1 \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(z-3)} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(z-1)} \\
&= -\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{3}\left(1 + \frac{z}{3} + \left(\frac{z}{3}\right)^2 + \left(\frac{z}{3}\right)^3 + \ldots\right)\right] - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{z}\left(1 + \frac{1}{z} + \left(\frac{1}{z}\right)^2 + \left(\frac{1}{z}\right)^3 + \ldots\right)\right] \\
&= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} + \frac{z}{3^2} + \frac{z^2}{3^3} + \frac{z^3}{3^4} + \ldots\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^4} + \ldots\right) \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z^n}{3^{n+1}}\right) - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z^n}\right) \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z^n}\right) - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z^n}{3^{n+1}}\right)
\end{aligned}$$

ดังนั้น อนุกรมลอเรนต์ของ $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-3)}$ รอบจุด $z = 0$ คือ

$$f(z) = -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z^n}{3^{n+1}}\right) \quad \text{สำหรับ } 1 < |z| < 3$$

ตัวอย่าง 5.28 จงกระจาย $f(z)=\dfrac{1}{z(z-1)}$ ให้เป็นอนุกรมลอเรนต์สำหรับโดเมนรูปวงแหวน $0<\left|z\right|<1$

วิธีทำ ในการกระจาย $f(z)=\dfrac{1}{z(z-1)}$ ให้เป็นอนุกรมลอเรนต์สำหรับโดเมนรูปวงแหวน $0<\left|z\right|<1$ จะเห็นว่าถึงแม้โจทย์ไม่ได้กำหนด z_0 แต่การนิยามวงแหวน $0<\left|z\right|<1$ นั้นหมายความว่าให้กระจายรอบ $z_0=0$ ซึ่งเป็นจุดศูนย์กลางของวงแหวน

เนื่องจาก $\left|z\right|<1$

พิจารณา $$f(z)=\frac{1}{z(z-1)}=-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-z}$$

และ จาก $\dfrac{1}{1-z}=1+z+z^2+z^3+\ldots$ เมื่อ $\left|z\right|<1$

จะได้ $$f(z)=-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-z} \text{ เมื่อ } \left|z\right|<1$$

$$=-\frac{1}{z}\left(1+z+z^2+z^3+\ldots\right)$$

$$=-\left(\frac{1}{z}+1+z+z^2+\ldots\right)$$

$$=-\sum_{n=1}^{\infty}\left(z^{n-2}\right)$$

ดังนั้น อนุกรมลอเรนต์ของ $f(z)=\dfrac{1}{z(z-1)}$ สำหรับโดเมนรูปวงแหวน $0<\left|z\right|<1$ คือ

$$f(z)=-\sum_{n=1}^{\infty}\left(z^{n-2}\right) \text{ สำหรับ } 1<\left|z\right|<3$$

ตัวอย่าง 5.29 จงกระจาย $f(z)=\dfrac{1}{z(z-1)}$ ให้เป็นอนุกรมลอเรนต์สำหรับโดเมนรูปวงแหวน $1<\left|z\right|$

วิธีทำ ในการกระจาย $f(z)=\dfrac{1}{z(z-1)}$ ให้เป็นอนุกรมลอเรนต์สำหรับโดเมนรูปวงแหวน $1<\left|z\right|$ จะเห็นว่าถึงแม้โจทย์ไม่ได้กำหนด z_0 แต่การนิยามวงแหวน $1<\left|z\right|$ นั้นหมายความว่าให้กระจายรอบ $z_0=0$ ซึ่งเป็นจุดศูนย์กลางของวงแหวน

จาก $1<\left|z\right|$ นั่นคือ $\left|\dfrac{1}{z}\right|<1$

พิจารณา $f(z)=\dfrac{1}{z(z-1)}=-\dfrac{1}{z}\cdot\left(\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{z}}\right)$

และ จาก $\dfrac{1}{1-z}=1+z+z^2+z^3+\ldots$ เมื่อ $|z|<1$

จะได้ $$f(z)=-\frac{1}{z}\cdot\left(\frac{1}{1-\frac{1}{z}}\right) \text{ เมื่อ } \left|\frac{1}{z}\right|<1$$

$$=-\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\left(\frac{1}{z}\right)^2+\left(\frac{1}{z}\right)^3+\ldots\right)$$

$$=-\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^4}+\ldots\right)$$

$$=-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z^n}\right)$$

ดังนั้น อนุกรมลอเรนต์ของ $f(z)=\dfrac{1}{z(z-1)}$ สำหรับโดเมนรูปวงแหวน $1<|z|$ คือ

$f(z)=-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{z^n}\right)$ สำหรับ $1<|z|$

ตัวอย่าง 5.30 จงกระจาย $f(z)=\dfrac{1}{z(z-1)}$ ให้เป็นอนุกรมลอเรนต์สำหรับโดเมนรูปวงแหวน $0<|z-1|<1$

วิธีทำ ในการกระจาย $f(z)=\dfrac{1}{z(z-1)}$ ให้เป็นอนุกรมลอเรนต์สำหรับโดเมนรูปวงแหวน $0<|z-1|<1$ จะเห็นว่าถึงแม้โจทย์ไม่ได้กำหนด z_0 แต่การนิยามวงแหวน $0<|z-1|<1$ นั้น หมายความว่าให้กระจายรอบ $z_0=1$ ซึ่งเป็นจุดศุนย์กลางของวงแหวน

จาก $|z-1|<1$

พิจารณา $f(z)=\dfrac{1}{z(z-1)}=\dfrac{1}{z-1}\cdot\left[\dfrac{1}{1+(z-1)}\right]$

และจาก $\dfrac{1}{1+z}=1-z+z^2-z^3+\ldots$ สำหรับ $|z|<1$

จะได้ $$f(z)=\frac{1}{z-1}\cdot\left[\frac{1}{1+(z-1)}\right] \quad \text{เมื่อ } \left|z-1\right|<1$$

$$=\frac{1}{z-1}\left[1-(z-1)+(z-1)^2-(z-1)^3+...\right]$$

$$=\frac{1}{z-1}-1+(z-1)-(z-1)^2+...$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^{n+1}\left(z-1\right)^{n-2}$$

ดังนั้น อนุกรมลอเรนต์ของ $f(z)=\dfrac{1}{z(z-1)}$ สำหรับโดเมนรูปวงแหวน $0<\left|z-1\right|<1$ คือ

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^{n+1}\left(z-1\right)^{n-2} \quad \text{สำหรับ } 0<\left|z-1\right|<1$$

ตัวอย่าง 5.31 จงกระจาย $f(z)=\dfrac{1}{z(z-1)}$ ให้เป็นอนุกรมลอเรนต์สำหรับโดเมนรูปวงแหวน $1<\left|z-1\right|<\infty$

วิธีทำ ในการกระจาย $f(z)=\dfrac{1}{z(z-1)}$ ให้เป็นอนุกรมลอเรนต์สำหรับโดเมนรูปวงแหวน $1<\left|z-1\right|<\infty$ จะเห็นว่าถึงแม้โจทย์ไม่ได้กำหนด z_0 แต่การนิยามวงแหวน $1<\left|z-1\right|<\infty$ นั้นหมายความว่าให้กระจายรอบ $z_0=1$ ซึ่งเป็นจุดศุนย์กลางของวงแหวน

จาก $1<\left|z-1\right|$ จะได้ $\left|\dfrac{1}{z-1}\right|<1$

พิจารณา $f(z)=\dfrac{1}{z(z-1)}$

$$=\frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{z}$$

$$=\frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{1+(z-1)}$$

$$=\frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{z-1}\left(\frac{1}{\frac{1}{z-1}+1}\right)$$

$$=\frac{1}{(z-1)^2}\left(\frac{1}{\frac{1}{z-1}+1}\right)$$

และจาก $\dfrac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \ldots$ สำหรับ $|z| < 1$

จะได้ $$f(z) = \frac{1}{(z-1)^2}\left(\frac{1}{\dfrac{1}{z-1}+1}\right) \quad \text{เมื่อ } \left|\frac{1}{z-1}\right| < 1$$

$$= \frac{1}{(z-1)^2}\left[1 - \frac{1}{z-1} + \left(\frac{1}{z-1}\right)^2 - \left(\frac{1}{z-1}\right)^3 + \ldots\right]$$

$$= \left(\frac{1}{z-1}\right)^2 - \left(\frac{1}{z-1}\right)^3 + \left(\frac{1}{z-1}\right)^4 - \left(\frac{1}{z-1}\right)^5 + \ldots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{z-1}\right)^{n+1}$$

ดังนั้น อนุกรมลอเรนต์ของ $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)}$ สำหรับโดเมนรูปวงแหวน $1 < |z-1| < \infty$ คือ

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{z-1}\right)^{n+1} \quad \text{สำหรับ } 1 < |z-1| < \infty$$

ตัวอย่าง 5.32 จงกระจาย $f(z) = \dfrac{\cos z}{z^3}$ ให้เป็นอนุกรมลอเรนต์สำหรับโดเมนรูปวงแหวน $|z| < \infty$

วิธีทำ ในการกระจาย $f(z) = \dfrac{\cos z}{z^3}$ ให้เป็นอนุกรมลอเรนต์สำหรับโดเมนรูปวงแหวน $|z| < \infty$ จะเห็นว่าถึงแม้โจทย์ไม่ได้กำหนด z_0 แต่การนิยามวงแหวน $|z| < \infty$ นั้นหมายความว่าให้กระจายรอบ $z_0 = 0$ ซึ่งเป็นจุดศูนย์กลางของวงแหวน

จาก $\cos z = 1 - \dfrac{z^2}{2!} + \dfrac{z^4}{4!} - \dfrac{z^6}{6!} + \ldots$ เมื่อ $|z| < \infty$

จะได้ $$f(z) = \frac{\cos z}{z^3}$$

$$= \frac{1}{z^3}\left[1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \ldots\right]$$

$$= \frac{1}{z^3} - \frac{1}{2!z} + \frac{z}{4!} - \frac{z^2}{6!} + \ldots$$

ดังนั้น อนุกรมลอเรนต์ของ $f(z) = \dfrac{\cos z}{z^3}$ สำหรับโดเมนรูปวงแหวน $|z| < \infty$ คือ

$$f(z) = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{2!z} + \frac{z}{4!} - \frac{z^2}{6!} + \ldots \quad \text{สำหรับ } |z| < \infty$$

5.6 สรุปท้ายบทที่ 5

ในบทนี้ได้ศึกษาลำดับของฟังก์ชันตัวแปรเชิงซ้อนนั้นก็มีแนวคิดทำนองเดียวกับลำดับของค่าคงตัวที่เราเราได้ศึกษามาแล้วแต่มีเรนจ์เป็นเซตย่อยของจำนวนเชิงซ้อนเท่านั้นถ้าเราสมาชิกทุกตัวในลำดับมาบวกกันเช่น ถ้า เป็นลำดับจำกัดที่มี n พจน์แล้วเรียกผลบวกว่าอนุกรมจำกัด ในกรณีที่เป็นลำดับอนันต์จะเรียกผลบวกว่าอนุกรมอนันต์ พร้อมทั้งทดสอบการลู่เข้าของอนุกรม การหารัศมีการลู่เข้าของอนุกรม นอกจากนี้เรายังนำอนุกรมกำลังของฟังก์ชันพื้นฐาน เช่น อนุกรมเทย์เลอร์ และอนุกรมแมคลอริน นำมาช่วยหาอนุกรมของฟังก์ชันอื่น ๆ และถ้าฟังก์ชันมีความซับซ้อนมาก ๆ สามารถนำเศษส่วนย่อยมาช่วยในการหาอนุกรมกำลังของฟังก์ชั้นนั้น จะทำให้หาอนุกรมกำลังฟังนั้นนั้นได้ง่ายขึ้น แต่การการกระจายฟังก์ชันเป็นอนุกรมเทย์เลอร์รอบจุดใด ๆ จะลู่เข้าเมื่องฟังก์ชันวิเคราะห์ในย่านจุดของจุดนั้น ๆ สำหรับฟังก์ชันที่ไม่วิเคราะห์ที่จุดใดจุดหนึ่งจะไม่สามารถกระจายให้เป็นอนุกรมเทย์เลอร์รอบจุดนั้นได้ ซึ่งทฤษของเทย์เลอร์ไม่สามารถนำมาประยุกต์ใช้ได้ในกรณีนี้ได้ดังนั้นจึงมีอีกอนุกรมอนุกรมลอเรนต์ ซึ่งสามารถกระจาย f รอบจุดเอกฐาน

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 5

1. จงตรวจสอบว่าอนุกรมที่กำหนดให้ต่อไปนี้ ลู่เข้าหรือลู่ออกถ้าลู่เขาจงหาผลบวกของอนุกรม

1.1 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2i}{3^{n+1}}\right)$ 1.2 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{i}{5^{n}}\right)$

1.3 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3i}{2^{n}}\right)$ 1.4 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{i+3}{3^{n}}\right)$

2. จงแสดงว่าอนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่ออก

2.1 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{ni-3i}{2n-1}\right)$ 2.2 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n^2-3i}{i-n^2}\right)$

2.3 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{i-5n}\right)$ 2.4 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^3i-3i}{6n^5}\right)$

3. จงหารัศมีการลู่เข้า และวงกลมการลู่เข้าของอนุกรมกำลังที่กำหนดให้

3.1 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(1-2i)^{n+1}}\cdot(z-2i)^n$ 3.2 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{i}{2+i}\right)\cdot z^n$

3.3 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\cdot 2^n}\left(z-1-i\right)^n$ 3.4 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^n}$

3.5 $\sum_{n=0}^{\infty}(1+3i)^n(z-i)^n$ 3.6 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-4+3i)^n}{3^{2n}}$

4. จงกระจายฟังก์ชันต่อไปนี้ให้เป็นอนุกรมแมคคลอริน และจงหารัศมีการลู่ข้าวของอนุกรม

4.1 $f(z)=\frac{z}{1-z}$ 4.2 $f(z)=\frac{1}{5z+2}$

4.3 $f(z)=ze^{-z}$ 4.4 $f(z)=\cos\left(\frac{z}{3}\right)$

5. จงกระจายฟังก์ชันต่อไปนี้ให้เป็นอนุกรมเทย์เลอร์รอบ z_0 ที่กำหนดให้ และจงหารัศมีการลู่เข้าของอนุกรม

5.1 $f(z) = e^{-3z}, \quad z_0 = 1$ 5.2 $f(z) = \ln z, \quad z_0 = 1$

5.3 $f(z) = \sin z \quad z_0 = \dfrac{\pi}{2}$ 5.4 $f(z) = \cos z \quad z_0 = \dfrac{\pi}{2}$

6. จงคำนวณหาอนุกรมเทย์เลอร์จาก $f(z) = \dfrac{1}{4-3z}$ รอบจุดศูนย์กลาง $z = 1 + i$

7. กำหนดให้ $f(z) = \dfrac{1}{z-3}$ จงหาอนุกรมลอเรนต์และบริเวณการลู่เข้าเมื่อ

7.1 กำลังของ z เป็นบวก

7.2 กำลังของ z เป็นลบ

8. จงกระจาย $f(z) = \dfrac{1}{z(z+1)}$ ให้เป็นอนุกรมลอเรนต์สำหรับวงแหวนต่อไปนี้

8.1 $0 < |z| < 1$ 8.2 $1 < |z|$

8.3 $0 < |z+1| < 1$ 8.4 $1 < |z-1| < 2$

9. จงกระจาย $f(z) = \dfrac{1}{z^2 - z - 2}$ ให้เป็นอนุกรมลอเรนต์สำหรับวงแหวนต่อไปนี้

8.1 $|z| < 1$ 8.2 $1 < |z| < 2$

8.3 $2 < |z|$ 8.4 $0 < |z-2| < 3$

8.5 $3 < |z-2|$

10. กำหนดให้ $f(z) = \dfrac{1}{z^2+1}$ จงหาอนุกรมรอเรนต์ซึ่งลู่เข้าเมื่อ $0 < |z-i| < r$ พร้อมทั้งกำหนดบริเวณที่ถูกต้องของการลู่เข้า

บรรณานุกรม

เกียรติสุดา นาคประสิทธิ์. (2556). **ฟังก์ชันของตัวแปรเชิงซ้อน.** ขอนแก่น : มหาวิทยาลัยขอนแก่น.

ก่อสุข วีระถาวร. (2542). **ฟังก์ชันของตัวแปรเชิงซ้อน.** กรุงเทพมหานคร : มหาวิทยาลัยรามคำแหง.

คณาจารย์Think Beyond Genius. (2559). **UNHATE MATH : สรุปหลักคณิตศาสตร์ ม.ปลาย ฉบับสมบูรณ์.** นนทบุรี : ธิงค์ บียอนด์ บุ๊คส์.

จีระ เจริญสุขวิมล และวินิจ วงศ์รัตนะ. (2544). **คณิตศาสตร์ ม.5.** กรุงเทพมหานคร : เจ้าพระยาระบบการพิมพ์ จำกัด.

ณัฐกร สุคันธมาลา. (2559). **ตัวแปรเชิงซ้อน**. เชียงใหม่ : วนิดาการพิมพ์.

ดำรง ทิพย์โยธา. (2558). **แคลคูลัส 2.** กรุงเทพมหานคร : จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

ธนิต มาลากร. (2556). **ฟังก์ชันเชิงซ้อนและการประยุกต์.** กรุงเทพมหานคร : จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

ประสิทธิ์ ลิ้มบุพศิริพร. (2557). **การวิเคราะห์เชิงซ้อน.** นครปฐม : มหาวิทยาลัยศิลปากร.

ปิยรัตน์ จาตุรันตบุตร. (2547). **หลักการคณิตศาสตร์.** กรุงเทพมหานคร : ด่านสุทธาการพิมพ์.

พัชรา ไชยะสุริยา. (2544). **ฟังก์ชันของตัวแปรเชิงเซ้อน.** มหาวิทยาลัยรามคำแหง. กรุงเทพมหานคร.

พัชรา วันเพ็ญ. (2529). **ฟังก์ชันตัวแปรเชิงซ้อน.** กรุงเทพมหานคร : ห้างหุ้นส่วนจำกัด โรงพิมพ์ชวนพิมพ์.

วัชรีกาญจน์ กีรติ. (2551). พีชคณิตนามธรรม. กรุงเทพมหานคร : สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

สมเกียรติ ตั้งพูลผล. (2535). **ฟังก์ชันของตัวแปรเชิงซ้อน.** ขอนแก่น : มหาวิทยาลัยขอนแก่น.

สมถวิล ขันเขตต์. (2558). **ตัวแปรเชิงซ้อน.** อุบลราชธานี : สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏอุบลราชธานี.

Churchill RV, Broun JW. (1990) **Complex variable and applications.** 8th ed. New York : McGraw-Hill.

Murray R.S., Seymour L.,Jhon J.S. and Dennis S. (2009). **Complex Variables with an Introduction to conformal Mapping and its Application.** McGraw Hill. New York.