สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

วชิรารักษ์ โอรสรัมย์

คณะวิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัยราชภัฏบุรีรัมย์
ISBN 978-616-394-608-9
2558

สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

วชิรารักษ์ โอรสรัมย์
วท.ม. (คณิตศาสตร์ศึกษา)

คณะวิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัยราชภัฏบุรีรัมย์
ISBN 978-616-394-608-9
2558

คำนำ

สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ เล่มนี้เรียบเรียงขึ้นโดยมีวัตถุประสงค์เพื่อใช้เป็นหนังสือประกอบการศึกษาค้นคว้าสำหรับนักศึกษาระดับปริญญาตรีที่ศึกษาทางด้านคณิตศาสตร์ ซึ่งเนื้อหาในเล่มนี้ประกอบไปด้วย ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับสมการเชิงอนุพันธ์ สมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งและระดับขั้นหนึ่ง การประยุกต์สมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง สมการเชิงเส้นอันดับ n สมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นเอกพันธุ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว สมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นไม่เอกพันธุ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว สมการเชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปร ผลการแปลงลาปลาซ และผลการแปลงลาปลาซผกผัน

แนวทางในการเขียนตำราเล่มนี้ ประกอบด้วยความหมายของบทนิยาม และทฤษฎีบท และขั้นตอนนการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ พร้อมทั้งการประยุกต์สมการเชิงอนุพันธ์กับการแก้ปัญหาต่าง ๆ เช่น ปัญหาแนววิถีเชิงตั้งฉาก ปัญหาทางกลศาสตร์ ปัญหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาณที่สนใจ เช่น ปัญหาการสลายตัวของสารกัมมันตรังสี ปัญหาการเพิ่มของประชากร ปัญหาของผสม และปัญหาการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิของวัตถุ ตัวอย่างต่าง ๆ ที่เขียนไว้ในเล่มส่วนใหญ่จะแสดงวิธีทำที่ละเอียดทั้งการจัดรูปแบบทางพีชคณิต และการทบทวนความรู้เกี่ยวกับแคลคูลัส เพื่อจะได้อ่านได้เข้าใจ และสามารถประยุกต์การแก้ปัญหากับปัญหาอื่น ๆ ได้ดีขึ้น

ปัจจุบันได้มีการนำเทคโนโลยี เข้ามาช่วยในการคำนวณหาผลเฉลยของสมการรูปแบบต่าง ๆ เช่นโปรแกรม Wolfram Alpha โปรแกรมนี้เป็นโปรแกรมที่น่าเชื่อถือ เพราะมีการพัฒนาต่อยอดมาจากโปรแกรมคำนวณระดับสูงที่ชื่อว่า Mathematica ซึ่งนักวิทยาศาสตร์ใช้กันอยู่อย่างแพร่หลาย ในมหาวิทยาลัยชั้นนำต่าง ๆ ของโลกจึงเชื่อถือความสามารถในการคำนวณได้ และยังเป็นโปรแกรมที่ใช้งานได้ง่าย ดังนั้นในตำราเล่มนี้ผู้เขียนได้ใช้ Wolfram Alpha ช่วยในการหาผลเฉลยของสมการในบางตัวอย่าง

ข้าพเจ้าขอขอบพระคุณท่านผู้แต่งและเรียบเรียงโดยผู้ทรงคุณวุฒิหลายท่านดังที่ปรากฏอยู่ในบรรณานุกรมป็นอย่างสูง ข้าพเจ้าหวังเป็นอย่างยิ่งว่าตำราเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเล่มนี้คงเป็นประโยชน์ต่อการเรียนของนักศึกษา และผู้สนใจทั่วไป

วชิรารักษ์ โอรสรัมย์
พฤษภาคม 2558

สารบัญ

สารบัญ(ต่อ)

เรื่อง **หน้า**

สารบัญ(ต่อ)

สารบัญรูปภาพ

รูปภาพ **หน้า**

สารบัญรูปภาพ(ต่อ)

รูปภาพ **หน้า**

สารบัญรูปภาพ(ต่อ)

สารบัญตาราง

ตาราง **หน้า**

บทที่ 1
ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับสมการเชิงอนุพันธ์

ในบทนี้จะเป็นการแนะนำความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับสมการเชิงอนุพันธ์ ตั้งแต่ประวัติการเกิดขึ้นมาของสมการเชิงอนุพันธ์ ความหมายของสมการเชิงอนุพันธ์ในรูปแบบต่าง ๆ เช่นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ อันดับและระดับขั้นของสมการเชิงอนุพันธ์ ลักษณะของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น และสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เป็นสมการเชิงเส้น ซึ่งมีการกล่าวผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ เช่น ผลเฉลยชัดแจ้ง และผลเฉลยโดยปริยาย ผลเฉลยเอกฐาน วงศ์ผลเฉลยสำหรับพารามิเตอร์หนึ่งตัว ผลเฉลยทั่วไป ปัญหาค่าเริ่มต้นเพื่อนำไปสู่การหาผลเฉลยเฉพาะ เมื่อรู้จักรูปแบบต่าง ๆ ของผลเฉลยแล้ว ทางหนึ่งที่จะได้สมการเชิงอนุพันธ์ คือการกำจัดตัวคงค่าจากความสัมพันธ์ที่กำหนดให้ ซึ่งเราสามารถสร้างสมการเชิงอนุพันธ์ได้จากความสัมพันธ์ที่เกี่ยวข้องกับตัวคงค่า โดยการกำจัดตัวคงค่าเหล่านั้น จะเกิดสมการเชิงอนุพันธ์ ซึ่งอันดับของสมการที่จะสร้างต้องเท่ากับจำนวนของตัวคงค่า และก่อนที่เราจะศึกษาวิธีการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ ควรตรวจสอบว่าสมการนั้น ๆ มีผลเฉลยหรือไม่ เพราะถ้าสมการไม่มีผลเฉลยจะได้ไม่เสียเวลาในการหา หรือถ้าสมการมีผลเฉลยมากกว่าหนึ่งผลเฉลยก็จะได้ทราบก่อนที่จะเสียเวลาหาผลเฉลยมาแล้วพบว่าไม่ใช่ผลเฉลยที่ต้องการ ซึ่งใช้ ทฤษฎีบทการมีจริงและความเป็นไปได้อย่างเดียว

1.1 ประวัติของสมการเชิงอนุพันธ์

จุดกำเนิดของสมการเชิงอนุพันธ์เริ่มขึ้นในปี ค.ศ. 1671 เมื่อเซอร์ไอแซคนิวตัน (Sir Isaac Newton) ได้จำแนกสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับหนึ่งแบบธรรมดาออกเป็น 3 กลุ่ม ซึ่งในขณะนั้นนิวตันเรียกชื่อสมการเหล่านี้ว่าสมการฟลักซิโอนัล (fluxional) นิวตันคาดว่าคำตอบของสมการเหล่านี้อยู่ในรูปอนุกรมอนันต์ และเขาได้ให้วิธีการหาสัมประสิทธิ์ของอนุกรมอนันต์โดยวิธีการที่คล้ายกับวิธีการในปัจจุบัน นอกจากนี้ นิวตันเป็นผู้เริ่มใช้สัญลักษณ์ y' แทนความหมายของอนุพันธ์ของ y เทียบกับตัวแปรอิสระ

ผู้เริ่มต้นใช้สัญลัษณ์อนุพันธ์ dy และสัญลักษณ์สำหรับปริพันธ์ $\int$ คือไลบ์นิตซ์ (Gottfried Leibniz) เขาได้เริ่มใช้สัญลักษณ์ทั้งคู่ในปี ค.ศ. 1675 ในรูป

$$\int y\,dy = \frac{1}{2}y^2$$

ในปี ค.ศ. 1676 ไลบ์นิตซ์ได้เริ่มใช้ศัพท์สมการเชิงอนุพันธ์ในการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างสองอนุพันธ์ dx และ dy ซึ่งนับว่าเป็นจุดเริ่มต้นของแขนงวิชาทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับอนุพันธ์

ในปี ค.ศ. 1690 แบร์นูลลี (Jacques Bernoulli) ได้เริ่มใช้คำว่าปริพันธ์ ในปี ค.ศ. 1691 ไลบ์นิตซ์ ได้ให้วิธีการแก้สมการเชิงอนุพันธ์จนถึงปลายศตวรรษที่ 17 เทคนิคของการแก้สมการเชิงอนุพันธ์โดยทั่วไปได้ถูกนำมาใช้ และต่อมาพบว่าเทคนิคเหล่านี้ยังไม่เป็นที่เพียงพอในการแก้สมการเชิงอนุพันธ์

ในสมัยเริ่มแรกของการพัฒนาการศึกษาสมการเชิงอนุพันธ์ เป็นที่เชื่อกันว่าสมการเชิงอนุพันธ์ซึ่งได้มาจากปัญหาทางเรขาคณิตหรือกลศาสตร์มีคำตอบในรูปฟังก์ชันพื้นฐานเท่านั้น ดังนั้นการหาคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์จึงมุ่งไปในการหาผลเฉลยเด่นชัด จนถึงปี ค.ศ. 1723 จึงทราบกันว่าแม้แต่สมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับหนึ่งก็อาจจะหาผลเฉลยซึ่งเขียนอยู่ในรูปของฟังก์ชันพื้นฐานไม่ได้

ในปี ค.ศ. 1739 เลียวนาดออยเลอร์ (Leonard Euler) ได้ริเริ่มวิธีการแปรผันของพารามิเตอร์หลังจากที่แบร์นูลลีไม่ประสพความสำเร็จในการแก้สมการเชิงเส้นแบบเอกพันธุ์ที่มีสัมประสิทธ์เป็นค่าคงตัว ต่อมาในปี ค.ศ. 1743 ออยเลอร์ได้เขียนวิธีการแก้สมการประเภทนี้ไว้อย่างสมบูรณ์และเขายังให้วิธีการแก้สมการเชิงเส้นแบบไม่เป็นเอกพันธุ์ไว้ด้วย

โอกุสแตง ลุยส์ โคชี (Augustin-Louis Cauchy) เป็นผู้ค้นคว้าศึกษาสมการเชิงอนุพันธ์ไว้มากมาย ระหว่างปี ค.ศ. 1820 – 1829 โคชีได้ให้ทฤษฎีบทนี้ไปสู่กรณีของระบบสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งจำนวน n สมการ ซึ่งเป็นระบบที่แทนสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ n ในปี ค.ศ. 1876 รูดอล์ฟ ลิปซิตซ์ (Rudolf Lipschitz) ได้วางนัยทั่วไปทฤษฎีบทของการมีคำตอบของโคชี และในปี ค.ศ. 1893 เอมีลปิกาด์ (Emile Picard) ได้ปรับปรุงทฤษฎีบทของโคชีโดยใช้วิธีการประมาณสืบเนื่อง (วารี เกรอต, 2542 : 1-2)

1.2 นิยามและตัวอย่างของสมการเชิงอนุพันธ์

ในหัวข้อนี้จะเป็นการให้บทนิยามของสมการเชิงอนุพันธ์รูปแบบต่าง ๆ เช่นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ อันดับและระดับขั้นของสมการเชิงอนุพันธ์ สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นและสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เป็นสมการเชิงเส้นดังต่อไปนี้ (ดำรง ทิพย์โยธา, 2541 : 1-4)

บทนิยาม 1.1

สมการเชิงอนุพันธ์ คือสมการซึ่งประกอบด้วยอนุพันธ์หรือดิฟเฟอเรนเชียลของตัวแปรตามเทียบกับตัวแปรอิสระโดยที่อนุพันธ์อาจมีเพียงตัวเดียวหรือหลายตัวก็ได้

ตัวอย่าง 1.1 สมการต่อไปนี้เป็นสมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} + 2xy = 0$$

$$2xy^2dx - xdy = 0$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3x^2\frac{dy}{dx} - 2xy = 0$$

$$(2x - y^2)dx = -xdy$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + t^2\frac{dy}{dt} - 2 = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)^3 + \frac{\partial f}{\partial y} = 2x$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} + h^2 r\frac{\partial^2 v}{\partial h^2} = 6$$

บทนิยาม 1.2

สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ คือสมการเชิงอนุพันธ์ซึ่งประกอบด้วยอนุพันธ์ที่เทียบกับตัวแปรอิสระเพียงตัวเดียวเท่านั้น

ตัวอย่าง 1.2 สมการต่อไปนี้เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

$$\frac{dy}{dx} - 2x = 5$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} + 2xy\frac{dy}{dx} = 0$$

$$xydx - 2y^2dy = 5$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^5 - 2xy = 0$$

$$(x - 2y^2)dx - (3 - x)dy = 0$$

$$\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^5 + t^2\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 - 2 = 0$$

บทนิยาม 1.3

สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย คือสมการเชิงอนุพันธ์ซึ่งประกอบด้วยอนุพันธ์ที่เทียบกับตัวแปรอิสระตั้งแต่สองตัวขึ้นไป

ตัวอย่าง 1.3 สมการต่อไปนี้เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

$$3\frac{\partial v}{\partial r} + r\frac{\partial^2 v}{\partial h^2} = 6h^2 r$$

$$(t-2)\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} + (st - t^3)\frac{\partial s}{\partial r} = 0$$

บทนิยาม 1.4

อันดับของสมการเชิงอนุพันธ์ หมายถึงอันดับของอนุพันธ์ที่มีอันดับสูงสุดที่ปรากฏอยู่ในสมการ

บทนิยาม 1.5

ระดับขั้นของสมการเชิงอนุพันธ์ หมายถึงเลขชี้กำลังที่มีค่ามากที่สุดของอนุพันธ์ซึ่งมีอันดับสูงสุด ในกรณีที่สามารถทำให้ทุก ๆ อนุพันธ์ในสมการเชิงอนุพันธ์มีเลขชี้กำลังเป็นเลขจำนวนเต็มบวก

ตัวอย่าง 1.4

$$\frac{d^3y}{dx^3}+2xy^5\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0$$

เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสาม และมีระดับขั้นหนึ่ง

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^5+3x^2\frac{dy}{dx}-2xy=0$$

เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสอง และมีระดับขั้นห้า

$$\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)^{2/3}-\frac{d^2y}{dx^2}=5$$

เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสี่ และมีระดับขั้นสอง เพราะจัดรูปสมการใหม่ได้

$$\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)^2=\left[5+\frac{d^2y}{dx^2}\right]^3$$

บทนิยาม 1.6

สมการเชิงอนุพันธ์จะเรียกว่าเป็น**สมการเชิงเส้นอันดับ** n คือสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ n ที่มีรูปดังนี้

$$a_0(x)\frac{d^ny}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}+a_n(x)y=f(x)$$

เมื่อ $a_0(x),\ a_1(x),\ldots a_{n-1}(x),\ a_v(x)$ และ $f(x)$ คือฟังก์ชันของตัวแปร x เท่านั้น

สมการเชิงอนุพันธ์ที่ไม่เป็นสมการเชิงเส้นจะเรียกว่าสมการไม่เป็นเชิงเส้น

ตัวอย่าง 1.5

$$\frac{dy}{dx}-2xy=5$$ เป็นสมการเชิงเส้นอันดับหนึ่ง

$$\frac{d^2y}{dx^2}+3x^2\frac{dy}{dx}-2xy=0$$ เป็นสมการเชิงเส้นอันดับสอง

$$x^2\frac{d^4y}{dx^4}+3x\frac{d^3y}{dx^3}-\frac{dy}{dx}=(x+2)^3$$ เป็นสมการเชิงเส้นอันดับสี่

$$\frac{d^2y}{dx^2}+3x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2xy=0$$ สมการไม่เป็นเชิงเส้น

$$y\frac{d^2y}{dx^2}+3x^2\frac{dy}{dx}-xy=x$$ สมการไม่เป็นเชิงเส้น

1.3 ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์

ในหัวข้อนี้จะให้บทนิยามของผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ แบบต่าง ๆ เช่นผลเฉลยชัดแจ้ง ผลเฉลยโดยปริยาย ผลเฉลยเอกฐาน วงศ์ผลเฉลยสำหรับพารามิเตอร์หนึ่งตัว ผลเฉลยทั่วไป และปัญหาค่าเริ่มต้นเพื่อนำไปสู่การหาผลเฉลยเฉพาะ (สมศักดิ์ เทศสวัสดิ์วงศ์, 2544 : 3-9)

บทนิยาม 1.7

ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ คือความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรอิสระและตัวแปรตามซึ่งไม่อยู่ในรูปอนุพันธ์ ซึ่งสอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์นั้น หมายความว่า เมื่อนำผลเฉลยไปแทนในสมการเชิงอนุพันธ์แล้วทำให้สมการนั้นเป็นจริง

ตัวอย่าง 1.6 จงแสดงว่า $y=3e^{2x}$ เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ $\frac{dy}{dx}-2y=0$

วิธีทำ จาก $y=3e^{2x}$,

ได้ $$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}3e^{2x}=6e^{2x},$$

ดังนั้น
$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}-2y&=6e^{2x}-2(3e^{2x})\\&=6e^{2x}-6e^{2x}\\&=0\end{aligned}$$

จะพบว่า $y=3e^{2x}$ สอดคล้องกับสมการ $\frac{dy}{dx}-2y=0$

ดังนั้น $y=3e^{2x}$ จึงเป็นผลเฉลยของสมการ $\frac{dy}{dx}-2y=0$

ตัวอย่าง 1.7 จงแสดงว่า $y = \sin x$ และ $y = \cos x$ เมื่อ $x \in R$ ต่างก็เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = 0$

วิธีทำ จาก $y = \sin x,$

ได้
$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\sin x$$
$$= \cos x,$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\cos x$$
$$= -\sin x,$$

ดังนั้น $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = -\sin x + \sin x = 0$

จะพบว่า $y = \sin x$ สอดคล้องกับสมการ $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = 0$

จาก $y = \cos x,$

ได้
$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\cos x$$
$$= -\sin x,$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(-\sin x)$$
$$= -\cos x,$$

จะได้ $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = -\cos x + \cos x = 0$

จะพบว่า $y = \cos x$ สอดคล้องกับสมการ $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = 0$

ดังนั้น $y = \sin x$ และ $y = \cos x$ เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = 0$

บทนิยาม 1.8

ให้ $F(x, y, y', y'', y^{(3)}, ..., y^{(n)}) = 0$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ n ฟังก์ชัน $y = f(x)$ เป็น**ผลเฉลยชัดแจ้ง**ของสมการนี้บนช่วงเปิด I ถ้าแทนค่า $y = f(x)$ ลงในสมการ $F(x, y, y', y'', y^{(3)}, ..., y^{(n)}) = 0$ แล้วทำให้สมการเป็นจริงทุก ๆ ค่า $x \in I$

จากนิยามจะเห็นได้ว่าผลเฉลยชัดแจ้งของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ n จะมีอนุพันธ์ตั้งแต่อันดับที่หนึ่งจนถึงอันดับที่ n บนช่วงเปิด I จะได้ว่า $y, y', y'', y^{(3)}, \ldots, y^{(n-1)}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงเปิด I โดยทั่วไปในการกำหนด $F(x, y, y', y'', y^{(3)}, \ldots, y^{(n)}) = 0$ จะไม่ได้ระบุช่วง I ไว้ แต่เป็นที่เข้าใจว่าในการหาผลเฉลยของ $F(x, y, y', y'', y^{(3)}, \ldots, y^{(n)}) = 0$ นั้นเราจะหา $y = f(x)$ และช่วงเปิด I ที่ใหญ่ที่สุดซึ่งทำให้ $y = f(x)$ นิยามบนช่วงนี้และสอดคล้องกับ $F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$ ทุก ๆ ค่า $x \in I$

ความสัมพันธ์ $g(x, y) = 0$ เป็นผลเฉลยโดยปริยายของสมการ $F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$ บนช่วงเปิด I ถ้า

1. เราสามารถนิยามฟังก์ชัน $y = f_1(x)$ บนช่วงเปิด I ได้อย่างน้อยหนึ่งฟังก์ชันจากความสัมพันธ์ $g(x, y) = 0$ แล้วทำให้ $y = f_1(x)$ เป็นผลเฉลยโดยชัดแจ้งของสมการ $F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$ หรือ
2. ความสัมพันธ์ $g(x, y) = 0$ นั้นสอดคล้องกับ $F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$ บนช่วงเปิด I

ตัวอย่าง 1.8 กำหนดให้ $x \in R$ จงแสดงว่า $y = \cos x + \sin x$ เป็นผลเฉลยของสมการ

(1) $$y'' + y = 0$$

วิธีทำ จาก $y = \cos x + \sin x,$

ได้
$$\begin{aligned} y' &= \frac{d}{dx}(\cos x + \sin x) \\ &= -\sin x + \cos x, \\ y'' &= \frac{d}{dx}(-\sin x + \cos x) \\ &= -\cos x - \sin x, \end{aligned}$$

นำ y และ y'' แทนในสมการ(1) ได้

$$y'' + y = (-\cos x - \sin x) + (\cos x + \sin x) = 0$$

จะพบว่า $y = \cos x + \sin x$ สอดคล้องกับสมการ (1)

ดังนั้น $y = \cos x + \sin x$ เป็นผลเฉลยของสมการ (1)

ตัวอย่าง 1.9 กำหนดให้ $x \in (-3,3)$ จงแสดงว่า $x^2 + y^2 = 9$ เป็นผลเฉลยโดยปริยายของสมการ

(2) $$x + yy' = 0$$

วิธีทำ จาก $$x^2 + y^2 = 9,$$

หาอนุพันธ์เทียบกับ x ได้

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}9,$$

$$\frac{d}{dx}x^2 + \frac{d}{dx}y^2 = 0,$$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0,$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y},$$

$$y' = -\frac{x}{y},$$

นำ y' แทนลงในสมการ (2) ได้

$$x + yy' = x + y\left(-\frac{x}{y}\right) = x - x = 0,$$

จะพบว่า $x^2 + y^2 = 9$ สอดคล้องกับสมการ (2)

ดังนั้น $x^2 + y^2 = 9$ เป็นผลเฉลยโดยปริยายของสมการ (2)

บทนิยาม 1.9

กำหนดให้ $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ n **ผลเฉลยทั่วไป** ของสมการ $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ หมายถึงผลเฉลยที่ประกอบด้วยตัวคงค่า n ค่า

ตัวอย่าง 1.10 กำหนดให้ c_1, c_2 เป็นตัวคงค่า จงแสดงว่า $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการ

(3) $$y'' + y = 0$$

วิธีทำ จาก $$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x,$$

ได้ $$y' = \frac{d}{dx}(c_1 \cos x + c_2 \sin x)$$
$$= -c_1 \sin x + c_2 \cos x,$$
$$y'' = \frac{d}{dx}(-c_1 \sin x + c_2 \cos x)$$
$$= -c_1 \cos x - c_2 \sin x,$$

นำ y และ y'' แทนลงในสมการ (3) ได้

ดังนั้น $y'' + y = (-c_1 \cos x - c_2 \sin x) + (c_1 \cos x + c_2 \sin x) = 0$

จะพบว่า $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ สอดคล้องกับสมการ (3)

ดังนั้น $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการ (3)

บทนิยาม 1.10

กำหนดให้ $F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ n **ผลเฉลยเฉพาะ** ของสมการ $F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$ หมายถึงผลเฉลยที่ได้จากการแทนที่ตัวคงค่า ในผลเฉลยทั่วไปด้วยค่าคงตัวที่ทราบค่าแน่นอนทั้ง n ค่า

ตัวอย่าง 1.11 จงแสดงว่า $y = 3\cos x - 2\sin x$ เป็นผลเฉลยเฉพาะของสมการ

(4) $$y'' + y = 0$$

วิธีทำ จาก $$y = 3\cos x - 2\sin x,$$

ได้ $$y' = \frac{d}{dx}(3\cos x - 2\sin x)$$
$$= -3\sin x - 2\cos x,$$
$$y'' = \frac{d}{dx}(-3\sin x - 2\cos x)$$
$$= -3\cos x + 2\sin x,$$

นำ y และ y'' แทนลงในสมการ (4) ได้

ดังนั้น $y'' + y = (-3\cos x - 2\sin x) + (3\cos x + 2\sin x) = 0$

จะพบว่า $y = 3\cos x - 2\sin x$ สอดคล้องกับสมการ (4)

ดังนั้น $y = 3\cos x - 2\sin x$ เป็นผลเฉลยเฉพาะของสมการ (4)

ตัวอย่าง 1.12 จงแสดงว่าสมการ

(5) $$y' - 3y = 0$$

มี $y = ce^{3x}$ เป็นผลเฉลยทั่วไปและมี $y = 2e^{3x}$ เป็นผลเฉลยเฉพาะ

วิธีทำ จาก $y = ce^{3x}$ เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการ $y' - 3y = 0$

ได้ $y' = 3ce^{3x}$,

นำ y และ y' แทนลงในสมการ (5) ได้

$y' - 3y = 3ce^{3x} - 3ce^{3x} = 0$

ดังนั้น $y = ce^{3x}$ เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการ(5) ที่มี c เป็นตัวคงค่า

จาก $y = 2e^{3x}$ เป็นผลเฉลยเฉพาะของสมการ (5) ได้

ได้ $y' = 6e^{3x}$

ดั้งนั้น $y' - 3y = 6e^{3x} - 3(2e^{3x}) = 6e^{3x} - 6e^{3x} = 0$

แสดงว่า $y = 2e^{3x}$ เป็นผลเฉลยเฉพาะของสมการ (5)

บทนิยาม 1.11

ผลเฉลยเอกฐาน คือผลเฉลยที่ไม่ได้จากผลเฉลยทั่วไป

ตัวอย่าง 1.13 สมการ

(6) $$\frac{dy}{dx} = (y-3)^2$$

มี $y = 3 - \frac{1}{x+c}$ เป็นผลเฉลยทั่วไปของ (6) เมื่อ c เป็นตัวคงค่า

และ $y = 3$ ก็เป็นผลเฉลยของสมการ (6) นี้ด้วย แต่ผลเฉลยนี้ไม่ได้มาจากการกำหนดค่าเฉพาะใด ๆ ของ c ใน (6) ดังนั้น $y = 3$ เป็นผลเฉลยเอกฐานที่ถูกนิยามบนเซตของจำนวนจริง

บทนิยาม 1.12

ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ที่ประกอบด้วยตัวคงค่า c จะเรียกว่า **วงศ์ผลเฉลยสำหรับพารามิเตอร์หนึ่งตัว**

จากผลเฉลยทั่วไป $y = ce^{3x}$ ของสมการ $y' - 3y = 0$ เนื่องจาก c เป็นตัวคงค่าจึงได้

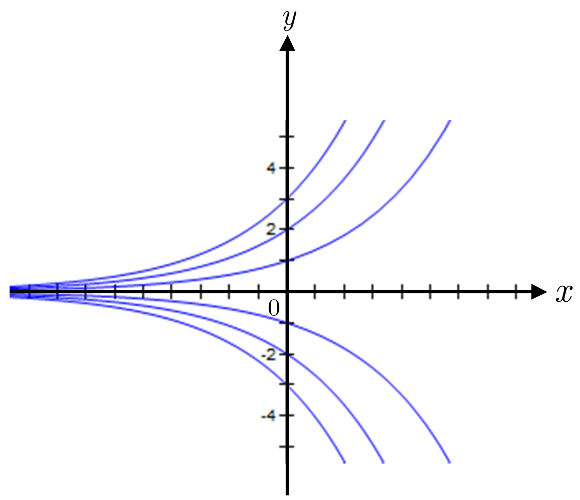
ค่า y หลายค่าขึ้นอยู่กับค่า c

ตัวอย่างเช่น

$c=1$	จะได้	$y=e^{3x}$
$c=2$	จะได้	$y=2e^{3x}$
$c=-3$	จะได้	$y=-3e^{3x}$

และค่าอื่น ๆ ตามที่กำหนดค่า c

ในทางเรขาคณิต $y=ce^{3x}$ คือวงศ์เส้นโค้งสำหรับพารามิเตอร์ตัวหนึ่ง เรียกว่าเส้นโค้งเชิงปริพันธ์ ของสมการ $y'-3y=0$ ซึ่งแต่ละเส้นโค้งเชิงปริพันธ์คือรูปเรขาคณิตของผลเฉลยของสมการ $y'-3y=0$ ดังรูปต่อไปนี้



ภาพที่ 1.1 เส้นโค้งเชิงปริพันธ์ของสมการ $y'-3y=0$

จากภาพที่ 1.1 วงศ์เส้นโค้งซึ่งประกอบด้วยเส้นโค้งเชิงปริพันธ์มากมาย ถ้าต้องการทราบว่าเส้นโค้งเชิงปริพันธ์ ได้เป็นเส้นโค้งที่ผ่านจุดใดจุดหนึ่งที่เราต้องการเช่นผ่านจุด $(0,2)$ หมายความว่าถ้า $x=0$ และ $y=2$ เมื่อแทนค่า x และ y แล้วจะได้ค่า c เช่นในตัวอย่าง 1.11 จะได้ $c=2$ นั้นคือเส้นโค้งเชิงปริพันธ์ที่เป็นผลเฉลยเฉพาะสำหรับ $y'-3y=0$ เมื่อ $x=0$ และ $y=2$ คือ $y=2e^{3x}$ เราเรียกค่าของ x และ y ที่กำหนดค่าผลเฉลยเฉพาะนี้ว่า เงื่อนไขเริ่มต้นและนิยมเขียน $y=\phi(x)$ เป็นผลเฉลยเฉพาะ

บทนิยาม 1.13

ปัญหาค่าเริ่มต้น คือปัญหาการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ n ที่สอดคล้องกับเงื่อนไข $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$ เมื่อ x_0 และ $y_0, y_1, \ldots, y_n$ เป็นค่าคงตัว และเรียกเงื่อนไขที่กำหนดให้ว่าเงื่อนไขเริ่มต้น

ตัวอย่าง 1.14 จงแสดงว่า $y = 2x - 3$ เป็นผลเฉลยเฉพาะของ

(6) $$xy' - y = 3$$

เมื่อกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้น $y(2) = 1$

วิธีทำ จากสมการ $y = 2x - 3$

ตรวจสอบเงื่อนไขเริ่มต้น $y(2) = 1$

ถ้า $y = 2x - 3$ จะได้ $y = 2(2) - 3 = 1$

ดังนั้น $y = 2x - 3$ ผ่านจุด $x = 2$, $y = 1$ จริง

ตรวจสอบว่า $y = 2x - 3$ เป็นผลเฉลยของสมการ (6) หรือไม่

จาก $y = 2x - 3,$

ได้ $y' = \dfrac{d}{dx}(2x - 3),$

$y' = 2,$

นำ y และ y' แทนลงในสมการ (6) ได้

$$xy' - y = x(2) - (2x - 3) = 2x - 2x + 3 = 3$$

ดังนั้น แสดงว่า $y = 2x - 3$ เป็นผลเฉลยเฉพาะของสมการ (6)

ตัวอย่าง 1.15 จงแสดงว่า $y = x^2 - 3x + c$ เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการ

(7) $$y' - 2x + 3 = 0$$

เมื่อ c เป็นตัวคงค่า แล้วจงหาค่า c ที่ทำให้

(8) $$y = x^2 - 3x + c$$

เป็นผลเฉลยเฉพาะของสมการเมื่อกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้น $y(-1) = 2$

วิธีทำ ตรวจสอบผลเฉลยทั่วไปของสมการ (8)

จาก $y = x^2 - 3x + c,$

ได้ $y' = \frac{d}{dx}(x^2 - 3x + c)$

$= 2x - 3,$

นำ y' แทนลงในสมการ (7) ได้

$$\begin{aligned} y' - 2x + 3 &= (2x-3) - 2x + 3 \\ &= 2x - 3 - 2x + 3 \\ &= 0, \end{aligned}$$

แสดงว่า $y = x^2 - 3x + c$ เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการ (7)

หาตัวคงค่า c

กำหนดเงื่อนไขเริ่มต้น $y(-1) = 2$

แทนค่า $x = -1$ และ $y = 2$ ในสมการ (8)

ได้

$$\begin{aligned} 2 &= (-1^2) - 3(-1) + c, \\ 2 &= 1 + 3 + c, \\ 2 - 4 &= c, \\ c &= -2, \end{aligned}$$

แทนค่า $c = -2$ ในสมการ (8)

ดังนั้น $y = x^2 - 3x - 2$ เป็นผลเฉลยเฉพาะของสมการ (7) ที่สอดคลองกับเงื่อนไข $y(-1) = 2$

ตัวอย่าง 1.16 จงแสดงว่า

(9) $$y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{2x}$$

เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการ

(10) $$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 6y = 0$$

และจงหาผลเฉลยเฉพาะ เมื่อกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้นดังนี้ $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$

วิธีทำ ตรวจสอบผลเฉลยทั่วไปของสมการ $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 6y = 0$

จาก $\quad y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{2x},$

ได้ $\quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}(c_1 e^{-3x} + c_2 e^{2x})$

$$= \frac{d}{dx} c_1 e^{-3x} + \frac{d}{dx} c_2 e^{2x}$$

$$= c_1 \frac{d}{dx} e^{-3x} + c_2 \frac{d}{dx} e^{2x}$$

$$= -3c_1 e^{-3x} + 2c_2 e^{2x},$$

และ $\quad \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d}{dx}(-3c_1 e^{-3x} + 2c_2 e^{2x})$

$$= \frac{d}{dx}(-3c_1 e^{-3x}) + \frac{d}{dx} 2c_2 e^{2x}$$

$$= -3c_1 \frac{d}{dx} e^{-3x} + 2c_2 \frac{d}{dx} e^{2x}$$

$$= 9c_1 e^{-3x} + 4c_2 e^{2x},$$

นำ $\dfrac{d^2y}{dx^2}, \dfrac{dy}{dx}$ และ y แทนลงในสมการ (10) ได้

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 6y = (9c_1 e^{-3x} + 4c_2 e^{2x}) + (-3c_1 e^{-3x} + 2c_2 e^{2x}) - 6(c_1 e^{-3x} + c_2 e^{2x})$$

$$= 9c_1 e^{-3x} + 4c_2 e^{2x} - 3c_1 e^{-3x} + 2c_2 e^{2x} - 6c_1 e^{-3x} - 6c_2 e^{2x}$$

$$= 9c_1 e^{-3x} - 3c_1 e^{-3x} - 6c_2 e^{2x} + 4c_2 e^{2x} + 2c_2 e^{2x} - 6c_2 e^{2x}$$

$$= 0,$$

แสดงว่า $y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{2x}$ เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการ (10)

หาผลเฉลยเฉพาะ

จากเงื่อนไขเริ่มต้น $y(0) = 1$

แทนค่า $x = 0$ และ $y = 1$ ในสมการ (9) ได้

$$1 = c_1 e^{-3(0)} + c_2 e^{2(0)},$$

หรือ

(11) $\quad 1 = c_1 + c_2,$

และจากเงื่อนไขเริ่มต้น $y'(0) = 2$

แทนค่า $x=0$ และ $y=1$ ในสมการ $y'=-3c_1e^{-3x}+2c_2e^{2x}$

ได้ $2=-3c_1e^{-3(0)}+2c_2e^{2(0)},$

หรือ

(12) $2=-3c_1+2c_2,$

จาก (11) และ (12) ได้ $c_1=0$ และ $c_2=1$

ดังนั้น ผลเฉลยเฉพาะของสมการ (10) คือ $y=e^{2x}$

1.4 การกำจัดตัวคงค่า

ในทางปฏิบัติสมการเชิงอนุพันธ์เกิดขึ้นได้หลายทาง ไม่ว่าจะเป็นปัญหาทางคณิตศาสตร์ ปัญหาทางฟิสิกส์ และปัญหาอื่น ๆ สำหรับปัญหาทางคณิตศาสตร์นั้นได้แก่เรื่องความชันของเส้นสัมผัส ความชันของเส้นปกติ ที่ผ่านจุดใด ๆ อยู่ในรูป $\dfrac{dy}{dx}$ และผ่านจุด (x_0,y_0) ส่วนปัญหาทางฟิสิกส์นั้นก็จะเป็นเกี่ยวกับการเคลื่อนที่ของวัตถุเมื่อกำหนดความเร็วของการเคลื่อนที่ $v(t)$ และจุดเริ่มต้นของการเคลื่อนที่ จะมีสมการเชิงอนุพันธ์เป็น $\dfrac{ds}{dt}=v(t)$ เมื่อ s เป็นฟังก์ชันการเคลื่อนที่ของวัตถุ และ t คือเวลาที่วัตถุใช้ในการเคลื่อนที่ (สมศักดิ์ เทศสวัสดิ์วงศ์, 2544 : 8-9)

และทางหนึ่งที่จะได้สมการเชิงอนุพันธ์ คือการกำจัดตัวคงค่าจากความสัมพันธ์ที่กำหนดให้ โดยปกติความสัมพันธ์ที่มีตัวคงค่า n ตัวจะทำให้เกิดสมการเชิงอนุพันธ์ดันดับ n ซึ่งเราสามารถสร้างสมการเชิงอนุพันธ์ได้จากความสัมพันธ์ที่เกี่ยวข้องกับตัวคงค่า โดยการกำจัดตัวคงค่าเหล่านั้น จะเกิดสมการเชิงอนุพันธ์ ซึ่งอันดับของสมการที่จะสร้างต้องเท่ากับจำนวนของตัวคงค่า ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 1.17 จงกำจัดตัวคงค่า c_1 และ c_2 จากความสัมพันธ์

(13) $y=c_1e^{-3x}+c_2e^{2x}$

วิธีทำ เนื่องจากมีตัวคงค่าสองตัวคือ c_1 และ c_2 เราต้องได้เชิงอนุพันธ์อันดับที่สอง

หาอนุพันธุ์ของสมการ (13) ได้

(14) $y'=-3c_1e^{-3x}+2c_2e^{2x},$

หาอนุพันธุ์ของสมการ (14) ได้

(15) $$y'' = 9c_1 e^{-3x} + 4c_2 e^{2x},$$

นำสมการ (13) X 3 ได้

(16) $$3y = 3c_1 e^{-3x} + 3c_2 e^{2x},$$

นำสมการ(14) + (16) ได้

(17) $$y' + 3y = 5c_2 e^{2x},$$

นำ $\dfrac{1}{5e^{2x}}$ คูณตลอดทั้งสมการ (17) ได้

(18) $$\frac{y' + 3y}{5e^{2x}} = c_2,$$

นำสมการ (14) x 3 ได้

(19) $$3y' = -9c_1 e^{-3x} + 6c_2 e^{2x},$$

นำสมการ (15) + (19) ได้

(20) $$y'' + 3y' = 10c_2 e^{2x},$$

หรือ

(21) $$\frac{y'' + 3y'}{10e^{2x}} = c_2,$$

สมการ (18) = (21) ได้

$$\frac{y' + 3y}{5e^{2x}} = \frac{y'' + 3y'}{10e^{2x}},$$

$$\frac{10e^{2x}(y' + 3y)}{5e^{2x}} = y'' + 3y',$$

$$2y' + 6y = y'' + 3y',$$

$$0 = y'' + 3y' - 2y' - 6y,$$

หรือ $y'' + y' - 6y = 0$

ตัวอย่าง 1.18 จงกำจัดตัวคงค่า a จากความสัมพันธ์

(22) $(x-a)^2+y^2=a^2$

วิธีทำ เนื่องจากมีตัวคงค่าหนึ่งตัว คือ a เราต้องได้เชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง จาก $(x-a)^2+y^2=a^2$,

หาอนุพันธ์ของฟังก์ชันได้

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left[(x-a)^2+y^2\right] &= \frac{d}{dx}a^2, \\
\frac{d}{dx}(x-a)^2+\frac{d}{dx}y^2 &= 0, \\
2(x-a)\frac{d}{dx}(x-a)+2y\frac{dy}{dx} &= 0, \\
2(x-a)+2y\frac{dy}{dx} &= 0, \\
2x-2a+2y\frac{dy}{dx} &= 0, \\
2(x-a+y\frac{dy}{dx}) &= 0, \\
a &= x+y\frac{dy}{dx},
\end{aligned}
$$

แทนค่า $a=x+y\dfrac{dy}{dx}$ ในสมการ (22) ได้

$$
\begin{aligned}
(x-x+y\frac{dy}{dx})^2+y^2 &= (x+y\frac{dy}{dx})^2, \\
(y\frac{dy}{dx})^2+y^2 &= (x+y\frac{dy}{dx})^2, \\
(y\frac{dy}{dx})^2+y^2 &= x^2+2xy\frac{dy}{dx}+(y\frac{dy}{dx})^2, \\
y^2 &= x^2+2xy\frac{dy}{dx}, \\
y^2-x^2 &= 2xy\frac{dy}{dx}, \\
(y^2-x^2)dx &= 2xydy,
\end{aligned}
$$

หรือ $(y^2-x^2)dx-2xydy=0$

ตัวอย่าง 1.19 จงกำจัดตัวคงค่า c จากความสัมพันธ์

(23) $cxy + c^2x + 4 = 0$

วิธีทำ เนื่องจากมีตัวคงค่าหนึ่งตัว คือ c เราต้องได้เชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง

จาก $cxy + c^2x + 4 = 0$

หาอนุพันธ์ได้

$$\frac{d}{dx}(cxy + c^2x + 4) = \frac{d}{dx}0$$

$$\frac{d}{dx}cxy + \frac{d}{dx}c^2x + \frac{d}{dx}4 = 0,$$

$$c\frac{d}{dx}xy + c^2\frac{d}{dx}x + \frac{d}{dx}4 = 0,$$

$$c(x\frac{dy}{dx} + y\frac{dx}{dx}) + c^2 + 0 = 0,$$

$$c(x\frac{dy}{dx} + y) + c^2 + 0 = 0,$$

$$c(x\frac{dy}{dx} + y) + c^2 = 0,$$

เนื่องจาก $c \neq 0$ ดังนั้น $c = -(x\frac{dy}{dx} + y)$

แทนค่า $c = -(x\frac{dy}{dx} + y)$ ในสมการ (23)

ได้
$$-(x\frac{dy}{dx} + y)xy + \left[-(x\frac{dy}{dx} + y)\right]^2 x + 4 = 0,$$

$$-(x\frac{dy}{dx} + y)xy + (x\frac{dy}{dx} + y)^2 x + 4 = 0,$$

$$-x^2y\frac{dy}{dx} - xy^2 + \left[(x\frac{dy}{dx})^2 + 2xy\frac{dy}{dx} + y^2\right]x + 4 = 0,$$

$$-x^2y\frac{dy}{dx} - xy^2 + x^3(\frac{dy}{dx})^2 + 2x^2y\frac{dy}{dx} + xy^2 + 4 = 0,$$

$$x^2y\frac{dy}{dx} + x^3(\frac{dy}{dx})^2 + 4 = 0,$$

หรือ $x^2yy' + x^3(y')^2 + 4 = 0$

1.5 ทฤษฎีบทการมีจริงและความเป็นไปได้อย่างเดียว

ก่อนที่เราจะศึกษาวิธีการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ ควรจะทราบวิธีตรวจสอบว่าสมการเชิงอนุพันธ์ที่เราจะหาผลเฉลยนั้น มีผลเฉลยหรือไม่ เพราะถ้าสมการไม่มีผลเฉลยจะได้ไม่ต้องเสียเวลาในการหา หรือถ้าสมการมีผลเฉลยมากกว่าหนึ่งผลเฉลยก็จะได้ทราบก่อนที่จะเสียเวลาหาผลเฉลยมาแล้วพบว่าไม่ใช่ผลเฉลยที่ต้องการ ซึ่งทฤษฎีที่จะกล่าวต่อไปนี้เรียกว่า ทฤษฎีบทการมีจริงและความเป็นไปได้อย่างเดียว (สมศักดิ์ เทศสวัสดิ์วงศ์, 2544 : 9-10)

ทฤษฎีบท 1.1

ถ้า $f(x,y)$ และ $\dfrac{\partial}{\partial y}f(x,y)$ เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องในโดเมน D ซึ่งอยู่ในระนาบ xy และจุด (x_0,y_0) อยู่ในโดเมน D แล้วสมการ

$y' = f(x,y)$ และเงื่อนไขเริ่มต้นคือ $y(x_0) = y_0$

มีผลเฉลยเดียวคือ ϕ ในบางช่วง $\left|x - x_0\right| < h$ เมื่อ $h \in R$ และ $h > 0$

ซึ่ง h มีค่าน้อยมาก ๆ

ตัวอย่าง 1.20 จงพิจารณาสมการ $y' = 2x + y^3$ ที่มีเงื่อนไขเริ่มต้นคือ $y(0) = 0$ มีผลเฉลยเพียงค่าเดียวหรือไม่

วิธีทำ สมการ $y' = 2x + y^3$

เนื่องจาก $f(x,y) = 2x + y^3$

และ $\dfrac{\partial}{\partial y}f(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial y}(2x + y^3) = 2y$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องในโดเมน D ใด ๆ

ในระนาบ xy ซึ่งมีจุด $(x_0,y_0) = (0,0)$

ดังนั้น สมการ $y' = 2x + y^3$ มีผลเฉลยเพียงค่าเดียว

ตัวอย่าง 1.21 จงพิจารณาสมการ $\dfrac{dy}{dx} = x - \sqrt{y}$ ที่มีเงื่อนไขเริ่มต้นคือ $y(0) = 0$ มีผลเฉลยเพียงค่าเดียวหรือไม่

วิธีทำ สมการ $\dfrac{dy}{dx} = x - \sqrt{y}$

จากทฤษฎีบท 1.1 ได้ว่า $f(x,y) = x - \sqrt{y}$

และ $\dfrac{\partial}{\partial y}f(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial y}(x - \sqrt{y}) = \dfrac{1}{2\sqrt{y}}$

พบว่า $\dfrac{\partial}{\partial y}f(x,y)$ ไม่ต่อเนื่องที่จุด $(0,0)$

ดังนั้น จากทฤษฎีบท 1.1 สมการ $\dfrac{dy}{dx}=x-\sqrt{y}$ ไม่มีผลเฉลยเพียงค่าเดียว นั่นคืออาจมีผลเฉลยหลายค่า หรือไม่มีผลเฉลยเลยก็ได้

1.6 สรุปท้ายบทที่ 1

จากที่เราได้ทราบประวัติการเกิดสมการเชิงอนุพันธ์ขึ้นมาได้อย่างไรนั้นพร้อมทั้งนิยามของสมการเชิงอนุพันธ์ในรูปแบบต่าง ๆ ทำให้ทราบว่า สมการเชิงอนุพันธ์ คือสมการซึ่งประกอบด้วยอนุพันธ์หรือดิฟเฟอเรนเชียลนั่นเอง ส่วนสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ คือสมการเชิงอนุพันธ์ซึ่งประกอบด้วยอนุพันธ์ที่เทียบกับตัวแปรอิสระเพียงตัวเดียวเท่านั้น อันดับของสมการเชิงอนุพันธ์หมายถึงอันดับของอนุพันธ์ที่มีอันดับสูงสุดที่ปรากฏอยู่ในสมการ และระดับขั้นของสมการเชิงอนุพันธ์หมายถึงเลขชี้กำลังที่มีค่ามากที่สุดของอนุพันธ์ซึ่งมีอันดับสูงสุด ในกรณีที่สามารถทำให้ทุก ๆ อนุพันธ์ในสมการเชิงอนุพันธ์ มีเลขชี้กำลังเป็นเลขจำนวนเต็มบวกนั่นเอง ส่วนผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์คือความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรอิสระ และตัวแปรตามซึ่งไม่อยู่ในรูปอนุพันธ์ ซึ่งสอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์นั้น นั่นคือเมื่อนำผลเฉลยไปแทนในสมการเชิงอนุพันธ์แล้วทำให้สมการนั้นเป็นจริงเช่น

$y=3e^{2x}$ เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ $\dfrac{dy}{dx}-2y=0$

เนื่องจาก $y=3e^{2x}$ จะได้ $\dfrac{dy}{dx}=6e^{2x}$ แทนค่า y และ $\dfrac{dy}{dx}$ ในสมการจะได้

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}-2y &= 6e^{2x}-2(3e^{2x})\\ &= 6e^{2x}-6e^{2x}\\ &= 0\end{aligned}$$

สำหรับการกำจัดตัวคงค่าจากความสัมพันธ์นั้น ถ้าความสัมพันธ์ที่มีตัวคงค่า n ตัวจะทำให้เกิดสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ n ซึ่งเราสามารถสร้างสมการเชิงอนุพันธ์ได้จากความสัมพันธ์ที่เกี่ยวข้องกับตัวคงค่า โดยการกำจัดตัวคงค่าเหล่านั้น แล้วจะเกิดสมการเชิงอนุพันธ์ และอันดับของสมการที่จะสร้างต้องเท่ากับจำนวนของตัวคงค่านั่นเอง และก่อนที่เราจะศึกษาวิธีการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ ควรจะต้องตรวจสอบว่าสมการนั้น ๆ มีผลเฉลยหรือไม่ เพราะถ้าสมการไม่มีผลเฉลยจะได้ไม่เสียเวลาในการหา หรือถ้าสมการมีผลเฉลยมากกว่าหนึ่งผลเฉลยก็จะได้ทราบก่อนที่จะเสียเวลาหาผลเฉลยมาแล้วพบว่าไม่ใช่ผลเฉลยที่ต้องการ ซึ่งทฤษฎีที่จะกล่าวต่อไปนี้เรียกว่า ทฤษฎีบทการมีจริงและความเป็นไปได้อย่างเดียว

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 1

1. จงพิจารณาว่าสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้สมการใดเป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย สมการเชิงเส้น หรือสมการไม่เชิงเส้น พร้อมทั้งบอกอันดับและระดับขั้น

   1.1 $\frac{dy}{dx} = x^2 - 1$

   1.2 $\frac{d^3y}{dx^3} + x^2y = -3$

   1.3 $x\frac{d^2y}{dx^2} + (x^2 - 2)\frac{dy}{dx} - 2xy = x + 3$

   1.4 $(2x - xy^2)dx - (3 - x)dy = 0$

   1.5 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial y} = 2x$

   1.6 $r\frac{\partial v}{\partial r} + h^2\frac{\partial^2 v}{\partial h^2} = 6$

   1.7 $x\frac{d^3y}{dx^3} + (x^2 - 2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2xy = 0$

   1.8 $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{\partial f}{\partial z} = 2x$

2. จงแสดงว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้ทางขวาของแต่ละสมการเป็นผลเฉลยของสมการทางซ้าย

   2.1 $y' + y - x = 1$, $y = x + 3e^{-x}$

   2.2 $y'' - 7y' + 12y = 0$, $y = 2e^{3x} - 5e^{4x}$

   2.3 $yy'' = x$, $y = \frac{2}{\sqrt{3}}x^{3/2}$

   2.4 $y''' - 3y' + 2y = 0$, $y = 3e^{-2x} + 4e^{x}$

   2.5 $y'' - 2y' - 8y = 0$, $y = c_1e^{4x} + c_2e^{-2x}$ เมื่อ c_1, c_2 เป็นตัวคงค่า

3. จงแสดงว่า $y = (x^2 + c)e^{-x}$ เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการ $y' + y = 2xe^{-x}$ เมื่อ c เป็นตัวคงค่า และหาค่าของ c เมื่อกำหนด $y(-1) = 3 + e$

4. จงแสดงว่า $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}$ เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการ $y'' - y' - 2y = 0$ เมื่อ c_1, c_2 เป็นตัวคงค่า และหาค่าของ c_1 และ c_2 เมื่อกำหนด $y(0) = 2$ และ $y'(0) = 3$

5. จงกำจัดตัวคงค่าจากความสัมพันธ์ต่อไปนี้

5.1 $y = 1 + cx + c^2$	c เป็นตัวคงค่า
5.2 $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x}$	c_1, c_2 เป็นตัวคงค่า
5.3 $y = x^2 + c_1 x + c_2 e^{-x}$	c_1, c_2 เป็นตัวคงค่า
5.4 $x^2 y = 1 + cx$	c เป็นตัวคงค่า
5.5 $y = Ae^{3x} + Bxe^{3x}$	A, B เป็นตัวคงค่า

6. จงพิจารณาว่าสมการที่กำหนดให้ต่อไปนี้มีผลเฉลยเพียงค่าเดียวหรือไม่

6.1 $\dfrac{dy}{dx} = x^2 + y^2,$	$y(0) = 1$
6.2 $y' = \dfrac{y^2 - 1}{x - 3},$	$y(1) = 0$
6.2 $y' = x^2 \sin y,$	$y(1) = -2$

บทที่ 2
สมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งและระดับขั้นหนึ่ง

ในบทนี้จะศึกษาสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งและระดับขั้นหนึ่งในรูปแบบต่าง ๆ ซึ่งสามารถหาคำตอบได้โดยการจัดสมการให้อยู่ในรูปแบบเฉพาะของแต่ละสมการ เริ่มจากสมการเชิงอนุพันธ์แบบแยกกันได้ เป็นวิธีการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งและระดับขั้นหนึ่งที่ง่ายที่สุด แต่สมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งและระดับขั้นหนึ่งนั้นไม่สามารถหาผลเฉลยของสมการแบบแยกกันได้ได้ทุกสมการดังนั้นจึงต้องมีการศึกษาการหาผลเฉลยของสมการในรูปแบบอื่น เช่นสมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธุ์ สมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรง และสมการเชิงเส้น แต่ถ้าสมการไม่อยู่ในรูปแบบกล่าวมาข้างต้นเราสามารถทำให้สมการนั้นเป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรงได้ โดยการคูณตลอดทั้งสมการด้วยฟังก์ชันที่เหมาะสม และเรียกฟังก์ชันนั้นเรียกว่าตัวประกอบปริพันธ์

ลักษณะของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งและระดับขั้นหนึ่งโดยทั่วไปจะอยู่ในรูปแบบ

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

หรือ $$M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx} = 0$$

สามารถหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งและระดับขั้นหนึ่งในรูปแบบต่าง ๆ ดังนี้

2.1 สมการเชิงอนุพันธ์แบบแยกกันได้

สมการเชิงอนุพันธ์แบบแยกกันได้คือสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งระดับขั้นหนึ่งที่สามารถเขียนอยู่ในรูป $A(x)dx + B(y)dy = 0$ โดยที่ $A(x)$ เป็นฟังก์ชันของ x อย่างเดียว และ $B(y)$ เป็นฟังก์ชันของ y ดังบทนิยาม (อุบล กลองกระโทก. 2549 : 123-124)

บทนิยาม 2.1

สมการเชิงอนุพันธ์แบบแยกกันได้ คือสมการที่สามารถเขียนได้ในรูป

$$A(x)dx + B(y)dy = 0$$

เราสามารถหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์แบบแยกกันโดยหาปริพันธ์ตลอดทั้งสมการก็จะได้ $\int A(x)\,dx + \int B(y)\,dy = c$ โดยที่ c เป็นตัวคงค่า

ตัวอย่าง 2.1 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

(1) $$(x-4)y^4 - x^3(y^2-3)\frac{dy}{dx} = 0,$$

วิธีทำ จะสังเกตว่า $y=0$ เป็นผลเฉลยหนึ่งของสมการ (1) เราจะหาผลเฉลยอื่น ๆ โดยสมมติว่า $y \neq 0$

สมการ (1) สามารถเขียนใหม่ได้ในรูป

จาก $$(x-4)y^4dx - x^3(y^2-3)dy = 0$$

สำหรับ $x \neq 0$ และ $y \neq 0$ คูณตลอดสมการนี้ด้วย $\frac{1}{x^3y^4}$ จะได้

$$\frac{(x-4)y^4}{x^3y^4}dx - \frac{x^3(y^2-3)}{x^3y^4}dy = 0$$

$$\frac{(x-4)}{x^3}dx - \frac{(y^2-3)}{y^4}dy = 0$$

หรือ $$\left(\frac{1}{x^2} - \frac{4}{x^3}\right)dx - \left(\frac{1}{y^2} - \frac{3}{y^4}\right)dy = 0$$

หาปริพันธ์ตลอดสมการนี้ได้

$$\int (\frac{1}{x^2} - \frac{4}{x^3})\,dx - \int (\frac{1}{y^2} - \frac{3}{y^4})\,dy = 0$$

(2) $$-\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{y} - \frac{1}{y^3} = c$$

สมการ (2) เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการ (1) ถูกนิยามสำหรับทุก ๆ จำนวนจริง x ที่ $x \neq 0$ โดยที่ c เป็นตัวคงค่า จากที่เราได้สังเกตแล้วว่า $y=0$ ก็เป็นผลเฉลยของสมการ (1) นี้ด้วย แต่ผลเฉลยนี้ไม่ได้มาจากการกำหนดค่าเฉพาะใด ๆ ของ c ใน (1) ดังนั้นเราสรุปได้ว่าสมการเชิงอนุพันธ์ (1) มี (2) เป็นผลเฉลยทั่วไปที่ถูกนิยาม $x \neq 0$ และ $y = 0$ ว่าเป็นผลเฉลยเอกฐานที่ถูกนิยามบนเซตของจำนวนจริง

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (1) คือ $-\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{y} - \frac{1}{y^3} = c$ สำหรับทุก ๆ จำนวนจริง $x \neq 0$ และ $y \neq 0$

ข้อสังเกต 2.1

จากตัวอย่าง 2.1 วิธีการแยกตัวแปรนี้อาจทำให้ผลเฉลยบางผลเฉลยหายไปได้ ดังนั้นเราต้องตรวจสอบอย่างระมัดระวังเสมอ

ตัวอย่าง 2.2 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

(3) $$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

วิธีทำ จัดสมการใหม่ให้อยู่ในรูปแบบสมการเชิงอนุพันธ์แบบแยกกันได้

จาก $$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

สำหรับ $x \neq 0$ คูณตลอดสมการนี้ด้วย y แล้วสามารถเขียนสมการนี้ได้ในรูป

$$ydy + xdx = 0$$

หาปริพันธ์ตลอดสมการนี้ ได้

$$\int y\,dy + \int x\,dx = 0$$

$$\frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} = c_1 \text{ เมื่อ } c_1 \text{ เป็นตัวคงค่า}$$

นำ 2 คูณตลอดทั้งสมการ ได้

$$2\left(\frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2}\right) = 2c_1$$

$$2\left(\frac{y^2 + x^2}{2}\right) = 2c_1$$

หรือ

$$y^2 + x^2 = 2c_1$$

ให้ $c = 2c_1$ เมื่อ c เป็นตัวคงค่า ได้

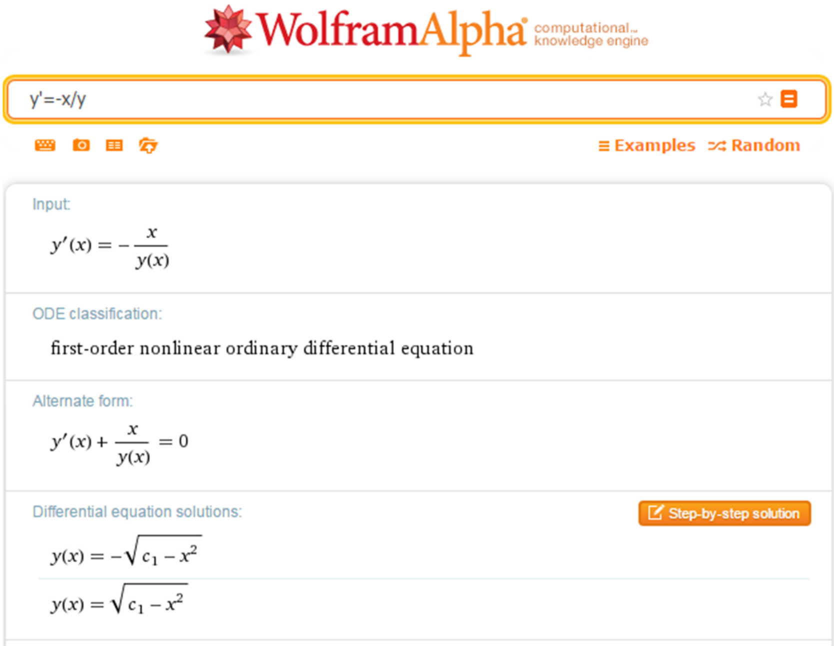
$$y^2 + x^2 = c$$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (3) คือ $y^2 + x^2 = c$ สำหรับทุก ๆ จำนวนจริง $x \neq 0$

หมายเหตุ 2.1

ในตัวอย่าง 2.1 และ ตัวอย่าง 2.2 จะเห็นว่าผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีระดับขั้นหนึ่งบรรจุตัวคงค่าเพียง 1 ตัว ดังนั้นจากนี้เป็นต้นไปการหาปริพันธ์ตลอดทั้งสมการแบบแยกกันได้จะบรรจุตัวคงค่าเพียงค่าเดียวเท่านั้น

ใช้ Wolfram Alpha เพื่อหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ (3) ดังภาพที่ 2.1



ภาพที่ 2.1 ผลเฉลยของสมการ $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{y}$ โดยใช้ Wolfram Alpha

หมายเหตุ 2.2

ผลเฉลยที่ได้จากการใช้โปรแกรม WolframAlpha นั้นจะเป็นผลเฉลยชัดแจ้ง แต่ผลเฉลยที่ได้จากการจัดสมการใหม่ให้อยู่ในรูปแบบสมการเชิงอนุพันธ์แบบแยกกันนั้นได้นั้นจะเป็นผลเฉลยโดยปริยาย ซึ่งก็คือผลเฉลยเดียวกันนั่นเอง

ตัวอย่าง 2.3 จงหาผลเฉลยของสมการ

(4) $$2x^2(y+3)dx - xdy = 0$$

วิธีทำ จะสังเกตว่า $y=-3$ เป็นผลเฉลยหนึ่งของสมการ (4) เราจะหาผลเฉลยอื่น ๆ โดยสมมติว่า $y \neq -3$

จัดสมการใหม่ให้อยู่ในรูปแบบสมการเชิงอนุพันธ์แบบแยกกันได้

จาก $$2x^2(y+3)dx - xdy = 0$$

สำหรับ $x \neq 0$ คูณตลอดสมการนี้ด้วย $\dfrac{1}{x(y+3)}dy$ ได้

$$\frac{2x^2(y+3)}{x(y+3)}dx - \frac{x}{x(y+3)}dy = 0$$

หรือ

$$2xdx - \frac{1}{(y+3)}dy = 0$$

หาปริพันธ์ตลอดสมการนี้ ได้

$$\int 2x\,dx - \int \frac{1}{(y+3)}dy = 0$$

หรือ

$$\frac{2x^2}{2} - \ln\left|y+3\right| = -c_1$$ เมื่อ c_1 เป็นตัวคงค่า

นำ $\ln\left|y+3\right| + c_1$ บวกตลอดทั้งสมการ ได้

$$x^2 + c_1 = \ln\left|y+3\right|$$

สมบัติของลอการิทึม (ถ้า $\log_a x = y$ แล้ว $x = a^y$) ได้

$$e^{x^2+c_1} = y+3$$ (เพราะ $\ln x = \log_e x$)

หรือ

$$e^{x^2}e^{c_1} = y+3$$ (เพราะ $x^{a+b} = x^a x^b$)

ให้ $c = e^{c_1}$ ได้ c เป็นตัวคงค่า จะได้

$$ce^{x^2} = y+3$$

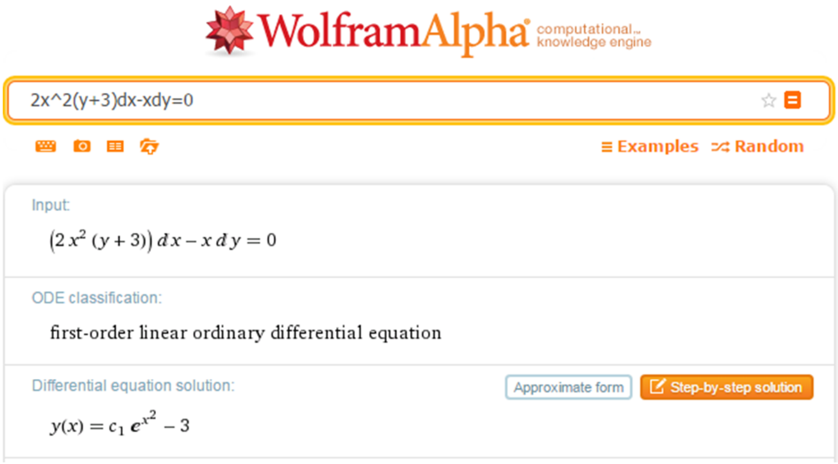
หรือ

$$(y+3)e^{-x^2} = c$$

สังเกตว่า $y = -3$ ก็เป็นผลเฉลยของสมการ (4) ที่ได้จากการแทนค่า $c = 0$ ลงในผลเฉลยทั่วไปจึงเรียกผลเฉลย $y = -3$ ว่าผลเฉลยชัด

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (2) คือ $(y+3)e^{-x^2} = c$ สำหรับทุก ๆ จำนวนจริง $x \neq 0$

ใช้ Wolfram Alpha เพื่อหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ (4) ดังภาพที่ 2.2



ภาพที่ 2.2 ผลเฉลยของสมการ $2x^2(y+3)dx - xdy = 0$ โดยใช้ Wolfram Alpha

ตัวอย่าง 2.4 จงหาผลเฉลยของสมการ

(5) $$\frac{dr}{dt} = -6rt$$

วิธีทำ จะสังเกตว่า $r = 0$ เป็นผลเฉลยหนึ่งของสมการ (5) เราจะหาผลเฉลยอื่น ๆ โดยสมมติว่า $r \neq 0$

จัดสมการใหม่ให้อยู่ในรูปแบบสมการเชิงอนุพันธ์แบบแยกกันได้

จาก $$\frac{dr}{dt} = -6rt$$

สำหรับ $r \neq 0$ คูณตลอดสมการนี้ด้วย $\frac{1}{r}$ แล้วสามารถเขียนสมการนี้ได้ในรูป

$$\frac{1}{r}dr + 6tdt = 0$$

หาปริพันธ์ตลอดสมการนี้ ได้

$$\int \frac{1}{r}dr + \int 6t\,dt = 0$$

$$\ln|r| + 3t^2 = c_1$$ เมื่อ c_1 เป็นตัวคงค่า

นำ $-3t^2$ บวกตลอดทั้งสมการ ได้

$$\ln|r| = -3t^2 + c_1,$$

ใช้สมบัติของลอการิทึมได้

$$r = e^{-3t^2+c_1}$$

หรือ

$$r = e^{c_1}e^{-3t^2}$$

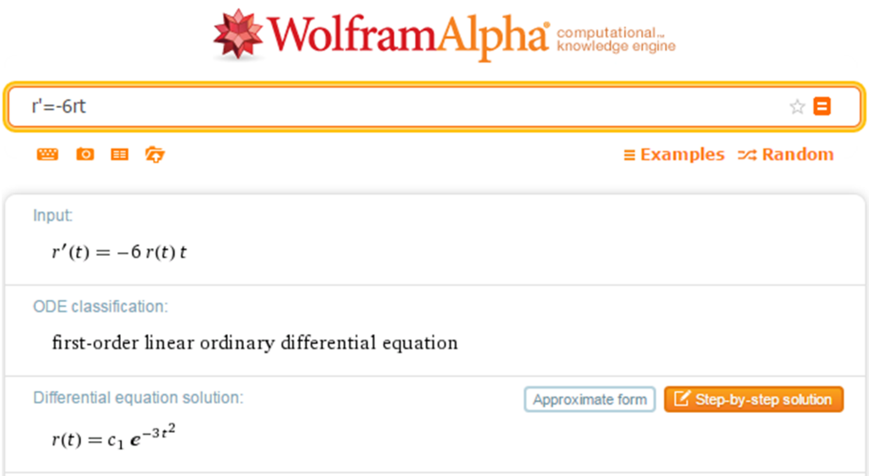
ให้ $c = e^{c_1}$ ได้ c เป็นตัวคงค่า จะได้

$$r = ce^{-3t^2}$$

สังเกตว่า $r = 0$ ก็เป็นผลเฉลยของสมการ (5) ที่ได้จากการแทนค่า $c = 0$ ลงในผลเฉลยทั่วไปจึงเรียกผลเฉลย $r = 0$ ว่าผลเฉลยชัด

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (5) คือ $r = ce^{-3t^2}$ สำหรับทุก ๆ จำนวนจริง $r \neq 0$

ใช้ Wolfram Alpha เพื่อหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ (5) ดังภาพที่ 2.3



ภาพที่ 2.3 ผลเฉลยของสมการ $\dfrac{dr}{dt} = -6rt$ โดยใช้ Wolfram Alpha

ตัวอย่าง 2.5 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

(6) $\quad y' = e^{x+y}$

และผลเฉลยเฉพาะเมื่อกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้น $y(0) = 0$

วิธีทำ จัดสมการใหม่ให้อยู่ในรูปแบบสมการเชิงอนุพันธ์แบบแยกกันได้

สมการ (6) สามารถเขียนใหม่ได้ในรูป

$$\frac{dy}{dx} = e^x e^y$$

คูณตลอดสมการนี้ด้วย e^{-y} ได้ แล้วสามารถเขียนสมการนี้ได้ในรูป

$$e^{-y}dy - e^x dx = 0\,,$$

หาปริพันธ์ตลอดสมการนี้ ได้

$$\int e^{-y}\,dy - \int e^x\,dx = 0$$

$$-e^{-y} - e^x = c_1 \text{ เมื่อ } c_1 \text{ เป็นตัวคงค่า}$$

นำ -1 คูณตลอดทั้งสมการ ได้

$$e^{-y} + e^x = -c_1$$

ให้ $c = -c_1$ เมื่อ c เป็นตัวคงค่า ได้

(7) $$e^{-y} + e^x = c$$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (7) คือ $e^x + e^{-y} = c$

หาผลเฉลยเฉพาะ

จากเงื่อนไขเริ่มต้น $y(0) = 0$

แทนค่า $x = 0$ และ $y = 0$ ในสมการ (7) ได้

$$e^0 + e^{-0} = c$$

$$1 + 1 = c$$

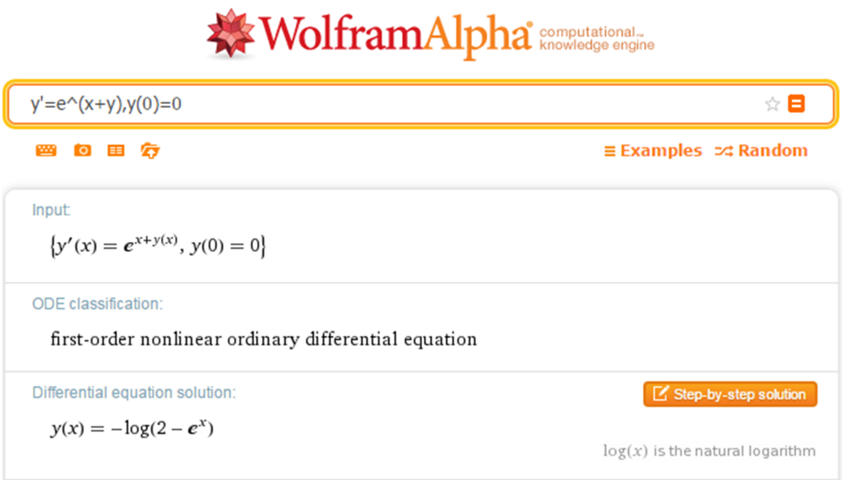
$$2 = c$$

แทนค่า $c = 2$ ในสมการ (7) จะได้

$$e^x + e^{-y} = 2$$

ดังนั้น ผลเฉลยเฉพาะของสมการ (6) คือ $e^x + e^{-y} = 2$

ใช้ WolframAlpha เพื่อหาผลเฉลยเฉพาะของสมการ (6) ดังภาพที่ 2.4



ภาพที่ 2.4 ผลเฉลยเฉพาะของสมการ $y' = e^{x+y}$ เมื่อกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้น $y(0) = 0$ โดยใช้ Wolfram Alpha

ตัวอย่าง 2.6 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

(8) $$(1+y^2)dx + (1+x^2)dy = 0$$

และผลเฉลยเฉพาะเมื่อกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้น $y(0) = -1$

วิธีทำ จัดสมการใหม่ให้อยู่ในรูปแบบสมการเชิงอนุพันธ์แบบแยกกันได้

จาก $$(1+y^2)dx + (1+x^2)dy = 0$$

นำ $\dfrac{1}{(1+x^2)(1+y^2)}$ คูณตลอดทั้งสมการ ได้

$$\frac{(1+y^2)}{(1+x^2)(1+y^2)}dx + \frac{(1+x^2)}{(1+x^2)(1+y^2)}dy = 0$$

หรือ

$$\frac{1}{1+x^2}dx + \frac{1}{1+y^2}dy =$$

หาปริพันธ์ตลอดสมการนี้ ได้

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx + \int \frac{1}{1+y^2}dy = 0$$

(9) $$\arctan x + \arctan y = c$$ เมื่อ c เป็นตัวคงค่า

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (8) คือ $\arctan x + \arctan y = c$

หาผลเฉลยเฉพาะ

จากเงื่อนไขเริ่มต้น $y(0) = -1$

แทนค่า $x = 0$ และ $y = -1$ ในสมการ (9)

ได้ $\arctan 0 + \arctan(-1) = c$

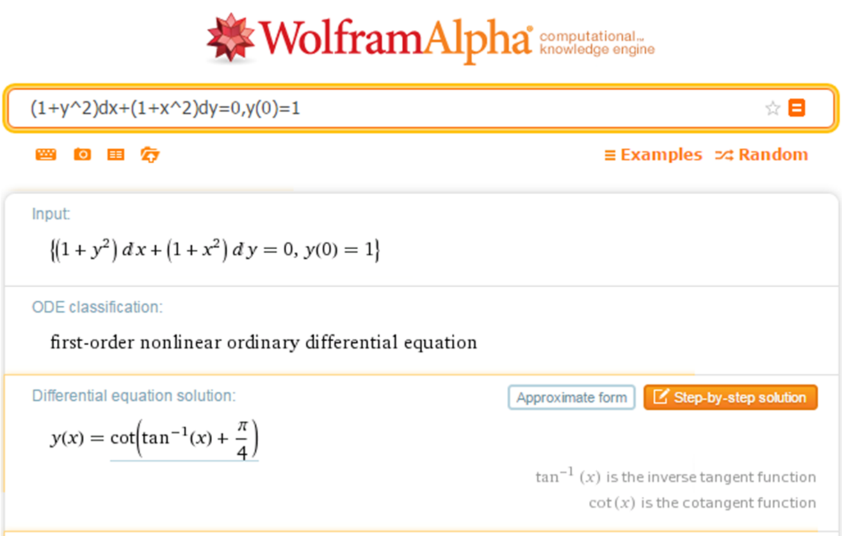
$$0 + \left(-\frac{\pi}{4}\right) = c$$

$$c = -\frac{\pi}{4}$$

นำค่า $c = -\frac{\pi}{4}$ แทนในสมการ (9)

ดังนั้น ผลเฉลยเฉพาะของสมการ (8) คือ $\arctan x + \arctan y = -\frac{\pi}{4}$

ใช้ WolframAlpha เพื่อหาผลเฉลยเฉพาะของสมการ (8) ดังภาพที่ 2.5



ภาพที่ 2.5 ผลเฉลยเฉพาะของสมการ $(1+y^2)dx+(1+x^2)dy=0$ เมื่อกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้น $y(0)=0$ โดยโปรแกรม WolframAlpha

ตัวอย่าง 2.7 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

(10) $$e^{(x^3-y^2)}+\frac{y}{x^2}\frac{dy}{dx}=0$$

และผลเฉลยเฉพาะเมื่อกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้น $y(1)=1$

วิธีทำ จะสังเกตว่า $y=0$ เป็นผลเฉลยหนึ่งของสมการ (10) เราจะหาผลเฉลยอื่น ๆ โดยสมมติว่า $y\neq 0$

จัดสมการใหม่ให้อยู่ในรูปแบบสมการเชิงอนุพันธ์แบบแยกกันได้

จาก $$e^{(x^3-y^2)}+\frac{y}{x^2}\frac{dy}{dx}=0$$

สามารถเขียนสมการนี้ได้ในรูป

$$x^2e^{x^3}dx+ye^{-y^2}dy=0,$$

หาปริพันธ์ตลอดสมการนี้ ได้

$$\int x^2e^{x^3}\,dx+\int ye^{-y^2}\,dy=0\,,$$

หรือ

(11) $$\frac{1}{3}e^{x^3}+\frac{1}{2}e^{y^2}=c$$ เมื่อ c เป็นตัวคงค่า

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (10) คือ $\frac{1}{3}e^{x^3}+\frac{1}{2}e^{y^2}=c$

หาผลเฉลยเฉพาะ

จากเงื่อนไขเริ่มต้น $y(1)=1$

แทนค่า $x=1$ และ $y=1$ ในสมการ (11)

ได้ $$\frac{1}{3}e^{1^3}+\frac{1}{2}e^{1^3}=c\,,$$

$$\frac{1}{2}e+\frac{1}{3}e=c$$

$$\frac{3e+2e}{6}=c$$

$$\frac{5e}{6}=c$$

นำค่า $c=\dfrac{5e}{6}$ แทนในสมการ (11)

ดังนั้น ผลเฉลยเฉพาะของสมการ (10) คือ $\dfrac{1}{3}e^{x^3}+\dfrac{1}{2}e^{y^3}=\dfrac{5e}{6}$

ตัวอย่าง 2.8 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

(12) $$(xy-x)dx+(xy+y)dy=0$$

และผลเฉลยเฉพาะเมื่อกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้น $y(1)=0$

วิธีทำ จะสังเกตว่า $y=1$ เป็นผลเฉลยหนึ่งของสมการ (12) เราจะหาผลเฉลยอื่น ๆ โดยสมมติว่า $y\neq 1$

จัดสมการใหม่ให้อยู่ในรูปแบบสมการเชิงอนุพันธ์แบบแยกกันได้

จาก $$(xy-x)dx+(xy+y)dy=0$$

สามารถเขียนใหม่ได้ในรูป

$$x(y-1)dx+y(x+1)dy=0$$

สำหรับ $x\neq -1$ คูณตลอดสมการนี้ด้วย $\dfrac{1}{(x+1)(y-1)}$ ได้

$$\frac{x(y-1)}{(x+1)(y-1)}dx+\frac{y(x+1)}{(x+1)(y-1)}dy=0$$

$$\frac{x}{(x+1)}dx+\frac{y}{(y-1)}dy=0$$

หรือ

$$\left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx+\left(1-\frac{y}{y-1}\right)dy=0$$

หาปริพันธ์ตลอดสมการนี้ ได้

$$\int\left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx+\int\left(1-\frac{y}{y-1}\right)dy=0$$

หรือ

$$x-\ln\left|x+1\right|+y+\ln\left|y-1\right|=c_1$$ เมื่อ c_1 เป็นตัวคงค่า

บวก $-x-y$ ตลอดสมการ ได้

$$\ln\left|y-1\right|-\ln\left|x+1\right|=c_1-x-y$$

สำหรับ $x\neq -1$ และจากสมบัติของลอการิทึม ($\log_a x-\log_a y=\log_a \frac{x}{y}$) ได้

$$\ln\frac{\left|y-1\right|}{\left|x+1\right|}=-x-y+c_1$$

หรือ

$$\ln\left|\frac{y-1}{x+1}\right|=c_1-(x+y)$$

จากสมบัติของลอการิทึม ได้

$$\frac{y-1}{x+1}=e^{c_1-(x+y)}$$

หรือ

$$\frac{y-1}{x+1}=e^{c_1}e^{-(x+y)}$$

ให้ $e^{c_1}=c$ เมื่อ c เป็นตัวคงค่า ได้

$$\frac{y-1}{x+1}=ce^{-(x+y)}$$

นำ $e^{(x+y)}$ คูณตลอดทั้งสมการ ได้

(13) $$\frac{y-1}{x+1}e^{(x+y)}=c$$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (12) คือ $\frac{y-1}{x+1}e^{(x+y)}=c$

หาผลเฉลยเฉพาะ

จากเงื่อนไขเริ่มต้น $y(1)=0$

แทนค่า $x=1$ และ $y=0$ ในสมการ (11)

ได้ $$\frac{1-1}{0+1}e^{(0+1)}=c$$

$$c=0$$

นำค่า $c=0$ แทนในสมการ (11)

ดังนั้น ผลเฉลยเฉพาะของสมการ (12) คือ $\frac{y-1}{x+1}e^{(x+y)}=0$

2.2 สมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธุ์

สมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธุ์คือสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งระดับขั้นหนึ่งที่อยู่ในรูป $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ โดยที่ $M(x,y)$ เป็นฟังก์ชันของ x,y และ $N(x,y)$ เป็นฟังก์ชันของ x,y ซึ่งเราสามารถจัดสมการดังกล่าวได้ในรูป $\frac{dy}{dx} = g(\frac{y}{x})$ ดังจะกล่าวในบทนิยามต่อไปนี้ (ศรีบุตร แววเจริญ และชนศักดิ์ บ่ายเที่ยง, 2542 : 36-41)

บทนิยาม 2.2

สมการเอกพันธุ์ คือ สมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งที่เขียนได้ในรูป $\frac{dy}{dx} = g(\frac{y}{x})$

ตัวอย่าง 2.9 กำหนดสมการ

(14) $$(x^2 - xy + y^2)dx - xydy = 0$$

จงแสดงว่าสมการ (14) เป็นสมการเอกพันธุ์

วิธีทำ จาก $(x^2 - xy + y^2)dx - xydy = 0$

เขียนใหม่ได้ในรูป

$$\begin{aligned}(x^2 - xy + y^2)dx &= xydy \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{x^2 - xy + y^2}{xy} \\ &= \frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 1 \\ &= \frac{1}{(\frac{y}{x})} + (\frac{y}{x}) - 1 \\ &= g(\frac{y}{x})\end{aligned}$$

เนื่องจาก $\frac{dy}{dx} = g(\frac{y}{x})$ ดังนั้น สมการ (14) เป็นสมการเอกพันธุ์

ข้อสังเกต 2.2

จากตัวอย่าง 2.9 จะเห็นว่าการตรวจสอบสมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธุ์นั้นไม่ยากเพราะสมการ (14) นั้นเป็นสมการที่ไม่ซับซ้อน แต่ถ้าสมการที่ซับซ้อนนั้นการจะตรวจสอบก็จะมีความยุ่งยากและเสียเวลาอย่างมากในการจัดสมการเพื่อตรวจสอบ จึงมีวิธีการที่จะช่วยในการตรวจสอบที่ง่ายขึ้นซึ่งจะกล่าวถึงในบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 2.3

ฟังก์ชันเอกพันธุ์ จะกล่าวว่าฟังก์ชัน $f(x,y)$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธุ์ระดับขั้น n ถ้า $f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^{n}f(x,y)$

ตัวอย่าง 2.10 $f(x,y)=x^2y-5x^3$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธุ์หรือไม่

วิธีทำ จาก $f(\lambda x,\lambda y)=(\lambda x)^2\lambda y-5(\lambda x)^3$

$$=\lambda^2x^2\lambda y-5\lambda^3x^3$$

$$=\lambda^3x^2y-5\lambda^3x^3$$

$$=\lambda^3(x^2y-5x^3)$$

$$=\lambda^3f(x,y)$$

เนื่องจาก $f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^3f(x,y)$

ดังนั้น $f(x,y)=x^2y-5x^3$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธุ์ระดับขั้น 3

ตัวอย่าง 2.11 $f(x,y)=e^{x/y}-\sin\dfrac{x}{y}$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธุ์หรือไม่

วิธีทำ จาก $f(\lambda x,\lambda y)=e^{\lambda x/\lambda y}-\sin\dfrac{\lambda x}{\lambda y}$

$$=e^{\lambda x/\lambda y}-\sin\frac{\lambda x}{\lambda y}$$

$$=e^{x/y}-\sin\frac{x}{y}$$

$$=f(x,y)$$

$$=\lambda^0f(x,y)$$

เนื่องจาก $f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^0f(x,y)$

ดังนั้น $f(x,y)=e^{x/y}-\sin\dfrac{x}{y}$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธุ์ระดับขั้น 0

ตัวอย่าง 2.12 $f(x,y)=2xy-x^3y$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธุ์หรือไม่

วิธีทำ จาก $f(\lambda x,\lambda y)=2\lambda x\lambda y-(\lambda x)^3\lambda y$

$$=2\lambda^2xy-\lambda^3x^3\lambda y$$

$$=2\lambda^2xy-\lambda^4x^3y$$

$$=\lambda^2(2xy-\lambda^2x^3y)$$

$$\neq\lambda^2f(x,y)$$

เนื่องจาก $f(\lambda x,\lambda y)\neq\lambda^nf(x,y)$

ดังนั้น $f(x,y)=2xy-x^3y$ ไม่เป็นฟังก์ชันเอกพันธุ์

ทฤษฎีบท 2.1

ถ้า $M(x,y)$ และ $N(x,y)$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธุ์ระดับขั้น n แล้ว $f(x,y)=-\dfrac{M(x,y)}{N(x,y)}$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธุ์ระดับขั้นศูนย์

ทฤษฎีบท 2.2

ถ้า $f(x,y)$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธุ์ระดับขั้นศูนย์ แล้ว f เป็นฟังก์ชันของ $\dfrac{x}{y}$

จากทฤษฎีบท 2.1 และทฤษฎีบท 2.2 ทำให้ได้ทฤษฎีบทต่อไปนี้ซึ่งจะนำใช้ในการตรวจสอบสมการเชิงอนุพันธ์ว่าเป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธุ์ (วารี เกรอต, 2542 : 21-22)

ทฤษฎีบท 2.3

ถ้า $M(x,y)$ และ $N(x,y)$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธุ์ที่มีระดับขั้นเท่ากันแล้ว สมการ $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ เป็น**สมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธุ์**

ตัวอย่าง 2.13 จงตรวจสอบสมการ

(15) $$(xy+y^2)dx+3xydy=0$$

เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธุ์หรือไม่

วิธีทำ ให้ $M(x,y)=xy+y^2$

พิจารณา $M(\lambda x,\lambda y)=\lambda x\lambda y+(\lambda y)^2$

$$=\lambda^2 xy+\lambda^2 y^2$$

$$=\lambda^2(xy+y^2)$$

$$=\lambda^2 M(x,y)$$

เนื่องจาก $M(\lambda x,\lambda y)=\lambda^2 M(x,y)$

ได้ $M(x,y)=xy+y^2$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธุ์ระดับขั้น 2

ให้ $N(x,y)=3xy$

พิจารณา $N(\lambda x,\lambda y)=3\lambda x\lambda y$

$$=\lambda^2 3xy$$

$$=\lambda^2 N(x,y)$$

เนื่องจาก $N(\lambda x,\lambda y)=\lambda^2 N(x,y)$

ได้ $N(x,y)=3xy$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธุ์ระดับขั้น 2

จาก $M(x,y)$ และ $N(x,y)$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธุ์ระดับขั้น 2 เท่ากัน

ดังนั้น สมการ (15) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธุ์

หลังจากที่ตรวจสอบสมการไปแล้วว่าสมการใดที่อยู่ในรูปแบบสมการเอกพันธุ์ และถ้าสมการใดที่เป็นสมการที่อยู่ในรูปแบบสมการเอกพันธุ์แล้วนั้นเราสามารถหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธุ์ตามขั้นตอนดังต่อไปนี้ (สมศักดิ์ เทศสวัสดิ์วงศ์ ,2544 : 18)

วิธีหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธุ์

(16) $$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$$

เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธุ์ จัดรูปสมการใหม่ได้

$$\frac{dy}{dx}+\frac{M(x,y)}{N(x,y)}=0$$

จากทฤษฎีบท 2.2

(17) $$\frac{dy}{dx}+g(\frac{y}{x})=0$$

กำหนดให้ $y=vx$ จะได้ $v=\dfrac{y}{x}$ แทนในสมการ (17) ได้

$$\frac{d(vx)}{dx}+g(v)=0$$

$$\frac{vdx}{dx}+\frac{xdv}{dx}+g(v)=0$$

$$v+x\frac{dv}{dx}+g(v)=0$$

$$v+g(v)=-x\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{1}{x}dx=-\frac{1}{v+g(v)}dv$$

$$\frac{1}{x}dx+\frac{1}{v+g(v)}dv=0$$

ซึ่งเป็นสมการแบบแยกตัวแปรได้ และใช้วิธีการหาผลเฉลยของสมการแบบแยกตัวแปร เหมือนกับในหัวข้อ 2.1 ที่ผ่านมา แล้วแทนค่า $v=\dfrac{y}{x}$ กลับคืน แล้วจะได้ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (16) ที่ต้องการ

ตัวอย่าง 2.14 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

(18) $$(x^2-xy+y^2)dx-xydy=0$$

วิธีทำ ตรวจสอบสมการ (16) ว่าเป็นสมการแบบเอกพันธุ์หรือไม่

ให้ $M(x,y)=x^2-xy+y^2$

พิจารณา $M(\lambda x,\lambda y)=(\lambda x)^2-\lambda x\lambda y+(\lambda y)^2$

$$=\lambda^2x^2-\lambda x\lambda y+\lambda^2y^2$$

$$=\lambda^2x^2-\lambda^2xy+\lambda^2y^2$$

$$=\lambda^2(x^2-xy+y^2)$$

$$=\lambda^2M(x,y)$$

เนื่องจาก $M(\lambda x,\lambda y)=\lambda^2M(x,y)$

ได้ $M(x,y)=x^2-xy+y^2$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธุ์ระดับขั้น 2

ให้ $N(x,y) = xy$

พิจารณา $N(\lambda x, \lambda y) = \lambda x \lambda y$

$= \lambda^2 xy$

$= \lambda^2 N(x,y)$

เนื่องจาก $N(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 N(x,y)$

ได้ $N(x,y) = xy$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธุ์ระดับขั้น 2

จาก $M(x,y)$ และ $N(x,y)$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธุ์ระดับขั้น 2 เท่ากัน

ดังนั้น สมการ (18) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธุ์

หาผลเฉลยทั่วไปของสมการ (18)

ให้ $y = vx$ แทนในสมการ (18) ได้

$$(x^2 - vx^2 + (vx)^2)dx - xvxd(vx) = 0,$$

$$(x^2 - vx^2 + v^2x^2)dx - vx^2(vdx + xdv) = 0,$$

$$x^2dx - vx^2dx + v^2x^2dx - v^2x^2dx - vx^3dv = 0,$$

$$x^2dx - vx^2dx = vx^3dv,$$

$$(x^2 - vx^2)dx = vx^3dv,$$

$$x^2(1-v)dx = vx^3dv,$$

$$\frac{1}{x}dx = \frac{v}{1-v}dv,$$

$$\frac{x^2}{x^3}dx + \frac{v}{v-1}dv = 0,$$

หาปริพันธ์ตลอดสมการนี้ ได้

$$\int \frac{1}{x}dx + \int (1 + \frac{1}{v-1})\, dv = 0$$

$$\ln|x| + v + \ln|v-1| = c_1$$

จากสมบัติของลอการิทึม ($\log_a x + \log_a y = \log_a xy$) ได้

$$\ln|x||v-1| = -v + c_1 \text{ เมื่อ } c_1 \text{ เป็นตัวคงค่า}$$

จากสมบัติของลอการิทึม (ถ้า $\log_a x = y$ แล้ว $x = a^y$) ได้

$$x(v-1) = e^{-v+c_1}$$

หรือ

$$x(v-1) = e^{-v}e^{c_1}$$

ให้ $e^{c_1} = c$ เมื่อ c เป็นตัวคงค่า ได้

$$x(v-1) = ce^{-v}$$

นำ e^{v} คูณตลอดทั้งสมการ ได้

$$x(v-1)e^{v} = c$$

แทนค่า $v = \dfrac{y}{x}$ ในสมการ ได้

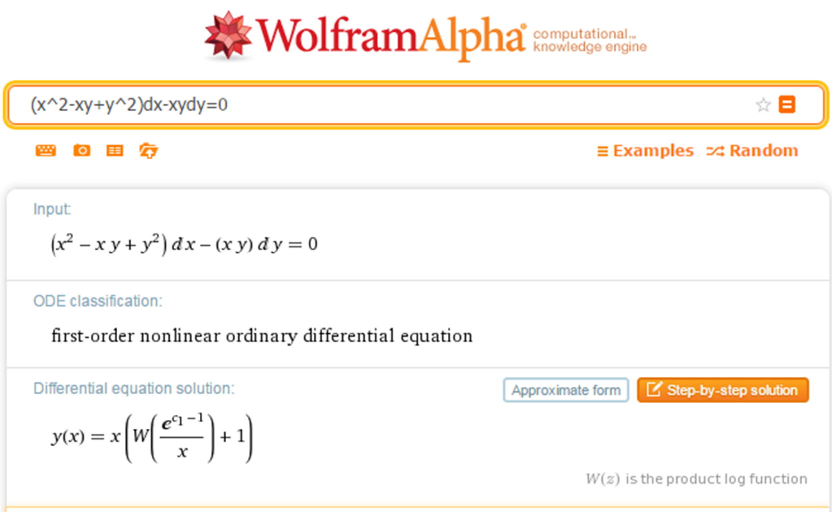
$$x(\frac{y}{x}-1)e^{\frac{y}{x}} = c$$

หรือ

$$(y-x)e^{\frac{y}{x}} = c$$

ดังนั้น $(y-x)e^{\frac{y}{x}} = c$ เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการ (18)

ใช้ Wolfram Alpha เพื่อหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ (18) ดังภาพที่ 2.6



ภาพที่ 2.6 ผลเฉลยของสมการ $(x^2 - xy + y^2)dx - xydy = 0$ โดยใช้ Wolfram Alpha

ตัวอย่าง 2.15 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

(19) $$y(x^2+y^2)dx + x(y^2-x^2)dy = 0$$

วิธีทำ ตรวจสอบสมการ (17) ว่าเป็นสมการแบบเอกพันธุ์หรือไม่

ให้ $M(x,y) = y(x^2+y^2) = x^2y + y^3$

พิจารณา $M(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^2 \lambda y + (\lambda y)^3$

$$= \lambda^2 x^2 \lambda y + \lambda^3 y^3$$

$$= \lambda^3 x^2 y + \lambda^3 y^3$$

$$= \lambda^3 (x^2 y + y^3)$$

$$= \lambda^3 M(x,y)$$

เนื่องจาก $M(\lambda x, \lambda y) = \lambda^3 M(x,y)$

ได้ $M(x,y) = x^2 - xy + y^2$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธุ์ระดับขั้น 3

ให้ $N(x,y) = x(y^2 - x^2) = xy^2 - x^3$

พิจารณา $N(\lambda x, \lambda y) = \lambda x (\lambda y)^2 - (\lambda x)^3$

$$= \lambda x \lambda^2 y^2 - \lambda^3 x^3$$

$$= \lambda^3 x y^2 - \lambda^3 x^3$$

$$= \lambda^3 (xy^2 - x^3)$$

$$= \lambda^3 N(x,y)$$

เนื่องจาก $N(\lambda x, \lambda y) = \lambda^3 N(x,y)$

ได้ $N(x,y) = xy$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธุ์ระดับขั้น 3

จาก $M(x,y)$ และ $N(x,y)$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธุ์ระดับขั้น 3 เท่ากัน

ดังนั้น สมการ (19) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธุ์

หาผลเฉลยทั่วไปของสมการ (19)

ให้ $y = vx$ แทนในสมการ (19) ได้

$$vx(x^2+(vx)^2)dx + x((vx)^2 - x^2)dvx = 0,$$
$$(vx^3+v^3x^3)dx + (v^2x^3 - x^3)(vdx + xdv) = 0,$$
$$vx^3dx + v^3x^3dx + v^3x^3dx - vx^3dx + v^2x^4dv - x^4dv = 0,$$
$$2v^3x^3dx + v^2x^4dv - x^4dv = 0,$$
$$2v^3x^3dx = x^4dv - v^2x^4dv,$$
$$2v^3x^3dx = (x^4 - v^2x^4)dv,$$
$$2\frac{x^3}{x^4}dx = \frac{1-v^2}{v^3}dv,$$
$$\frac{2}{x}dx - \frac{1-v^2}{v^3}dv = 0,$$

หาปริพันธ์ตลอดสมการนี้ ได้

$$\int \frac{2}{x}dx - \int (\frac{1-v^2}{v^3})\,dv = 0$$

หรือ

$$\int \frac{2}{x}dx - \int (\frac{1}{v^3} - \frac{1}{v})\,dv = 0$$

ได้

$$2\ln|x| + \frac{1}{2v^2} + \ln|v| = c_1$$

นำ $\frac{1}{v^2}$ บวกตลอดทั้งสมการ ได้

$$2\ln|x| - \ln|v| = \frac{1}{2v^2} + c_1$$

จากสมบัติของลอการิทึม ($b\log_a x = \log_a x^b$) ได้

$$\ln x^2 - \ln|v| = \frac{1}{2v^2} + c_1$$

กำหนดให้ทุก ๆ $v \neq 0$ จากสมบัติของลอการิทึม ($\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$) ได้

$$\ln\frac{x^2}{|v|} = \frac{1}{v^2} + c_3$$

จากสมบัติของลอการิทึม (ถ้า $\log_a x = y$ แล้ว $x = a^y$) ได้

$$\frac{x^2}{v} = e^{1/2v^2 + c_3}$$

หรือ

$$\frac{x^2}{v} = e^{1/2v^2} e^{c_3}$$

ให้ $e^{c_1} = c$ เมื่อ c เป็นตัวคงค่า ได้

$$\frac{x^2}{v} = ce^{1/2v^2}$$

นำ $e^{-1/2v^2}$ คูณตลอดทั้งสมการ ได้

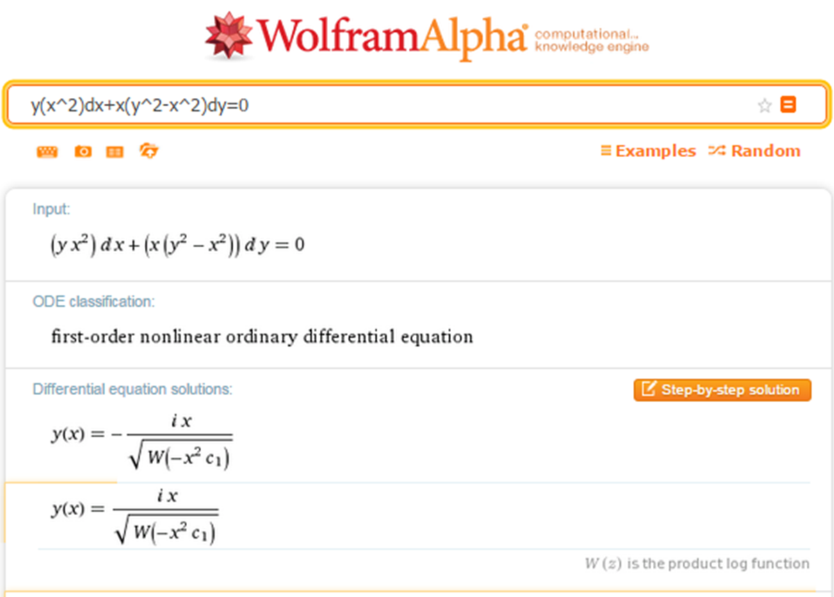
$$\frac{x^2 e^{-1/2v^2}}{v} = c$$

แทนค่า $v = \dfrac{y}{x}$ ในสมการ ได้

$$\frac{x^3 e^{-x^2/2y^2}}{y} = c$$

ดังนั้น $\dfrac{x^3 e^{-x^2/2y^2}}{y} = c$ เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการ (19)

ใช้ Wolfram Alpha เพื่อหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ (19) ดังภาพที่ 2.7



ภาพที่ 2.7 ผลเฉลยของสมการ $y(x^2 + y^2)dx + x(y^2 - x^2)dy = 0$ โดยใช้ Wolfram Alpha

ตัวอย่าง 2.16 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธุ์

(20) $$(y+\sqrt{x^2+y^2})dx - xdy = 0$$

และจงหาผลเฉลยเฉพาะ เมื่อกำหนด $y(\sqrt{3})=1$

วิธีทำ หาผลเฉลยทั่วไปของสมการ (18)

ให้ $y=vx$ แทนในสมการ (18) ได้

$$(vx+\sqrt{x^2+(vx)^2})dx - xd(vx) = 0$$

$$(vx+\sqrt{x^2+v^2x^2})dx - x(vdx+xdv) = 0,$$

$$(vx+\sqrt{x^2(1+v^2})dx - vxdx - x^2dv = 0,$$

$$(vx+\left|x\right|\sqrt{(1+v^2})dx - vxdx - x^2dv = 0,$$

กรณีที่ 1 $x \geq 0$ ได้

$$(vx+x\sqrt{(1+v^2})dx - vxdx - x^2dv = 0,$$

$$x(v+\sqrt{1+v^2})dx - vxdx = x^2dv,$$

$$x\left[(v+\sqrt{1+v^2})dx - vdx\right] = x^2dv,$$

$$x(v+\sqrt{1+v^2}-v)dx = x^2dv,$$

$$x(\sqrt{1+v^2})dx = x^2dv,$$

$$\frac{x}{x^2}dx = \frac{1}{\sqrt{1+v^2}}dv,$$

$$\frac{1}{x}dx = \frac{1}{\sqrt{1+v^2}}dv,$$

$$\frac{1}{x}dx - \frac{1}{\sqrt{1+v^2}}dv = 0$$

หาปริพันธ์ตลอดสมการนี้ ได้

$$\int\frac{1}{x}dx - \int\frac{1}{\sqrt{1+v^2}}dv = 0$$

หรือ

$$\ln x - \ln(v+\sqrt{v^2+1}) = c_1$$

จากสมบัติของลอการิทึม ($\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$) ได้

$$\ln\frac{x}{v+\sqrt{v^2+1}} = c_1$$

จากสมบัติของลอการิทึม (ถ้า $\log_a x = y$ แล้ว $x = a^y$) ได้

$$\frac{x}{v+\sqrt{v^2+1}} = e^{c_1}$$

ให้ $e^{c_1} = c$ เมื่อ c เป็นตัวคงค่า ได้

$$\frac{x}{v+\sqrt{v^2+1}} = c$$

แทนค่า $v = \frac{y}{x}$ ในสมการ ได้

$$\frac{x}{\frac{y}{x}+\sqrt{\frac{y^2}{x^2}+1}} = c$$

$$\frac{x}{\frac{y}{x}+\sqrt{\frac{y^2+x^2}{x^2}}} = c$$

$$\frac{x}{\frac{y}{x}+\frac{1}{|x|}\sqrt{y^2+x^2}} = c$$

หรือ

(21) $$\frac{x^2}{y+\sqrt{y^2+x^2}} = c,$$

ดังนั้น สำหรับ $x \geq 0$ แล้ว $\frac{x^2}{y+\sqrt{y^2+x^2}} = c$ เป็นผลเฉลยทั่วไปของ (20)

กรณีที่ 2 $x < 0$ ได้

$$\begin{aligned}
(vx - x\sqrt{(1+v^2})dx - vxdx - x^2dv &= 0, \\
x(v - \sqrt{1+v^2})dx - vxdx &= x^2dv, \\
x\left[(v - \sqrt{1+v^2})dx - vdx\right] &= x^2dv, \\
x(v - \sqrt{1+v^2} - v)dx &= x^2dv, \\
x(-\sqrt{1+v^2})dx &= x^2dv, \\
\frac{x}{x^2}dx &= -\frac{1}{\sqrt{1+v^2}}dv, \\
\frac{1}{x}dx &= -\frac{1}{\sqrt{1+v^2}}dv, \\
\frac{1}{x}dx + \frac{1}{\sqrt{1+v^2}}dv &= 0
\end{aligned}$$

หาปริพันธ์ตลอดสมการนี้ ได้

$$\int \frac{1}{x}dx + \int \frac{1}{\sqrt{1+v^2}}dv = 0$$

หรือ

$$\ln\left|x\right| + \ln(v + \sqrt{v^2+1}) = c_2$$

จากสมบัติของลอการิทึม ($\log_a x + \log_a y = \log_a xy$) ได้

$$\ln\left|x\right|\left(v + \sqrt{v^2+1}\right) = c_2$$

จากสมบัติของลอการิทึม (ถ้า $\log_a x = y$ แล้ว $x = a^y$) ได้

$$\left|x\right|\left(v + \sqrt{v^2+1}\right) = e^{c_2}$$

ให้ $e^{c_2} = c_3$ เมื่อ c_3 เป็นตัวคงค่า ได้

$$\left|x\right|\left(v + \sqrt{v^2+1}\right) = c_3$$

แทนค่า $v = \dfrac{y}{x}$ ในสมการ ได้

$$|x|\left(\frac{y}{x} + \sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1}\right) = c_3$$

$$|x|\left(\frac{y}{x} + \sqrt{\frac{y^2 + x^2}{x^2}}\right) = c_3$$

ดังนั้น สำหรับ $x < 0$ แล้ว $|x|\left(\dfrac{y}{x} + \sqrt{\dfrac{y^2 + x^2}{x^2}}\right) = c_3$ เป็นผลเฉลยทั่วไปของ (20)

หาผลเฉลยเฉพาะ

จากเงื่อนไขเริ่มต้น $y(\sqrt{3}) = 1$

แทนค่า $x = \sqrt{3}$ และ $y = 1$ ในสมการ (21) ได้

$$\frac{(\sqrt{3})^2}{1 + \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2}} = c$$

$$\frac{3}{1 + \sqrt{1 + 3}} = c$$

$$1 = c$$

แทนค่า $c = 1$ ในสมการ (21)

ดังนั้น $\dfrac{x^2}{y + \sqrt{y^2 + x^2}} = 1$ เป็นผลเฉลยเฉพาะของ (20)

2.3 สมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรง

สมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรงคือสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งระดับขั้นหนึ่งที่อยู่ในรูป $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ โดยที่ $M(x,y)$ เป็นฟังก์ชันของ x,y และ $N(x,y)$ เป็นฟังก์ชันของ x,y สมการ $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรง ในโดเมน D ถ้ามีฟังก์ชัน F ที่สอดคล้องกับ $dF(x,y) = M(x,y)dx + N(x,y)dy$ สำหรับทุก x ในโดเมน D ดังบทนิยามต่อไปนี้ (วารี เกรอต, 2542 : 25)

บทนิยาม 2.4

$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ เป็น**สมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรง** ในโดเมน D ถ้ามีฟังก์ชัน F ที่สอดคล้องกับ

$dF(x,y) = M(x,y)dx + N(x,y)dy$ สำหรับทุก x ในโดเมน D

ตัวอย่าง 2.17 สมการ

$$xdy + ydx = 0$$

เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรง เพราะ
เมื่อให้ $M(x,y)dx + N(x,y)dy = xdy + ydx$
และ $F(x,y) = xy$ แล้ว

$$\begin{aligned} dF(x,y) &= d(xy) \\ &= xdy + ydx \\ &= M(x,y)dx + N(x,y)dy \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 2.18 สมการ

$$\frac{1}{y}dx - \frac{x}{y^2}dy = 0$$

เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรง เพราะ
เมื่อให้ $M(x,y)dx + N(x,y)dy = \frac{1}{y}dx - \frac{x}{y^2}dy$

และ $F(x,y) = \frac{x}{y}$ แล้ว

$$\begin{aligned} dF(x,y) &= d(\frac{x}{y}) \\ &= \frac{ydx - xdy}{y^2} \\ &= \frac{ydx}{y^2} - \frac{xdy}{y^2} \\ &= \frac{1}{y}dx - \frac{x}{y^2}dy \\ &= M(x,y)dx + N(x,y)dy \end{aligned}$$

ข้อสังเกต 2.3

จะเห็นว่า $F(x,y)=c$ เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรงเพราะ $dF(x,y)=0$ จึงได้ว่า $F(x,y)=c$ เมื่อ c เป็นตัวคงค่า

ถ้ากำหนดสมการเชิงอนุพันธ์มาให้แล้ว ถ้าจะตรวจสอบจากนิยาม ว่าเป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรงก็จะหาคำตอบได้จาก $F(x,y)=c$ แต่ถ้าไม่สามารถตรวจสอบจากนิยามว่าเป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรง จะมีเงื่อนไขอื่นที่ช่วยในการตรวจสอบอีกหรือไม่ และจะมีวิธีการหาคำตอบได้อย่างไรถ้าสมการนั้นเป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรง ดังนั้น จึงต้องพยายามหาเงื่อนไขที่จะตรวจสอบสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรง ดังต่อไปนี้

จากบทนิยาม 2.4 สมการ $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรง ถ้ามีฟังก์ชัน F ที่

(22) $$dF(x,y)=M(x,y)dx+N(x,y)dy$$

เนื่องจาก

(23) $$dF(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}F(x,y)dx+\frac{\partial}{\partial y}F(x,y)dy$$

จากสมการ(22) และ (23) ได้

$$\frac{\partial}{\partial x}F(x,y)dx+\frac{\partial}{\partial y}F(x,y)dy=M(x,y)dx+N(x,y)dy$$

และจะได้ว่า

$$\frac{\partial}{\partial x}F(x,y)=M(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}F(x,y)=N(x,y)$$

โดยการหาอนุพันธ์ย่อย ได้

$$\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}F(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}M(x,y)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}F(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}N(x,y)$$

สำหรับฟังก์ชัน $F(x,y)$ เป็นฟังก์ชันของ 2 ตัวแปรที่มีความต่อเนื่องบนโดเมน D และ $F(x,y)$ หาค่าได้และต่อเนื่องทุก ๆ (x,y) แล้ว $\dfrac{\partial^2}{\partial y\partial x}F(x,y)=\dfrac{\partial^2}{\partial x\partial y}F(x,y)$ ทำให้ได้ว่า $\dfrac{\partial}{\partial x}N(x,y)=\dfrac{\partial}{\partial y}M(x,y)$ และสามารถสรุปเป็นทฤษฎีได้ดังนี้ (สุรัตนา สังข์หนุน, 2558 : 41)

ทฤษฎีบท 2.4

สมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับหนึ่ง $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ โดยที่ $M(x,y)$, $N(x,y)$, $\dfrac{\partial}{\partial y}M(x,y)$ และ $\dfrac{\partial}{\partial x}N(x,y)$ ต่อเนื่องทุก ๆ (x,y) ในโดเมน D

1. สมการดังกล่าวเป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรงในในโดเมน D แล้ว

$$\frac{\partial}{\partial y}M(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}N(x,y) \text{ สำหรับทุก ๆ } (x,y) \text{ ในโดเมน } D$$

2. ในทางกลับกัน ถ้า

$$\frac{\partial}{\partial y}M(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}N(x,y) \text{ สำหรับทุก ๆ } (x,y) \text{ ในโดเมน } D$$

แล้วสมการดังกล่าวจะเป็นสมการแม่นตรงในโดเมน D

ตัวอย่าง 2.19 สมการ

$$\frac{1}{y}dx-\frac{x}{y^2}dy=0$$

เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรง เพราะ

เมื่อ $M(x,y)=\dfrac{1}{y}$ และ $N(x,y)=\dfrac{x}{y^2}$

พิจารณา
$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}M(x,y)&=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{y}\right)\\&=\frac{\partial}{\partial y}y^{-1}\\&=-\frac{1}{y^2},\end{aligned}$$

และ $$\frac{\partial}{\partial x}N(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{y^2}\right)$$
$$= -\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{y^2}$$
$$= -\frac{1}{y^2},$$

ซึ่ง $$\frac{\partial}{\partial y}M(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}N(x,y)$$

หลังจากที่ตรวจสอบสมการไปแล้วว่าสมการใดที่อยู่ในรูปแบบสมการแม่นตรง และถ้าสมการใดที่เป็นสมการที่อยู่ในรูปแบบสมการแม่นตรงแล้วเราสามารถหาผลเฉลยของสมการตามขั้นตอนดังต่อไปนี้ (สมศักดิ์ เทศสวัสดิ์วงศ์ ,2544 : 23-24)

วิธีหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรง

(24) $$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรงที่มี $F(x,y) = c$ เป็นผลเฉลย
จากบทนิยาม 2.4 ได้

(25) $$\frac{\partial}{\partial x}F(x,y) = M(x,y) \text{ และ}$$

(26) $$\frac{\partial}{\partial y}F(x,y) = N(x,y)$$

หาปริพันธ์ของ (25) เทียบกับตัวแปร x โดยให้ y เป็นค่าคงตัว ได้

(27) $$F(x,y) = \int M(x,y)\,dx + h(y)$$

เมื่อ $h(y)$ เป็นตัวคงค่าของการหาปริพันธ์

หาอนุพันธ์ตลอดสมการ (27) เทียบกับตัวแปร y ได้

$$\frac{\partial}{\partial y}F(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)\,dx + h(y)\right)$$

หรือ

(28) $$\frac{\partial}{\partial y}F(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,dx + \frac{d}{dy}h(y)$$

และจากสมการ (26) ได้

$$N(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,dx + \frac{d}{dy}h(y)$$

หรือ

$$\frac{d}{dy}h(y) = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,dx$$

หาค่า $h(y)$ แล้วนำค่าที่ได้แทนในสมการ (27) จะได้ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (24) หรือจะหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อีกหนึ่งวิธีดังนี้

หาปริพันธ์ของ (25) เทียบกับตัวแปร y โดยให้ x เป็นค่าคงตัว ได้

(29) $$F(x,y) = \int N(x,y)\,dy + g(x)$$

เมื่อ $g(x)$ เป็นตัวคงค่าของการหาปริพันธ์

หาอนุพันธ์ของสมการ (27) เทียบกับตัวแปร x ได้

$$\frac{\partial}{\partial x}F(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(\int N(x,y)\,dx + g(x))$$

หรือ

(30) $$\frac{\partial}{\partial x}F(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\int N(x,y)\,dx + \frac{d}{dx}g(x)$$

และจากสมการ (25) ได้

$$M(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\int N(x,y)\,dx + \frac{d}{dx}g(x)$$

หรือ

$$\frac{d}{dx}g(x) = M(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int N(x,y)\,dx$$

หาค่า $g(x)$ แล้วนำค่าที่ได้แทนในสมการ (29) จะได้ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (24)

หมายเหตุ 2.3

ใช้ $\frac{d}{dy}h(y)$ ไม่ใช้ $\frac{\partial}{\partial y}h(y)$ ในสมการ (28) เพราะ h เป็นฟังก์ชันของตัวแปร y เพียงตัวเดียว และหา $h(y)$ ได้จากการหาปริพันธ์ และในทำนองเดียวกันใช้ $\frac{d}{dx}g(x)$ ไม่ใช้ $\frac{\partial}{\partial x}g(x)$ ในสมการ (30) เพราะ g เป็นฟังก์ชันของตัวแปร x เพียงตัวเดียวและหา $g(x)$ ได้จากการหาปริพันธ์

ตัวอย่าง 2.20 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

(31) $$(2xy-3x^2)dx+(x^2+y)dy=0$$

วิธีทำ ตรวจสอบสมการ (24) ว่าเป็นสมการแบบแม่นตรงหรือไม่

ให้ $M(x,y)=2xy-3x^2$

และ $$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}M(x,y)&=\frac{\partial}{\partial y}(2xy-3x^2)\\&=\frac{\partial}{\partial y}2xy-\frac{\partial}{\partial y}3x^2\\&=2x+0\\&=2x\end{aligned}$$

ให้ $N(x,y)=x^2+y$

และ $$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}N(x,y)&=\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y)\\&=\frac{\partial}{\partial x}x^2+\frac{\partial}{\partial x}y\\&=2x+0\\&=2x\end{aligned}$$

เนื่องจาก $\frac{\partial}{\partial y}M(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}N(x,y)$ ดังนั้นสมการ (31) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรงที่มี $F(x,y)=c$ เป็นผลเฉลยทั่วไป

(32) $$\frac{\partial}{\partial x}F(x,y)=2xy-3x^2 \text{ และ}$$

(33) $$\frac{\partial}{\partial y}F(x,y)=x^2+y$$

หาปริพันธ์ตลอดทั้งสมการ (32) เทียบกับตัวแปร x โดยให้ y เป็นค่าคงตัว ได้

(34) $$F(x,y)=x^2y-x^3+h(y)$$

หาอนุพันธ์ตลอดสมการ (34) เทียบกับตัวแปร y ได้

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}F(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\Big(x^2y - x^3 + h(y)\Big)\\ &= \frac{\partial}{\partial y}x^2y - \frac{\partial}{\partial y}x^3 + \frac{d}{dy}h(y)\\ &= x^2 - 0 + \frac{d}{dy}h(y)\\ &= x^2 + \frac{d}{dy}h(y)\end{aligned}$$

(35) $$\frac{\partial}{\partial y}F(x,y) = x^2 + \frac{d}{dy}h(y)$$

จากสมการ (33) และ (35) ได้

$$\begin{aligned}x^2 + \frac{d}{dy}h(y) &= x^2 + y,\\ \frac{d}{dy}h(y) &= y,\\ dh(y) &= ydy,\end{aligned}$$

หาปริพันธ์ตลอดสมการนี้ ได้

$$\int dh(y) = \int y\,dy$$

หรือ

$$h(y) = \frac{y^2}{2} + c$$

นำ $h(y) = \frac{y^2}{2} + c$ แทนในสมการ (34) ได้

(36) $$F(x,y) = x^2y - x^3 + \frac{y^2}{2} + c$$ เมื่อ c เป็นตัวคงค่า

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (31) คือ $x^2y - x^3 + \frac{y^2}{2} = c$ เมื่อ c เป็นตัวคงค่า

หรือหาปริพันธ์ตลอดสมการ (33) เทียบกับตัวแปร y โดยให้ x เป็นค่าคงตัว ได้

(37) $$F(x,y) = x^2y - \frac{y^2}{2} + g(x)$$

หาอนุพันธ์ตลอดสมการ (37) เทียบกับตัวแปร y ได้

$$\frac{\partial}{\partial x}F(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2y-\frac{y^2}{2}+g(x)\right)$$
$$=\frac{\partial}{\partial x}x^2y-\frac{\partial}{\partial x}\frac{y^2}{2}+\frac{d}{dx}g(x)$$
$$=2xy-0+\frac{d}{dx}g(x)$$
$$=2xy+\frac{d}{dx}g(x)$$

(38) $$\frac{\partial}{\partial x}F(x,y)=2xy+\frac{d}{dx}g(x)$$

จากสมการ (32) และ (38) ได้

$$2xy+\frac{d}{dx}g(x)=2xy-3x^2$$
$$\frac{d}{dx}g(x)=-3x^2$$
$$dg(x)=-3x^2dx$$

หาปริพันธ์ตลอดสมการนี้ ได้

$$\int dg(x)=\int -3x^2\,dx$$

หรือ

$g(x)=-x^3+c$ เมื่อ c เป็นตัวคงค่า

นำ $g(x)=-x^3+c$ แทนในสมการ (37) ได้

(39) $$F(x,y)=x^2y+\frac{y^2}{2}-x^3+c$$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (31) คือ $x^2y-x^3+\frac{y^2}{2}=c$ เมื่อ c เป็นตัวคงค่า

จากการหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ (31) ได้ผลเฉลยคือสมการ (36) และสมการ (39) ซึ่งทั้งสองสมการคือผลเฉลยเดียวกัน ดังนั้นการจะหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรงนั้นสามารถทำในวิธีใดก็ได้เพราะคำตอบที่ได้ออกมาจะเท่ากันเสมอ

ตัวอย่าง 2.21 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

(40) $$(y^2-2xy-6x)dx-(x^2-2xy+2)dy=0$$

วิธีทำ ตรวจสอบสมการ (24) ว่าเป็นสมการแบบแม่นตรงหรือไม่

ให้ $M(x,y)=y^2-2xy-6x$

และ
$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}M(x,y)&=\frac{\partial}{\partial y}(y^2-2xy-6x)\\&=\frac{\partial}{\partial y}y^2-\frac{\partial}{\partial y}2xy-\frac{\partial}{\partial y}6x\\&=2y-2x+0\\&=2y-2x\end{aligned}$$

ให้ $N(x,y)=-(x^2-2xy+2)$

และ
$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}N(x,y)&=-\frac{\partial}{\partial x}(x^2-2xy+2)\\&=-\frac{\partial}{\partial x}x^2+\frac{\partial}{\partial x}2xy-\frac{\partial}{\partial x}2\\&=-2x+2y-0\\&=2y-2x\end{aligned}$$

เนื่องจาก $\frac{\partial}{\partial y}M(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}N(x,y)$ ดังนั้นสมการ (40) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรงที่มี $F(x,y)=c$ เป็นผลเฉลยทั่วไป

(41) $$\frac{\partial}{\partial x}F(x,y)=y^2-2xy-6x \text{ และ}$$

(42) $$\frac{\partial}{\partial y}F(x,y)=-(x^2-2xy+2)$$

หาปริพันธ์ตลอดสมการ (41) เทียบกับตัวแปร x โดยให้ y เป็นค่าคงตัว ได้

(43) $$F(x,y)=xy^2-x^2y-3x^2+h(y)$$

หาอนุพันธ์ตลอดสมการ (43) เทียบกับตัวแปร y ได้

$$\frac{\partial}{\partial y}F(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(xy^2 - x^2y - 3x^2 + h(y)\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}xy^2 - \frac{\partial}{\partial y}x^2y - \frac{\partial}{\partial y}3x^2 + \frac{d}{dy}h(y)$$

$$= 2xy - x^2 - 0 + \frac{d}{dy}h(y)$$

(44) $$\frac{\partial}{\partial y}F(x,y) = 2xy - x^2 + \frac{d}{dy}h(y)$$

จากสมการ (42) และ (44) ได้

$$2xy - x^2 + \frac{d}{dy}h(y) = -(x^2 - 2xy + 2)$$

$$2xy - x^2 + \frac{d}{dy}h(y) = -x^2 + 2xy - 2)$$

$$\frac{d}{dy}h(y) = -2$$

หาปริพันธ์ตลอดสมการนี้ ได้

$$\int dh(y) = -\int 2\,dy$$

หรือ

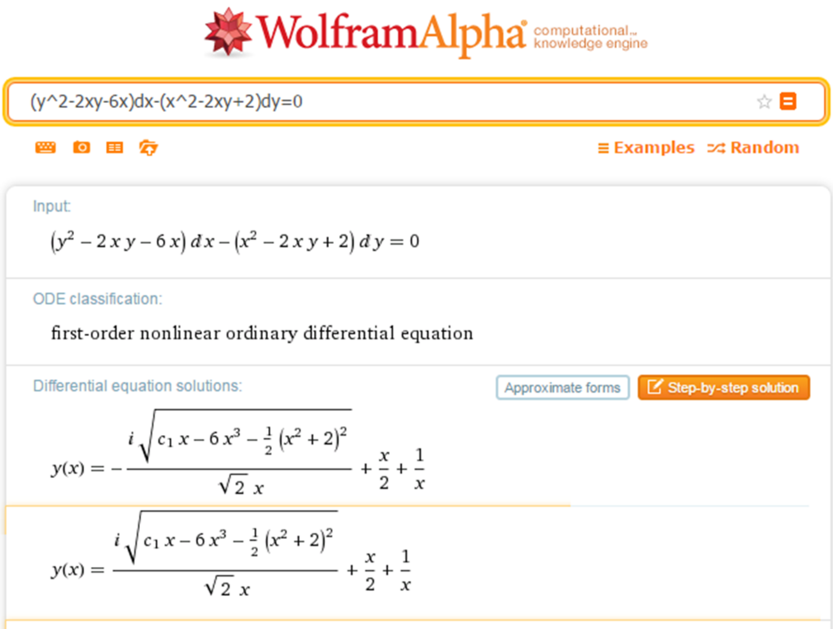
$h(y) = -2y + c$ เมื่อ c เป็นตัวคงค่า

นำ $h(y) = -2y + c$ แทนในสมการ (43) ได้

$$F(x,y) = xy^2 - x^2y - 3x^2 - 2y + c$$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (31) คือ $xy^2 - x^2y - 3x^2 - 2y = c$ เมื่อ c เป็นตัวคงค่า

ใช้ Wolfram Alpha เพื่อหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ (40) ดังภาพที่ 2.8



ภาพที่ 2.8 ผลเฉลยของสมการ $(y^2-2xy-6x)dx-(x^2-2xy+2)dy=0$ โดยใช้ Wolfram Alpha

ตัวอย่าง 2.22 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

(45) $$(2x\cos y-3x^2y)+(x^3-x^2\sin y-y)\frac{dy}{dx}=0$$

วิธีทำ สมการ (45) สามารถจัดได้ในรูป

(46) $$(2x\cos y+3x^2y)dx+(x^3-x^2\sin y-y)dy=0$$

ตรวจสอบสมการ (46) ว่าเป็นสมการแบบแม่นตรงหรือไม่

ให้ $M(x,y)=2x\cos y+3x^2y$

และ
$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}M(x,y)&=\frac{\partial}{\partial y}(2x\cos y+3x^2y)\\&=\frac{\partial}{\partial y}2x\cos y+\frac{\partial}{\partial y}3x^2y\\&=-2x\sin y+3x^2\end{aligned}$$

ให้ $N(x,y) = x^3 - x^2 \sin y - y$

และ
$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} N(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}(x^3 - x^2 \sin y - y) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} x^3 - \frac{\partial}{\partial x} x^2 \sin y - \frac{\partial}{\partial x} y \\ &= 3x^2 - 2x \sin y - 0 \\ &= 3x^2 - 2x \sin y\end{aligned}$$

เนื่องจาก $\frac{\partial}{\partial y} M(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} N(x,y)$ ดังนั้นสมการ (45) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรงที่มี $F(x,y) = c$ เป็นผลเฉลยทั่วไป

(47) $$\frac{\partial}{\partial x} F(x,y) = 2x \cos y + 3x^2 y$$ และ

(48) $$\frac{\partial}{\partial y} F(x,y) = x^3 - x^2 \sin y - y$$

หาปริพันธ์ตลอดสมการ (47) เทียบกับตัวแปร x โดยให้ y เป็นค่าคงตัว ได้

(49) $$F(x,y) = x^2 \cos y + x^3 y + h(y)$$

หาอนุพันธ์ตลอดสมการ (49) ได้

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y} F(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 \cos y + x^3 y + h(y)\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial y} x^2 \cos y + \frac{\partial}{\partial y} x^3 y + \frac{d}{dy} h(y) \\ &= -x^2 \sin y + x^3 + \frac{d}{dy} h(y)\end{aligned}$$

(50) $$\frac{\partial}{\partial y} F(x,y) = -x^2 \sin y + x^3 + \frac{d}{dy} h(y)$$

จากสมการ (48) และ (50) ได้

$$\begin{aligned}-x^2 \sin y + x^3 + \frac{d}{dy} h(y) &= x^3 - x^2 \sin y - y \\ \frac{d}{dy} h(y) &= -y\end{aligned}$$

หาปริพันธ์ตลอดสมการนี้ ได้

$$\int dh(y) = -\int y\,dy$$

หรือ

$$h(y) = -\frac{y^2}{2} + c \text{ เมื่อ } c \text{ เป็นตัวคงค่า}$$

นำ $h(y) = -\frac{y^2}{2} + c$ แทนในสมการ (49) ได้

$$F(x,y) = x^2\cos y + x^3 y - \frac{y^2}{2} + c$$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (45) คือ $x^2\cos y + x^3 y - \frac{y^2}{2} = c$ เมื่อ c เป็นตัวคงค่า

2.4 ตัวประกอบปริพันธ์

ในหัวข้อที่ผ่านมาเป็นการหาผลเฉลยของสมการ $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ ที่เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรง ในความเป็นจริงแล้วสมการเชิงอนุพันธ์นั้นอาจจะไม่ใช่สมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรงเสมอไป แต่เมื่อเราคูณสมการนั้นด้วยฟังก์ชันบางอย่างแล้ว ทำให้สมการนั้นกลายเป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรงได้ ในหัวข้อนี้เราจะศึกษาว่าจะทราบได้อย่างไรว่าสมการที่เราสนใจนั้น ถ้าไม่ใช่สมการแบบแม่นตรงแล้วเราจะทำให้สมการเป็นสมการแบบแม่นตรงได้หรือไม่ ถ้าได้เราจะหาฟังก์ชันที่นำมาคูณสมการแล้วทำให้สมการที่ได้จากการคูณด้วยฟังก์ชันนั้นกลายเป็นสมการแบบแม่นตรงได้อย่างไรซึ่งจะได้กล่าวในบทนิยามต่อไป (ศิริพร พัสดร, 2552 : 63-64)

บทนิยาม 2.5

ถ้าสมการ $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ ไม่ใช่สมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรงแล้วเรียกฟังก์ชัน μ ว่า**ตัวประกอบปริพันธ์** ถ้า μ คือฟังก์ชันซึ่งทำให้สมการ $\mu\left[M(x,y)dx + N(x,y)dy\right] = 0$ เป็นสมการแม่นตรง

ตัวอย่าง 2.23 สมการ

$ydx + 2xdy = 0$ ไม่เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรง

นำ y คูณตลอดสมการนี้ ได้

$$y\left[ydx + 2xdy\right] = 0$$

$$y^2dx + 2xydy = 0$$

และจะเห็นว่าสมการ $y^2dx + 2xxdy = 0$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรง

ดังนั้น y คือตัวประกอบปริพันธ์

การหาตัวประกอบปริพันธ์ในตัวอย่าง 2.23 นั้นหาได้ไม่ยากเพราะสมการนั้นเป็นสมการที่ไม่ซับซ้อน แต่ถ้าสมการที่ซับซ้อน แล้วการหาตัวประกอบปริพันธ์ก็จะยากขึ้นดังนั้นจึงมีวิธีการหาตัวประกอบปริพันธ์ดังต่อไปนี้ (สมศักดิ์ เทศสวัสดิ์วงศ์, 2554 30-31)

การหาตัวประกอบปริพันธ์

กำหนดให้สมการ

(51) $$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

สมมติให้ $\mu(x,y)$ เป็นตัวประกอบปริพันธ์ของสมการ (51)

จากบทนิยาม 2.5 จะได้ว่า

$$\mu(x,y)\Big[M(x,y)dx + N(x,y)dy\Big] = 0$$

หรือ

$\mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)dy = 0$ เป็นสมการแม่นตรง

โดยทฤษฎีบท 2.4 จะได้ว่า

$$\frac{\partial}{\partial y}\mu(x,y)M(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\mu(x,y)N(x,y)$$

$$\mu(x,y)\frac{\partial}{\partial y}M(x,y)dx + M(x,y)\frac{\partial}{\partial y}\mu(x,y) = \mu(x,y)\frac{\partial}{\partial x}N(x,y) + N(x,y)\frac{\partial}{\partial x}\mu(x,y)$$

$$\mu(x,y)\frac{\partial}{\partial y}M(x,y)dx - \mu(x,y)\frac{\partial}{\partial x}N(x,y) = N(x,y)\frac{\partial}{\partial x}\mu(x,y) - M(x,y)\frac{\partial}{\partial y}\mu(x,y)$$

หาฟังก์ชัน $\mu(x,y)$ โดยจัดกลุ่มใหม่ได้

(52) $$\mu(x,y)\left[\frac{\partial}{\partial y}M(x,y) - \frac{\partial}{\partial x}N(x,y)\right] = N(x,y)\frac{\partial}{\partial x}\mu(x,y) - M(x,y)\frac{\partial}{\partial y}\mu(x,y)$$

จะพบว่าสมการ (52) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยซึ่งการหา μ นั้นจะไม่สามารถทำได้ง่าย ๆ แต่ถ้าเราจำกัดให้ μ เป็นฟังก์ชันของตัวแปร x หรือตัวแปร y เพียงอย่างเดียวการแก้สมการหาค่า μ จะเป็นการแก้สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ ดังนั้นการพิจารณาหาค่า μ จากสมการ (52) จะแบ่งเป็น 2 กรณีดังต่อไปนี้

กรณีที่ 1 μ เป็นฟังก์ชันที่อยู่ในรูปตัวแปร x อย่างเดียว แล้ว $\dfrac{\partial \mu}{\partial y} = 0$ และจากสมการ (52)

เมื่อ $\mu(x,y) = \mu(x)$ จะได้ $\dfrac{\partial}{\partial x}\mu(x,y)$ เป็น $\dfrac{d}{dx}\mu(x)$ แทนค่าในสมการ (52) ได้

(53) $$\mu(x)\left[\frac{\partial}{\partial y}M(x,y)-\frac{\partial}{\partial x}N(x,y)\right]=N(x,y)\frac{d}{dx}\mu(x)$$

กำหนดให้ $N = N(x,y)$ และ $M = M(x,y)$

แทน $\frac{\partial}{\partial y}M(x,y)$ แทนด้วย M_y และ $\frac{\partial}{\partial x}N(x,y)$ แทนด้วย N_x ในสมการ (53) ได้

$$\mu(x)\left[M_y - N_x\right] = N\frac{d}{dx}\mu(x)$$

คูณตลอดสมการนี้ด้วย $\frac{1}{\mu(x)N}$ จะได้

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{1}{\mu(x)}\frac{d}{dx}\mu(x)$$

ให้ $f(x) = \frac{M_y - N_x}{N}$ แล้วจัดรูปสมการได้

$$\frac{d\mu(x)}{\mu(x)} = f(x)dx$$

หาปริพันธ์ตลอดสมการนี้ ได้

$$\ln\left|\mu(x)\right| = \int f(x)\,dx$$

และจากสมบัติของลอการิทึม ได้

$$\mu(x) = e^{\int f(x)dx}$$

นั้นคือเมื่อ $f(x) = \frac{M_y - N_x}{N}$ จะได้ $\mu(x) = e^{\int f(x)dx}$

กรณีที่ 2 μ เป็นฟังก์ชันที่อยู่ในรูปตัวแปร y อย่างเดียว แล้ว $\frac{\partial \mu}{\partial x} = 0$ และจากสมการ (52) เมื่อ $\mu(x,y) = \mu(y)$ จะได้ $\frac{\partial}{\partial y}\mu(x,y)$ เป็น $\frac{d}{dy}\mu(y)$ แทนค่าในสมการ (52) ได้

(54) $$\mu(y)\left[\frac{\partial}{\partial y}M(x,y)-\frac{\partial}{\partial x}N(x,y)\right]=-M(x,y)\frac{\partial}{\partial y}\mu(y)$$

กำหนดให้ $M = M(x,y)$

แทน $\frac{\partial}{\partial y}M(x,y)$ แทนด้วย M_y และ $\frac{\partial}{\partial x}N(x,y)$ แทนด้วย N_x ในสมการ (54) ได้

$$\mu(y)\Big[M_y - N_x\Big] = -M\frac{d}{dy}\mu(y)$$

คูณตลอดสมการนี้ด้วย $-\frac{1}{\mu(y)M}$ จะได้

$$\frac{N_x - M_y}{M} = \frac{1}{\mu(y)}\frac{d}{dy}\mu(y)$$

ให้ $g(y) = \frac{N_x - M_y}{M}$ แล้วจัดรูปสมการได้

$$\frac{d\mu(y)}{\mu(y)} = g(y)dy$$

หาปริพันธ์ตลอดสมการนี้ ได้

$$\ln\Big|\mu(y)\Big| = \int g(y)\,dx$$

และจากสมบัติของลอการิทึม ได้

$$\mu(y) = e^{\int f(y)dy}$$

นั้นคือ เมื่อ $g(y) = \frac{N_x - M_y}{M}$ จะได้ $\mu(y) = e^{\int g(y)dy}$

หมายเหตุ 2.4

จากการหาตัวประกอบปริพันธ์ที่ผ่านมานั้นจะเห็นว่ามีการเขียนอนุพันธ์ย่อยแตกต่างกันดังนั้น เพื่อให้ง่ายต่อการเขียนและทำความเข้าใจต่อไปนี้จะเขียนโดยใช้รูปแบบเดียวกันทั้งหมดดังต่อไปนี้

M	แทน	$M(x,y)$
N	แทน	$N(x,y)$
M_y	แทน	$\frac{\partial}{\partial y}M(x,y)$
N_x	แทน	$\frac{\partial}{\partial x}N(x,y)$

การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ที่ไม่เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรง

1. จัดรูปสมการให้อยู่ในรูป $Mdx + Ndy = 0$

2. ถ้า $M_y \neq N_x$ แสดงว่าสมการไม่เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรง ต้องหาตัวประกอบปริพันธ์ ดังต่อไปนี้

$$f(x) = \frac{M_y - N_x}{N} \qquad \text{จะได้} \qquad \mu(x) = e^{\int f(x)dx}$$

$$g(y) = \frac{N_x - M_y}{M} \qquad \text{จะได้} \qquad \mu(y) = e^{\int g(y)dy}$$

3. คูณตัวประกอบปริพันธ์ตลอดสมการ $Mdx + Ndy = 0$ จะทำให้สมการ

$\mu(x)\Big[Mdx + Ndy\Big] = 0$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรง หรือ

$\mu(y)\Big[Mdx + Ndy\Big] = 0$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรง

แล้วใช้วิธีในหัวข้อ 2.3 หาผลเฉลยต่อไป

ตัวอย่าง 2.24 จงหาผลเฉลยของสมการ

(55) $$(4xy + 3y^2 - x)dx + x(x+2y)dy = 0$$

วิธีทำ ตรวจสอบสมการ (55) ว่าเป็นสมการแบบแม่นตรงหรือไม่

ให้ $M = 4xy + 3y^2 - x$ ได้ $M_y = 4x + 6y$

และ $N = x(x+2y)$ ได้ $N_x = 2x + 2y$

เนื่องจาก $M_y \neq N_x$ ดังนั้นสมการ (55) ไม่เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรงดังนั้นต้องหาตัวประกอบปริพันธ์

พิจารณา
$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{M_y - N_x}{N} \\ &= \frac{(4x+6y)-(2x+2y)}{x(x+2y)} \\ &= \frac{4x+6y-2x-2y}{x(x+2y)} \\ &= \frac{2x+4y}{x(x+2y)} \end{aligned}$$

$$= \frac{2(x+2y)}{x(x+2y)}$$
$$= \frac{2}{x}$$

เป็นฟังก์ชันของ x เท่านั้นดังนั้นตัวประกอบปริพันธ์สำหรับสมการ (55) คือ

$$\begin{aligned} e^{\int \frac{2}{x}dx} &= e^{2\ln|x|} \\ &= e^{\ln x^2} \\ &= x^2 \end{aligned}$$

นำ x^2 คูณตลอดสมการ (55) ได้

$$x^2\Big[(4xy+3y^2-x)dx + x(x+2y)dy\Big] = 0$$

(56) $$(4x^3y+3x^2y^2-x^3)dx + (x^4+2x^3y)dy = 0$$

สมการ (56) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรงที่มี $F(x,y)=c$ เป็นผลเฉลยทั่วไปที่

(57) $$\frac{\partial}{\partial x}F(x,y) = 4x^3y+3x^2y^2-x^3$$

และ

(58) $$\frac{\partial}{\partial y}F(x,y) = x^4+2x^3y$$

หาปริพันธ์ตลอดสมการ (57) เทียบกับตัวแปร x โดยให้ y เป็นค่าคงตัว ได้

(59) $$F(x,y) = x^4y + x^3y^2 - \frac{x^4}{4} + h(y)$$

หาอนุพันธ์ตลอดสมการ (59) ได้

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y}F(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(x^4y + x^3y^2 - \frac{x^4}{4} + h(y)\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial y}x^4y + \frac{\partial}{\partial y}x^3y^2 - \frac{\partial}{\partial y}\frac{x^4}{4} + \frac{d}{dy}h(y) \\ &= x^4 + 2x^3y - 0 + \frac{d}{dy}h(y) \end{aligned}$$

$$= x^4 + 2x^3y + \frac{d}{dy}h(y)$$

หรือ

(60) $$\frac{\partial}{\partial y}F(x,y) = x^4 + 2x^3y + \frac{d}{dy}h(y)$$

จากสมการ (58) และ (60) ได้

$$x^4 + 2x^3y + \frac{d}{dy}h(y) = x^4 + 2x^3y$$

$$\frac{d}{dy}h(y) = 0$$

หาปริพันธ์ตลอดสมการนี้ ได้

$$h(y) = c \text{ เมื่อ } c \text{ เป็นตัวคงค่า}$$

นำ $h(y) = c$ แทนในสมการ (59) ได้

$$F(x,y) = x^4y + x^3y^2 - \frac{x^4}{4} + c$$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (55) คือ $x^4y + x^3y^2 - \frac{x^4}{4} = c$ เมื่อ c เป็นตัวคงค่า

ตัวอย่าง 2.25 จงหาผลเฉลยของสมการ

(60) $$y(x+y+1)dx + x(x+3y+2)dy = 0$$

วิธีทำ ตรวจสอบสมการ (60) ว่าเป็นสมการแบบแม่นตรงหรือไม่

ให้ $M = y(x+y+1)$ ได้ $M_y = x+2y+1$

และ $N = x(x+3y+2)$ ได้ $N_x = 2x+3y+2$

เนื่องจาก $M_y \neq N_x$ ดังนั้นสมการ (60) ไม่เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรงดังนั้นต้องหาตัวประกอบปริพันธ์

พิจารณา $$g(y) = \frac{N_x - M_y}{M}$$

$$= \frac{(2x+3y+2)-(x+2y+1)}{y(x+y+1)}$$

$$= \frac{2x+3y+2-x-2y-1)}{y(x+y+1)}$$

$$= \frac{x+y+1}{y(x+y+1)}$$

$$= \frac{1}{y}$$

เป็นฟังก์ชันของ y เท่านั้นดังนั้นตัวประกอบปริพันธ์สำหรับสมการ (60) คือ

$$e^{\int \frac{1}{y} dy} = e^{\ln|y|}$$

$$= y$$

นำ y คูณตลอดสมการ (60) ได้

$$y\Big[y(x+y+1)dx + x(x+3y+2)dy\Big] = 0$$

หรือ

(61) $$(xy^2 + y^3 + y^2)dx + (x^2y + 3xy^2 + 2xy)dy = 0$$

สมการ (61) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรงที่มี $F(x,y) = c$ เป็นผลเฉลยทั่วไปที่

(62) $$\frac{\partial}{\partial x} F(x,y) = xy^2 + y^3 + y^2$$

และ

(63) $$\frac{\partial}{\partial y} F(x,y) = x^2y + 3xy^2 + 2xy$$

หาปริพันธ์ตลอดสมการ (62) เทียบกับตัวแปร x โดยให้ y เป็นค่าคงตัว ได้

(64) $$F(x,y) = \frac{x^2y^2}{2} + xy^3 + xy^2 + h(y)$$

หาอนุพันธ์ตลอดสมการ (64) ได้

$$\frac{\partial}{\partial y} F(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2y^2}{2} + xy^3 + xy^2 + h(y)\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\frac{x^2y^2}{2} + \frac{\partial}{\partial y}xy^3 + \frac{\partial}{\partial y}xy^2 + \frac{d}{dy}h(y)$$

$$= x^2y + 3xy^2 + 2xy + \frac{d}{dy}h(y)$$

(65) $$\frac{\partial}{\partial y}F(x,y) = x^2y + 3xy^2 + 2xy + \frac{d}{dy}h(y)$$

จากสมการ (63) และ (65) ได้

$$x^2y + 3xy^2 + 2xy + \frac{d}{dy}h(y) = x^2y + 3xy^2 + 2xy$$

$$\frac{d}{dy}h(y) = 0$$

หาปริพันธ์ตลอดสมการนี้ ได้

$h(y) = c$ เมื่อ c เป็นตัวคงค่า

นำ $h(y) = c$ แทนในสมการ (64) ได้

$$F(x,y) = \frac{x^2y^2}{2} + xy^3 + xy^2 + c$$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (60) คือ $\frac{x^2y^2}{2} + xy^3 + xy^2 = c$ เมื่อ c เป็นตัวคงค่า

ตัวอย่าง 2.26 จงหาผลเฉลยของสมการ

(66) $$(x^2y + y + 1) + x(1 + x^2)\frac{dy}{dx} = 0$$

วิธีทำ สมการ (66) สามารถจัดรูปสมการใหม่ได้

(67) $$(x^2y + y + 1)dx + x(1 + x^2)dy = 0$$

ตรวจสอบสมการ (67) ว่าเป็นสมการแบบแม่นตรงหรือไม่

ให้ $M = x^2y + y + 1$ ได้ $M_y = x^2 + 1$

และ $N = x(1 + x^2)$ ได้ $N_x = 1 + 3x^2$

เนื่องจาก $M_y \neq N_x$ ดังนั้นสมการ (66) ไม่เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรงดังนั้นต้องหาตัวประกอบปริพันธ์

พิจารณา
$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{M_y - N_x}{N} \\ &= \frac{(x^2+1)-(1+3x^2)}{x(1+x^2)} \\ &= \frac{x^2+1-1-3x^2}{x(1+x^2)} \\ &= \frac{2x^2}{x(1+x^2)} \\ &= \frac{2x}{1+x^2} \end{aligned}$$

เป็นฟังก์ชันของ x เท่านั้นดังนั้นตัวประกอบปริพันธ์สำหรับสมการ (60) คือ

$$\begin{aligned} e^{\int \frac{2x}{1+x^2}dx} &= e^{-\ln\left|1+x^2\right|} \\ &= e^{\ln(1+x^2)^{-1}} \\ &= (1+x^2)^{-1} \end{aligned}$$

นำ $(1+x^2)^{-1}$ คูณตลอดสมการ (67) ได้

$$\begin{aligned} (1+x^2)^{-1}(x^2y+y+1)dx + x(1+x^2)^{-1}(1+x^2)dy &= 0 \\ (1+x^2)^{-1}\Big((x^2+1)y+1\Big)dx + xdy &= 0 \end{aligned}$$

(68) $$y+(1+x^2)^{-1}dx + xdy = 0$$

สมการ (68) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรงที่มี $F(x,y)=c$ เป็นผลเฉลยทั่วไปที่

(69) $$\frac{\partial}{\partial x}F(x,y) = y+(1+x^2)^{-1}$$

และ

(70) $$\frac{\partial}{\partial y}F(x,y) = x$$

หาปริพันธ์ตลอดสมการ (70) เทียบกับตัวแปร y โดยให้ x เป็นค่าคงตัว ได้

(71) $$F(x,y) = xy + g(x)$$

หาอนุพันธ์ตลอดสมการ (71) ได้

$$\frac{\partial}{\partial x}F(x,y) = \frac{d}{dx}\Big(xy + g(x)\Big)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}xy + \frac{d}{dx}g(x)$$

$$= y + \frac{d}{dx}g(x)$$

(72) $$\frac{\partial}{\partial y}F(x,y) = y + \frac{d}{dx}g(x)$$

จากสมการ (69) และ (72) ได้

$$y + \frac{d}{dx}g(x) = y + (1+x^2)^{-1}$$

$$\frac{d}{dx}g(x) = (1+x^2)^{-1}$$

$$dg(x) = \frac{1}{1+x^2}dx$$

หาปริพันธ์ตลอดสมการนี้ ได้

$$g(x) = \arctan x + c \quad \text{เมื่อ } c \text{ เป็นตัวคงค่า}$$

นำ $g(x) = \arctan x + c$ แทนในสมการ (71) ได้

$$F(x,y) = xy + \arctan x + c$$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (66) คือ $xy + \arctan x = c$ เมื่อ c เป็นตัวคงค่า

ตัวอย่าง 2.27 จงหาผลเฉลยของสมการ

(73) $$(x^2 + y^2)dx + x(x-2y)dy = 0$$

วิธีทำ ตรวจสอบสมการ (73) ว่าเป็นสมการแบบแม่นตรงหรือไม่

ให้ $M = x^2 + y^2$ ได้ $M_y = 2y$

และ $N = x(x-2y)$ ได้ $N_x = 2x - 2y$

เนื่องจาก $M_y \neq N_x$ ดังนั้นสมการ (73) ไม่เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรงดังนั้นต้องหาตัวประกอบปริพันธ์

พิจารณา
$$f(x) = \frac{M_y - N_x}{N}$$
$$= \frac{(2y) - (2x - 2y)}{x(x - 2y)}$$
$$= \frac{2y - 2x + 2y}{x(x - 2y)}$$
$$= \frac{4y - 2x}{x(x - 2y)}$$
$$= \frac{2(2y - x)}{x(x - 2y)}$$
$$= -\frac{2}{x}$$

เป็นฟังก์ชันของ x เท่านั้นดังนั้นตัวประกอบปริพันธ์สำหรับสมการ (73) คือ

$$e^{\int -\frac{2}{x}dx} = e^{-2\ln|x|}$$
$$= e^{\ln(x)^{-2}}$$
$$= x^{-2}$$

นำ x^{-2} คูณตลอดสมการ (73) ได้

$$x^{-2}(x^2 + y^2)dx + x^{-2}x(x - 2y)dy = 0$$

หรือ

(74) $$(1 + x^{-2}y^2)dx + (1 - 2x^{-1}y)dy = 0$$

สมการ (74) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรงที่มี $F(x,y) = c$ เป็นผลเฉลยทั่วไปที่

(75) $$\frac{\partial}{\partial x}F(x,y) = 1 + x^{-2}y^2$$

และ

(76) $$\frac{\partial}{\partial y}F(x,y) = 1 - 2x^{-1}y$$

หาปริพันธ์ตลอดสมการ (75) เทียบกับตัวแปร x โดยให้ y เป็นค่าคงตัว ได้

(77) $$F(x,y) = x - x^{-1}y^2 + h(y)$$

หาอนุพันธ์ตลอดสมการ (77) ได้

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}F(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\Big(x - x^{-1}y^2 + h(y)\Big) \\ &= \frac{\partial}{\partial y}x - \frac{\partial}{\partial y}x^{-1}y^2 + \frac{d}{dy}h(y) \\ &= 0 - 2x^{-1}y + \frac{d}{dy}h(y) \\ &= -2x^{-1}y + \frac{d}{dy}h(y)\end{aligned}$$

(78)
$$\frac{\partial}{\partial y}F(x,y) = -2x^{-1}y + \frac{d}{dy}h(y)$$

จากสมการ (76) และ (78) ได้

$$-2x^{-1}y + \frac{d}{dy}h(y) = 1 - 2x^{-1}y$$

$$\frac{d}{dy}h(y) = 1$$

$$dh(y) = dy$$

หาปริพันธ์ตลอดสมการนี้ ได้

$h(y) = y + c$ เมื่อ c เป็นตัวคงค่า

นำ $h(y) = y + c$ แทนในสมการ (77) ได้

$$F(x,y) = x - x^{-1}y^2 + y + c$$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (73) คือ $x - x^{-1}y^2 + y = c$ เมื่อ c เป็นตัวคงค่า

2.5 สมการเชิงเส้น

สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับที่หนึ่งคือสมการที่สามารถเขียนได้ในรูป

$$a(x)\frac{dy}{dx} + b(x)y = c(x)$$

สำหรับกรณี $c(x) = 0$ สมการดังกล่าวเป็นสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับที่หนึ่งแบบเอกพันธุ์ และกรณี $c(x) \neq 0$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับที่หนึ่งแบบไม่เอกพันธุ์ สำหรับการหาผลเฉลยของสมการนั้นจะต้องอาศัยบทนิยามดังต่อไปนี้ (อาทิตย์ ศรีแก้ว, 2546 : 11-12)

บทนิยาม 2.6

สมการที่อยู่ในรูป $a(x)\dfrac{dy}{dx}+b(x)y=c(x)$ เมื่อ $a(x)\neq 0$

เรียกว่า **สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับที่หนึ่ง**

ตัวอย่าง 2.28 สมการต่อไปนี้เป็นสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับที่หนึ่ง

1. $2x\dfrac{dy}{dx}+y=\sin x$
2. $xy'+\left(\dfrac{2x-3}{x}\right)y=e^x$

การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันเชิงเส้น

สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นแบบไม่เอกพันธุ์นั้นมีขั้นตอนการหาผลเฉลยดังต่อไปนี้ (สมศักดิ์ เทศสวัสดิ์วงศ์, 2544 : 35-36)

กำหนดสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น

(79) $$a(x)\frac{dy}{dx}+b(x)y=c(x)$$

นำ $\dfrac{1}{a(x)}$ คูณตลอสมการ (79) ได้

$$\frac{dy}{dx}+\frac{b(x)}{a(x)}y=\frac{c(x)}{a(x)}$$

ให้ $p(x)=\dfrac{b(x)}{a(x)}$ และ $g(x)=\dfrac{c(x)}{a(x)}$ แทนลงในสมการนี้ได้

(80) $$\frac{dy}{dx}+p(x)y=g(x)$$

แล้วสมการใหม่ให้อยู่ในรูป

(81) $$\Big[p(x)y-g(x)\Big]dx+dy=0$$

สมการ (81) เขียนให้อยู่ในรูปสมการ

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

โดยที่ $M(x,y) = p(x)y - g(x)$ และ $N(x,y) = 1$

ถ้าสมการ (81) เป็นสมการแม่นตรง ก็สามารถหาผลเฉลยตามวิธีการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรงในหัวข้อ 2.3 ที่ผ่านมาแต่ถ้าสมการ (81) ไม่เป็นสมการแม่นตรง ยกเว้นกรณีที่ $p(x) = 0$ เพราะ

$$M_y = \frac{\partial}{\partial y}\left[p(x)y - g(x)\right] = p(x)$$

และ
$$N_x = \frac{\partial}{\partial x}1 = 0$$

ซึ่ง $M_y \neq N_x$

ดังนั้น ต้องหาตัวประกอบปริพันธ์ของสมการ (80) ให้ $\mu(x)$ เป็นตัวประกอบปริพันธ์

นั่นคือ $\dfrac{\partial}{\partial y}\left[\mu(x)M(x,y)\right] = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[\mu(x)N(x,y)\right]$

หรือ $\dfrac{\partial}{\partial y}\left[\mu(x)\left(p(x)y - g(x)\right)\right] = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[\mu(x)(1)\right]$

หาอนุพันธ์ ได้

$$\mu(x)p(x) = \frac{d}{dx}\mu(x)$$

หรือรูปสมการใหม่ ได้

$$\frac{1}{\mu(x)}d\mu(x) = p(x)dx$$

หาปริพันธ์ ได้

$$\ln\left|\mu(x)\right| = \int p(x)\,dx$$

หรือ
$$\mu(x) = e^{\int p(x)\,dx}$$

นำ $\mu(x)$ คูณตลอดสมการ (80) ได้

$$e^{\int p(x)\,dx}\left[\frac{dy}{dx} + p(x)y\right] = g(x)e^{\int p(x)\,dx}$$

หรือ

(82) $$e^{\int p(x)\,dx}\frac{dy}{dx}+e^{\int p(x)\,dx}p(x)y=g(x)e^{\int p(x)\,dx}$$

จัดรูปสมการใหม่ได้

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\Big[ye^{\int p(x)\,dx}\Big]&=e^{\int p(x)\,dx}\frac{dy}{dx}+ye^{\int p(x)\,dx}\frac{d}{dx}\int p(x)\,dx\\&=e^{\int p(x)\,dx}\frac{dy}{dx}+ye^{\int p(x)\,dx}p(x)\\&=e^{\int p(x)\,dx}\frac{dy}{dx}+ye^{\int p(x)\,dx}+p(x)y\end{aligned}$$

(83) $$\frac{d}{dx}\Big[ye^{\int p(x)\,dx}\Big]=e^{\int p(x)\,dx}\frac{dy}{dx}+ye^{\int p(x)\,dx}+p(x)y$$

จากสมการ (82) และ (83) ได้

$$\frac{d}{dx}\Big[ye^{\int p(x)\,dx}\Big]=g(x)e^{\int p(x)\,dx} \text{ หรือ}$$

$$\frac{d}{dx}\Big[\mu(x)y\Big]=g(x)\mu(x) \text{ เมื่อ } \mu(x)=e^{\int p(x)\,dx}$$

หรือ $$d\Big[\mu(x)y\Big]=g(x)\mu(x)dx$$

หาปริพันธ์ตลอดสมการ ได้

$$\mu(x)y=\int g(x)\mu(x)\,dx+c \text{ เมื่อ } c \text{ เป็นตัวคงค่า}$$

ดังนั้น $y=\dfrac{1}{\mu(x)}\Big[\int g(x)\mu(x)\,dx+c\Big]$ เป็นผลเฉลยของสมการ (79)

ตัวอย่าง 2.29 จงหาผลเฉลยของสมการ

(84) $$y'+\frac{3y}{x}=6x^2$$

วิธีทำ สมการ (84) อยู่ในรูปของสมการเชิงเส้น

โดยมี $p(x)=\dfrac{3}{x}$

และ $g(x)=6x^2$

จาก $\mu(x)=e^{\int p(x)dx}$

ได้ $\mu(x)=e^{\int \frac{3}{x}dx}$

$$= e^{3\ln x}$$
$$= e^{\ln x^3}$$
$$= x^3$$

นำ $\mu(x)$ คูณตลอดสมการ (84) ได้

$$x^3y' + 3x^2y = 6x^5$$

หรือ

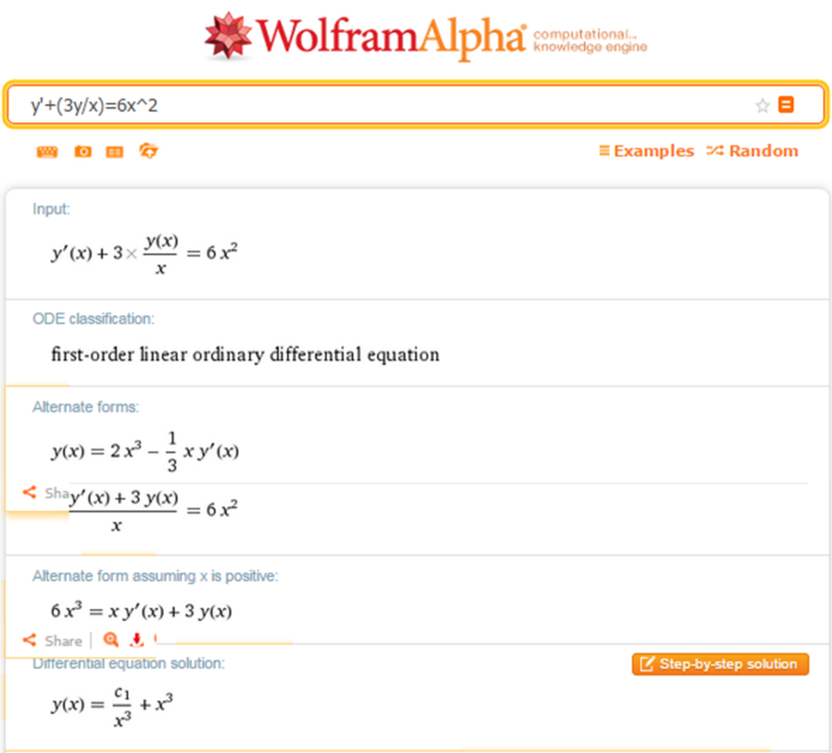
$$\frac{d}{dx}x^3y = 6x^5$$

หาปริพันธ์ตลอดทั้งสมการ ได้

$$x^3y = \int 6x^5\,dx$$
$$= x^6 + c$$

ดังนั้น $y = x^3 + \dfrac{c}{x^3}$ เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการ (84) เมื่อ c เป็นตัวคงค่า

ใช้ Wolfram Alpha เพื่อหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ (84) ดังภาพที่ 2.9



ภาพที่ 2.9 ผลเฉลยของสมการ $y' + \dfrac{3y}{x} = 6x^2$ โดยใช้ Wolfram Alpha

ตัวอย่าง 2.30 จงหาผลเฉลยของสมการ

(85) $$y' - 2xy = x$$

วิธีทำ สมการ (85) อยู่ในรูปของสมการเชิงเส้น

โดยมี $$p(x) = -2x$$

และ $$g(x) = x$$

จาก $$\mu(x) = e^{\int p(x)\,dx}$$

ได้ $$\mu(x) = e^{\int -2x\,dx} = e^{-x^2}$$

นำ $\mu(x)$ คูณตลอดสมการ (85) ได้

$$e^{-x^2}y' - 2xye^{-x^2} = xe^{-x^2}$$

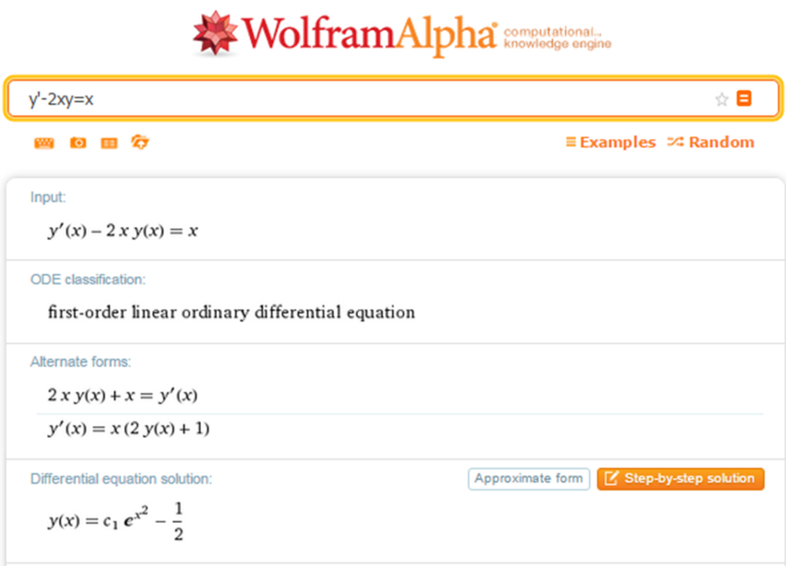
หรือ $$\frac{d}{dx}e^{-x^2}y = xe^{-x^2}$$

หาปริพันธ์ตลอดทั้งสมการ ได้

$$e^{-x^2}y = \int xe^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + c$$

ดังนั้น $y = -\dfrac{1}{2} + ce^{x^2}$ เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการ (85) เมื่อ c เป็นตัวคงค่า

ใช้ Wolfram Alpha เพื่อหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ (85) ดังภาพที่ 2.10



ภาพที่ 2.10 ผลเฉลยของสมการ $y' - 2xy = x$ โดยใช้ Wolfram Alpha

2.6 สรุปท้ายบทที่ 2

สำหรับการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งนั้นเมื่อเราทราบว่าสมการนั้นมีผลเฉลยแล้ว ก่อนอื่นต้องพิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งนั้นสามารถจัดอยู่ในรูป

$$A(x)dx + B(y)dy = 0$$

ซึ่งเป็นสมการแบบแยกกันได้ แล้วหาผลเฉลยทั่วไปของสมการโดยการหาปริพันธ์ตลอดสมการ แต่ถ้าสมการไม่เป็นสมการแบบแยกกันได้ ซึ่งอยู่ในรูป

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

ถ้า $M(x,y)$ และ $N(x,y)$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธุ์ที่มีระดับขั้นเท่ากันแล้ว สมการดังกล่าวก็จะเป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธุ์ หาผลเฉลยโดยการเปลี่ยนตัวแปร ให้ $y = vx$ หรือ $x = vy$ แทนลงไปในสมการแล้วสมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธุ์ นั้นจะเปลี่ยนเป็นสมการแบบแยกกันได้ และหาผลหาผลเฉลยโดยการหาปริพันธ์ตลอดสมการ แต่ถ้าสมการดังกล่าวไม่เป็นสมการเอกพันธุ์แล้วถ้า $\dfrac{\partial}{\partial y}M(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial x}N(x,y)$ แล้ว สมการ $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ จะเป็นสมการแม่นตรงที่มี $F(x,y) = c$ เป็นผลเฉลยและ

$$\frac{\partial}{\partial x}F(x,y) = M(x,y) \text{ และ}$$
$$\frac{\partial}{\partial y}F(x,y) = N(x,y)$$

แต่ถ้าสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งนั้นไม่สามารถแยกตัวแปรได้ ไม่เป็นสมการเอกพันธุ์และไม่เป็นสมการแม่นตรงเราสามารถหาตัวประกอบปริพันธ์คูณเข้าตลอดทั้งสมการ เพื่อจัดรูปสมการนั้นให้อยู่ในรูปแบบสมการแม่นตรง แล้วจึงหาผลเฉลย เช่นถ้าสมการ $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ ไม่ใช่สมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรง แต่สมการ $\mu\Big[M(x,y)dx + N(x,y)dy\Big] = 0$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรง เรียกฟังก์ชัน μ ว่าตัวประกอบปริพันธ์ และสุดท้ายถ้าสมการสามารถจัดอยู่ในรูปแบบ

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = g(x)$$

เรียกสมการนี้ว่า สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับที่หนึ่ง สำหรับการหาผลเฉลยสมการเชิงอนุพันธ์รูปแบบนี้ทำโดยการคูณตัวประกอบปริพันธ์ $\mu(x) = e^{\int p(x)\,dx}$ ตลอดสมการก็จะทำให้สามารถหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับที่หนึ่งได้

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 2

1. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการต่อไปนี้

   1.1 $y' = \dfrac{2x}{y}$

   1.2 $\dfrac{dy}{dx} = x^2y^2$

   1.3 $(x-1)dx = ydy$

   1.4 $x^2dx + y(x-1)dy = 0$

   1.5 $xyy' = 1 + y^2$

   1.6 $y^2dx + e^x dy = 0$

2. จงหาผลเฉลยเฉพาะซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขเริ่มต้นที่กำหนดให้ดังต่อไปนี้

   2.1 $xyy' = 1 + y^2$ เงื่อนไขเริ่มต้น $y(2) = 1$

   2.2 $y^2dx + e^x dy = 0$ เงื่อนไขเริ่มต้น $y(0) = 1$

   2.3 $\dfrac{dy}{dx} = xe^{-(y+x^2)}$ เงื่อนไขเริ่มต้น $y(0) = 0$

   2.4 $\dfrac{dr}{dt} = -2rt$ เงื่อนไขเริ่มต้น $r(0) = 3$

   2.5 $xy^3dx + e^{x^2}dy = 0$ เงื่อนไขเริ่มต้น $y(-\dfrac{1}{2}) = 0$

3. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการต่อไปนี้

   3.1 $(x-2y)dx + (2x+y)dy = 0$

   3.2 $2(2x^2 + y^2)dx - xydy = 0$

   3.3 $(x-y)(4x+y)dx + x(5x-y)dy = 0$

   3.4 $(x-y)(4x+y)dx + x(5x-y)dy = 0$

   3.5 $(x + ye^{y/x})dx - xe^{y/x}dy = 0$

4. จงหาผลเฉลยเฉพาะซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขเริ่มต้นที่กำหนดให้ดังต่อไปนี้

   2.1 $(x-y)dx + (3x+y)dy = 0$ เงื่อนไขเริ่มต้น $y(2) = -1$

   2.2 $(x-2y)dx + (2x+y)dy = 0$ เงื่อนไขเริ่มต้น $y(1) = -1$

   2.3 $y^2dx + (x^2 + 3xy. + 4x^2)dy = 0$ เงื่อนไขเริ่มต้น $y(2) = 1$

บทที่ 3
การประยุกต์ของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับหนึ่ง

ในบทที่ผ่านมานั้นเราได้ศึกษาการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งแบบต่าง ๆ ไปแล้ว สำหรับในบทนี้ จะกล่าวถึงกับการประยุกต์ของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับหนึ่งกับบางปัญหา เช่น ปัญหาแนววิถีเชิงตั้งฉาก ปัญหาทางกลศาสตร์ ปัญหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาณที่สนใจ ซึ่งปัญหาต่างๆ ข้างต้น สามารถนำมาสร้างความสัมพันธ์ของตัวแปรต่างๆ ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ และเมื่อเราสามารถแก้สมการเชิงอนุพันธ์ซึ่งเป็นตัวแบบทางคณิตศาสตร์ของปัญหาได้อย่างถูกต้อง คำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์นั้น สามารถนำไปใช้ในการอธิบายตัวแปรหรือปริมาณที่เราสนใจได้อย่างถูกต้อง

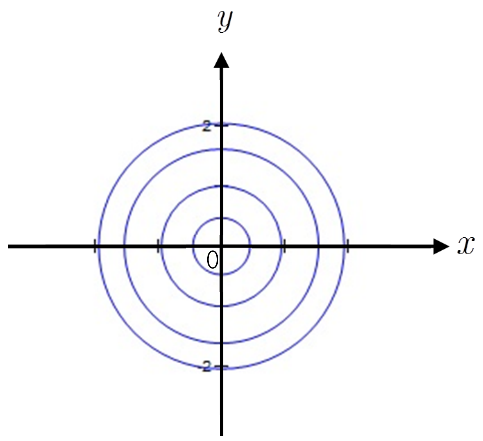
3.1 ปัญหาแนววิถีเชิงตั้งฉาก

เป็นที่ทราบกันแล้วว่าสมการหนึ่งสมการของสองตัวแปรที่มีพารามิเตอร์จะแทนเส้นโค้งหลาย ๆ เส้นซึ่งเส้นโค้งเส้นหนึ่งจะเกิดจากการกำหนดค่าหนึ่งให้กับพารามิเตอร์ เราเรียกเส้นโค้งเหล่านี้ว่า วงศ์เส้นโค้ง (วีระศักดิ์ วาจาบัณฑิตย์, 2541 : 85)

กำหนดสมการ

(1) $$x^2 + y^2 = c^2$$

เป็นสมการของกลุ่มวงกลมซึ่งวงกลมแต่ละวงนี้มีจุดศูนย์กลางที่จุด $(0,0)$



ภาพที่ 3.1 วงศ์เส้นโค้งของสมการ $x^2 + y^2 = c^2$

บทนิยาม 3.1

แต่ละเส้นโค้งของวงศ์เส้นโค้งหนึ่ง ตัดกับแต่ละเส้นโค้งของวงศ์เส้นโค้งอีกชุดหนึ่งเป็นมุมฉากแล้วเรากล่าวว่า วงศ์เส้นโค้งทั้งสองเป็น**แนววิถีเชิงตั้งฉาก**ซึ่งกันและกัน

ให้

(2) $$F(x,y,c)=0$$

เป็นวงศ์เส้นโค้งพารามิเตอร์หนึ่งตัว ในระนาบ xy โดนที่ c เป็นพารามิเตอร์ เรากล่าวว่าชุดเส้นโค้งพารามิเตอร์หนึ่งตัว

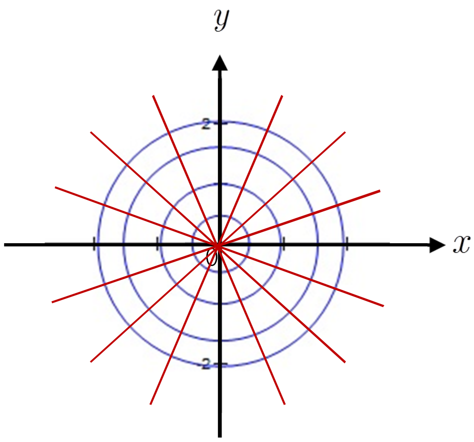
(3) $$G(x,y,k)=0$$

โดยที่ k เป็นพารามิเตอร์ แนววิถีเชิงตั้งฉากกับวงศ์เส้นโค้ง (2) ถ้าแต่ละเส้นโค้งของวงศ์เส้นโค้ง (3) ตัดกับทุกเส้นของวงศ์เส้น (2) เป็นมุมฉาก และจะกล่าวว่าวงศ์เส้นโค้งพารามิเตอร์หนึ่งตัว (3) เป็น แนววิธีเฉียง กับวงศ์เส้นโค้ง (2) ถ้าแต่ละเส้นโค้งของวงศ์เส้นโค้ง (3) ตัดกับทุกเส้นโค้งของชุดเส้นโค้ง (2) เป็นมุม α โดย $\alpha \neq 90^\circ$

ตัวอย่าง เช่นวงศ์เส้นโค้ง (1) ซึ่งเป็นวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิดและรัศมีเท่ากับ c เห็นได้ว่าแต่ละเส้นตรงที่ผ่านจุดกำเนิดซึ่งกำหนดโดยสมการ

(4) $$y=kx$$

จะเป็นแนววิถีเชิงตั้งฉากของวงศ์เส้นโค้ง (1) และกลับกันแต่ละวงกลมของวงศ์เส้นโค้ง (1) ก็เป็นแนววิถีเชิงตั้งฉากของวงศ์เส้นโค้ง (4) นั่นคือวงศ์เส้นโค้ง (1) และ วงศ์เส้นโค้ง (4) ต่างก็เป็นแนววิถีเชิงตั้งฉาก ซึ่งกันและกัน ดังภาพที่ 3.2



ภาพที่ 3.2 วงศ์เส้นโค้ง $y=kx$ เป็นแนววิถีเชิงตั้งฉากกันและกันกับวงศ์เส้นโค้ง $x^2+y^2=c^2$

ในทางฟิสิกส์นั้นมีปรากฏการณ์เป็นแนววิถีเชิงตั้งฉาก เช่น ชุดเส้นแรงของสนามแม่เหล็ก และชุดเส้นโค้งศักย์เท่ากัน ในสนามแม่เหล็กเป็นแนววิถีเชิงตั้งฉากซึ่งกันและกัน หรือชุดเส้นแรงไฟฟ้าและชุดเส้นโค้งศักย์เท่ากันในสนามไฟฟ้า เป็นแนววิถีเชิงตั้งฉากซึ่งกันและกัน หรือในเรื่องความร้อนชุดเส้นโค้งอุณหภูมิเท่ากัน กับชุดเส้นทางการไหลความร้อนเป็นแนววิถีเชิงตั้งฉากซึ่งกันและกัน

เรากล่าวว่าชุดเส้นโค้งเป็นแนววิธีเชิงตั้งฉากในตัวถ้าแนววิถีเชิงตั้งฉากของวงศ์เส้นโค้งเป็นวงศ์เดียวกันเช่นวงศ์เส้นโค้ง $y^2 = 2cx + c^2$ ต่อไปนี้จะศึกษาการหาแนววิถีเชิงตั้งฉากของวงศ์เส้นโค้งพารามิเตอร์หนึ่งตัวดังวิธีการต่อไปนี้ (สุรัตนา สังข์หนุน, 2558 : 73-77)

การหาแนววิถีเชิงตั้งฉากของวงศ์เส้นโค้งพารามิเตอร์หนึ่งตัว

กำหนดวงศ์เส้นโค้งพารามิเตอร์หนึ่งตัว (2)

$$F(x,y,c)=0$$

เริ่มต้นหาสมการเชิงอนุพันธ์ของวงศ์เส้นโค้งโดยการหาอนุพันธ์สมการ (2) เทียบกับ x แล้วกำจัดพารามิเตอร์ c ให้หมดไปจะได้ สมการเชิงอนุพันธ์ของวงศ์เส้นโค้ง (2) คือ

(5) $$\frac{dy}{dx}=f(x,y)$$

นั่นคือ เส้นโค้งแต่ละเส้นของวงศ์เส้นโค้ง (2) ที่จุด (x,y) ใด ๆ มีความชันเท่ากับ $f(x,y)$ และเนื่องจากแนววิถีเชิงตั้งฉากของวงศ์เส้นโค้ง (2) ตัดกับแต่ละเส้นโค้งของวงศ์เส้นโค้ง (2) เป็นมุมฉากดังนั้นความชันของแนววิถีเชิงตั้งฉาก ที่จุด (x,y) ใด ๆ เท่ากับ $-\dfrac{1}{f(x,y)}$

จะได้ว่า สมการเชิงอนุพันธ์ของวงศ์เส้นโค้งแนววิถีเชิงตั้งฉากคือ

(6) $$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{f(x,y)}$$

ทำการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ (6) จะได้วงศ์เส้นโค้งพารามิเตอร์หนึ่งตัว $G(x,y,k)=0$

ตัวอย่าง 3.1 จงหาแนววิถีเชิงตั้งฉากของวงศ์เส้นโค้ง $y=cx^2$ โดยที่ c เป็นค่าคงที่ใด ๆ

วิธีทำ ทำการหาสมการเชิงอนุพันธ์ของวงศ์เส้นโค้ง

(7) $$y=cx^2$$

โดยการหาอนุพันธ์เทียบกับ x ทั้งสองข้างของสมการ (7) ได้

(8) $$\frac{dy}{dx}=2cx$$

จากสมการ (7) และ (8) จะได้

(9) $$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}$$

ดังนั้นสมการเชิงอนุพันธ์สำหรับแนววิถีเชิงตั้งฉากคือ

(10) $$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{2y}$$

จัดสมการ (10) ให้อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์แบบแยกกันได้

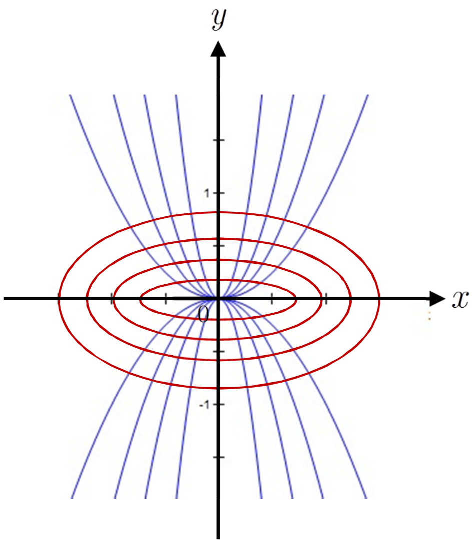
$$2ydy = -xdx$$

หาปริพันธ์ตลอดสมการนี้จะได้ชุดเส้นโค้ง

$y^2 = -\frac{x^2}{2} + k$ เมื่อ k เป็นตัวคง

หรือ

$$2y^2 + x^2 = k$$



ภาพที่ 3.3 แนววิถีเชิงตั้งฉากกับวงศ์เส้นโค้ง $y = cx^2$

ดังนั้น แนววิถีเชิงตั้งฉากของวงศ์เส้นโค้ง $y = cx^2$ คือ $2y^2 + x^2 = k$

ตัวอย่าง 3.2 จงหาแนววิถีเชิงตั้งฉากของวงศ์เส้นโค้ง $y = ce^x$ โดยที่ c เป็นค่าคงที่ใด ๆ

วิธีทำ ทำการหาสมการเชิงอนุพันธ์ของวงศ์เส้นโค้ง

(11) $$y = ce^x$$

โดยการหาอนุพันธ์เทียบกับ x ทั้งสองข้างของสมการ (11) ได้

(12) $$\frac{dy}{dx} = ce^x$$

จากสมการ (11) และ (12) จะได้

(13) $$\frac{dy}{dx} = y$$

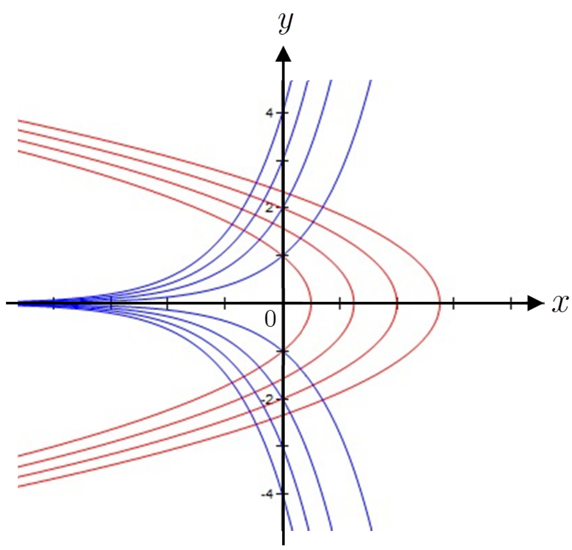
ดังนั้นสมการเชิงอนุพันธ์สำหรับแนววิถีเชิงตั้งฉากคือ

(14) $$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{y}$$

จัดสมการ (10) ให้อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์แบบแยกกันได้

$$ydy = -dx$$

หาปริพันธ์ตลอดสมการนี้จะได้ชุดเส้นโค้ง หรือ $y^2 + 2x = k$ เมื่อ k เป็นตัวคงค่า



ภาพที่ 3.4 แนววิถีเชิงตั้งฉากกับวงศ์เส้นโค้ง $y = ce^x$

ดังนั้น แนววิถีเชิงตั้งฉากของวงศ์เส้นโค้ง $y = ce^x$ คือ $y^2 + 2x = k$

3.2 ปัญหาทางกลศาสตร์

สำหรับในหัวข้อนี้ เป็นการนำความรู้ของการแก้สมการเชิงอนุพันธ์มาประยุกต์ใช้กับปัญหาทางกลศาสตร์ ในที่นี้เราจะกล่าวเฉพาะปัญหาทางกลศาสตร์พื้นฐานที่ใช้กฎการเคลื่อนที่ของนิวตันได้ ซึ่งกล่าวว่า

1. วัตถุต่าง ๆ จะคงสภาพหยุดยิ่งหรือเคลื่อนที่ไปในแนวเส้นตรงด้วยความเร็วคงที่ เว้นแต่จะมีแรงภายนอกมากระทำ

2. อัตราการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมของวัตถุ เป็นสัดส่วนโดยตรงกับแรงที่กระทำต่อวัตถุนั้น และมีทิศทางเดียวกับทิศทางของแรงนั้น

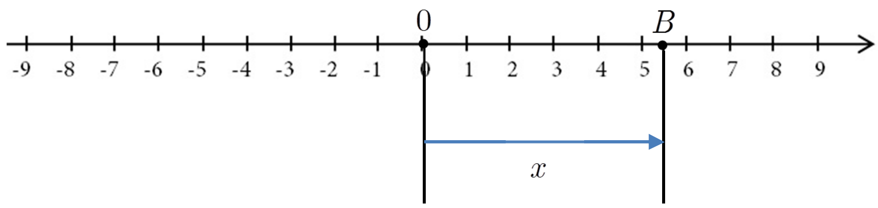
3. แรงกริยา และแรงปฏิกิริยา มีขนาดเท่ากันแต่มีทิศทางตรงข้าม

ก่อนที่จะประยุกต์สมการเชิงอนุพันธ์ในการแก้ปัญหากลศาสตร์ จะขอทบทวนหลักการเบื้องต้นทางกลศาสตร์ ดังนี้ (สุรัตนา สังข์หนุน, 2558 : 79)

นิยาม 3.1

โมเมนตัมของวัตถุ คือ ผลคูณของมวลวัตถุกับความเร็ววัตถุ

ต่อไปจะพิจารณาการเคลื่อนที่ของวัตถุ B บนเส้นตรง L เลือกจุด ๆ หนึ่งบนเส้นตรง L เป็นจุดกำเนิดเรียกว่าจุด 0 พร้อมกำหนดทิศทางการเคลื่อนที่ทิศทางหนึ่งเป็นบวกและกำหนดหน่วยระยะทางด้วย แล้วจะได้ว่าพิกัด x ของตำแหน่ง B จากจุดกำเนิดจะบอกให้ทราบถึงระยะทางการเคลื่อนที่ของวัตถุ B ดังภาพ



ภาพที่ 3.5 ระยะทางการเคลื่อนที่ของวัตถุ B

ความเร็วของ B คืออัตราการเปลี่ยนแปลงของ x ดังนี้

(15) $$v = \frac{dx}{dt}$$

ความเร่งชั่วขณะของ B คืออัตราการเปลี่ยนแปลงของ v

(16) $$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

สังเกตว่า x, v และ a เป็นปริมาณเวกเตอร์ แรงทั้งหมดระยะทางการเคลื่อนที่ ความเร็วและความเร่งในทิศทางบวกบน L จะมีค่าเป็นบวกและค่าเหล่านี้จะมีค่าเป็นลบในทิศทางลบบน L

จากกฎข้อที่ 2 ของนิวตัน สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของสมการทางคณิตศาสตร์ได้

(17) $$\frac{d}{dx}(mv) = KF$$

โดยที่ m แทนมวลของวัตถุ

v แทนความเร็วของวัตถุ

F แทนแรงที่มากระทำกับวัตถุ

K แทนค่าคงที่ของการแปรผัน

ในกรณีที่มวลของวัตถุเป็นค่าคงที่ เราสามารถจัดสมการ (15) ได้เป็น

(18) $$m\frac{dv}{dx} = KF$$

จากสมการ (16) และ (18) ได้

(19) $$a = K\frac{F}{m}$$

หรือ

(20) $$F = kma$$

โดยที่ $k = \dfrac{1}{K}$ จะพบว่าค่าคงที่ k ขึ้นอยู่กับหน่วยของมวล แรงและความเร่งในระบบที่เลือกใช้ สำหรับ $k = 1$ สมการ (17) จะเขียนอยู่ในรูป

(21) $$F = ma$$

มีหลายระบบที่ค่า $k = 1$ ในที่นี้จะพิจารณา ระบบหน่วยเพียง 3 ระบบคือ ระบบดังต่อไปนี้

1. The British gravitational system (British)
2. The centimater-gram-second system (cgs)
3. The meter-kilogram-second system (mks)

ทั้งสามระบบนี้แสดงได้ดังตารางต่อไปนี้ (สุรัตนา สังข์หนุน, 2558 : 80)

ตาราง 3.1 ระบบหน่วย British system, cgs system และ mks system

	British system	cgs system	mks system
แรง	ปอนด์	ไดน์	นิวตัน
มวล	สลัก	กรัม	กิโลกรัมย
ระยะทาง	ฟุต	เซนติเมตร	เมตร
เวลา	วินาที	วินาที	วินาที
ความเร็ว	ฟุตต่อวินาที	เซนติเมตรต่อวินาที	เมตรต่อวินาที
ความเร่ง	ฟุตต่อวินาที ^{2}	เซนติเมตรต่อวินาที ^{2}	เมตรต่อวินาที ^{2}

เนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลกที่กระทำต่อวัตถุคือ น้ำหนักของวัตถุนั้น ดังนั้นน้ำหนักจึงมีหน่วยวัดตามหน่วยของแรง คือวัดเป็นปอนด์ในระบบ British วัดเป็นไดน์ในระบบ cgs และวัดเป็นนิวตันในระบบ mks ความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก g ที่บริเวณผิวโลกในระบบ British cgs และ mks มีค่าเท่ากับ 32 ฟุตต่อวินาที ^{2} 980 เซนติเมตรต่อวินาที ^{2} และ 9.8 เมตรต่อวินาที ^{2} ตามลำดับ และจากกฎข้อที่ 2 ของนิวตันจะได้ว่าในการตกของวัตถุสมมติวัตถุมีมวล m และมีน้ำหนัก w และน้ำหนักของวัตถุนิยามโดย $w = mg$ ดังนั้น (วีระศักดิ์ วาจาบัณฑิตย์, 2541 : 108)

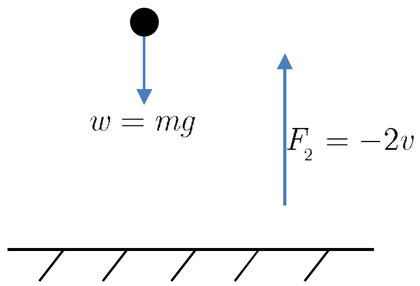
(22) $$m = \frac{w}{g}$$

ตัวอย่าง 3.3 วัตถุหนัก 8 ปอนด์ ตกจากสภาพหยุดนิ่งลงมาในแนวดิ่ง โดยมีแรงต้านของกาศ (หน่วยเป็นปอนด์) เท่ากับสองเท่าของความเร็ววัตถุ (หน่วยเป็น ฟุตต่อวินาที) จงหาความเร็วของวัตถุและระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่ลงมาได้ ณ เวลา t ใด ๆ

วิธีทำ ให้ F_1 แทนแรงที่เกิดจากน้ำหนักของวัตถุ

F_2 แทนแรงต้านทานของอากาศ

F_1 เป็นแรงที่กระทำต่อวัตถุในทิศทางดิ่งลงสู่พื้นจึงมีค่าเป็นบวก และ F_2 มีทิศทางตรงข้ามกับ F_1 จึงมีค่าเป็นลบ แสดงได้ดังภาพ



จากกฎที่สองของนิวตัน จะได้ว่า

$$m\frac{dv}{dt} = F_1 + F_2$$

$$\frac{w}{g}\frac{dv}{dt} = w - 2v$$

หรือ

(23) $$8\frac{dv}{dt} = g(8 - 2v)$$

จัดสมการ (23) ให้อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์แบบแยกกันได้

(24) $$\frac{8}{8 - 2v}dv = gdt$$

หาปริพันธ์ตลอดสมการ (24) จะได้

$$-4\ln\left|8 - 2v\right| = gt + c_1$$

$$\ln\left|8 - 2v\right| = -\frac{g}{4}t + c_2$$

$$\left|8 - 2v\right| = e^{-\frac{g}{4}t + c_2}$$

$$\left|8 - 2v\right| = e^{-\frac{g}{4}t}e^{c_2}$$

$$8 - 2v = \pm c_3 e^{-\frac{g}{4}t}$$

(25) $$8-2v=ce^{-\frac{g}{4}t}$$

เนื่องจากวัตถุตกจากสภาพหยุดนิ่ง ดังนั้นเงื่อนไขเริ่มต้นคือ $v(0)=0$

แทนในสมการ (25) จะได้ $c=8$

ดังนั้นความเร็วของวัตถุ ณ เวลา เวลา t ใด ๆ คือ

$$8-2v=8e^{-\frac{g}{4}t}$$

$$2v=8+8e^{-\frac{g}{4}t}$$

$$v=4\left(1+1e^{-\frac{g}{4}t}\right)$$

หรือ

(26) $$v(t)=4\left(1+1e^{-\frac{g}{4}t}\right)$$ ฟุตต่อวินาที

กำหนดให้ $x(t)$ แทนระยะทางที่วัตถุตกลงมาในแนวดิ่ง เวลา t ใด ๆ

สามารถเขียนสมการ (26) ในรูป

(27) $$\frac{dx}{dt}=4\left(1+1e^{-\frac{g}{4}t}\right)$$

หาปริพันธ์ตลอดสมการ (27) จะได้

(28) $$x=4\left(t+\frac{4}{g}e^{-\frac{g}{4}t}\right)+c_4$$

เนื่องจากวัตถุตกจากสภาพหยุดนิ่ง ดังนั้นเงื่อนไขเริ่มต้นคือ $x(0)=0$

แทนในสมการ (28) จะได้ $c_4=-\frac{16}{g}$

ดังนั้นระยะทางที่วัตถุตกลงมาในแนวดิ่ง ณ เวลา t ใด ๆ คือ

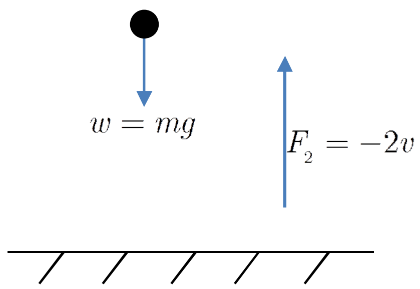
(29) $$x(t)=4\left(t+\frac{4}{g}e^{-\frac{g}{4}t}\right)-\frac{4}{g}$$ ฟุต

ตัวอย่าง 3.4 วัตถุมวล 1 กิโลกรัม ตกจากสภาพหยุดนิ่งลงมาในแนวดิ่ง โดยมีแรงต้านของกาศ (หน่วยเป็นนิวตัน) เท่ากับสองเท่าของความเร็ววัตถุ (หน่วยเป็น เมตรต่อวินาที) จงหาความเร็วของวัตถุ ณ เวลา t ใด ๆ ลิมิตของความเร็วขณะที่ $t \to \infty$ และระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่ลงมาได้ ณ เวลา t วินาที

วิธีทำ ให้ F_1 แทนแรงที่เกิดจากน้ำหนักของวัตถุ

F_2 แทนแรงต้านทานของอากาศ

F_1 เป็นแรงที่กระทำต่อวัตถุในทิศทางดิ่งลงสู่พื้นจึงมีค่าเป็นบวก และ F_2 มีทิศทางตรงข้ามกับ F_1 จึงมีค่าเป็นลบ แสดงได้ดังภาพ



จากกฎที่สองของนิวตัน จะได้ว่า

$$m\frac{dv}{dt} = F_1 + F_2$$

$$1\frac{dv}{dt} = 1(g) - 2v$$

หรือ

(30) $$\frac{dv}{dt} + 2v = g$$

สมการ (30) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น

โดยมี $p(t) = 2,\ g(t) = g$ และ $\mu(t) = e^{\int 2\,dt} = e^{2t}$

นำ $\mu(t)$ คูณตลอดสมการ (30) ได้

$$e^{2t}\frac{dv}{dt} + e^{2t}2v = e^{2t}g$$

$$\frac{d}{dt}(ve^{2t}) = e^{2t}g$$

หาปริพันธ์ตลอดสมการนี้ได้

$$ve^{2t} = \frac{1}{2}e^{2t}g + c$$
$$v = e^{-2t}\left(\frac{1}{2}e^{2t}g + c\right)$$

หรือ

(31) $$v(t) = e^{-2t}\left(\frac{1}{2}e^{2t}g + c\right)$$

เนื่องจากวัตถุตกจากสภาพหยุดนิ่ง ดังนั้นเงื่อนไขเริ่มต้นคือ $v(0) = 0$

แทนในสมการ (31) จะได้ $c = -\frac{g}{2}$

ดังนั้นความเร็วของวัตถุ ณ เวลา เวลา t ใด ๆ คือ

$$v = e^{-2t}\left(\frac{1}{2}e^{2t}g - \frac{g}{2}\right)$$

หรือ

(32) $$v(t) = \frac{g}{2} - \frac{g}{2}e^{-2t} \text{ เมตรต่อวินาที}$$

และ $\lim\limits_{t\to\infty} v(t) = \lim\limits_{t\to\infty}\left(\frac{g}{2} - \frac{g}{2}e^{-2t}\right) = \frac{g}{2}$

กำหนดให้ $x(t)$ แทนระยะทางที่วัตถุตกลงมาในแนวดิ่ง เวลา t วินาทีคือ

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t v(t)\,dt \\ &= \int_0^t \left(\frac{g}{2} - \frac{g}{2}e^{-2t}\right)dt \\ &= \left(\frac{g}{2}t + \frac{g}{4}e^{-2t}\right)\Bigg|_0^t \\ &= \frac{g}{2}t + \frac{g}{4}e^{-2t} - \frac{g}{4} \end{aligned}$$

ดังนั้น ระยะทางที่วัตถุตกลงมาในแนวดิ่ง เวลา t วินาทีคือ $\frac{g}{2}t + \frac{g}{4}e^{-2t} - \frac{g}{4}$ เมตร

ตัวอย่าง 3.5 ยิงก้อนหินขึ้นไปในแนวดิ่งด้วยความเร็ว 80 ฟุตต่อวินาที และกำหนดให้ $g = 32$ ฟุตต่อวินาที ^{2}

1. เมื่อเวลาผ่านไป $\dfrac{3}{2}$ วินาทีก้อนหินมีทิศทางการเคลื่อนที่อย่างไร
2. ก้อนหินขึ้นไปได้สูงสุดเมื่อเวลาผ่านไปกี่วินาที
3. ก้อนหินขึ้นไปได้สูงที่สุดกี่ฟุต
4. จงหาความเร็วที่ก้อนหินตกระทบพื้น

วิธีทำ เนื่องจากการเคลื่อนที่ของลูกหินจะลดความเร็วลงด้วยแรงโน้มถ่วงของโลกคือ $g = 32$ ฟุตต่อวินาที จะได้สมการเชิงอนุพันธ์ดังนี้

(33) $$\frac{dv}{dt} = -32$$

หาปริพันธ์ตลอดสมการ (33) จะได้

$$v = -32t + c_1$$

หรือ

(34) $$v(t) = -32t + c_1$$

เนื่องจากยิงก้อนหินขึ้นไปในแนวดิ่งด้วยความเร็ว 80 ฟุตต่อวินาที

ดังนั้นเงื่อนไขเริ่มต้นคือ $v(0) = 80$ แทนในสมการ (34) จะได้ $c_1 = 80$ ดังนั้นสมการความเร็วของก่อนหิน ณ เวลา t ใด ๆ คือ

(35) $$v(t) = -32t + 80$$

กำหนดให้ $x(t)$ แทนระยะทางที่ก้อนหินเคลื่อนที่ขึ้นและลง ณ เวลา t ใด ๆ สามารถเขียนสมการ (35) ในรูป

(36) $$\frac{dx}{dt} = -32t + 80$$

หาปริพันธ์ตลอดสมการ (36) จะได้

(37) $$x(t) = -16t^2 + 80t + c_2$$

เนื่องจากถูกยิงขึ้นไปในแนวดิ่ง ดังนั้นเงื่อนไขเริ่มต้นคือ $x(0)=0$
แทนในสมการ (37) จะได้ $c_2=0$
ดังนั้นสมการการเคลื่อนที่ของก้อนหิน ณ เวลา t ใด ๆ คือ

(38) $$x(t)=-16t^2+80t \text{ ฟุต}$$

1. เมื่อเวลาผ่านไป $\frac{3}{2}$ วินาทีก้อนหินมีทิศทางการเคลื่อนที่อย่าไร

แทนค่ $t=\frac{3}{2}$ ในสมการ (35) ได้

$$v\left(\frac{3}{2}\right)=-32\left(\frac{3}{2}\right)+80=32 \text{ ฟุตต่อวินาที}$$

เนื่องจากความเร็วของก่อนหินขณะที่ $t=\frac{3}{2}$ เป็นบวก
แสดงว่าขณะนั้นก่อนหินยังคงมีทิศทางขึ้น

2. ก้อนหินขึ้นไปได้สูงสุดเมื่อเวลาผ่านไปกี่วินาที

ก้อนหินขึ้นไปได้สูงสุดเมื่อความเร็วเป็นศูนย์ นั้นคือ $v(t)=0$ จากสมการ (35)

$$-32t+80=0$$
$$t=\frac{5}{2}$$

แสดงว่าก้อนหินขึ้นไปได้สูงสุดเมื่อเวลาผ่านไป $\frac{5}{2}$ วินาที

3. ก้อนหินขึ้นไปได้สูงที่สุดกี่ฟุต

จากข้อ 2 ก้อนหินขึ้นไปได้สูงสุดเมื่อเวลาผ่านไป $\frac{5}{2}$ วินาที

แทน $t=\frac{5}{2}$ ในสมการ (38) จะได้

$$x\left(\frac{5}{2}\right)=-16\left(\frac{5}{2}\right)^2+80\left(\frac{5}{2}\right)=100 \text{ ฟุต}$$

ดังนั้นก่อนหินขึ้นไปได้สุงสุด 100 ฟุต

4. จงหาความเร็วที่ก้อนหินตกกระทบพื้น

ก้อนหินกระทบพื้นเมื่อ $x(t)=0$ จากสมการ (38) จะได้

$$-16t^2 + 80t = 0$$
$$(80 - 16t)t = 0$$
$$t = 0,5$$

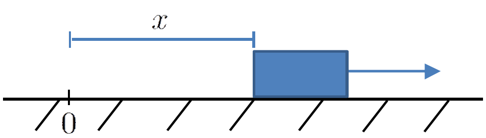
แสดงว่าก้อนหินกระทบพื้นหลังจากเวลาผ่านไป 5 วินาที

ดังนั้นความเร็วที่ก้อนหินตกกระทบพื้นแทน $t = 5$ ในสมการ (35)

$$v(5) = -32(5) + 80 = -80 \text{ ฟุตต่อวินาที}$$

ตัวอย่าง 3.6 วัตถุมวล m กิโลกรัม เคลื่อนที่ไปบนพื้นราบในแนวเส้นตรงขณะเวลา t วินาที และอยู่ห่างจากจุดคงที่ 0 เป็นระยะทาง x เมตร มีความเร็ว v เมตรต่อวินาที และมีความเร่ง $v^2 - v$ เมตรต่อวินาที ^{2} ความเร่งมีทิศพุ่งออกจากจุดคงที่ 0 กำหนดความเร็ว $v = 3$ เมตรต่อวินาที ที่ตำแหน่ง $x = 0$ จงแสดงว่า $x = \ln\left|\frac{v-1}{3}\right|$

วิธีทำ แสดงภาพประกอบการเคลื่อนที่ของวัตถุได้ดังนี้



กำหนดทิศทางของการเคลื่อนที่ไปทางขวาของจุดเริ่มต้นเป็นบวก

จากกฎข้อที่สองของนิวตันจะได้

$$m\frac{dv}{dt} = F$$
$$\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m}$$
$$\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = a$$

(39) $$\frac{dv}{dx}v = v^2 - v$$

จัดสมการ (39) ให้อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์แบบแยกกันได้

(40) $$\frac{v}{v^2 - v}dv - dx = 0$$

หาปริพันธ์ตลอดสมการ (40) จะได้

$$\int \frac{v}{v^2 - v}\,dv - \int dx = 0$$

(41) $$\ln\left|v-1\right| - x = c$$

เนื่องจาก กำหนดความเร็ว $v = 3$ เมตรต่อวินาที ที่ตำแหน่ง $x = 0$
ได้เงื่อนไข $v(0) = 3$ แทนในสมการ (41) ได้ $c = \ln\left|3\right|$
แทน $c = \ln\left|3\right|$ ในสมการ (41) ได้

$$\ln\left|v-1\right| - x = \ln\left|3\right|$$

$$x = \ln\left|v-1\right| - \ln\left|3\right|$$

หรือ

$$x = \ln\left|\frac{v-1}{3}\right|$$

ตัวอย่าง 3.7 วัตถุมวล 16 กิโลกรัม ถูกลากไปข้างหน้าในแนวราบด้วยแรง 64 นิวตัน โดยมีแรงต้านทานการเคลื่อนที่ (หน่วยเป็นนิวตัน) เท่ากับกำลังสองของความเร็ว (หน่วยเป็นเมตรต่อวินาที) สมมติว่าวัตถุเคลื่อนที่จากสภาพหยุดนิ่ง จงหาว่า ณ เวลาใดวัตถุมีความเร็ว 10 เมตรต่อวินาที

วิธีทำ ให้ F_1 แทนแรงที่ลากวัตถุไปข้างหน้า (กำหนดให้มีทิศทางเป็นบวก)

F_2 แทนแรงต้านทานการเคลื่อนที่ (กำหนดให้มีทิศทางเป็นลบ)

จากกฎที่สองของนิวตัน จะได้ว่า

$$m\frac{dv}{dt} = F_1 + F_2$$

(42) $$16\frac{dv}{dt} = 64 - v^2$$

จัดสมการ (42) ให้อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์แบบแยกกันได้

(43) $$\frac{16}{64 - v^2}\,dv = dt$$

หาปริพันธ์ตลอดสมการ (43) จะได้

$$\int \frac{16}{64 - v^2}\,dv = \int dt$$

$$\ln|v+8| - \ln|v-8| = t + c_1$$
$$\ln\left|\frac{v+8}{v-8}\right| = t + c_1$$
$$\left|\frac{v+8}{v-8}\right| = e^{t+c_1}$$
$$\left|\frac{v+8}{v-8}\right| = e^t e^{c_1}$$

หรือ

(44) $$\left|\frac{v+8}{v-8}\right| = ce^t$$

เนื่องจากวัตถุตกจากสภาพหยุดนิ่ง ดังนั้นเงื่อนไขเริ่มต้นคือ $v(0) = 0$
แทนในสมการ (44) จะได้ $c = 1$
ดังนั้นความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วและเวลาคือ

$$\left|\frac{v+8}{v-8}\right| = e^t$$

และขณะที่วัตถุมีความเร็ว 10 เมตรต่อวินาที จะได้

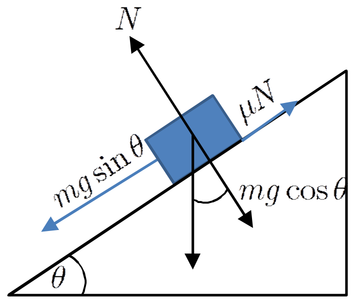
$$\left|\frac{10+8}{10-8}\right| = e^t$$
$$e^t = 9$$
$$e^t = 3^2$$
$$t = 2\ln 3$$

ดังนั้น ณ เวลา $t = 2\ln 3$ วัตถุมีความเร็ว 10 เมตรต่อวินาที

ตัวอย่าง 3.8 วัตถุมวล m กิโลกรัม เริ่มต้นเคลื่อนที่จากจุดหยุดนิ่งจากยอดข้องพื้นเอียงซึ่งทำมุม θ° กับพื้นราบ ถ้าสัมประสิทธิ์ของความเสียดทานระหว่างวัตถุกับพื้นเอียงเป็น μ จงหาสมการการเคลื่อนที่ของวัตถุแล้วจะหาว่าต้องใช้เวลานานเท่าไรวัตถุจึงจะเคลื่อนที่ถึงพื้นราบ ถ้าพื้นเอียงยาว l เมตร

วิธีทำ เส้นทางการเคลื่อนที่ของวัตถุเป็นพื้นเอียง เป็นมุม θ เลือกจุดยอดของพื้นเอียงเป็นจุดกำเนิด และให้ทิศทางการเคลื่อนที่ลงตามพื้นเอียงเป็นบวก ถ้าไม่คำนึงถึงแรงเสียดทานและแรงต้านทานของอากาศที่กระทำต่อวัตถุ คือ

1. มวล m กิโลกรัม
2. แรงแนวฉาก N ซึ่งกระทำในแนวตั้งฉากกับพื้นเอียง ดังภาพ



พิจารณา การเคลื่อนที่ของวัตถุเมื่อมีแรงเสียดทานและแรงต้านทานของอากาศ ดังนั้นแรงที่กระทำต่อวัตถุประกอบด้วย

ให้ F_1 แทนแรงที่เกิดจากน้ำหนักของวัตถุในแนวขนานกับพื้นเอียง มีค่าเป็นบวก

F_2 แทนแรงเสียดทานมีค่าเป็นลบเพราะกระทำต่อวัตถุในทิศที่สวนทางกับการเคลื่อนที่

จากกฎที่สองของนิวตัน จะได้ว่า

$$m\frac{dv}{dt} = F_1 + F_2$$

(45) $$m\frac{dv}{dt} = mg\sin\theta - \mu mg\cos\theta$$

จัดสมการ (45) ให้อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์แบบแยกกันได้ ดังต่อไปนี้

$$m\frac{dv}{dt} = mg(\sin\theta - \mu\cos\theta)$$

$$\frac{dv}{dt} = g(\sin\theta - \mu\cos\theta)$$

(46) $$dv = g(\sin\theta - \mu\cos\theta)dt$$

หาปริพันธ์ตลอดสมการ (46) จะได้

$$\int dv = \int g(\sin\theta - \mu\cos\theta)dt$$

(47) $$v = gt(\sin\theta - \mu\cos\theta) + c$$

เนื่องจากวัตถุตกจากสภาพหยุดนิ่ง ดังนั้นเงื่อนไขเริ่มต้นคือ $v(0) = 0$
แทนในสมการ (47) จะได้ $c = 0$
ดังนั้นความเร็วของวัตถุ ณ เวลา t ใด ๆ

(48) $$v(t) = gt(\sin\theta - \mu\cos\theta) \text{ เมตรต่อวินาที}$$

ให้ $x(t)$ แทนระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่ลงมาในแนวพื้นเอียงที่ เวลา t ใด ๆ
สามารถเขียนสมการ (48) ในรูป

(49) $$\frac{dx}{dt} = gt(\sin\theta - \mu\cos\theta)$$

ทำการหาปริพันธ์ จะได้

(50) $$x = \frac{gt^2}{2}(\sin\theta - \mu\cos\theta) + c_1$$

จากเงื่อนไขเริ่มต้นคือ $t(0) = 0$ แทนในสมการ (50) จะได้ $c_1 = 0$
ดังนั้น

(51) $$x(t) = \frac{gt^2}{2}(\sin\theta - \mu\cos\theta)$$

พิจารณาว่าต้องใช้เวลานานเท่าไร วัตถุจึงจะเคลื่อนที่ถึงพื้นราบ ถ้าพื้นเอียงยาว l เมตร
นั่นคือ ต้องหาว่า t เท่ากับเท่าไร เมื่อ $x = l$ จากสมการ (55) ได้ว่า

$$l = \frac{gt^2}{2}(\sin\theta - \mu\cos\theta)$$

$$t^2 = \frac{2l}{g(\sin\theta - \mu\cos\theta)}$$

(52) $$t = \pm\sqrt{\frac{2l}{g(\sin\theta - \mu\cos\theta)}}$$

เนื่องจาก t ต้องมีค่าเป็นบวกเสมอ

ดังนั้น จะต้องใช้เวลา $t = \sqrt{\frac{2l}{g(\sin\theta - \mu\cos\theta)}}$ วินาทีวัตถุจึงจะเคลื่อนที่ถึงพื้นราบ

3.3 ปัญหาอัตราการเปลี่ยนแปลง

ในหัวข้อนี้จะศึกษาปัญหาที่เกี่ยวข้องกับอัตราการเปลี่ยนแปลง เมื่ออัตราการเปลี่ยนแปลงเป็นฟังก์ชันของปริมาณในปัจจุบันกับเวลา และในปัญหาที่ศึกษาต้องการจะหาปริมาณ ณ เวลาใด ๆ ถ้าให้ x แทนปริมาณที่มีอยู่ ณ เวลา t แล้ว $\dfrac{dx}{dt}$ จะแทนอัตราการเปลี่ยนแปลง ดังนั้นการหาปริมาณ ณ เวลา t ใด ๆ จะต้องหาคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ และเราจะศึกษาปัญหาการสลายตัวของสารกัมมันตรังสี ปัญหาการเพิ่มของประชากร ปัญหาของผสม และปัญหาการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิของวัตถุ

3.3.1 ปัญหาการสลายตัวของสารกัมมันตรังสี

อัตราการสลายตัวของสารกัมมันตรังสี อยู่ภายใต้สมมติฐานที่ว่า “อัตราการสลายตัวของสารกัมมันตรังสีเป็นสัดส่วนโดยตรงกับปริมาณสารกัมมันตรังสีที่มีอยู่” (สุรัตนา สังข์หนุน, 2558 : 103)

ตัวอย่าง 3.9 สารกัมมันตรังสีชนิดหนึ่ง มีอัตราการสลายเป็นสัดส่วนกับจำนวนที่มีอยู่ และพบว่าเมื่อผ่านไป 1200 ปี สารชนิดนี้จะเหลืออยู่ครึ่งหนึ่งของที่มีอยู่ จงหาว่าเมื่อเวลาผ่านไป 3600 ปี สารชนิดนี้จะเหลืออยู่กี่เปอร์เซ็นต์ของที่มีอยู่

วิธีทำ ให้ x แทนปริมาณของสารกัมมันตรังสีที่มีอยู่หลังจากผ่านไป t ปี

ดังนั้น $\dfrac{dx}{dt}$ แทนอัตราการสลายตัวของสารกัมมันตรังสี

เพราะว่าอัตราการสลายตัวของสารเป็นสัดส่วนกับจำนวนสารที่มีอยู่ และเนื่องจาก x มีค่าลดลงเมื่อ t มีค่าเพิ่มขึ้น นั่นคือ x เป็นฟังก์ชันลด ดังนั้นจะได้

(53) $$\frac{dx}{dt} = -kx$$

โดยที่ k เป็นค่าคงที่ของการแปรผัน

ให้ x_0 แทนปริมาณสารกัมมันตรังสีตอนเริ่มต้น ดังนั้นเงื่อนไขเริ่มต้นคือ $x(x_0) = 0$

เมื่อเวลาผ่านไป 1200 ปีสารชนิดนี้จะเหลือครึ่งหนึ่งของที่มีอยู่ ดังนั้นจะได้

(54) $$x(1200) = \frac{1}{2}x_0$$

จัดสมการ (53) ให้อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์แบบแยกกันได้ ดังต่อไปนี้

(55) $$\frac{1}{x}dx = -kdt$$

หาปริพันธ์ตลอดสมการ (55) จะได้

$$\int \frac{1}{x}dx = -\int kdt$$

$$\ln\left|x\right| = -kt + c_1$$

(56) $$x = ce^{-kt}$$

จากเงื่อนไขเริ่มต้น $x(x_0) = 0$ แทนในสมการ (56) ได้ $c = x_0$ ดังนั้น

(57) $$x = x_0 e^{-kt}$$

ในการหาค่า k เราจะใช้ข้อกำหนดที่ว่าสารสลายตัวไปครึ่งหนึ่งหลังจาก 1200 ปี

นั่นคือแทน $x = \frac{1}{2}x_0$ และ $t = 1200$ ในสมการ (56) จะได้

$$\frac{1}{2}x_0 = x_0 e^{-k(1200)}$$

$$e^{-k(1200)} = \frac{1}{2}$$

หรือ

(58) $$e^{-k} = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/1200}$$

เราสามารถหาค่าของ k ได้จากสมการ (58) แต่ถ้าดูจากสมการ (57) แล้วเราจะพบว่าค่าคงที่ที่เราต้องการทราบคือ e^{-k} ดังนั้น แทน $e^{-k} = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/1200}$ ในสมการ (57) จะได้

$$x = x_0 \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{1/1200}\right]^t$$

หรือ

(59) $$x = x_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{t/1200}$$

สมการ (59) นั้นแทนปริมาณสารกัมมันตรังสี ณ เวลา t ใด ๆ ถ้าแทน $t = 3600$ จะได้

$$x = x_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{3600/1200}$$

$$x = x_0 \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$x = \frac{1}{8} x_0$$

ดังนั้น เมื่อเวลาผ่านไป 3600 ปี สารชนิดนี้จะเหลืออยู่ $\frac{1}{8}$ ของปริมาณที่มีอยู่ คิดเป็นเปอร์เซ็นต์เท่ากับ 12.5 เปอร์เซ็นต์

ตัวอย่าง 3.10 สารกัมมันตรังสีชนิดหนึ่งมีครึ่งชีวิตเท่ากับ 38 ชั่วโมงจงหาว่านานเท่าใดสารนี้จะสลายไปเป็นจำนวน 80 เปอร์เซ็นต์

วิธีทำ ให้ x แทนปริมาณของสารกัมมันตรังสีที่มีอยู่หลังจากผ่านไป t ชั่วโมง

ดังนั้น $\frac{dx}{dt}$ แทนอัตราการสลายตัวของสารกัมมันตรังสี

เพราะว่าอัตราการสลายตัวของสารเป็นสัดส่วนกับจำนวนสารที่มีอยู่ และเนื่องจาก x มีค่าลดลงเมื่อ t มีค่าเพิ่มขึ้น นั่นคือ x เป็นฟังก์ชันลด ดังนั้นจะได้

(60) $$\frac{dx}{dt} = -kx$$

โดยที่ k เป็นค่าคงที่ของการแปรผัน

ให้ x_0 แทนปริมาณสารกัมมันตรังสีตอนเริ่มต้น ดังนั้นเงื่อนไขเริ่มต้นคือ $x(x_0) = 0$

เมื่อเวลาผ่านไป 38 ชั่วโมง สารชนิดนี้จะเหลือครึ่งหนึ่งของที่มีอยู่ ดังนั้นจะได้

(61) $$x(38) = \frac{1}{2} x_0$$

จัดสมการ (60) ให้อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์แบบแยกกันได้ ดังต่อไปนี้

(62) $$\frac{1}{x} dx = -k dt$$

หาปริพันธ์ตลอดสมการ (62) จะได้

$$\int \frac{1}{x} dx = -\int k dt$$

$$\ln|x| = -kt + c_1$$

(63) $$x = ce^{-kt}$$

จากเงื่อนไขเริ่มต้น $x(x_0) = 0$ แทนในสมการ (63) ได้ $c = x_0$ ดังนั้น

(64) $$x = x_0 e^{-kt}$$

ในการหาค่า k เราจะใช้ข้อกำหนดที่ว่าสารสลายตัวไปครึ่งหนึ่งหลังจาก 38 ชั่วโมง นั่นคือแทน $x = \frac{1}{2}x_0$ และ $t = 38$ ในสมการ (64) จะได้

$$\frac{1}{2}x_0 = x_0 e^{-k(38)}$$

$$e^{-k(38)} = \frac{1}{2}$$

(65) $$k = \frac{1}{38}\ln 2$$

ในที่นี้เราต้องการหาค่า t เมื่อ $x = \frac{1}{20}x_0$ ดังนั้น แทน $x = \frac{1}{20}x_0$ ในสมการ (64) จะได้

$$\frac{1}{20}x_0 = x_0 e^{-\left(\frac{1}{38}\ln 2\right)t}$$

$$\frac{1}{20} = e^{-\left(\frac{1}{38}\ln 2\right)t}$$

$$-\ln\frac{1}{20} = \left(\frac{1}{38}\ln 2\right)t$$

$$\left(\frac{1}{38}\ln 2\right)t = \ln 20$$

$$t = \frac{\ln 20}{\frac{1}{38}\ln 2}$$

$$t = 38\frac{\ln 20}{\ln 2}$$

$$t \approx 165$$

ดังนั้น สารนี้จะสลายไปเป็นจำนวน 80 เปอร์เซ็นต์ หลังจากเวลาผ่านไปประมาณ 165 ชั่วโมง

ตัวอย่าง 3.11 ซากพืชชนิดหนึ่งมีคาร์บอน 14 เหลืออยู่ 15 เปอร์เซ็นต์ จงประมาณอายุของซากพืช เมื่อใช้ครึ่งชีวิตของคาร์บอน 14 เท่ากับ 5730 ปี

วิธีทำ ให้ x_0 แทนปริมาณคาร์บอน 14 ที่มีในซากพืช และ

ให้ x แทนปริมาณของคาร์บอน 14 ที่มีอยู่หลังจากผ่านไป t ปี

ดังนั้น $\dfrac{dx}{dt}$ แทนอัตราการสลายตัวของคาร์บอน 14

เพราะว่าอัตราการสลายตัวของคาร์บอน 14 เป็นสัดส่วนกับจำนวนคาร์บอน 14 ที่มีอยู่ และเนื่องจาก x มีค่าลดลงเมื่อ t มีค่าเพิ่มขึ้น นั่นคือ x เป็นฟังก์ชันลด ดังนั้นจะได้

(66) $$\frac{dx}{dt} = -kx$$

โดยที่ k เป็นค่าคงที่ของการแปรผัน

จัดสมการ (66) ให้อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์แบบแยกกันได้ ดังต่อไปนี้

(67) $$\frac{1}{x}dx = -kdt$$

หาปริพันธ์ตลอดสมการ (67) จะได้

$$\int \frac{1}{x}dx = -\int kdt$$

$$\ln\left|x\right| = -kt + c_1$$

(68) $$x = ce^{-kt}$$

จากเงื่อนไขเริ่มต้น $x(x_0) = 0$ แทนในสมการ (68) ได้ $c = x_0$ ดังนั้น

(69) $$x = x_0 e^{-kt}$$

เมื่อแทน $x = \dfrac{1}{2}x_0$ และ $t = 5730$ ในสมการ (69) จะได้

$$\frac{1}{2}x_0 = x_0 e^{-k(5730)}$$

$$e^{-k(5730)} = \frac{1}{2}$$

(70) $$k = \frac{1}{5730}\ln 2$$

ในที่นี้เราต้องการหาค่า t เมื่อ $x=\dfrac{15}{100}x_0$ ดังนั้น

แทน $x=\dfrac{15}{100}x_0$ ในสมการ (69) จะได้

$$\frac{15}{100}x_0 = x_0 e^{-\left(\frac{1}{5730}\ln 2\right)t}$$

$$\frac{15}{100} = e^{-\left(\frac{1}{5730}\ln 2\right)t}$$

$$-\ln 0.15 = \left(\frac{1}{5730}\ln 2\right)t$$

$$\left(\frac{1}{5730}\ln 2\right)t = -\ln 0.15$$

$$t = -5730\frac{\ln 0.15}{\ln 2}$$

$$t \approx 15683$$

ดังนั้น อายุของซากพืชนี้ประมาณ $15{,}683$ ปี

3.3.2 ปัญหาการเพิ่มของประชากร

เราจะศึกษารูปแบบของอัตราการเปลี่ยนแปลงของจำนวนประชากร เช่น มนุษย์ สัตว์ แบคทีเรีย เป็นต้น กล่าวคือเมื่อเวลาเปลี่ยนแปลงไป จำนวนของประชากรจะเปลี่ยนแปลงด้วย ถ้าให้ $N(t)$ แทนจำนวนประชากรกลุ่มหนึ่ง ณ เวลา t ใด ๆ ภายใต้สมมติฐานว่า ไม่มีการอพยพเข้าหรือออกจากกลุ่ม ไม่มีการเปลี่ยนแปลงอย่างผิดปกติของสภาวะแวดล้อม จะได้ว่า อัตราการเปลี่ยนแปลงของประชากรเป็นสัดส่วนโดยตรงกับจำนวนประชากรที่มีอยู่ (วีระศักดิ์ วาจาบัณฑิตย์, 2541 : 96)

นั้นคือ

(71) $$\frac{dN}{dt} = kx$$

โดยที่ k เป็นค่าคงที่ของการแปรผัน

สำหรับกรณีที่อัตราการเพิ่มมากกว่าอัตราการตายจะได้ $\dfrac{dN}{dt}>0$ ดังนั้นค่าคงที่ $k>0$

ถ้าเริ่มต้นมีจำนวนประชากร N_0 ได้เงื่อนไขเริ่มต้นเป็น $N(t_0)=N_0$

เราจะได้ว่าจำนวนประชากร ณ เวลา t ใด ๆ คือ

(72) $$N(t) = N_0 e^{k(t-t_0)}$$

สมการ (72) จะพบว่าเมื่อ t เพิ่มขึ้น จำนวนประชากร $N(t)$ จะเพิ่มขึ้นโดยไม่มีขอบเขตจำกัดซึ่งไม่สอดคล้องกับสภาพความเป็นจริง ในความเป็นจริงแล้วการเพิ่มของประชากรต้องมีขอบเขตจำกัด และจำนวนประชากรจะเพิ่มขึ้นไปจนถึงจุดหนึ่ง และจะไม่เพิ่มขึ้นไปกว่านี้แล้ว ดังนั้นอัตราการเปลี่ยนแปลงของจำนวนประชากรที่สอดคล้องกับความเป็นจริงดังกล่าวควรจะอยู่ในรูป

(73) $$\frac{dN}{dt} = kN - \lambda N^2$$

โดยที่ค่า $k > 0$ และ $\lambda > 0$
เรียกสมการ (73) ว่า**กฎโลจีสติกส์**
พิจารณาสมการ (73) นั้นเป็นสมการแบบแยกตัวแปรได้ และเป็นสมการแบร์นูลลี

ตัวอย่าง 3.12 ประชากรของเมืองหนึ่งสอดคล้องกฎโลจิสติกส์ต่อไปนี้

(74) $$\frac{dN}{dt} = \frac{1}{100}N - \frac{1}{10^8}N^2$$

โดยที่ t เป็นเวลาคิดเป็นปี กำหนดให้เมืองนี้มีจำนวนประชากร $100,000$ คนในปี ค.ศ. 1980 และจำนวนประชากรเป็นไปตามสมการ (74) สำหรับ $t > 1980$ จงหาว่าในปี ค.ศ 2000 จะมีจำนวนประชากรเท่าใด

วิธีทำ จัดสมการ (74) ให้อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์แบบแยกกันได้ ดังต่อไปนี้

(75) $$\frac{dN}{10^{-2}N - 10^{-8}N^2} = dt$$

ทำสมการ (75) ปีนเศษส่วนย่อย จะได้

(76) $$100\left(\frac{1}{N} + \frac{10^{-6}dN}{1-10^{-6}N}\right)dN = dt$$

หาปริพันธ์ตลอดสมการ (76) จะได้

$$\int 100\left(\frac{1}{N}+\frac{10^{-6}dN}{1-10^{-6}N}\right)dN=\int dt$$

$$\int \left(\frac{1}{N}+\frac{10^{-6}dN}{1-10^{-6}N}\right)dN=\frac{1}{100}\int dt$$

$$\ln N-\ln\left(1-10^{-6}N\right)=\frac{t}{100}+c_1$$

$$\ln\frac{N}{1-10^{-6}N}=\frac{t}{100}+c_1$$

$$\frac{N}{1-10^{-6}N}=e^{t/100+c_1}$$

$$\frac{N}{1-10^{-6}N}=ce^{t/100}$$

หรือ

(77) $$N=\frac{ce^{t/100}}{1+10^{-6}ce^{t/100}}$$

จากเงื่อนไขเริ่มต้น $N(1980)=100,000$ แทนในสมการ (77) ได้

$$100000=\frac{ce^{1980/100}}{1+10^{-6}ce^{1980/100}}$$

$$10^5=\frac{ce^{19.8}}{1+10^{-6}ce^{19.8}}$$

$$c=\frac{10^5}{e^{19.8}\left(1-10^{-1}\right)}$$

$$c=\frac{10^6}{9e^{19.8}}$$

แทนค่า $c=\dfrac{10^6}{9e^{19.8}}$ ในสมการ (77) จะได้

(78) $$N(t)=\frac{10^6}{1+9e^{19.8-t/100}} \text{ สำหรับ } t>1980$$

สมการ (78) แทนประชากร ณ เวลา t ใด ๆ

และเมื่อแทน $t = 2000$ ในสมการ (78) จะได้

$$\begin{aligned} N(2000) &= \frac{10^6}{1+9e^{19.8-2000/100}} \\ &= \frac{10^6}{1+9e^{-0.2}} \\ &\approx 119459 \end{aligned}$$

ดังนั้น ในปี ค.ศ 2000 จะมีจำนวนประชากรประมาณ $119,459$ คน

ตัวอย่าง 3.13 สมมติว่าจำนวนพลเมืองของเมือง ๆ หนึ่งเพิ่มขึ้นเป็นสัดส่วนกับจำนวนพลเมืองขณะนั้น ถ้าจำนวนพลเมืองเพิ่มขึ้นเป็นสองเท่าในเวลา 40 ปี แล้วอีกกี่ปีจำนวนพลเมืองจึงจะเพิ่มขึ้นเป็น สามเท่า

วิธีทำ ให้ N_0 แทนจำนวนพลเมืองในตอนเริ่มแรก

ให้ N แทนจำนวนพลเมือง ณ เวลา t ใด ๆ

ดังนั้น $\dfrac{dN}{dt}$ แทนอัตราการเพิ่มจำนวนของพลเมือง

เพราะว่าอัตราการเพิ่มจำนวนของพลเมืองเป็นสัดส่วนกับจำนวนพลเมืองที่มีอยู่ขณะนั้น และเนื่องจาก N มีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อ t มีค่าเพิ่มขึ้น นั่นคือ N เป็นฟังก์ชันเพิ่ม ดังนั้นจะได้

(79) $$\frac{dN}{dt} = kN$$

โดยที่ k เป็นค่าคงที่ของการแปรผัน

จัดสมการ (79) ให้อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์แบบแยกกันได้ ดังต่อไปนี้

(80) $$\frac{1}{N}dN = kdt$$

หาปริพันธ์ตลอดสมการ (67) จะได้

$$\int \frac{1}{N}dN = -\int kdt$$

$$\ln\left|N\right| = kt + c_1$$

(81) $$N = ce^{kt}$$

จากเงื่อนไขเริ่มต้น $N(0) = N_0$ แทนในสมการ (81) ได้ $c = N_0$ ดังนั้น

(82) $$N = N_0 e^{kt}$$

จำนวนพลเมืองเพิ่มขึ้นเป็นสองเท่าในเวลา 40 ปี ทำให้ได้เงื่อนไขเริ่มต้นคือ $N(40) = 2N_0$ เมื่อแทน $N = 2N_0$ และ $t = 40$ ในสมการ (82) จะได้

$$2N_0 = N_0 e^{k(40)}$$

$$2 = e^{k(40)}$$

$$e^k = 2^{1/40}$$

แทน $e^k = 2^{1/40}$ ในสมการ (82) จะได้

(83) $$N = N_0 2^{t/40}$$

ถ้า $N = 3N_0$ แทนในสมการ (83) จะได้

$$3N_0 = N_0 2^{t/40}$$

$$3 = 2^{t/40}$$

$$\ln 3 = \ln 2^{t/40}$$

$$\ln 3 = \frac{t}{40} \ln 2$$

$$t = 40 \frac{\ln 2}{\ln 3}$$

$$t \approx 63.5$$

ดังนั้น อีกประมาณ 63.5 ปีจำนวนพลเมืองจึงจะเพิ่มขึ้นเป็นสามเท่า

ตัวอย่าง 3.14 จากการขยายพันธุ์ของแบคทีเรียพบว่า อัตราการเพิ่มของแบคทีเรียเป็นสัดส่วนกับจำนวนแบคทีเรียขณะนั้น ถ้าเวลาผ่านไป 6 ชั่วโมงมีแบคทีเรีย 5 ล้านตัว และเวลาผ่านไป 9 ชั่วโมงมีแบคทีเรีย 8 ล้านตัวจงหาจำนวนแบคทีเรียในตอนเริ่มต้น

วิธีทำ ให้ N_0 แทนจำนวนแบคทีเรียตอนเริ่มต้น

ให้ N แทนจำนวนแบคทีเรีย ณ เวลา t ใด ๆ

ดังนั้น $\dfrac{dN}{dt}$ แทนอัตราการเพิ่มของแบคทีเรีย

เพราะว่าอัตราการเพิ่มจำนวนของแบคทีเรียเป็นสัดส่วนกับจำนวนแบคทีเรียที่มีอยู่ขณะนั้น และเนื่องจาก N มีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อ t มีค่าเพิ่มขึ้น นั่นคือ N เป็นฟังก์ชันเพิ่ม ดังนั้นจะได้

(84) $$\frac{dN}{dt} = kN$$

โดยที่ k เป็นค่าคงที่ของการแปรผัน

จัดสมการ (84) ให้อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์แบบแยกกันได้ ดังต่อไปนี้

(85) $$\frac{1}{N}dN = kdt$$

หาปริพันธ์ตลอดสมการ (85) จะได้

$$\int \frac{1}{N}dN = -\int kdt$$

$$\ln\left|N\right| = kt + c_1$$

(86) $$N = ce^{kt}$$

จากเงื่อนไขเริ่มต้น $N(0) = N_0$ แทนในสมการ (81) ได้ $c = N_0$ ดังนั้น

(87) $$N = N_0e^{kt}$$

ถ้าเวลาผ่านไป 6 ชั่วโมงมีแบคทีเรีย 5 ล้านตัว ทำให้ได้เงื่อนไขเริ่มต้นคือ $N(6) = 5\times 10^6$ เมื่อแทน $N = 5\times 10^6$ และ $t = 6$ ในสมการ (87) จะได้

(88) $$5\times(10)^6 = N_0e^{6k}$$

เวลาผ่านไป 9 ชั่วโมงมีแบคทีเรีย 8 ล้านตัวทำให้ได้เงื่อนไขเริ่มต้นคือ $N(9) = 8\times 10^6$ เมื่อแทน $N = 8\times 10^6$ และ $t = 9$ ในสมการ (87) จะได้

(89) $$8\times(10)^6 = N_0e^{9k}$$

จากสมการ (88) และ (89) จะได้ $e^{3k} = \frac{8}{5}$ หรือ $e^{6k} = \left(\frac{8}{5}\right)^2$

แทนค่า $e^{6k} = \left(\frac{8}{5}\right)^2$ ในสมการ (88) จะได้

$$5 \times (10)^6 = N_0 \left(\frac{8}{5}\right)^2$$

$$N_0 = \left(\frac{5}{8}\right)^2 \left[5 \times (10)^6\right]$$

$$= \frac{125 \times (10)^6}{64}$$

$$\approx 1.9 \times (10)^6$$

ดังนั้น จำนวนแบคทีเรียเริ่มต้นมีประมาณ 1.9 ล้านตัว

3.3.3 ปัญหาของผสม

ปัญหาในของผสมที่จะกล่าวนี้อาจจะเป็น เกลือ ยา หรือสิ่งอื่นก็ได้ ซึ่งบรรจุในภาชนะ เมื่อทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงเช่นการปล่อยสาร A ให้ไหลเข้าไปในภาชนะที่บรรจุของผสมชนิดหนึ่งด้วยอัตราคงที่อัตราหนึ่ง ในขณะที่สาร A ไหลเข้าไปผสมจะทำการคนของผสมอยู่ตลอดเวลา เพื่อให้ของผสมมีความเข้มข้นเท่ากันโดยตลอด ถ้าปล่อยให้ของผสมไหลออกจากภาชนะด้วยอัตราคงที่อีกอัตราหนึ่ง เราต้องการหาปริมาณของสาร A ซึ่งเหลืออยู่ในของผสม ณ เวลา t ใด ๆ (สุรัตนา สังข์หนุน, 2558 : 107)

ให้ x แทนปริมาณของสาร A ณ เวลา t ใด ๆ และ

ให้ $\dfrac{dx}{dt}$ แทนอัตราการเปลี่ยนแปลงของสารเทียบกับเวลา

ให้ IN แทนอัตราการไหลเข้าของสาร A

ให้ OUT แทนอัตราการไหลออกของสาร A

ดังนั้น จะได้ความสัมพันธ์ดังนี้

(90) $$\frac{dx}{dt} = IN - OUT$$

ตัวอย่าง 3.15 ถังใบหนึ่งบรรจุน้ำ 50 แกลลอน ถ้าปล่อยให้น้ำซึ่งมีเกลือปนอยู่ 2 ปอนด์ต่อแกลลอนไหลลงถังนี้ในอัตราเร็วคงที่ 3 แกลลอนต่อนาที และให้สารละลายในถังนี้ได้รับการคนให้ละลายอย่างสม่ำเสมอตลอดถัง แล้วในขณะเดียวกันก็ไหลออกจากถังในอัตราเดียวกับที่ไหลเข้า จงหาปริมาณของเกลือที่อยู่ในถังนี้เมื่อเวลาผ่านไป 25 นาที

วิธีทำ ให้ $x(t)$ แทนปริมาณของเกลือในถังใบนี้ ณ เวลา t ใด ๆ

น้ำซึ่งมีเกลือปนอยู่ 2 ปอนด์ต่อแกลลอนไหลลงถังนี้ในอัตราเร็วคงที่ 3 แกลลอนต่อนาที ดังนั้นได้ อัตราของเกลือที่ไหลเข้าถังคือ

$$IN = 2 \times 3 = 6 \text{ ปอนด์ต่อนาที}$$

เนื่องจากอัตราการไหลเข้าและไหลออกเท่ากัน ดังนั้นถังน้ำจะมีน้ำ 50 แกลลอน ณ เวลา t ใด ๆ และน้ำ 50 แกลลอน นี้จะมีเกลืออยู่ x ปอนด์ เพราะฉะนั้นความเข้มข้นของเกลือ ณ เวลา t เท่ากับ $\dfrac{x}{50}$ ปอนด์ต่อแกลลอน ณ เวลา t ใด ๆ อัตราของเกลือที่ไหลออกจากถัง และของผสมนี้ไหลออกด้วยอัตรา 3 แกลลอนต่อนาที ดังนั้น ได้อัตราของเกลือที่ไหลออกจากถังคือ

$$OUT = \frac{x}{50} \times 3 = \frac{3x}{50} \text{ ปอนด์ต่อนาที}$$

จาก (90) จะได้

(91) $$\frac{dx}{dt} = 6 - \frac{3x}{50}$$

จัดสมการ (91) ให้อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์แบบแยกกันได้ ดังต่อไปนี้

(92) $$\frac{dx}{100 - x} = \frac{3}{50} dt$$

หาปริพันธ์ตลอดสมการ (92) จะได้

$$\int \frac{dx}{100 - x} = \int \frac{3}{50} dt$$

$$-\ln\left|100 - x\right| = \frac{3}{50} t + c_1$$

(93) $$x = 100 - ce^{-3t/50}$$

จากเงื่อนไขเริ่มต้น $x(0) = 0$ แทนในสมการ (93) ได้ $c = 100$ แทนในสมการ (93) ได้

$$x = 100 - 100e^{-3t/50}$$

หรือ

(94) $$x(t) = 100(1 - e^{-3t/50})$$

ถ้าเวลาผ่านไป 25 นาทีจะมีปริมาณเกลือเท่ากับ

$$x(25) = 100(1 - e^{-3(25)/50})$$
$$= 100(1 - e^{-1.5})$$
$$\approx 78$$

ดังนั้น เมื่อเวลาผ่านไป 25 นาทีจะมีปริมาณเกลือประมาณ 78 แกลลอน

ตัวอย่าง 3.16 แท้งค์ใบหนึ่งบรรจุน้ำเกลือ 50 แกลลอน โดยมีเกลือละลายอยู่ 10 ปอนด์ ปล่อยน้ำเกลือซึ่งมีความเข้มข้นของเกลือ 2 ปอนด์ต่อแกลลอน เข้าไปในแท้งค์ด้วยอัตราเร็ว 5 แกลลอนต่อนาที และให้สารละลายในถังนี้ได้รับการคนให้ละลายอย่างสม่ำเสมอตลอดถัง แล้วในขณะเดียวกันก็ปล่อยน้ำในแท้งค์ออกด้วยอัตราเร็ว 3 แกลลอนต่อนาที จงหาปริมาณของเกลือในแทงค์ ณ เวลา t ใด ๆ

วิธีทำ ให้ $x(t)$ แทนปริมาณของเกลือในแท้งค์ใบนี้ ณ เวลา t ใด ๆ

ปล่อยน้ำเกลือซึ่งมีความเข้มข้นของเกลือ 2 ปอนด์ต่อแกลลอน เข้าไปในแท้งค์ด้วยอัตราเร็ว 5 แกลลอนต่อนาที ดังนั้นได้ อัตราของเกลือที่ไหลเข้าถัง คือ

$$IN = 2 \times 5 = 10 \text{ ปอนด์ต่อนาที}$$

จากอัตราการไหลเข้า5 แกลลอนต่อนาทีและอัตราการไหลออก 3 แกลลอนต่อนาที ว่าจะมีปริมาณของเกลือเพิ่มอยู่ 2 แกลลอนต่อนาที เพราะฉะนั้น ณ เวลา t จะมีน้ำเกลืออยู่ $50 + 2t$ แกลลอน ดังนั้น ได้อัตราของเกลือที่ไหลออกจากถัง คือ

$$OUT = \frac{3x}{50 + 2t} \text{ ปอนด์ต่อนาที}$$

จาก (90) จะได้

$$\frac{dx}{dt} = 10 - \frac{3x}{50 + 2t}$$

หรือ

(95) $$\frac{dx}{dt} + \frac{3}{50 + 2t}x = 10$$

จะเห็นว่าสมการ (95) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น

โดยมี $p(t)=\dfrac{3}{50+2t}$, $g(t)=10$

และ $\mu(t)=e^{\int \frac{3}{50+2t}dt}=e^{\frac{3}{2}\ln|50+2t|}=(50+2t)^{3/2}$

นำ $\mu(t)$ คูณตลอดสมการ (95) ได้

$$(50+2t)^{3/2}\left[\frac{dx}{dt}+\frac{3}{50+2t}x\right]=10(50+2t)^{3/2}$$

$$\frac{d}{dt}\left[x(50+2t)^{3/2}\right]=10(50+2t)^{3/2}$$

หาปริพันธ์ตลอดสมการนี้ได้

$$x(50+2t)^{3/2}=2(50+2t)^{5/2}+c$$

หรือ

(96) $$x=\frac{2(50+2t)^{5/2}+c}{(50+2t)^{3/2}}$$

จากเงื่อนไขเริ่มต้น $x(0)=10$ แทนในสมการ (96) ได้

$$10=\frac{2\left[50+2(0)\right]^{5/2}+c}{\left[50+2(0)\right]^{3/2}}$$

$$10=\frac{2(50)^{5/2}+c}{(50)^{3/2}}$$

$$10=100+\frac{c}{(50)^{3/2}}$$

$$c=-90(50)^{3/2}$$

แทนค่า $c=-90(50)^{3/2}$ แทนในสมการ (96) ได้

$$x=\frac{2(50+2t)^{5/2}-90(50)^{3/2}}{(50+2t)^{3/2}}$$

หรือ

(97) $$x(t)=100+4t-\frac{90(50)^{3/2}}{(50+2t)^{3/2}}$$

ดังนั้น สมการ (97) เป็นปริมาณของเกลือในแทงค์ ณ เวลา t ใด ๆ

ตัวอย่าง 3.17 ห้องประชุมห้องหนึ่งมีขนาด 2000 ลูกบาศก์เมตร ณเวลาเริ่มต้น ห้องประชุมนี้มีคาร์บอนมอนอกไซด์ 0.002 เปอร์เซนต์ เมื่อเปิดระบบระบายอากาศโดยดูดอากาศที่มีคาร์บอนมอนอกไซด์ 3 เปอร์เซนต์ เข้าไปในห้องด้วยอัตราเร็ว 0.2 ลูกบาศก์เมตรต่อนาที และดูดอากาศในห้องออกด้วยอัตราเร็ว 0.2 ลูกบาศก์เมตรต่อนาที อยากทราบว่านานเท่าใดอากาศในห้องจึงจะมีคาร์บอนมอนอกไซด์ 0.015 เปอร์เซนต์

วิธีทำ ให้ $x(t)$ แทนปริมาณของคาร์บอนมอนอกไซด์หลังจากเวลาผ่านไป t นาที

เมื่อเปิดระบบระบายอากาศโดยดูดอากาศที่มีคาร์บอนมอนอกไซด์ 3 เปอร์เซนต์ เข้าไปในห้องด้วยอัตราเร็ว 0.2 ลูกบาศก์เมตรต่อนาที ดังนั้น

$$IN=0.03\times 0.02=0.0006 \text{ ลูกบาศก์เมตรต่อนาที}$$

ดูดอากาศในห้องออกด้วยอัตราเร็ว 0.2 ลูกบาศก์เมตรต่อนาทีจากห้องประชุมห้องหนึ่งมีขนาด 2000 ลูกบาศก์เมตร ดังนั้น

$$OUT=\frac{x}{2000}\times 0.2=\frac{0.2x}{2000} \text{ ลูกบาศก์เมตรต่อนาที}$$

จาก (90) จะได้

$$\frac{dx}{dt}=0.0006-\frac{0.2x}{2000}$$

หรือ

(98) $$\frac{dx}{dt}=\frac{12-0.2x}{2000}$$

จัดสมการ (98) ให้อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์แบบแยกกันได้ ดังต่อไปนี้

(99) $$\frac{dx}{12-0.2x}=\frac{1}{2000}dt$$

หาปริพันธ์ตลอดสมการ (92) จะได้

$$\int \frac{dx}{12-0.2x} = \int \frac{1}{2000}\,dt$$

$$-\frac{1}{0.2}\ln\left|12-0.2x\right| = \frac{1}{2000}t + c_1$$

$$\ln\left|12-0.2x\right| = -\frac{1}{1000}t + c_1$$

$$12-0.2x = ce^{-t/1000}$$

$$x = 60 - ce^{-t/1000}$$

หรือ

(100) $$x(t) = 60 - ce^{-t/1000}$$

ขณะเวลาเวลา 0 นาที มีปริมาณของคาร์บอนมอนอกไซด์ $2000 \times \frac{0.002}{100} = 0.04$ ลูกบาศก์เมตร ทำให้ได้เงื่อนไขเริ่มต้น $x(0) = 0.04$ แทนในสมการ (100) ได้ $c = 59.96$ แทนในสมการ (100) ได้

(101) $$x(t) = 60 - 59.96e^{-t/1000}$$

ต้องการทราบว่าจะต้องใช้เวลาเท่าใดอากาศในห้องจึงจะมีคาร์บอนมอนอกไซด์ 0.015 เปอร์เซนต์นั่นคือ แทนค่า $x = 2000 \times \frac{0.015}{100} = 0.3$ ในสการ (101) เพื่อหาค่า t

$$0.3 = 60 - 59.96e^{-t/1000}$$

$$e^{-t/1000} = \frac{59.7}{59.96}$$

$$\frac{-t}{1000} = \ln\frac{59.7}{59.96}$$

$$t = -1000\ln\frac{59.7}{59.96}$$

$$t \approx 43.5$$

ดังนั้น อากาศในห้องจึงจะมีคาร์บอนมอนอกไซด์ 0.015 เปอร์เซนต์ เมื่อเวลาผ่านไป 43.5 นาที

3.3.4 ปัญหาการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิของวัตถุ

เมื่อวัตถุอยู่ในตัวกลางที่ล้อมรอบ เช่น อากาศ น้ำ เป็นต้น โดยที่มีอุณหภูมิต่างกัน จะเกิดการถ่ายเทความร้อนระหว่างวัตถุกับตัวกลางที่ล้อมรอบ ทำให้อุณหภูมิของวัตถุเปลี่ยนแปลงไปการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิของวัตถุในกรณีนี้เป็นไปตามกฎการเย็นตัวของนิวตัน ซึ่งกล่าวว่า "อัตราการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิของวัตถุเป็นสัดส่วนกับผลต่างของอุณหภูมิของวัตถุกับอุณหภูมิของตัวกลางที่ล้อมรอบ" (สุรัตนา สังข์หนุน, 2558 : 109-110)

กำหนดให้ $T(t)$ แทนอุณหภูมิของวัตถุ ณ ขณะเวลา t

และ T_{SM} แทนอุณหภูมิของตัวกลางที่ล้อมรอบวัตถุ

โดยกฎการเย็นตัวของนิวตัน จะได้ว่า อุณหภูมิของวัตถุจะเปลี่ยนแปลงไปเป็นสัดส่วนกับผลต่างของอุณหภูมิของวัตถุนั้นกับอุณหภูมิของตัวกลางที่ล้อมรอบวัตถุ จะได้

(102) $$\frac{dT}{dt} = k(T - T_{SM})$$

โดยที่ k เป็นค่าคงที่ของการแปรผัน

ตัวอย่าง 3.18 โลหะแท่งหนึ่งใช้เวลา 10 นาที ในการลดอุณหภูมิจาก 100 องศาเซลเซียส เป็น 40 องศาเซลเซียส เมื่อนำแท่งโลหะไปไว้ในห้องเย็นที่มีอุณหภูมิเท่ากับ 20 องศาเซลเซียส จงหาอุณหภูมิของโลหะ ณ เวลา t ใด ๆ

วิธีทำ ให้ $T(t)$ แทนอุณหภูมิของวัตถุ ณ ขณะเวลา t

ดังนั้น $\dfrac{dT}{dt}$ แทนอัตราการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิ

อัตราการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิของแท่งโลหะเป็นสัดส่วนกับผลต่างของอุณหภูมิของแท่งโลหะกับอุณหภูมิของห้องเย็น และเนื่องจาก T มีค่าลดลงเมื่อ t มีค่าเพิ่มขึ้น นั่นคือ T เป็นฟังก์ชันลด ดังนั้นจะได้

(103) $$\frac{dT}{dt} = -k(T - 20)$$

โดยที่ k เป็นค่าคงที่ของการแปรผัน

จัดสมการ (103) ให้อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์แบบแยกกันได้ ดังต่อไปนี้

(104) $$\frac{dT}{(T-20)} = -kdt$$

หาปริพันธ์ตลอดสมการ (104) จะได้

$$\int \frac{1}{(T-20)}dT = \int -kdt$$
$$\ln\left|T-20\right| = -kt + c_1$$
$$T = 20 + ce^{-kt}$$

หรือ

(105) $$T(t) = 20 + ce^{-kt}$$

จากอุณหภูมิของโลหะตอนเริ่มต้นจะได้เงื่อนไขเริ่มต้น $T(0) = 100$ แทนในสมการ (105) ได้ $c = 80$ และแทนค่า $c = 80$ ในสมการ (105) จะได้

(106) $$T(t) = 20 + 80e^{-kt}$$

เมื่อเวลาผ่านไป 10 นาที อุณหภูมิของโลหะแท่งนี้จะลงเหลือ 40 องศาเซลเซียส จึงได้เงื่อนไขเริ่มต้น $T(10) = 40$ แทนลงในสมการ (106) จะได้

$$40 = 20 + 80e^{-10k}$$
$$80e^{-10k} = 20$$
$$e^{-10k} = \frac{1}{4}$$
$$-10k = \ln\frac{1}{4}$$
$$k = -\frac{1}{10}\ln\frac{1}{4}$$
$$k = \frac{1}{5}\ln 2$$
$$k \approx 0.1386$$

แทน $k = 0.1386$ ในสมการ (106) จะได้

(106) $$T(t) = 20 + 80e^{-0.1386t}$$

ดังนั้น อุณหภูมิของโลหะ ณ เวลา t ใด ๆ คือ $T(t) = 20 + 80e^{-0.1386t}$

ตัวอย่าง 3.19 วัตถุชนิดหนึ่งใช้เวลา 2 ชั่วโมง เพื่อที่จะลดอุณหภูมิจาก 70 องศาฟาเรนไฮต์ เหลือ 50 องศาฟาเรนไฮต์ โดยที่อุณหภูมิของอากาศขนะนั้นเป็น 30 องศาฟาเรนไฮต์ จงหาว่าวัตถุชนิดนี้จะต้องใช้เวลานานเท่าใดจึงจะมีอุณหภูมิ 40 องศาฟาเรนไฮต์

วิธีทำ ให้ $T(t)$ แทนอุณหภูมิของวัตถุ ณ ขณะเวลา t

ดังนั้น $\dfrac{dT}{dt}$ แทนอัตราการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิ

อัตราการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิของวัตถุเป็นสัดส่วนกับผลต่างของอุณหภูมิของวัตถุกับอุณหภูมิของอากาศขณะนั้น และเนื่องจาก T มีค่าลดลงเมื่อ t มีค่าเพิ่มขึ้น นั่นคือ T เป็นฟังก์ชันลด ดังนั้นจะได้

(107) $$\frac{dT}{dt} = -k(T-30)$$

โดยที่ k เป็นค่าคงที่ของการแปรผัน

จัดสมการ (103) ให้อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์แบบแยกกันได้ ดังต่อไปนี้

(108) $$\frac{dT}{(T-30)} = -kdt$$

หาปริพันธ์ตลอดสมการ (104) จะได้

$$\int \frac{1}{(T-30)} dT = \int -kdt$$

$$\ln\left|T-30\right| = -kt + c_1$$

$$T = 30 + ce^{-kt}$$

หรือ

(109) $$T(t) = 30 + ce^{-kt}$$

อุณหภูมิเริ่มต้นของวัตถุชนิดนี้ ทำให้ได้เงื่อนไขเริ่มต้น $T(0) = 70$ แทนในสมการ (109) ได้ $c = 40$ และแทนค่า $c = 40$ ในสมการ (105) จะได้

(110) $$T(t) = 30 + 40e^{-kt}$$

เมื่อเวลาผ่านไป 2 ชั่วโมง อุณหภูมิของวัตถุนี้จะลดลงเหลือ 50 องศาฟาเรนไฮต์ จึงได้เงื่อนไขเริ่มต้น $T(2) = 50$ แทนลงในสมการ (110) จะได้

$$
\begin{aligned}
50 &= 30 + 40e^{-2k} \\
40e^{-2k} &= 20 \\
e^{-2k} &= \frac{1}{2} \\
-2k &= \ln\frac{1}{2} \\
k &= -\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} \\
k &= \frac{1}{2}\ln 2 \\
k &\approx 0.3466
\end{aligned}
$$

แทน $k \approx 0.3466$ ในสมการ (110) จะได้

(111) $$T(t) = 30 + 40e^{-0.3466t}$$

วัตถุชนิดนี้จะต้องใช้เวลานานเท่าใดจึงจะมีอุณหภูมิ 40 องศาฟาเรนไฮต์ จะได้สมการ

$$
\begin{aligned}
40 &= 30 + 40e^{-0.3466t} \\
e^{-0.3466t} &= \frac{1}{4} \\
-0.3466t &= \ln\frac{1}{4} \\
t &= -\frac{1}{0.3466}\ln\frac{1}{4} \\
t &\approx 4
\end{aligned}
$$

ดังนั้น วัตถุชนิดนี้จะต้องใช้เวลา 4 ชั่วโมงจึงจะมีอุณหภูมิ 40 องศาฟาเรนไฮต์

ตัวอย่าง 3.20 นำเทอร์โมมิเตอร์ที่อ่านอุณหภูมิขณะนั้นได้ 80 องศาฟาเรนไฮต์ ออกไปนอกบ้าน 5 นาทีต่อมา อ่านอุณหภูมิของเทอร์โมมิเตอร์ได้ 60 องศาฟาเรนไฮต์และอีก 5 นาทีต่อมา อ่านอุณหภูมิของเทอร์โมมิเตอร์ได้ 50 องศาฟาเรนไฮต์ จงหาอุณหภูมินอกบ้าน

วิธีทำ ให้ $T(t)$ แทนอุณหภูมิของเทอร์โมมิเตอร์ ณ ขณะเวลา t

ให้ T_{SM} แทนอุณหภูมิภายนอกบ้าน

ดังนั้น $\dfrac{dT}{dt}$ แทนอัตราการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิที่เทอร์โมมิเตอร์อ่านได้

เนื่องจาก T มีค่าลดลงเมื่อ t มีค่าเพิ่มขึ้น นั่นคือ T เป็นฟังก์ชันลด ดังนั้นจะได้

(112) $$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_{SM})$$

โดยที่ k เป็นค่าคงที่ของการแปรผัน

จัดสมการ (112) ให้อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์แบบแยกกันได้ ดังต่อไปนี้

(113) $$\frac{dT}{(T - T_{SM})} = -kdt$$

หาปริพันธ์ตลอดสมการ (104) จะได้

$$\int \frac{1}{(T - T_{SM})} dT = \int -kdt$$

$$\ln\left|T - T_{SM}\right| = -kt + c_1$$

$$T = T_{SM} + ce^{-kt}$$

หรือ

(114) $$T(t) = T_{SM} + ce^{-kt}$$

เทอร์โมมิเตอร์ที่อ่านอุณหภูมิขณะเริ่มต้นได้ 80 องศาฟาเรนไฮต์ ทำให้ได้เงื่อนไขเริ่มต้น $T(0) = 80$ แทนในสมการ (114) ได้ $c = 80 - T_{SM}$ และแทนค่า $c = 80 - T_{SM}$ ในสมการ (114) จะได้

(115) $$T(t) = T_{SM} + (80 - T_{SM})e^{-kt}$$

นำเทอโมมิเตอร์ออกไปนอกบ้าน 5 นาที แล้วอ่านอุณหภูมิของเทอร์โมมิเตอร์ได้ 60 องศาฟาเรนไฮต์ จึงได้เงื่อนไขเริ่มต้น $T(5) = 60$ แทนลงในสมการ (115) จะได้

(116) $$60 = T_{SM} + (80 - T_{SM})e^{-5k}$$

และเมื่อเวลาผ่านไป 10 นาที อ่านอุณหภูมิของเทอร์โมมิเตอร์ได้ 50 องศาฟาเรนไฮต์

จึงได้เงื่อนไขเริ่มต้น $T(10) = 50$ แทนลงในสมการ (115) จะได้

(117) $$50 = T_{SM} + (80 - T_{SM})e^{-10k}$$

หรือ

(118) $$50 = T_{SM} + (80 - T_{SM})(e^{-5k})^2$$

จากสมการ (116) จะได้

(119) $$e^{-5k} = \frac{60 - T_{SM}}{80 - T_{SM}}$$

แทน (119) ในสมการ (118) จะได้

$$50 = T_{SM} + (80 - T_{SM})\left[\frac{60 - T_{SM}}{80 - T_{SM}}\right]^2$$

$$50(80 - T_{SM}) = T_{SM}(80 - T_{SM}) + (60 - T_{SM})^2$$

$$(50 - T_{SM})(80 - T_{SM}) = (60 - T_{SM})^2$$

$$10T_{SM} = 400$$

$$T_{SM} = 40$$

ดังนั้น อุณหภูมิภายนอกบ้านเท่ากับ 40 องศาฟาเรนไฮต์

3.4 สรุปท้ายบทที่ 3

การประยุกต์ของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับหนึ่งนั่นคือการนำปัญหาต่างๆ มาสร้างความสัมพันธ์ของตัวแปรต่าง ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ เช่น ปัญหาวิถีเชิงตั้งฉากของวงศ์เส้นโค้งพาราามิเตอร์หนึ่งตัวและ $F(x,y,c)=0$ เป็นวงศ์เส้นโค้งพารามิเตอร์หนึ่งตัว ในระนาบ xy โดยที่ c เป็นพารามิเตอร์ หาอนุพันธ์สมการ เทียบกับ x แล้วจะได้ สมการเชิงอนุพันธ์ของวงศ์เส้นโค้ง

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

นั่นคือ เส้นโค้งแต่ละเส้นของวงศ์เส้นโค้ง ที่จุด (x,y) ใด ๆ มีความชันเท่ากับ $f(x,y)$ และความชันของแนววิถีเชิงตั้งฉาก ที่จุด (x,y) ใด ๆ เท่ากับ $-\dfrac{1}{f(x,y)}$

จะได้ว่า สมการเชิงอนุพันธ์ของวงศ์เส้นโค้งแนววิถีเชิงตั้งฉากคือ

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{f(x,y)}$$

สำหรับปัญหาทางกลศาสตร์นั้น จากกฎข้อที่ 2 ของนิวตัน สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ได้

$$\frac{d}{dx}(mv) = KF$$

โดยที่ m แทนมวลของวัตถุ

v แทนความเร็วของวัตถุ

F แทนแรงที่มากระทำกับวัตถุ

K แทนค่าคงที่ของการแปรผัน

และสุดท้ายคือปัญหาอัตราการเปลี่ยนแปลงเราสามารถสร้างฟังก์ชันของปริมาณในปัจจุบันกับเวลา และในปัญหาที่ศึกษาต้องการจะหาปริมาณ ณ เวลาใด ๆ ถ้าให้ x แทนปริมาณที่มีอยู่ ณ เวลา t แล้ว $\dfrac{dx}{dt}$ จะแทนอัตราการเปลี่ยนแปลง ดังนั้นเราสามารถแก้สมการเชิงอนุพันธ์ซึ่งเป็นตัวแบบทางคณิตศาสตร์ของปัญหานำไปใช้ในการอธิบายตัวแปรหรือปริมาณที่เราสนใจได้อย่างถูกต้อง

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 3

1. จงหาแนววิถีเชิงตั้งฉากของวงศ์เส้นโค้ง ที่กำหนดให้ต่อไปนี้ โดยที่ c เป็นค่าคงที่ใด ๆ
   1.1 $y = cx^3$
   1.2 $x^2 + cy^2 = 1$
   1.3 $y^2 = cx$
   1.4 $y = (x-c)^2$
   1.5 $y^2 = x^2 + cx$
   1.6 $y = ce^{2x}$

2. นักกระโดดร่มคนหนึ่งปล่อยลูกเหล็กหนัก 1 นิวตันซึ่งผูกติดกับร่มขนาดเล็กจากสภาพหยุดนิ่ง ถ้าแรงต้านอากาศเป็นสัดส่วนกับความเร็วของลูกเหล็กขณะนั้น เมื่อลูกเหล็กมีความเร็ว 25 เมตรต่อวินาทีจะมีแรงต้านทานจากอากาศเท่ากับ 900 นิวตัน จงหาความเร็วของวัตถุ ณ เวลา t ใด ๆ และความเร็วของวัตถุ ณ เวลา 10 วินาที

3. วัตถุมวล 1 กิโลกรัมตกจากที่สูงลงมาในแนวดิ่งโดยมีแรงต้านทานของอากาศแปรผันตามความเร็วของวัตถุที่ตกลงมา ค่าคงที่ของการแปรผันเท่ากับ 0.2 จงหาความเร็วของวัตถุ ณ เวลา t ใด ๆ

4. วัตถุหนัก 20 ปอนด์ เคลื่อนที่เป็นแนวเส้นตรงในแนวราบ ด้วยแรงที่มีค่าคงที่ 12 ปอนด์ ในการเคลื่อนที่นี้ มีแรงต้านการเคลื่อนที่ขนาดเป็นปอนด์เท่ากับ 4 เท่าของความเร็วของการเคลื่อนที่ ถ้าวัตถุนี้เคลื่อนที่จากสภาพหยุดนิ่ง จงหาความเร็วและระยะทางเมื่อเวลาผ่านไป 0.5 วินาที

5. วัตถุมวล m กิโลกรัมเริ่มต้นเคลื่อนที่จากจุดหยุดนิ่งจากยอดของพื้นเอียงซึ่งทำมุม 45 องศากับพื้นราบ ถ้าสัมประสิทธิ์ของความเสียดทานระหว่างวัตถุกับพื้นเอียงเป็น μ จงหาความเร็วและความเร่งของวัตถุ ณ เวลา t ใด ๆ

6. โยนลูกบอลมวล 4 กรัมขึ้นไปในแนวดิ่งด้วยความเร็วต้น v_0 เซนติเมตรต่อวินาที และขณะนั้นมีแรงต้านอากาศเป็นสองเท่าของความเร็วของการเคลื่อนที่ จงหาความเร็วของลูกบอล ณ เวลา t ใด ๆ

7. สารกัมมันตรังสีชนิดหนึ่งมีอัตราการสลายเป็นสัดส่วนกับจำนวนที่มีอยู่ และพบว่าเมื่อเวลาผ่านไป 5568 ปี สารชนิดนี้จะเหลืออยู่ครึ่งหนึ่งของสารที่มีอยู่ จงหาปริมาณของสารที่เหลืออยู่ ณ เวลา t ใด ๆ

8. สารเรเดียมมีอัตราการสลายตัวเป็นสัดส่วนกับจำนวนที่เหลืออยู่ และพบว่าสารเรเดียมสลายตัว 11 เปอร์เซนต์ของที่มีอยู่ในเวลา 25 ปี จงหาว่าต้องใช้เวลานานเท่าใด สารเรเดียมจะเหลืออยู่ครึ่งหนึ่งของปริมาณเดิม

9. แบคทีเรียชนิดหนึ่งเพิ่มขึ้นเป็นสัดส่วนกับจำนวนแบคทีเรียที่มีอยู่ ถ้าจำนวนแบคทีเรียเพิ่มเป็น 2 เท่าในเวลา 24 ชั่วโมง จงหาว่าต้องใช้เวลากี่ชั่วโมง แบคทีเรียชนิดนี้จะเพิ่มขึ้นเป็น 100 เท่า

10. แบคทีเรียชนิดหนึ่งมีขนาด 2000 ตัว เมื่อเวลาผ่านไป 2 ชั่วโมง จำนวนแบคทีเรียเพิ่มเป็น 2500 ตัว จงหาจำนวนแบคที่เรีย ณ เวลา t ใด ๆ ถ้าแบคทีเรียชนิดนี้เพิ่มขึ้นเป็นสัดส่วนกับจำนวนแบคทีเรียที่มีอยู่

11. อัตราการเพิ่มของประชากรของเมืองหนึ่งเป็นสัดส่วนกับจำนวนประชากรที่มีอยู่ ถ้าจำนวนประชากรของเมืองนี้เพิ่มขึ้นเป็น 2 เท่าของประชากรที่มีอยู่ในเวลา 50 ปี จงหาจำนวนประชากรของเมื่องนี้ ณ เวลา t ใด ๆ และต้องใช้เวลากี่ปีจำนวนประชากรจึงจะเพิ่มเป็น 3 เท่า

12. น้ำในทะเลสาบแห่งหนึ่งมีปริมาตร 480 ลูกบาศก์กิโลโมตร มีการควบคุมการส่งน้ำจากคลองให้ไหลเข้าทะเลสาบ และปล่อยให้ไหลออกจากทะเลสาบด้วยอัตราเร็วเท่ากับคือ 350 ลูกบาศก์กิโลเมตรต่อปี ถ้ากำหนดให้ตอนเริ่มต้น ความเข้มข้นของมลพิษในทะเลสาบเป็น 5 เท่าของความเข็มข้นของมลพิษในคลอง จงหาว่าจะต้องใช้เวลานานเท่าใด ความเข้มข้นของมลพิษในทะเลสาบจะลดลงเป็น 2 เท่าของความเข้มข้นของมลพิษในคลอง

13. เทอร์โมมิเตอร์อันหนึ่งอ่านสเกลได้ 15 องศาเซลเซียส ถูกนำเข้าไปวางไว้ในห้องที่มีอุณหภูมิ 23 องศาเซลเซียส เมื่อเวลาผ่านไป 1 นาที เทอร์โมมิเตอร์อันนั้นอ่านสเกลได้ 19 องศาเซลเซียส จงหาว่าใช้เวลานานเท่าใด เทอร์โมมิเตอร์จึงจะอ่านสเกลได้ 29.9 องศาเซลเซียส

14. โลหะแท่งหนึ่งใช้เวลา 40 นาทีในการลดอุณหภูมิจาก 200 องศาเซลเซียส เป็น 100 องศาเซลเซียส เมื่อจุ่มโลหะลงในของเหลวชนิดหนึ่งที่มีอุณหภูมิเท่ากับ 10 องศาเซลเซียส จงหาว่าจะต้องใช้เวลาเท่าใดจึงจะทำให้แท่งโลหะชนิดนี้ลดอุณหภูมิจาก 100 องศาเซลเซียส เป็น 10 องศาเซลเซียส ถ้าของเหลวนี้มีอุณหภูมิ 5 องศา

15. ณ เวลา 09.00 น. นำเทอร์โมมิเตอร์ที่บอกอุณหภูมิ 70 องศาฟาเรนไฮต์ ออกไปนอกบ้านซึ่งมีอุณหภูมิ 15 องศาฟาเรนไฮต์ ต่อมาเวลา 09.05 น. อ่านเทอร์โมมิเตอร์ได้ 45 องศาฟาเรนไฮต์เวลา 09.10 น นำเทอโมมิเตอร์กลับเข้าบ้านที่มีอุณหภูมิ 70 องศาฟาเรนไฮต์ จงหาอุณหภูมิที่อ่านได้ ณ เวลา 09.20 น.

16. นำเทอร์โมมิเตอร์ที่บอกอุณหภูมิ 70 องศาฟาเรนไฮต์ ออกไปนอกบ้านซึ่งมีอุณหภูมิ -10 องศาฟาเรนไฮต์ เวลาผ่านไป 2 นาที อ่านอุณหภูมิของเทอร์โมมิเตอร์ได้ 26 องศาฟาเรนไฮต์ และเมื่อเวลาผ่านไปอีก 3 นาทีนำเทอโมมิเตอร์กลับเข้าบ้านที่มีอุณหภูมิ 70 จงหาอุณหภูมิที่อ่านได้เมื่อเวลาผ่านไปอีก 4 นาที

บทที่ 4
สมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับ n

ในบทนี้จะศึกษารูปแบบและตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ และสมบัติบางประการของตัวดำเนินการที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัวจากการที่สมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับที่ n เพื่อเป็นประโยชน์ในการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ n ในรูปแบบต่าง ๆ ต่อไป

สมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับ n มีรูปทั่วไปเป็น

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = f(x)$$

เมื่อ $f(x), a_i(x), i = 0,1,2,\ldots,n$ เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องบนเซตย่อย I ของ R และ $a_0(x) \neq 0$ ต่อไปเราจะใช้สัญลักษณ์ D แทนสัญลักษณ์ $\frac{d}{dx}$ นั้นคือ $Df(x)$ หมายถึงอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f เทียบกับตัวแปร x เพราะฉะนั้น $\frac{df(x)}{dx}$ แทนด้วย $Df(x)$

และ	$\frac{dy}{dx}$	แทนด้วย	D_y
นอกจากนั้น	$\frac{d^2y}{dx^2}$	แทนด้วย	D^2y
	$\frac{d^ny}{dx^n}$	แทนด้วย	D^ny

4.1 ตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์

สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = f(x)$$

สามารถเขียนได้เป็น

$$a_0(x)D^n y + a_1(x)D^{n-1}y + \cdots + a_{n-1}(x)Dy + a_n(x)y = f(x)$$

หรือ

$$\left[a_0(x)D^n + a_1(x)D^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(x)D + a_n(x)\right]y = f(x)$$

หรือ

$$P(D)y = f(x)$$

เมื่อ $P(D) = a_0(x)D^n + a_1(x)D^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(x)D + a_n(x)$

จากการที่เราแทนสัญลักษณ์ $\dfrac{d}{dx}$ ด้วย D จะเห็นได้ว่า D มีลักษณะเหมือนกับฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นเซตของฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ และเรจน์เป็นเซตของฟังก์ชัน (ธีระศักดิ์ อุรัจนานนท์, 2549 : 2).

บทนิยาม 4.1

A และ B เป็นเซตของฟังก์ชัน ฟังก์ชันค่าจริง $L : A \to B$ เรียก**ตัวดำเนินการ** และถ้า L มีคุณสมบัติว่าทุกฟังก์ชัน f, g และทุกค่าคงตัว a, b จะได้ว่า $L(af + bg) = aL(f) + bL(g)$ แล้วเรียก L ว่าเป็น**ตัวดำเนินการเชิงเส้น**

นอกจากนี้โดยสมบัติของอนุพันธ์ของฟังก์ชันจะได้ว่า ทุกฟังก์ชัน f, g และทุกค่าคงตัว a, b จะได้ว่า

$$L(af + bg) = D\left(af(x) + bg(x)\right) = aDf(x) + bDg(x) = aL(f) + bL(f)$$

เพราะฉะนั้น L เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้นนั่นคือ D เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้นด้วยให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก สำหรับเซตของฟังก์ชัน A ที่กล่าวถึงจะหมายถึงเซตของฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ถึงอันดับ n เพราะว่า D^n ส่งฟังก์ชัน y ไปยังฟังก์ชัน $\dfrac{d^n}{dx^n}y$ เพราะฉะนั้น D^n เป็นตัวดำเนินการโดยสมบัติของอนุพันธ์ของฟังก์ชันจะได้ว่า

$$D^n(af + bg) = aD^n f + bD^n g$$

ทุกฟังก์ชัน f, g และทุกค่าคงตัว a, b ดังนั้น D^n เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้น ต่อไปจะใช้ประโยชน์และคุณสมบัติของตัวดำเนินการเชิงเส้น $D, D^2, D^3, \ldots, D^n$ ช่วยในการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์

บทนิยาม 4.2

กำหนดให้ $L: B \to C$ และ $T: A \to B$ โดยที่ A, B และ C เป็นเซตของฟังก์ชันค่าจริง ถ้า L และ T เป็นตัวดำเนินการ

การบวก

$$(L+T)(f) = L(f) + T(f)$$

การคูณ

$$(LT)(f) = L(T(f))$$

การคูณด้วยค่าคงตัว k

$$(kL)(f) = L(kf)$$

ทฤษฎีบท 4.1

กำหนดให้ $L: B \to C$ และ $T: A \to B$ โดยที่ A, B และ C เป็นเซตของฟังก์ชันค่าจริง ถ้า L และ T เป็นตัวดำเนินการ ถ้า L และ T เป็นตัวดำเนินการ k เป็นค่าคงตัวแล้ว $L+T$, kL และ LT เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้น

ทฤษฎีบท 4.2

กำหนดให้ $L_1: B \to C$, $L_2: A \to B$ และ $L_2: C \to A$ โดยที่ A, B และ C เป็นเซตของฟังก์ชันค่าจริง ถ้า L_1, L_2 และ L_3 เป็นตัวดำเนินการ จะได้ว่า

1. $L_1 + L_2 = L_2 + L_1$
2. $(L_1 + L_2) + L_3 = L_1 + (L_2 + L_3)$
3. $(L_1 L_2) L_3 = L_1 (L_2 L_3)$
4. $L_1 (L_2 + L_3) = L_1 L_2 + L_1 L_3$

บทนิยาม 4.3

ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก $p(x)$ เป็นพหุนามในพจน์ของ x ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง เราให้นิยามการคูณของ $p(x)$ กับ D^n โดย $\left(p(x)D^n\right)f = p(x)\left(D^n(f)\right)$ โดยที่ $D^0 f = f$

เนื่องจาก $p(x)D^n(af+bg) = p(x)\Big(D^n(af+bg)\Big)$

$$= p(x)\Big(aD^n(f)+bD^n(g)\Big)$$

$$= a\Big(p(x)D^n(f)\Big)+b\Big(p(x)D^n(g)\Big)$$

ทุกค่าคงตัว a,b และทุกฟังก์ชัน f และ g เพราะฉะนั้น $p(x)D^n$ เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้นผลจากทฤษฎีบท 4.2 จะได้ว่า

$$L = a_0(x)D^n + a_1(x)D^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(x)D + a_n(x)$$

เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้นเราเรียก L ว่า **ตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์อันดับ** n และ $a_0(x), a_1(x), \ldots, a_{n-1}(x), a_n(x)$ เรียกว่าสัมประสิทธิ์ของตัวดำเนินการ $D^n, D^{n-1}, \ldots, D$ และ D^0 ตามลำดับ

ตัวอย่าง 4.1

กำหนดให้ $L = xD^2 + D - 2$

จะได้ $L(y) = (xD^2 + D - 2)y = xD^2y + Dy - 2y = x\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} - 2y$

กำหนด $L = xD - 2$ และ $T = D + x$

จะได้ $LT = (xD-2)(D+x)$ และ $TL = (D+x)(xD-2)$

$$\begin{aligned}
(LT)e^x &= \Big[(xD-2)(D+x)\Big]e^x \\
&= (xD-2)(De^x + xe^x) \\
&= (xD-2)(e^x + xe^x) \\
&= xD(e^x + xe^x) - 2(e^x + xe^x) \\
&= x(De^x + D(xe^x)) - 2(e^x + xe^x) \\
&= x(e^x + xe^x + e^x) - 2e^x - 2xe^x \\
&= x(xe^x + 2e^x) - 2e^x - 2xe^x \\
&= x^2e^x + 2xe^x - 2e^x - 2xe^x \\
&= x^2e^x - 2e^x \\
&= (x^2 - 2)e^x
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(TL)e^{x} &= \left[(D+x)(xD-2)\right]e^{x} \\
&= (D+x)(xDe^{x}-2e^{x}) \\
&= (D+x)(xe^{x}-2e^{x}) \\
&= D(xe^{x}-2e^{x})+x(xe^{x}-2e^{x}) \\
&= Dxe^{x}-D2e^{x}+x^{2}e^{x}-2xe^{x} \\
&= xe^{x}+e^{x}-2e^{x}+x^{2}e^{x}-2xe^{x} \\
&= x^{2}e^{x}-e^{x}-xe^{x}
\end{aligned}
$$

จะเห็นว่า $(LT)e^{x} \neq (TL)e^{x}$

บทนิยาม 4.4

กำหนดให้ $L_1 : B \rightarrow C$ และ $L_2 : A \rightarrow B$ โดยที่ A, B และ C เป็นเซตของฟังก์ชันค่าจริง ให้ L_1 และ L_2 เป็นตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์อันดับ n $L_1 = L_2$ ก็ต่อเมื่อ $L_1(f) = L_2(f)$ ทุกฟังก์ชัน f ที่หาอนุพันธ์ได้จนถึงอันดับที่ n

ตัวอย่าง 4.2

กำหนดให้ $L_1 = (D+1)(D+2)$ และ $L_1 = D^2 + 3D + 2$

เนื่องจาก $y = y(x)$

จะได้ $L_1(y) = (D+1)(D+2)(y)$

$$
\begin{aligned}
L_1(y) &= (D+1)(Dy+2y) \\
&= D^2y + D(2y) + Dy + 2y \\
&= D^2y + 3Dy + 2y \\
&= (D^2 + 3D + 2)y \\
&= L_2(y)
\end{aligned}
$$

ทฤษฎีบท 4.3

กำหนดให้ $L_1 : B \rightarrow C$ และ $L_2 : A \rightarrow B$ โดยที่ A, B และ C เป็นเซตของฟังก์ชันค่าจริง ให้ L_1 และ L_2 เป็นตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว แล้ว $L_1L_2 = L_2L_1$

ผลจากทฤษฎีบท 4.3 นั้นเราสามารถนำไปใช้ประโยชน์ได้เช่น

$$\begin{aligned}(D+4)(D+2)^2 &= (D+2)^2(D+4)\\ &= (D^2+4D+4)(D+4)\\ &= D^3+8D^2+20D+16\end{aligned}$$

หมายเหตุ 4.1

ถ้า L_1 และ L_2 เป็นตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์อันดับ n ที่มีสัมประสิทธิ์ไม่ใช่ค่าคงตัวทั้งหมดแล้ว L_1L_2 และ L_2L_1 อาจจะไม่เท่ากัน

สมบัติบางประการของตัวดำเนินการที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัวจากการที่สมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับที่ n เช่น $\frac{d^3y}{dx^3}+2\frac{d^2y}{dx^2}-4\frac{dy}{dx}-5y=\sin x$ สามารถเขียนได้เป็น $(D^3+4D^2-4D+5)y=\sin x$ หรือ $P(D)y=\sin x$ เมื่อ $P(D)=D^3+4D^2-4D+5$ ดังนั้นการศึกษาคุณสมบัติต่าง ๆ เกี่ยวกับตัวดำเนินการ D^n จะเป็นประโยชน์อย่างมากในการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ (ดำรง ทิพย์โยธา, 2541 : 70-73)

ทฤษฎีบท 4.4

$D^ne^{mx}=m^ne^{mx}$ ทุกจำนวนเต็มบวก n และทุกค่าคงตัว m

และผลจากทฤษฎีบท 4.4 เราสามารถนำประโยชน์ไปใช้ได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 4.3

$$\begin{aligned}(D^3+4D^2+D-4)e^{8x} &= D^3e^{8x}+4D^2e^{8x}+De^{8x}-4e^{8x}\\ &= 8^3e^{8x}+4(8^2)e^{8x}+8e^{8x}-4e^{8x}\\ &= (8^3+4(8^2)+8-4)e^{8x}\\ &= 778e^{8x}\end{aligned}$$

ทฤษฎีบท 4.5

ให้ m เป็นค่าคงตัวและ n เป็นจำนวนเต็มบวกจะได้ว่า $P(D)e^{mx}=e^{mx}P(m)$ เมื่อ $P(m)=a_0m^n+a_1m^{n-1}+\cdots+a_{n-1}m+a_n$

ผลจากทฤษฎีบท 4.5 เราสามารถนำประโยชน์ไปใช้ได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 4.4

กำหนดให้ $P(D) = D^3 + 4D^2 + 4D + 5$

ดังนั้น $P(D)e^x = (D^3 + 4D^2 + 4D + 5)e^x$

$$= (1^3 + 4(1)^2 + 4(1) + 5)e^x$$
$$= 14e^x$$

และกำหนด $P(D) = D^4 - D^2 + 3D + 10$

ดังนั้น $P(D)e^x = (D^4 - D^2 + 3D + 10)e^{-2x}$

$$= \left((-2)^4 - (-2)^2 + 3(-2) + 10\right)e^{-2x}$$
$$= 16e^x$$

ทฤษฎีบท 4.6

ให้ m เป็นค่าคงตัวและ n เป็นจำนวนเต็มบวกจะได้ว่า

$(D-m)^n(e^{mx}y) = e^{mx}D^n y$ และ $D^n(e^{mx}y) = e^{mx}(D+m)^n y$

เมื่อ $y = y(x)$ หาอนุพันธ์ได้ถึงอันดับที่ n

และผลจากทฤษฎีบท 4.6 เราสามารถนำประโยชน์ไปใช้ได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 4.5

$$\begin{aligned}(D-5)^4(e^{5x}\sin x) &= e^{5x}D^4(\sin x)\\ &= e^{5x}D^3(\cos x)\\ &= -e^{5x}D^2(\sin x)\\ &= -e^{5x}D(\cos x)\\ &= e^{5x}\sin x\end{aligned}$$

ดังนั้น $(D-5)^4(e^{5x}\sin x) = e^{5x}\sin x$

ตัวอย่าง 4.6

$$
\begin{aligned}
D^2(e^{3x}\cos x) &= e^{3x}(D+3)^2\cos x \\
&= e^{3x}(D^2+6D+9)\cos x \\
&= e^{3x}(D^2\cos x+6D\cos x+9\cos x) \\
&= e^{3x}(-\cos x-6\sin x+9\cos x) \\
&= e^{3x}(8\cos x-6\sin x) \\
&= 2e^{3x}(4\cos x-3\sin x)
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $D^2(e^{3x}\cos x) = 2e^{3x}(4\cos x-3\sin x)$

ทฤษฎีบท 4.7

ให้ m ค่าคงตัวและ n เป็นจำนวนเต็มบวกและ $y = y(x)$ สามารถหาอนุพันธ์ได้ถึงอันดับที่ n แล้วจะได้ว่า

1. $e^{mx}P(D)y = P(D-m)(e^{mx}y)$
2. $P(D)e^{mx}y = e^{mx}P(D+m)y$
3. $(D-m)^n(x^n e^{mx}) = e^{mx}n!$

และผลจากทฤษฎี 4.7 เราสามารถนำประโยชน์ไปใช้ได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 4.7

กำหนดให้ $P(D) = D^2+4D+5$

จะได้ $P(D)(e^x\sin x) = e^xP(D+1)(\sin x)$

$$
\begin{aligned}
&= (D^2+4D+5)(e^x\sin x) \\
&= e^x\left[(D+1)^2+4(D+1)+5)\right]\sin x \\
&= e^x(D^2+2D+1+4D+4+5)\sin x \\
&= e^x(D^2+6D+10)\sin x \\
&= e^x(D^2\sin x+6D\sin x+10\sin x) \\
&= e^x(-\sin x+6\cos x+10\sin x) \\
&= e^x(6\cos x+9\sin x) \\
&= 3e^x(2\cos x+3\sin x)
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $P(D)(e^x\sin x) = 3e^x(2\cos x+3\sin x)$

ตัวอย่าง 4.8

กำหนดให้ $P(D) = D^2 + 4D + 6$

จะได้
$$\begin{aligned} P(D)x^2 &= (D^2 + 4D + 6)x^2 \\ &= (D^2 + 4D + 6)x^2 \\ &= D^2x^2 + 4Dx^2 + 6x^2 \\ &= 2! + 8x + 6x^2 \\ &= 2 + 8x + 6x^2 \end{aligned}$$

ดังนั้น $P(D)x^2 = 2 + 8x + 6x^2$

ตัวอย่าง 4.9

กำหนดให้ $P(D) = D^2 + 1$

จะได้
$$\begin{aligned} P(D)x^3e^x &= e^x\left[P(D+1)\right]x^3 \\ &= e^x\left[(D+1)^2 + 1\right]x^3 \\ &= e^x\left[(D^2 + 2D + 1) + 1\right]x^3 \\ &= e^x(D^2 + 2D + 2)x^3 \\ &= e^x(D^2x^3 + 2Dx^3 + 2x^3) \\ &= e^x(6x + 6x^2 + 2x^3) \end{aligned}$$

ดังนั้น $P(D)x^3e^x = e^x(6x + 6x^2 + 2x^3)$

4.2 สมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นเอกพันธุ์

จากสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับ n คือสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นที่มีอันดับสูงสุดของอนุพันธ์เป็นอันดับที่ n ซึ่งเขียนได้ในรูป

$$a_0(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = f(x)$$

หรือ

$$P(D)y = f(x)$$

โดยที่ $a_0(x), a_1(x), \ldots, a_{n-1}(x), a_n(x)$ และ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันของ x หรือค่าคงตัวที่มีความต่อเนื่องบนช่วง I และ $a_0(x) \neq 0$ สำหรับการศึกษาสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นเอกพันธุ์และไม่เอกพันธุ์นั้นได้แสดงในบทนิยามต่อไปนี้ (สุวัฒน์ รอดผล, 2548 : 49)

บทนิยาม 4.5

สมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้น $P(D)y = f(x)$ เรียกว่า **สมการเอกพันธุ์** ถ้า $f(x) = 0$ และเรียกว่า **สมการไม่เอกพันธุ์** ถ้า $f(x) \neq 0$

ตัวอย่างเช่น

$(D^2 + 4xD + 6)y = 0$	เป็นสมการเอกพันธุ์
$D^2y + x^2Dy = 6y$	เป็นสมการเอกพันธุ์
$(D^3 + 4D - 2)y = 2x$	ไม่เป็นสมการเอกพันธุ์
$D^2y + x^2Dy - 6xy - x = 0$	ไม่เป็นสมการเอกพันธุ์

โดยทั่วไปจะพบว่า $y(x) = 0$ เป็นผลเฉลยของสมการเอกพันธุ์ $P(D)y = 0$ ดังนั้นเรื่องที่เราสนใจจะศึกษาต่อไปคือการหาผลเฉลยไม่เป็นศูนย์ของสมการ $P(D)y = 0$ และผลเฉลยของสมการ $P(D)y = f(x)$ เมื่อ $f(x) \neq 0$ จากตัวอย่างของสมการเชิงอนุพันธ์จะเห็นได้ว่าผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อาจมีหลายผลเฉลยได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้ (ดำรง ทิพย์โยธา, 2541 : 75)

ตัวอย่าง 4.10

$(D-1)y = 0$ มีหลายผลเฉยเช่น

$y = e^x$ เป็นผลเฉลยเพราะว่า $(D-1)e^x = De^x - e^x = 0$

$y = 2e^x$ เป็นผลเฉลยเพราะว่า $(D-1)2e^x = D2e^x - 2e^x = 0$

$y = -3e^x$ เป็นผลเฉลยเพราะว่า $(D-1)(-3e^x) = D(-3e^x) - 2(-3e^x) = 0$

ดังนั้น จะเห็นว่า $y = e^x, y = 2e^x, y = -3e^x$ เป็นผลเฉลยของสมการ $(D-1)y = 0$

จากตัวอย่าง 4.10 ที่กล่าวมาจะเห็นว่า $P(D)y = 0$ อาจมีผลเฉลยได้หลายผลเฉลยและถ้า $y = f_1(x)$ เป็นผลเฉลยของ $P(D)y = 0$ แล้ว $y = kf_1(x)$ เป็นผลเฉลยของ $P(D)y = 0$

นอกจากนั้น $y=f_1(x)\,, y=f_2(x)$ เป็นผลเฉลยของ $P(D)y=0$ แล้ว $y=f_1(x)+f_2(x)$ เป็นผลเฉลยของ $P(D)y=0$ สิ่งที่จะศึกษาต่อไปคือลักษณะของฟังก์ชันที่เป็นผลเฉลยของ $P(D)y=0$

บทนิยาม 4.6

ให้ $f_1,f_2,f_3,...,f_n$ เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนเซต I **การรวมเชิงเส้น** ของ $f_1,f_2,f_3,...,f_n$ หมายถึง $c_1f_1+c_2f_2+c_3f_3+\cdots+c_nf_n$ เมื่อ $c_1,c_2,c_3,...c_n$ เป็นค่าคงตัว ที่นิยามบนเซต I โดย
$(c_1f_1+c_2f_2+\cdots+c_nf_n)(x)=c_1f_1(x)+c_2f_2(x)+\cdots+c_nf_n(x)$

ตัวอย่างเช่น

$f_1(x)=x,\ f_2(x)=x^3$ และ $f(x)=4x+2x^3$

เพราะฉะนั้น f เป็นการรวมเชิงเส้นของ f_1,f_2

$f_1(x)=e^x,\ f_2(x)=e^{-2x},\ f_3(x)=e^{5x}$ และ $f(x)=4e^x+5e^{-2x}-3e^{5x}$

เพราะฉะนั้น f เป็นการรวมเชิงเส้นของ f_1,f_2,f_3

บทนิยาม 4.7

ให้ $\{f_1,f_2,...,f_n\}$ เป็นเซตของฟังก์ชันค่าจริงที่นิยามบนเซต I เรากล่าวได้ว่าเซต $\{f_1,f_2,...,f_n\}$ เป็น **เซตไม่อิสระเชิงเส้น** บนเซต I ก็ต่อเมื่อมี $c_1,c_2,...,c_n$ เป็นค่าคงตัวที่ไม่เป็นศูนย์พร้อมกันที่ทำให้ $c_1f_1(x)+c_2f_2(x)+\cdots+c_nf_n(x)=0$ ทุก x ใน I ในกรณีที่ $\{f_1,f_2,...,f_n\}$ เป็นเซตไม่อิสระเชิงเส้น เรากล่าวว่าฟังก์ชัน $f_1,f_2,...,f_n$ ไม่เป็นอิสระเชิงเส้น

ตัวอย่างเช่น $f_1(x)=e^x,\ f_2(x)=e^{2x},\ f_3(x)=4e^x-5e^{2x}$

เพราะว่า $-4f_1(x)+5f_2(x)+f_3(x)=-4e^x+5e^{2x}+4e^x-5e^{2x}=0$ ทุกจำนวนจริง x

เพราะฉะนั้น f_1,f_2,f_3 ไม่เป็นอิสระเชิงเส้น

ทฤษฎีบท 4.8

ให้ $f_1, f_2, ..., f_n : I \to R$ โดยที่ I เป็นสับเซตของ R แล้ว $\{f_1, f_2, ..., f_n\}$ เป็นเซตไม่อิสระเชิงเส้นบนเซต I ก็ต่อเมื่อมีฟังก์ชันอย่างน้อยหนึ่งตัวเป็นการรวมเชิงเส้นของฟังก์ชันที่เหลือ

ตัวอย่างเช่น $f_1(x) = e^x,\ f_2(x) = e^{2x},\ f_3(x) = 4e^x - 5e^{2x}$

เพราะว่า $f_3(x) = 4f_1(x) - 5f_2(x)$ ทุกจำนวนจริง x เพราะฉะนั้น f_1, f_2, f_3 ไม่เป็นอิสระเชิงเส้น

บทนิยาม 4.8

ให้ $\{f_1, f_2, ..., f_n\}$ เป็น **เซตอิสระเชิงเส้น** บนเซต I ถ้า $\{f_1, f_2, ..., f_n\}$ ไม่เป็นเซตไม่อิสระเชิงเส้นบนเซต I

เพราะฉะนั้นจากคำจำกัดความของ $\{f_1, f_2, ..., f_n\}$ เป็นเซตไม่อิสระเชิงเส้นบนเซต จะได้ว่า $f_1, f_2, ..., f_n$ เป็นเซตอิสระเชิงเส้นบนเซต I ก็ต่อเมื่อ $c_1f_1(x) + c_2f_2(x) + \cdots + c_nf_n(x) = 0$ ทุก x ใน I แล้ว $c_1 = c_2 = ... = c_n = 0$ เท่านั้น

ตัวอย่าง 4.11 $f_1(x) = 2x^2 + 1,\ f_2(x) = 1 - 3x^2$ ทุกค่า $x \in R$

จงพิจารณาว่า f_1, f_2 เป็นอิสระเชิงเส้นหรือไม่

วิธีทำ ให้ c_1, c_2 เป็นจำนวนจริงที่ทำให้ $c_1f_1(x) + c_2f_2(x) = 0$ ทุกจำนวนจริง x

เพราะฉะนั้น $c_1(2x^2 + 1) + c_2(1 - 3x^2) = 0$

$$2c_1x^2 + c_1 + c_2 - 3c_2x^2 = 0$$

$$2c_1x^2 - 3c_2x^2 + c_1 + c_2 = 0$$

$$(2c_1 - 3c_2)x^2 + (c_1 + c_2) = 0$$

จะได้ว่า $(2c_1 - 3c_2) = 0$ และ $c_1 + c_2 = 0$ ผลที่ตามมาคือ $c_1 = c_2 = 0$

ดังนั้น f_1, f_2 เป็นอิสระเชิงเส้นบนเซตของจำนวนจริง

ตัวอย่าง 4.12 $f_1(x) = 2x + 3,\ f_2(x) = 4x - 5,\ f_3(x) = x + 8$ ทุกค่า $x \in R$

จงพิจารณาว่า f_1, f_2, f_3 เป็นอิสระเชิงเส้นหรือไม่

วิธีทำ ให้ c_1, c_2, c_3 เป็นจำนวนจริงที่ทำให้ $c_1f_1(x) + c_2f_2(x) + c_3f_3(x) = 0$ ทุกจำนวนจริง x

เพราะฉะนั้น $c_1(2x + 3) + c_2(4x - 3) + c_3(x + 8) = 0$

$$2c_1x + 3c_1 + 4c_2x - 3c_2 + c_3x + 8c_3 = 0$$

$$2c_1x + 4c_2x + c_3x + 3c_1 - 3c_2 + 8c_3 = 0$$

$$(2c_1 + 4c_2 + c_3)x + (3c_1 - 3c_2 + 8c_3) = 0$$

จะได้ว่า $2c_1 + 4c_2 + c_3 = 0$ และ $3c_1 - 3c_2 + 8c_3 = 0$

มีผลเฉลยที่ไม่เป็นศูนย์คือ $c_1 = 1,\ c_2 = -\dfrac{13}{37}$ และ $c_3 = -\dfrac{126}{37}$

ดังนั้น f_1, f_2, f_3 ไม่เป็นอิสระเชิงเส้นบนเซตของจำนวนจริง

ข้อสังเกต 4.1

ค่า c_1, c_2 และ c_3 ในตัวอย่าง 4.12 ที่ไม่เป็นศูนย์พร้อมกันที่ทำให้ $c_1f_1(x) + c_2f_2(x) + c_3f_3(x) = 0$ มีได้หลายค่า เช่น $c_1 = 37,\ c_2 = -13$ และ $c_3 = -126$ หรือ $c_1 = -37,\ c_2 = 13$ และ $c_3 = 126$

ตัวอย่าง 4.13 จงพิจารณาว่าฟังก์ชัน

$$f_1(x) = x + e^x,\ f_2(x) = 1 - x + 4e^x,\ f_3(x) = 1 + 3x - 2e^x \text{ ทุกค่า } x \in R$$

จงพิจารณาว่า f_1, f_2, f_3 เป็นอิสระเชิงเส้นหรือไม่

วิธีทำ ให้ c_1, c_2, c_3 เป็นจำนวนจริงที่ทำให้ $c_1f_1(x) + c_2f_2(x) + c_3f_3(x) = 0$ ทุกจำนวนจริง x

เพราะฉะนั้น $c_1(x + e^x) + c_2(1 - x + 4e^x) + c_3(1 + 3x - 2e^x) = 0$

$$c_1x + c_1e^x + c_2 - c_2x + 4c_2e^x + c_3 + 3c_3x - 2c_3e^x = 0$$

$$4c_2 + c_3 + c_1x - c_2x + 3c_3x + c_1e^x + 4c_2e^x - 2c_3e^x = 0$$

$$(c_2 + c_3) + (c_1x - c_2x + 3c_3x) + (c_1e^x + 4c_2e^x - 2c_3e^x) = 0$$

$$(c_2 + c_3) + (c_1 - c_2 + 3c_3)x + (c_1 + 4c_2 - 2c_3)e^x = 0$$

จะได้ว่า

$$c_2 + c_3 = 0$$

$$c_1 - c_2 + 3c_3 = 0$$

$$c_1 + 4c_2 - 2c_3 = 0$$

เป็นระบบสมการเชิงเส้น 3 ตัวแปร 3 สมการ ที่ $AX=0$

ถ้า $\det(A)\neq 0$ แล้วระบบสมการ $AX=0$ มีผลเฉลยที่เป็นศูนย์เพียงอย่างเดียวเท่านั้น

เพราะว่า $\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 3\\ 1 & 4 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\\ c_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$

และ $\det\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 3\\ 1 & 4 & -2\end{pmatrix}=10\neq 0$ เพราะฉะนั้น $c_1=c_2=c_3=0$

ดังนั้น f_1,f_2,f_3 อิสระเชิงเส้นบนเซตของจำนวนจริง

ข้องสังเกต 4.2

ในการพิจารณาว่าฟังก์ชันเป็นอิสระเชิงเส้นหรือไม่นั้นขึ้นอยู่กับโดเมนของฟังก์ชันด้วย ตัวอย่างเช่น $f_1(x)=x,\ f_2(x)=\left|x\right|$ เมื่อ $x\in[0,\infty)$

เพราะว่าโดเมนในการพิจารณาของ f_1 และ f_2 คือ $x\in[0,\infty)$ จะได้ว่า $\left|x\right|=x$

เพราะฉะนั้น $(1)f_1(x)+(-1)f_2(x)=1x+(-1)x=x-x=0$ ทุกค่า

$x\in[0,\infty)$ ดังนั้น f_1 และ f_2 ไม่เป็นอิสระเชิงเส้น เบนเซต $[0,\infty)$

ต่อไปพิจารณาฟังก์ชัน $f_1(x)=x,\ f_2(x)=\left|x\right|$ และกำหนดโดเมนเป็นเมื่อ $x\in(-\infty,\infty)$

สมมุติมี c_1 และ c_1 ที่ทำให้ $c_1f_1(x)+c_2f_2(x)=c_1x+c_2\left|x\right|$

ทุกค่า $x\in(-\infty,\infty)$

แทนค่า $x=1$ จะได้ c_1+c_2

แทนค่า $x=-1$ จะได้ c_1-c_2

เพราะฉะนั้น $c_1=c_2=0$ ดังนั้น f_1 และ f_2 เป็นอิสระเชิงเส้น เบนเซต $(-\infty,\infty)$

จากตัวอย่าง ที่ผ่านมาจะเห็นได้ว่าการพิจารณาว่า $f_1,f_2,\ldots,f_n$ เป็นอิสระเชิงเส้นหรือไม่ต้องใช้การหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น ต่อไปเราจะหาแนวทางในการพิจารณาว่า $f_1,f_2,\ldots,f_n$ เป็นอิสระเชิงเส้นหรือไม่โดยใช้ **รอนสเกียน** (สุวัฒน์ รอดผล, 2548 : 54)

บทนิยาม 4.9

ให้ $f_1, f_2, \ldots, f_n$ เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ถึงอันดับที่ $n-1$ บนเซต I กำหนด

$$\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \ldots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \ldots & f_n'(x) \\ f_1''(x) & f_2''(x) & \ldots & f_n''(x) \\ . & . & \ldots & . \\ . & . & \ldots & . \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \ldots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

เรียกว่า **รอนสเกียน** ของ $f_1, f_2, \ldots, f_n$ ณ จุด x ใช้สัญลักษณ์ $W(x : f_1, f_2, \ldots, f_n)$ หรือ $W(x)$

ตัวอย่าง 4.14 จงหา รอนสเกียนของ f_1, f_2, f_3 เมื่อ $f_1(x) = x^2,\ f_2(x) = 1 + x,\ f_3(x) = e^x$ $x \in (-\infty, \infty)$

วิธีทำ $$W(x : f_1, f_2, f_3) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & f_3'(x) \\ f_1''(x) & f_2''(x) & f_3''(x) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x^2 & 1+x & e^x \\ 2x & 1 & e^x \\ 2 & 0 & e^x \end{vmatrix}$$

$$= -x^2 e^x$$

ดังนั้น $W(x : f_1, f_2, f_3) = -x^2 e^x$

ตัวอย่าง 4.15 จงหา รอนสเกียนของ $f_1(x) = 4 + 3x,\ f_2(x) = 3x - 5,\ f_3(x) = -4 + 7x$ $x \in (-\infty, \infty)$

วิธีทำ $$W(x : f_1, f_2, f_3) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & f_3'(x) \\ f_1''(x) & f_2''(x) & f_3''(x) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 4+3x & 3x-5 & -4+7x \\ 3 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 0$$

ดังนั้น $W(x : f_1, f_2, f_3) = 0$

การตรวจสอบ $f_1, f_2, \ldots, f_n$ เป็นอิสระเชิงเส้นหรือไม่โดยการใช้รอนสเกียนโดยใช้ผลของทฤษฎีบทต่อไปนี้ (วีระศักดิ์ วาจาบัณฑิต, 2541 : 120)

> **ทฤษฎีบท 4.9**
>
> ให้ $f_1, f_2, \ldots, f_n$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ถึงอันดับ $n-1$ บนเซต I ถ้า $f_1, f_2, \ldots, f_n$ ไม่เป็นอิสระเชิงเส้นแล้ว $W(x : f_1, f_2, f_3) = 0$ ทุก x ใน I

โดยทั่วไปสิ่งที่เราต้องการคือฟังก์ชัน $f_1, f_2, \ldots, f_n$ เป็นอิสระหรือไม่อิสระเชิงเส้นบนเซต I ดังนั้นเราจะใช้ข้อความจริงที่สมมูลกับ

“ถ้า $f_1, f_2, \ldots, f_n$ ไม่เป็นอิสระเชิงเส้นแล้ว $W(x : f_1, f_2, f_3) = 0$ ทุก x ใน I ”

คือ “ถ้ามี x บางตัวใน I ที่ $W(x : f_1, f_2, f_3) \neq 0$ แล้ว $f_1, f_2, \ldots, f_n$ เป็นอิสระเชิงบน I ”

ตัวอย่าง 4.16 $f_1(x) = e^x$, $f_2(x) = \sin x$, $f_3(x) = \cos 2x$ สำหรับ $x \in (-\infty, \infty)$

วิธีทำ $$W(x : f_1, f_2, f_3) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & f_3'(x) \\ f_1''(x) & f_2''(x) & f_3''(x) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} e^x & \sin x & \cos 2x \\ e^x & \cos x & -2\sin 2x \\ e^x & -\sin x & -4\cos 2x \end{vmatrix}$$

เมื่อ $x = 0$

จะได้ว่า $W(x : f_1, f_2, f_3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$

ดังนั้น f_1, f_2, f_3 เป็นอิสระเชิงเส้นบนเซต $(-\infty, \infty)$

ทฤษฎีการมีผลเฉลยและการมีผลเฉลยเดียวเท่านั้น

สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับ n

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}+a_n(x)y=f(x)$$

หรือ

$$P(D)y=f(x)$$

ถ้า $a_0(x),a_1(x),...,a_n(x)$ และ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องบนเซตของจำนวนจริง I และ $a_0(x)\neq 0$ สำหรับทุก x ใน I (ดำรง ทิพย์โยธา, 2541 : 84-85)

ทฤษฎีบท 4.10

ถ้า x_0 เป็นสมาชิกตัวหนึ่งใน I และ $y_0,y_1,y_2...,y_{n-1}$ เป็นค่าคงตัวจะได้ว่า สมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับ n $P(D)y=f(x)$ จะมีผลเฉลย $y=y(x)$ ที่นิยามบนเซต I เพียงผลเฉลยเดียวเท่านั้นที่สอดคล้องกับเงื่อนไขเริ่มต้น

$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_1,\ y''(x_0)=y_2,...,\ y^{(n-1)}(x_0)=y_{n-1}$

ตัวอย่าง 4.17 จงหาผลเฉลยของสมการ $(D^2-3D+2)y=0$ เมื่อ $y(0)=1$ และ $y'(0)=4$

วิธีทำ เพราะว่า $(D^2-3D+2)(c_1e^x+c_2e^{2x})=0$

เพราะฉะนั้น $y=c_1e^x+c_2e^{2x}$ และ $y'=c_1e^x+2c_2e^{2x}$

เนื่องจาก $y(0)=1$ และ $y'(0)=4$

ได้ $c_1+c_2=0$ และ $c_1+2c_2=4$

ทำให้ได้ว่า $c_1=-2$ และ $c_2=3$

สรุปโดยทฤษฎีบท 4.10 $y=-2e^x+3e^{2x}$ เป็นผลเฉลยเดียวเท่านั้น

ที่ทำให้ $(D^2-3D+2)y=0$ เมื่อ $y(0)=1$ และ $y'(0)=4$

สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับ n , $P(D)y=0$

จากผลของทฤษฎีบท 4.10 จะได้ว่า

ต้องมีผลเฉลย $u_1(x)$ ที่ทำให้ $u_1(x_0)=1,\ u_1'(x_0)=u_1''(x_0)=...=u_1^{(n-1)}(x_0)=0$

ต้องมีผลเฉลย $u_2(x)$ ที่ทำให้ $u_2(x_0)=0,\ u_2'(x_0)=0,\ u_2''(x_0)=...=u_2^{(n-1)}(x_0)=0$

หรือ $u_r^{(r-1)}(x_0)=1$

และ $u_r^{(r)}(x_0) = u_r^{(r+1)}(x_0) = ... = u_r^{(n-1)}(x_0) = 0$

ผลเฉลย $u_1(x), u_2(x), ..., u_n(x)$ เป็นอิสระเชิงเส้นมีผลทำให้

$$W(x_0, u_1, u_2, ..., u_n) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ . & . & ... & . \\ . & . & ... & . \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{bmatrix} = 1 \neq 0$$

เพราะฉะนั้น $u_1(x), u_2(x), ..., u_n(x)$ เป็นอิสระเชิงเส้น

ดังนั้น สรุปได้ว่าสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับ n, $P(D)y = 0$ ต้องมีเซตมูลฐานของผลเฉลยเสมอ

บทนิยาม 4.10

กำหนดให้ $P(D)$ เป็นตัวดำเนินการ **เซตมูลฐานของผลเฉลย** ของสมการ $P(D)y = 0$ หมายถึงเซตของผลเฉลย $u_1, u_2, ..., u_n$ ที่เป็นอิสระเชิงเส้นและเป็นผลเฉลยของ $P(D)y = 0$

ตัวอย่าง 4.18 สมการ $(D^2 + 1)y = 0$

เลือกให้ $u_1(x) = \sin x$ และ $u_2(x) = \cos x$ จะได้ว่า

$\{\sin x, \cos x\}$ เป็นเซตมูลฐานของผลเฉลย

เลือกให้ $u_1(x) = 4\sin x$ และ $u_2(x) = -2\cos x$ จะได้ว่า

$\{4\sin x, -2\cos x\}$ เป็นเซตมูลฐานของผลเฉลย

เลือกให้ $u_1(x) = \sin x + \cos x$ และ $u_2(x) = \sin x - \cos x$ จะได้ว่า

$\{\sin x + \cos x, \sin x - \cos x\}$ เป็นเซตมูลฐานของผลเฉลย

ดังนั้น จากตัวอย่างจะเห็นว่าสมการเชิงอนุพันธ์ $P(D)y = 0$ มีเซตมูลฐานของผลเฉลยได้หลายเซต

บทแทรก 4.1

ถ้า $F(x)$ เป็นผลเฉลยของสมการ $P(D)y=0$
เมื่อ $P(D)=a_0(x)D^n+a_1(x)D^{n-1}+\cdots+a_{n-1}(x)D+a_n(x)$
โดยที่ $a_0(x),a_1(x),...,a_{n-1}(x),a_n(x)$ มีความต่อเนื่องบนเซต I และ $F(x)$
สอดคล้องกับเงื่อนไข $F(x_0)=F'(x_0)=F''(x_0)=...=F^{(n)}(x_0)=0$
แล้ว $F(x)=0$ ทุกค่า x ใน I

4.3 ผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นไม่เอกพันธุ์

กำหนดให้ $P(D)=a_0(x)D^n+a_1(x)D^{n-1}+\cdots+a_{n-1}(x)D+a_n(x)$ เมื่อ $a_0(x),a_1(x),...,a_{n-1}(x),a_n(x)$ เป็นฟังก์ชันของ x ที่นิยามบนเซต I (ศิริพร พัสดร, 2552 : 151)

บทนิยาม 4.11

สมการ $P(D)y=0$ เรียกว่า**สมการเอกพันธุ์สัมพัทธ์** หรือ**สมการลดรูป**ของสมการ $P(D)y=f(x)$

ตัวอย่างเช่น สมการ $(D^2-3D+2)y=\sin x$ มี $(D^2-3D+2)y=0$ เป็นสมการลดรูป

ทฤษฎีบท 4.11

ถ้า $y=u(x)$ เป็นผลเฉลยของสมการไม่เอกพันธุ์ $P(D)y=f(x)$ บนเซต I
และ $y=v(x)$ เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการลดรูป $P(D)y=0$ บนเซต I
แล้วผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์ $P(D)y=f(x)$ คือ $y=u(x)+v(x)$

บทนิยาม 4.12

ผลเฉลยทั่วไปของสมการลดรูป $P(D)y=0$ เรียกว่า **ผลเฉลยเติมเต็ม**ของสมการไม่เอกพันธุ์ $P(D)y=f(x)$ ใช้สัญลักษณ์ y_c ผลเฉลยของสมการไม่เอกพันธุ์ $P(D)y=f(x)$ เรียกว่า **ผลเฉลยเฉพาะ** ใช้สัญลักษณ์ y_p

จากทฤษฎีบท 4.11 และนิยาม 4.11 นั้นผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์ $P(D)y = f(x)$ คือ $y = y_c + y_p$ (ดำรง ทิพย์โยธา, 2541 : 91)

ตัวอย่าง 4.19 สมการ $y'' - 2y' - 4y = 16x$

มีผลเฉลยเติมเต็ม $y_c = c_1e^{-x} + c_2e^{4x}$ เมื่อ c_1, c_2 เป็นค่าคงตัวไม่เจาะจง

และมีผลเฉลยเฉพาะ $y_p = 3 - 4x$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปคือ $y = c_1e^{-x} + c_2e^{4x} + 3 - 4x$

ทฤษฎีบท 4.12

ถ้า $u_i(x)$ เป็นผลเฉลยของสมการไม่เอกพันธุ์ $P(D)y = f_i(x), i = 1, 2, \ldots, m$ โดยที่ $P(D) = a_0(x)D^n + a_1(x)D^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(x)D + a_n(x)$ บนเซต I แล้ว $y = k_1u_1(x) + k_2u_2(x) + \cdots + k_mu_m(x)$ เป็นผลเฉลยของสมการไม่เอกพันธุ์ $P(D)y = k_1f_1(x) + k_2f_2(x) + \cdots + k_mf_m(x)$ บนเซต I ทุกค่าคงตัว $k_1, k_2, \ldots, k_m$

ตัวอย่างเช่น การหาผลเฉลยเฉพาะของ $(D^2 + 4)y = 5e^x - 4x^2$ เราอาจทำได้ดังนี้

เพราะว่าผลเฉลยเฉพาะของ $(D^2 + 4)y = e^x$ คือ $y_p = \frac{1}{5}e^x$

และผลเฉลยเฉพาะของ $(D^2 + 4)y = x^2$ คือ $y_p = -\frac{1}{8} + \frac{1}{4}x^2$

เพราะฉะนั้นผลเฉลยเฉพาะของ $(D^2 + 4)y = 5e^x - 4x^2$

คือ $y_p = 5\left(\frac{1}{5}e^x\right) - 4\left(-\frac{1}{8} + \frac{1}{4}x^2\right) = e^x + \frac{1}{2} - x^2$

4.4 สรุปท้ายบทที่ 4

สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับ n

$$a_0(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = f(x)$$

สามารถเขียนได้เป็น

$$P(D)y = f(x)$$

สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับ n

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = f(x)$$

ถ้าใช้สัญลักษณ์ D แทนสัญลักษณ์ $\dfrac{d}{dx}$ จะได้

$$\left[a_0(x)D^n + a_1(x)D^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(x)D + a_n(x)\right]y = f(x)$$

หรือ

$$P(D)y = f(x)$$

เมื่อ $P(D) = a_0(x)D^n + a_1(x)D^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(x)D + a_n(x)$

ถ้า $f(x) = 0$ จะเรียกว่า**สมการเอกพันธุ์** และถ้า $f(x) \neq 0$ จะเรียกว่า **สมการไม่เอกพันธุ์** สำหรับการหาผลเฉลยต้องศึกษาคุณสมบัติต่าง ๆ เกี่ยวกับตัวดำเนินการ D^n ซึ่งจะเป็นประโยชน์อย่างมากในการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ เช่น ถ้า m ค่าคงตัวและ n เป็นจำนวนเต็มบวกและ $y = y(x)$ สามารถหาอนุพันธ์ได้ถึงอันดับที่ n แล้วจะได้ว่า

1. $e^{mx}P(D)y = P(D-m)(e^{mx}y)$
2. $P(D)e^{mx}y = e^{mx}P(D+m)y$
3. $(D-m)^n(x^n e^{mx}) = e^{mx}n!$

ถ้า $y(x) = 0$ เป็นผลเฉลยของสมการเอกพันธุ์ $P(D)y = 0$ ดังนั้นการหาผลเฉลยไม่เป็นศูนย์ของสามการ $P(D)y = 0$ และผลเฉลยของสมการ $P(D)y = f(x)$ เมื่อ $f(x) \neq 0$ จะพบว่าผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์นั้นอาจมีหลายผลเฉลยได้ และการรวมเชิงเส้นของผลเฉลยนั้นก็ยังเป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ได้อีกด้วยถ้าเซตของผลเฉลยทั้งหมดเป็นอิสระเชิงเส้นกัน

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 4

1. จงหาตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ $P(D)$ ของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้
   1.1 $y' - 2y = 0$
   1.2 $\dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{dy}{dx} + 5y = \sin x$
   1.3 $y''' - y' = 6y - x^2$
   1.4 $x^2 y^{(5)} - y'' - y = x^3$
   1.5 $x\dfrac{d^5y}{dx^5} - \dfrac{d^3y}{dx^3} = -5y + 3x^2$

2. จงพิจารณาตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้ว่าเป็นตัวดำเนินการตัวเดียวกันหรือไม่
   2.1 $(xD)^2, x^2D^2$
   2.2 $D^2 - x^2, (D + x)(D - x)$
   2.3 $D^2 + 2xD + x^2, (D + x)^2$
   2.4 $D^2 - 1, (D - 1)(D + 1)$
   2.2 $(D - x)^2, D^2 + 2xD + x^2$

3. กำหนดให้ $P(D) = D^2 + 2D - 1$ จงหาค่าของ
   3.1 $P(D)x^3e^x$
   3.2 $P(D)e^{2x}$
   3.3 $P(D)\sin x$
   3.4 $P(D)e^{3x}\cos x$

4. จงแสดงว่า $\sin x$ และ $\cos x$ เป็นผลเฉลยของสมการ $y'' + y = 0$
5. จงแสดงว่า e^x, xe^x และ x^2e^x เป็นผลเฉลยของสมการ $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$
6. กำหนดให้ $f_1(x) = 4, f_2(x) = 2 + x^3, f_3(x) = 3 + x^4$ จงหา $W(x : f_1, f_2, f_3)$
7. กำหนดให้ $f_1(x) = e^x, f_2(x) = 2e^x, f_3(x) = -3e^{4x}$ จงหา $W(x : f_1, f_2, f_3)$
8. กำหนดให้ $f_1(x) = 1 + 2x, f_2(x) = 2 + 3x, f_3(x) = 3 + 4x$ จงหา c_1, c_2, c_3
   ที่ทำให้ $c_1f_1 + c_2f_2 + c_3f_3 = 0$

9. จงพิจารณาว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้ในแต่ละข้อเป็นอิสระเชิงเส้นหรือไม่

   9.1 $f_1(x) = \sin x, f_2(x) = \sin 2x, f_3(x) = \sin 3x$ $\qquad x \in (-\infty, \infty)$

   9.2 $f_1(x) = x^2, f_2(x) = |x|$ $\qquad x \in [0, \infty)$

   9.3 $f_1(x) = x^3, f_2(x) = x^2 |x|$ $\qquad x \in (-\infty, \infty)$

   9.4 $f_1(x) = 1 + x^2, f_2(x) = 2 + x^2, f_3(x) = 3 + x^2$ $\qquad x \in (-\infty, \infty)$

   9.5 $f_1(x) = e^x, f_2(x) = e^{5x}, f_3(x) = -e^{3x}$ $\qquad x \in (-\infty, \infty)$

10. จงแสดงว่า $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x} + 2x + 3$ เมื่อ c_1, c_2, c_3 เป็นค่าคงตัวไม่เจาะจง เป็นผลเฉลยของสมการ $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 4 - 12x$

บทที่ 5
สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ
เชิงเส้นเอกพันธุ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว

ในบทนี้เป็นการศึกษาถึงวิธีการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นเอกพันธุ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว $P(D)y = 0$ เมื่อ $P(D) = a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_{n-1} D + a_n$ เป็นตัวดำเนินการอันดับที่ n และ $a_0, a_1, ..., a_n$ เป็นค่าคงตัว และการหาผลแฉลยนั้นต้องอาศัยการสร้างพหุนามช่วยและสมการช่วย ที่อยู่ในรูป $P(r) = 0$ ดังนั้นความรู้พื้นฐานที่จำเป็นมากสำหรับเนื้อหาในบทนี้ก็คือการหาค่ารากของสมการช่วยไม่ว่าจะเป็นวิธีการใช้สูตร การแยกตัวประกอบ การหารยาว หรือการหารสังเคราะห์ และเพื่อให้ได้คำตอบถูกต้องและรวดเร็ว

5.1 สมการช่วย

สมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นเอกพันธุ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว มีรูปทั่วไปคือ

(1) $$a_0 \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = 0$$

เมื่อ $a_0, a_1, ..., a_n$ เป็นค่าคงตัว

หรือ

$$P(D)y = 0$$

เมื่อ $P(D) = a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_{n-1} D + a_n$

การหาผลเฉลยของสมการ (1) เราจะสมมติให้ $y = e^{rx}$ เป็นผลเฉลยของสมการ จะได้

$$\begin{aligned} De^{rx} &= re^{rx} \\ D^2 e^{rx} &= r^2 e^{rx} \\ D^3 e^{rx} &= r^3 e^{rx} \\ &\vdots \\ D^n e^{rx} &= r^2 e^{rx} \end{aligned}$$

ดังนั้นเมื่อนำไปแทนในสมการ (1) จะได้

$$P(D)e^{rx} = P(r)e^{rx}$$

เนื่องจาก $P(D)y = 0$ ดังนั้น $P(r)e^{rx} = 0$ และ $e^{rx} \neq 0$ ฉะนั้น $P(r) = 0$

เรียกสมการ $P(r) = 0$ ว่า **สมการช่วย** ของสมการ $P(D)y = 0$ (ศิริพร พัสดร, 2552 : 158-159)

บทนิยาม 5.1

สมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นเอกพันธุ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว $P(D)y = 0$ เมื่อ $P(D) = a_0D^n + a_1D^{n-1} + \cdots + a_{n-1}D + a_n$ เป็นตัวดำเนินการอันดับที่ n และ $a_0, a_1, ..., a_n$ เป็นค่าคงตัว พนุนามในเทอมของ r ระดับขั้น n $P(r) = a_0r^n + a_1r^{n-1} + \cdots + a_{n-1}r + a_n$ เรียกว่า **พหุนามช่วย** และเรียก $P(r) = 0$ ว่า **สมการช่วย** ของสมการ $P(D)y = 0$

ความสัมพันธ์ระหว่าง $P(r)$ กับ $P(D)$ คือ ถ้า $P(r)$ แยกตัวประกอบได้เป็น $P(r) = a_0(r - r_1)(r - r_2)\cdots(r - r_n)$ แล้วเราก็จะได้ว่า $P(D) = a_0(D - r_1)(D - r_2)\cdots(D - r_n)$ นอกจากนี้สมการช่วย $P(r) = 0$ จะสามารถเขียนได้เป็น $a_0(r - r_1)(r - r_2)\cdots(r - r_n) = 0$ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 5.1 สมการ $(D^2 + 2D - 15)y = 0$

มีพหุนามช่วยคือ $P(r) = r^2 + 2r - 15$

และมีสมการช่วยคือ $r^2 + 2r - 15 = 0$

เนื่องจาก $P(r) = r^2 + 2r - 15 = (r - 3)(r + 5)$

ดังนั้นเราได้ว่า $P(D) = (D - 3)(D + 5)$ และ $(D - 3)(D + 5) = 0$

ตัวอย่าง 5.2 สมการ $(D^3 + 2D^2 - 5D - 6)y = 0$

มีพหุนามช่วยคือ $P(r) = r^3 + 2r^2 - 5r - 6$

และมีสมการช่วยคือ $r^3 + 2r^2 - 5r - 6 = 0$

เนื่องจาก $P(r) = r^3 + 2r^2 - 5r - 6 = (r - 2)(r + 1)(r + 3)$

ดังนั้นเราได้ว่า $P(D) = (D - 2)(D + 1)(D + 3)$

และ $(D - 2)(D + 1)(D + 3) = 0$

จากตัวอย่าง 5.1 ที่ผ่านมานั้น $P(r)$ เป็นพหุนามระดับขั้น 2 ก็ไม่เป็นการยากที่จะหารากของสมการ $P(r) = 0$ เช่นจากการแยกตัวประกอบ ดังนี้

$$\begin{aligned} r^2 + r - 6 &= 0 \\ (r+3)(r-2) &= 0 \\ r &= -3, 2 \end{aligned}$$

หรือจากการใช้สูตร

$ar^2 + br + c = 0$ จะได้ $r = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

เช่น $r^2 + r - 6 = 0$ จะได้

$$\begin{aligned} r &= \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(1)(-6)}}{2(1)} \\ &= \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} \\ &= \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} \\ &= \frac{-1 \pm 5}{2} \\ &= -3, 2 \end{aligned}$$

แต่ถ้า $P(r)$ เป็นพหุนามระดับขั้น n การหาค่ารากของสมการนั้นเราสามารถใช้วิธีการแยกตัวประกอบพจน์ที่เป็นค่าคงตัวของ $P(r)$ แล้วตรวจสอบว่าตัวประกอบที่ได้นั้นเป็นรากของ

$$P(r) = 0$$

ดังนี้ $P(r) = r^3 + 2r^2 - 5r - 6$ แยกตัวประกอบของ 6 ได้เป็น $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$ เพราะว่า $P(-1) = (-1)^3 + 2(-1)^2 - 5(-1) - 6 = 0$ เพราะฉะนั้น $r = -1$ เป็นรากของ $P(r) = 0$ และ $(r+1)$ หาร $P(r)$ ลงตัว โดยการตั้งหารยาวดังนี้

$$
\begin{array}{r}
r^2+r-6 \\
r+1\,\overline{)\,r^3+2r^2-5r-6} \\
\underline{r^3+r^2}\qquad\qquad \\
r^2-5r\quad\; \\
\underline{r^2+r}\quad\;\; \\
-6r-6 \\
\underline{-6r-6} \\
\underline{\underline{0}}
\end{array}
$$

จะได้ว่า $P(r)=(r+1)(r^2+r-6)$

และจากการแยกตัวประกอบ $r^2+r-6=(r+3)(r-2)$

เพราะฉะนั้น $P(r)=(r+1)(r+3)(r-2)$

และรากของสมการ $P(r)=0$ คือ $r=-3,-1,2$

สำหรับวิธีการตั้งหารยาวดังกล่าวนั้น ค่อนข้างจะเสียเวลา ดังนั้นจึงใช้วิธีการหารสังเคราะห์ซึ่งเป็นวิธีที่ง่ายและไม่เสียเวลาในการหาผลหาร ดังนี้

$$
\begin{array}{r|rrrr}
-1 & 1 & 2 & -5 & -6 \\
\hline
 & & -1 & -1 & 6 \\
 & 1 & 1 & -6 & 0
\end{array}
$$

จะได้ว่า $P(r)=(r+1)(r^2+r-6)$ เช่นเดียวกับการหารยาว หรือใช้โปรแกรมสำเร็จรูปต่าง ๆ ช่วยในการคำนวณหาค่ารากของสมการ $P(r)=0$ (บัญญัติ สร้อยแสง, 2553 : 85)

5.2 การหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธุ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัวจากสมการช่วย

ในหัวข้อนี้เราศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างรากของสมการช่วย $P(r)=0$ กับลักษณะคำตอบของสมการ $P(D)y=0$ ดังนี้ เพราะว่า $D^m e^{rx}=r^m e^{rx},\ \ m=0,1,2,\ldots$ ดังนั้นถ้าเรากำหนดให้ $y=e^{rx}$ จะได้ว่า $Dy=re^{rx}, D^2y=r^2e^{rx},\ldots,D^ny=r^ne^{rx}$

เมื่อแทนค่าลงในสมการ $P(D)y=0$

จะได้

$$
\begin{aligned}
0 &= P(D)e^{rx} \\
&= (a_0D^n + a_1D^{n-1} + \cdots + a_n)y \\
&= a_0D^ny + a_1D^{n-1}y + \cdots + a_ny \\
&= a_0D^ne^{rx} + a_1D^{n-1}e^{rx} + \cdots + a_ne^{rx} \\
&= (a_0D^n + a_1D^{n-1} + \cdots + a_n)e^{rx} \\
&= P(r)e^{rx}
\end{aligned}
$$

นั่นคือ $P(r)e^{rx} = 0$ เพราะว่า $e^{rx} \neq 0$ ทุกค่า x ดังนั้นจะได้ $P(r) = 0$ ในทางกลับกัน ถ้า $P(r) = 0$ จะได้ $P(D)e^{rx} = P(r)e^{rx} = 0$ ดังนั้น $y = e^{rx}$ เป็นผลเฉลยของสมการ $P(D)y = 0$ (ดำรง ทิพย์โยธา, 2541 : 98-99)

จากที่กล่าวมาข้างต้นจึงสรุปได้ว่า $y = e^{rx}$ เป็นผลเฉลยของ $P(D)y = 0$ ก็ต่อเมื่อ $P(r) = 0$ ดังนั้นการหาผลเฉลย y_c ของสมการควรพิจารณารากของสมการช่วย $P(r) = 0$ เพื่อหาฟังก์ชันทั้งหมดที่อาจเป็นผลเฉลยของสมการ $P(D)y = 0$

ตัวอย่าง 5.3 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

(2) $$y'' + y' - 6y = 0$$

วิธีทำ จากสมการ (2) จะได้ $P(D) = D^2 + D - 6$

และ $P(r) = r^2 + r - 6 = (r-2)(r+3)$

รากของสมการช่วย $P(r) = 0$

คือ $r = 2, -3$

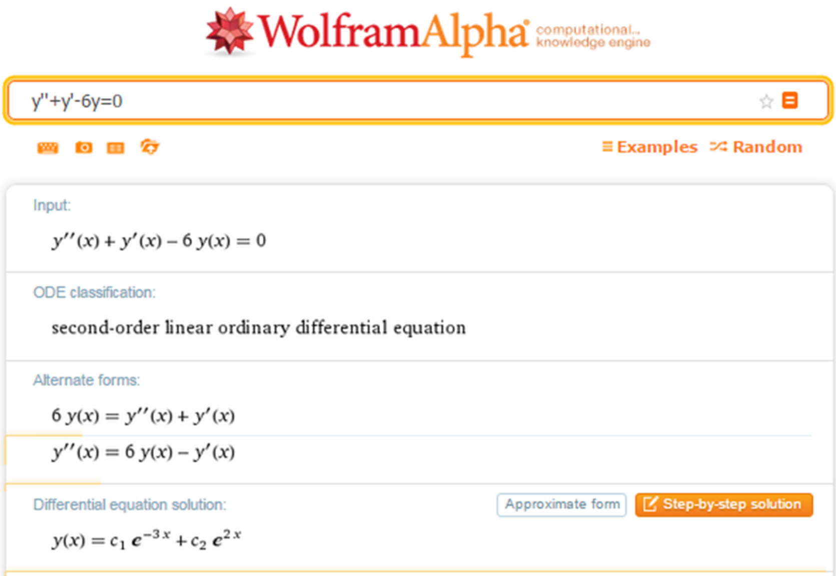
ดังนั้น $P(D)e^{2x} = 0$ และ $P(D)e^{-3x} = 0$

จะได้ $y = e^{2x}$ และ $y = e^{-3x}$ ต่างก็เป็นผลเฉลยของสมการ $P(D)y = 0$

และ e^{2x} และ e^{-3x} เป็นอิสระเชิงเส้น

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (2) คือ $y = c_1e^{2x} + c_2e^{-3x}$ เมื่อ c_1, c_2 เป็นตัวคงค่า

ใช้ Wolfram Alpha เพื่อหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ (2) ดังภาพที่ 5.1



ภาพที่ 5.1 ผลเฉลยทั่วไปของสมการ $y''+y'-6y=0$ โดยใช้ Wolfram Alpha

ตัวอย่าง 5.4 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

(3) $$y'''+2y''-5y'-6y=0$$

วิธีทำ จากสมการ (3) จะได้ $P(D)=D^3+2D^2-5D-6$

และ $P(r)=r^3+2r^2-5r-6=(r-2)(r+1)(r+3)$

รากของสมการช่วย $P(r)=0$

คือ $r=2,-1,-3$

ดังนั้น $P(D)e^{2x}=0,\ P(D)e^{-1x}=0$

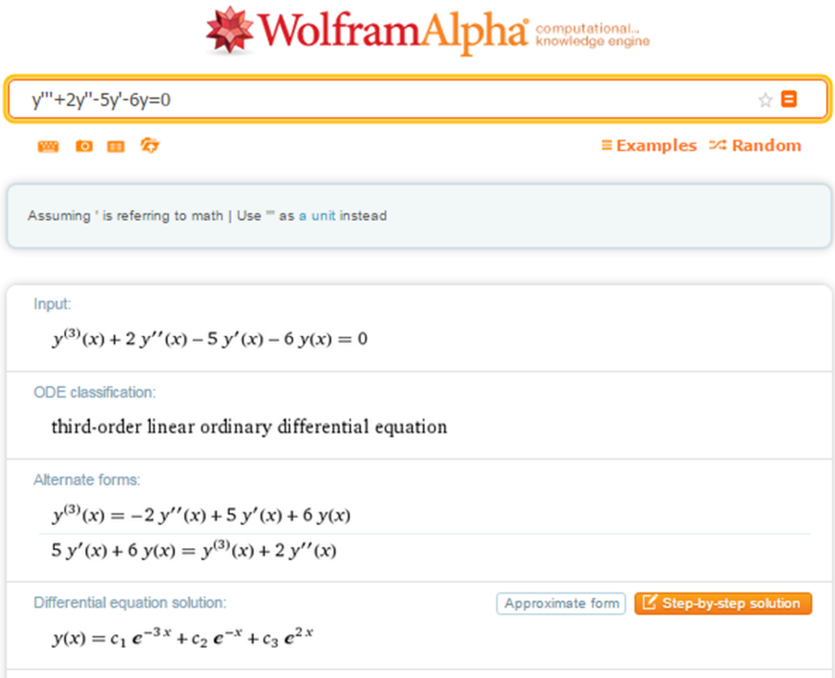
และ $P(D)e^{-3x}=0$

จะได้ $y=e^{2x}$, $y=e^{-x}$ และ $y=e^{-3x}$ ต่างก็เป็นผลเฉลยของสมการ $P(D)y=0$

และ e^{2x}, e^{-x} และ e^{-3x} เป็นอิสระเชิงเส้น

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (3) คือ $y=c_1e^{2x}+c_2e^{-x}+c_3e^{-3x}$ เมื่อ c_1,c_2,c_3 เป็นตัวคงค่า

ใช้ Wolfram Alpha เพื่อหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ (3) ดังภาพที่ 5.2



ภาพที่ 5.2 ผลเฉลยทั่วไปของสมการ $y'''+2y''-5y'-6y=0$ โดยใช้ Wolfram Alpha

ตัวอย่าง 5.5 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

(4) $$y''+4y'+4y=0$$

วิธีทำ จากสมการ (4) จะได้ $P(D)=D^2+4D+4$

และ $P(r)=r^2+4r+4=(r+2)^2$

รากของสมการช่วย $P(r)=0$

คือ $r=-2,-2$

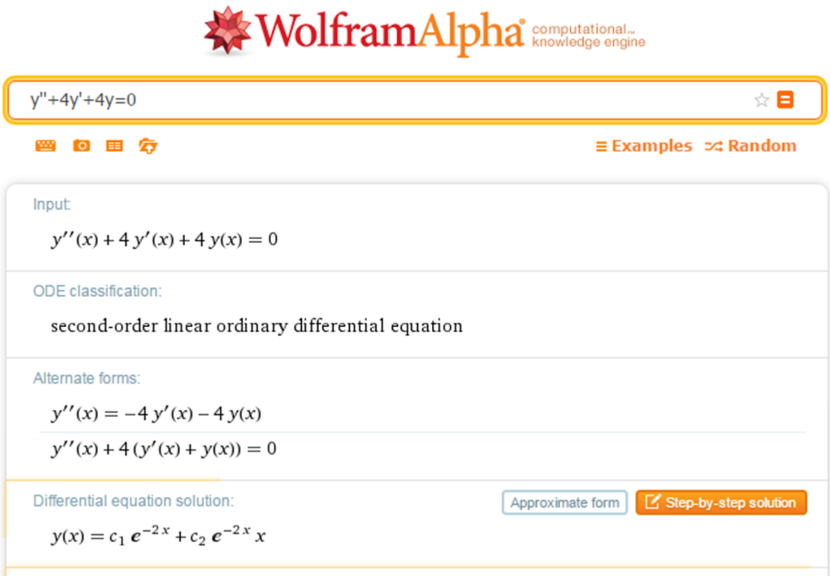
ดังนั้น $P(D)e^{-2x}=0$ และ $P(D)xe^{-2x}=0$

จะได้ $y=e^{-2x}$ และ $y=xe^{-2x}$ ต่างก็เป็นผลเฉลยของสมการ $P(D)y=0$

และ e^{-2x} และ xe^{-2x} เป็นอิสระเชิงเส้น

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (4) คือ $y=c_1e^{-2x}+c_2xe^{-2x}$ เมื่อ c_1,c_2 เป็นตัวคงค่า

ใช้ Wolfram Alpha เพื่อหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ (4) ดังภาพที่ 5.3



ภาพที่ 5.3 ผลเฉลยทั่วไปของสมการ $y'' + 4y' + 4y = 0$ โดยใช้ Wolfram Alpha

ตัวอย่าง 5.6 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

(5) $$y'' - 2y' + 10y = 0$$

วิธีทำ จากสมการ (5) จะได้ $P(D) = D^2 - 2D + 10$

และ $P(r) = r^2 - 2r + 10$

จะได้ $r = \dfrac{2 \pm \sqrt{4-40}}{2}$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{-36}}{2}$$

$$= \frac{2 \pm 6\sqrt{-1}}{2}$$

$$= 1 \pm 3i$$

รากของสมการช่วย $P(r) = 0$ คือ $r = 1 \pm 3i$

ดังนั้น $P(D)e^{(1+3i)x} = 0,\ P(D)xe^{(1-3i)x} = 0,$

จะได้ $y = e^{(1+3i)x}$ และ $y = e^{(1-3i)x}$ ต่างก็เป็นผลเฉลยของสมการ $P(D)y = 0$

และ $e^{(1+3i)x}$ และ $e^{(1-3i)x}$ เป็นอิสระเชิงเส้น

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (5) คือ $y = c_1e^{(1+3i)x} + c_2e^{(1-3i)x}$ เมื่อ c_1, c_2 เป็นตัวคงค่า

จากตัวอย่างที่ผ่านมานั้นจะเห็นว่ารากของสมการช่วย $P(r)=0$ ซึ่งเป็นพหุนามระดับขั้น n รากของสมการ $P(r)=0$ จะมีทั้งหมด n ตัวคือ $r_1, r_2, ..., r_n$ ซึ่งรากของสมการอาจมีลักษณะดังนี้ต่อไปนี้ (ดำรงค์ ทิพย์โยธา, 2541 : 99)

1. รากของสมการช่วยเป็นจำนวนจริงและต่างกันทุกตัว
2. รากของสมการช่วยเป็นจำนวนจริงและมีภาวะรากซ้ำกันบางค่า
3. รากของสมการช่วยเป็นจำนวนเชิงซ้อนต่างกันทุกตัว
4. รากของสมการช่วยเป็นจำนวนเชิงซ้อนและมีภาวะรากซ้ำกันบางค่า

ตัวอย่างเช่น

$$(D^3 + 2D^2 - 5D - 6)y = 0$$
$$P(r) = r^3 + 2r^2 - 5r - 6 = (r-2)(r+1)(r+3)$$

รากของสมการช่วย $P(r)=0$ มีค่าเป็นจำนวนจริงที่ต่างกันคือ $r=-1,-3,2$

$$(D^3 - 6D^2 + 12D - 8)y = 0$$
$$P(r) = r^3 - 6r^2 + 12r - 8 = (r-2)^3$$

รากของสมการช่วย $P(r)=0$ มีค่าเป็นจำนวนจริง $r=2,2,2$ ซึ่งมีค่าเหมือนกันทั้งสามราก

$$(D^4 + 2D^2 + 1)y = 0$$
$$P(r) = r^4 + 2r^2 + 1 = (r^2+2)^2$$

รากของสมการช่วย $P(r)=0$ มีค่าเป็นจำนวนเชิงซ้อน $r=i,i$ เหมือนกัน 2 ราก
และเป็นจำนวนเชิงซ้อน $r=-i,-i$ เหมือนกัน 2 ราก

$$(D^4 - 5D^2 + 12D + 28)y = 0$$
$$P(r) = r^4 - 5r^2 + 12r + 28 = (r+2)^2(r^2 - 4r + 7)$$

รากของสมการช่วย $P(r)=0$ มีค่าเป็นจำนวนเชิงซ้อน $r=-2,-2$ เหมือนกัน 2 ราก
และเป็นจำนวนเชิงซ้อน $r = 2 \pm \sqrt{3}i$

5.3 รากของสมการช่วยเป็นจำนวนจริงและต่างกันทุกตัว

กำหนดให้ $r_1, r_2, ..., r_n$ เป็นรากของจำนวนจริงที่แตกต่างกันทั้งหมดของ $P(r)=0$ จะได้ว่า $y=e^{r_1x}, y=e^{r_2x}, y=e^{r_3x}, ..., y=e^{r_nx}$ เป็นผลเฉลยของสมการ

$$P(D)y = 0$$

เพราะว่า $y = e^{r_1 x}, y = e^{r_2 x}, y = e^{r_3 x}, \ldots, y = e^{r_n x}$ เป็นอิสระเชิงเส้นเพราะฉะนั้นผลเฉลยทั่วไปของสมการ $P(D)y = 0$ คือ $y = k_1 e^{r_1 x} + k_2 e^{r_2 x} + \cdots + k_n e^{r_n x}$ เมื่อ $k_1, k_2, \ldots, k_n$ เป็นตัวคงค่า (สุรัตนา สังข์หนุน, 2558 : 134)

ตัวอย่าง 5.7 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

(6) $$(D^3 - D^2 - 4D + 4)y = 0$$

วิธีทำ จากสมการ (5) จะได้ $P(D) = D^3 - D^2 - 4D + 4$

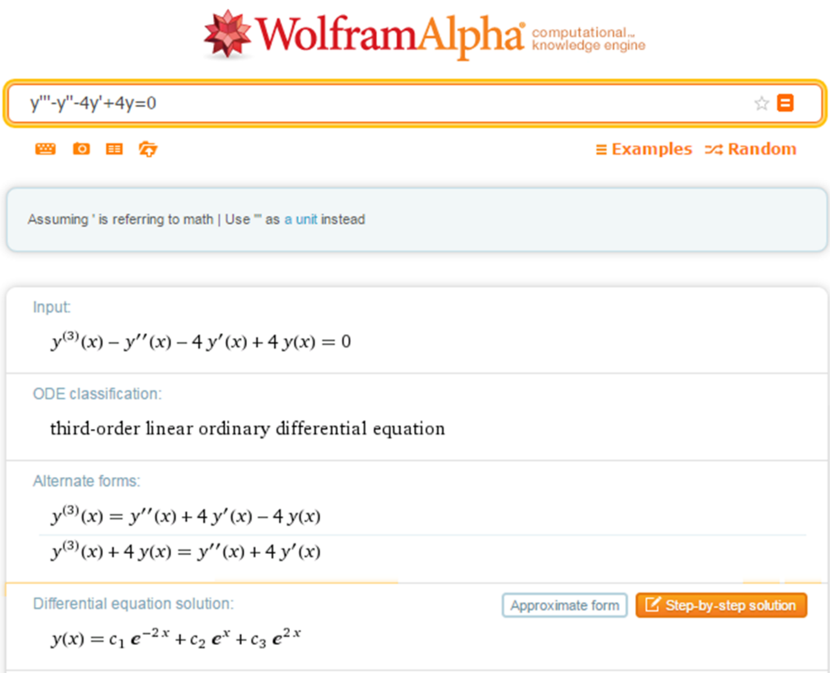
และพหุนามช่วย $P(r) = r^3 - r^2 - 4r + 4 = (r+2)(r-1)(r-2)$

รากของสมการช่วย $P(r) = 0$

คือ $r = -2, 1, 2$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (6) คือ $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{x} + c_3 e^{2x}$ เมื่อ c_1, c_2, c_3 เป็นตัวคงค่า

ใช้ Wolfram Alpha เพื่อหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ (6) ดังภาพที่ 5.4



ภาพที่ 5.4 ผลเฉลยทั่วไปของสมการ $(D^3 - D^2 - 4D + 4)y = 0$ โดยใช้ Wolfram Alpha

ตัวอย่าง 5.8 จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการ

(7) $$y'' + 3y' - 4y = 0$$

เมื่อกำหนด $y(0) = 1, y'(0) = -1$

วิธีทำ จากสมการ (7) จะได้ $P(D) = D^2 + 3D - 4$

และพหุนามช่วย $P(r) = r^2 + 3r - 4 = (r+4)(r-1)$

รากของสมการช่วย $P(r) = 0$ คือ $r = -4, 1$

ผลเฉลยทั่วไป คือ $y = c_1 e^{-4x} + c_2 e^x$ เมื่อ c_1, c_2 เป็นตัวคงค่า

จากเงื่อนไขเริ่มต้น $y(0) = 1$ ได้ $c_1 + c_2 = 1$

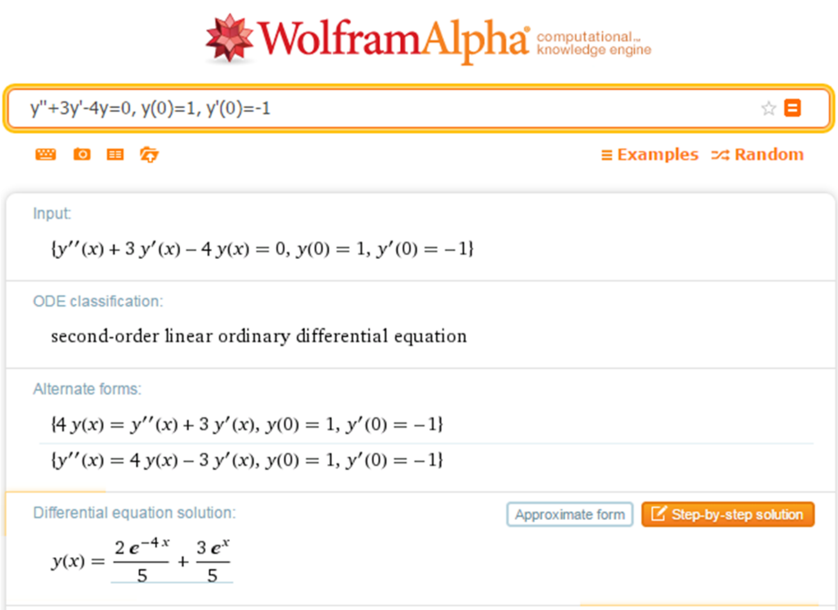
และจาก $y'(0) = -1$ ได้ $-4c_1 + c_2 = -1$

จากทั้งสองสมการได้ $c_1 = \dfrac{2}{5}$ และ $c_2 = \dfrac{3}{5}$

ดังนั้น ผลเฉลยเฉพาะของสมการ (7) ที่สอดคล้องเงื่อนไขเริ่มต้นที่กำหนดให้

คือ $y = \dfrac{2}{5}e^{-4x} + \dfrac{3}{5}e^x$

ใช้ Wolfram Alpha เพื่อหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ (7) ดังภาพที่ 5.5



ภาพที่ 5.5 ผลเฉลยเฉพาะของสมการ $y'' + 3y' - 4y = 0$ โดยใช้ Wolfram Alpha

ตัวอย่าง 5.9 จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการ

(8) $$y''' - 11y'' + 31y' - 21y = 0$$

เมื่อกำหนด $y(0) = 4, y'(0) = -2$ และ $y''(0) = 3$

วิธีทำ จากสมการ (8) จะได้ $P(D) = D^3 - 11D^2 + 31D - 21$

และพหุนามช่วย $P(r) = r^3 - 11r^2 + 31r - 21 = (r-1)(r-3)(r-7)$

รากของสมการช่วย $P(r) = 0$

คือ $r = 1, 3, 7$

ผลเฉลยทั่วไป คือ $y = c_1 e^x + c_2 e^{3x} + c_3 e^{7x}$ เมื่อ c_1, c_2, c_3 เป็นตัวคงค่า

โดยการหาอนุพันธ์จะได้ $y' = c_1 e^x + 3c_2 e^{3x} + 7c_3 e^{7x}$

และ $$y'' = c_1 e^x + 9c_2 e^{3x} + 49c_3 e^{7x}$$

จากเงื่อนไขเริ่มต้น $y(0) = 1$ ได้ $c_1 + c_2 = 1$

และจาก $y(0) = 4, y'(0) = -2$ และ $y''(0) = 3$

ได้ $$c_1 + c_2 + c_3 = 4$$

$$c_1 + 3c_2 + 7c_3 = -2$$

$$c_1 + 9c_2 + 49c_3 = 3$$

ใช้หลักเกณฑ์ของคราเมอร์จะได้

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 7 \\ 3 & 9 & 49 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 7 \\ 1 & 9 & 49 \end{vmatrix}} = \frac{428}{48}$$

,

$$c_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 7 \\ 1 & 3 & 49 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 7 \\ 1 & 9 & 49 \end{vmatrix}} = -\frac{282}{48}$$

และ

$$c_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 9 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 7 \\ 1 & 9 & 49 \end{vmatrix}} = \frac{46}{48}$$

ดังนั้น ผลเฉลยเฉพาะของสมการ (8) คือ $y = \dfrac{1}{48}\left(428e^{x} + -282e^{3x} + 46e^{7x}\right)$

5.4 รากของสมการช่วยเป็นจำนวนจริงและมีภาวะรากซ้ำกันบางค่า

จากสมการ

(9) $$P(D)y = 0$$

เมื่อสมการช่วยมีรากเป็นจำนวนจริงที่ซ้ำกัน สมมติว่าให้มีค่า เป็น a ซ้ำกัน n ราก

$r = a, a, \ldots, a$ (n ครั้ง)

ดังนั้น $P(r) = (r-a)^n$

นั้นคือ $P(D) = (D-a)^n$

ทำให้สมการ (9) เขียนได้เป็น

(10) $$(D-a)^n y = 0$$

จากสมบัติของตัวดำเนินการในทฤษฏีบท 4.6 กล่าวไว้ว่าถ้าให้ m เป็นค่าคงตัวและ n เป็นจำนวนเต็มบวกจะได้ว่า $(D-m)^n(e^{mx}y) = e^{mx}D^n y$

หรือ $(D-a)^n(e^{ax}y) = e^{ax}D^n y$ เมื่อ a เป็นค่าคงตัวและ n เป็นจำนวนเต็มบวก

และถ้าให้ $y = x^k$ จะพบว่า

$$(D-a)^n(e^{ax}x^k) = e^{ax}D^n x^k$$

ซึ่งทางขวาของสมการจะเป็นศูนย์เมื่อ $k = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)$

นั่นคือ $(D-a)^n(e^{ax}x^k) = 0$ เมื่อ $k = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)$

แสดงว่าผลเฉลยของสมการ (10) คือ $e^{ax}D^n x^k$ เมื่อ $k = 0,1,2,\ldots,(n-1)$
หรือ $y_1 = e^{ax}, y_2 = xe^{ax}, y_3 = x^2 e^{ax},\ldots, y_n = x^{n-1}e^{nx}$
จะได้ว่า ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (10) คือ

$$y = c_1 e^{ax} + c_2 x e^{ax} + c_3 x^2 e^{ax} + \cdots + c_n x^{n-1} e^{nx}$$

หรือ

$$y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \cdots + c_n x^{n-1}) e^{nx}$$

สำหรับกรณีที่รากของสมการช่วยมีค่าซ้ำกันบ้างไม่ซ้ำกันบ้าง นั่นคือ $P(D)$ จะอยู่ในรูป

$$P(D) = P_1(D)(D-a)^k \qquad \text{เมื่อ } 0 < k < n$$

ดังนั้นสมการ (9) เขียนได้เป็น

$$P_1(D)(D-a)^k y = 0$$

สมการช่วยคือ $P_1(r)(r-a)^k y = 0$
จะได้รากของสมการช่วยคือ $r_1, r_2, \ldots, r_m$ (จาก $P_1(r) = 0$ และ $m + k = n$)
และ $r = a, a, \ldots, a$ (k ครั้ง)

ผลเฉลยที่สมนัยกับรากสมการช่วยคือ $y_1 = e^{r_1 x}, y_2 = e^{r_2 x}, \ldots, y_m = e^{r_m x}$
และ

$$y_{m+1} = e^{ax}, y_{m+2} = xe^{ax}, \ldots, y_{m+k} = y_n = x^{k-1} e^{ax}$$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปของสมการคือ

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + \cdots + c_m e^{r_m x} + e^{ax}(c_{m+1} + c_{m+2} x, \ldots, c_{m+k} x^{k-1})$$

(วีระศักดิ์ วาจาบัณฑิตย์, 2541 : 144-145)

ตัวอย่าง 5.10 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

(11) $$(D^3 - 6D^2 + 12D - 8)y = 0$$

วิธีทำ จากสมการ (11) จะได้ $P(D) = D^3 - 6D^2 + 12D - 8$

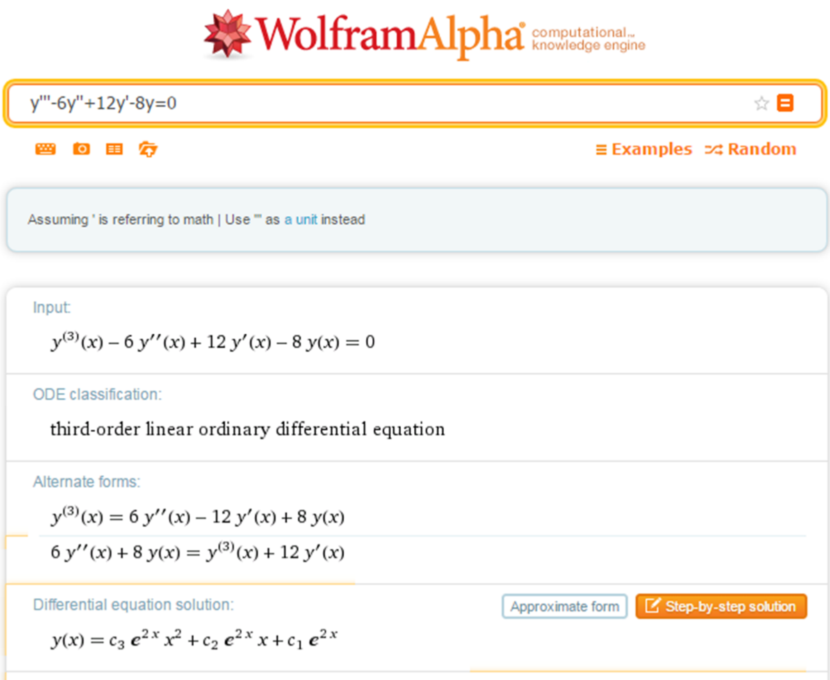
และพหุนามช่วย $P(r)=r^3-6r^2+12r-8=(r-2)^3$

รากของสมการช่วย $P(r)=0$

คือ $r=2,2,2$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (11) คือ $y=(c_1+c_2x+c_3x^2)e^{2x}$ เมื่อ c_1,c_2,c_3 เป็นตัวคงค่า

ใช้ Wolfram Alpha เพื่อหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ (11) ดังภาพที่ 5.6



ภาพที่ 5.6 ผลเฉลยทั่วไปของสมการ $(D^3-6D^2+12D-8)y=0$ โดยใช้ Wolfram Alpha

ตัวอย่าง 5.11 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

(12) $$(D^3+5D^2+8D+4)y=0$$

วิธีทำ จากสมการ (12) จะได้ $P(D)=D^3+5D^2+8D+4$

และพหุนามช่วย $P(r)=r^3+5r^2+8r+4=(r+1)(r+2)^2$

รากของสมการช่วย $P(r)=0$

คือ $r=-1,-2,-2$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (12) คือ $y=c_1e^{-x}+(c_2+c_3x)e^{-2x}$ เมื่อ c_1,c_2,c_3 เป็นตัวคงค่า

ตัวอย่าง 5.12 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

(13) $$(D^4 + 2D^3 + D^2)y = 0$$

วิธีทำ จะได้ $P(D) = D^4 + 2D^3 + D^2$

และพหุนามช่วย $P(r) = r^4 + 2r^3 + r^2 = r^2(r-1)^2$

รากของสมการช่วย $P(r) = 0$

คือ $r = 0, 0, 1, 1$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (13) คือ $y = c_1 + c_2 x + (c_3 + c_4 x +)e^x$
เมื่อ c_1, c_2, c_3, c_4 เป็นตัวคงค่า

5.5 รากของสมการช่วยเป็นจำนวนเชิงซ้อนต่างกันทุกตัว

กำหนดให้ $r = a + bi$ เป็นรากของสมการช่วย $P(r) = 0$ เนื่องจาก $\overline{0} = 0 = \overline{P(r)}$

$$\begin{aligned} \text{และ } \overline{P(r)} &= \overline{a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_{n-1} r + a_n} \\ &= \overline{a_0 r^n} + \overline{a_1 r^{n-1}} + \cdots + \overline{a_{n-1} r} + \overline{a_n} \\ &= a_0 \overline{r^n} + a_1 \overline{r^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \overline{r} + a_n \\ &= P(\overline{r}) \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $r = a - bi$ เป็นรากของสมการช่วย $P(r) = 0$
ผลเฉลยของสมการ $P(r) = 0$ ที่สมนัยกับ $r = a + bi$ และ $r = a - bi$
คือ $y = k_1 e^{(a+bi)x} + k_2 e^{(a-bi)x}$ เมื่อ k_1, k_2 เป็นตัวคงค่า เนื่องจาก $e^{(a+bi)x}$ และ $e^{(a-bi)x}$
สามารถจัดรูปแบบเป็นฟังก์ชันตรีโกณมิติได้โดยใช้เหตุผลดังนี้
จากอนุกรมอนันต์

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

$$\sin x = x + -\frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \cdots$$

และ $$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots$$

จะได้ว่า $$e^{ix} = 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \frac{(ix)^6}{6!} + \frac{(ix)^7}{7!} + \frac{(ix)^8}{8!} \cdots$$

$$= 1 + ix - \frac{x^2}{2!} + -i\frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} - i\frac{x^7}{7!} + \frac{x^8}{8!}\cdots$$
$$= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots\right) + i\left(x + -\frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \cdots\right)$$
$$= \cos x + i \sin x$$

เพราะฉะนั้น $e^{ibx} = \cos bx + i\sin bx$ และ $e^{-ibx} = \cos bx - i\sin bx$

จาก $y = k_1 e^{(a+bi)x} + k_2 e^{(a-bi)x}$

จะได้ $y = e^{ax}(k_1 e^{ibx} + k_2 e^{-ibx})$

$$= e^{ax}\left[k_1(\cos bx + i\sin bx) + k_2(\cos bx - i\sin bx)\right]$$
$$= e^{ax}\left[k_1\cos bx + k_1 i\sin bx + k_2\cos bx - k_2 i\sin bx\right]$$
$$= e^{ax}\left[(k_1 + k_2)\cos bx + (k_1 - k_2)i\sin bx\right]$$

ให้ $a_1 = k_1 + k_2$ และ $a_2 = i(k_1 - k_2)$ เป็นตัวคงค่า

จะได้ $y = e^{ax}(a_1\cos bx - a_2\sin bx)$ เป็นผลเฉลยของ $P(D)y = 0$ ที่สมนัยกับราก $r = a + bi$ และ $r = a - bi$ (ดำรง ทิพย์โยธา, 2541 : 112)

ตัวอย่าง 5.13 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

(14) $$y'' - 4y + 13y = 0$$

วิธีทำ จะได้ $P(D) = D^2 - 4D + 13$

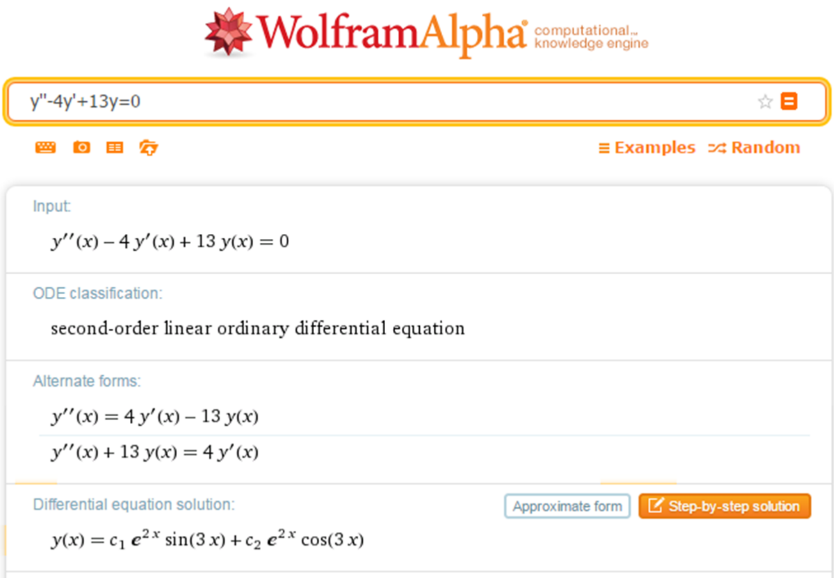
และพหุนามช่วย $P(r) = r^2 - 4r + 13$

รากของสมการช่วย $P(r) = 0$

คือ
$$r = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4(1)(13)}}{2}$$
$$= \frac{-4 \pm \sqrt{-36}}{2}$$
$$= \frac{-4 \pm 6i}{2}$$
$$= -2 \pm 3i$$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (14) คือ $y = e^{-2x}(a_1\cos 3x + a_2\sin 3x)$ เมื่อ a_1, a_2 เป็นตัวคงค่า

ใช้ Wolfram Alpha เพื่อหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ (14) ดังภาพที่ 5.7



ภาพที่ 5.7 ผลเฉลยทั่วไปของสมการ $y'' - 4y + 13y = 0$ โดยใช้ Wolfram Alpha

ตัวอย่าง 5.14 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

(15) $$(D^3 - 3D^2 + 9D + 13)y = 0$$

วิธีทำ จะได้ $P(D) = D^3 - 3D^2 + 9D + 13$

และพหุนามช่วย $P(r) = r^3 - 3r^2 + 9r + 13 = (r+1)(r^2 - 4r + 13)$

รากของสมการช่วย $P(r) = 0$

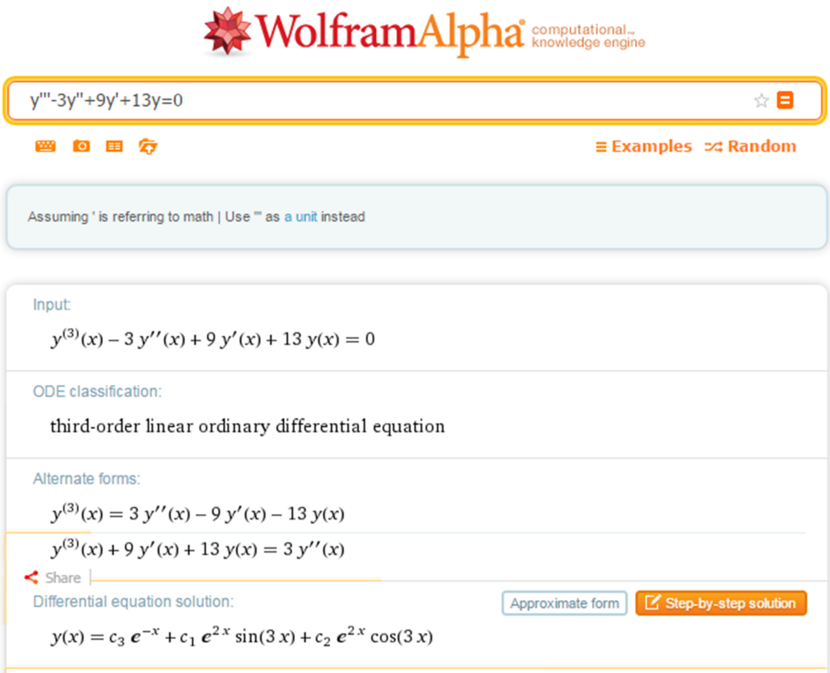
คือ $r = -1$

หรือ $$r = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4(1)(13)}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{4 \pm 6i}{2} = 2 \pm 3i$$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (15) คือ $y = e^{2x}(a_1 \cos 3x + a_2 \sin 3x) + a_3 e^{-x}$

เมื่อ a_1, a_2, a_3 เป็นตัวคงค่า

ใช้ Wolfram Alpha เพื่อหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ (15) ดังภาพที่ 5.8



ภาพที่ 5.8 ผลเฉลยทั่วไปของสมการ $(D^3 - 3D^2 + 9D + 13)y = 0$ โดยใช้ Wolfram Alpha

ตัวอย่าง 5.15 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

(16) $$(D^4 + 13D^3 + 36)y = 0$$

วิธีทำ จะได้ $P(D) = D^4 + 13D^3 + 36$

และพหุนามช่วย $P(r) = r^4 + 13r^3 + 36 = (r^2 + 4)(r^2 + 9)$

รากของสมการช่วย $P(r) = 0$

คือ $r = \pm 2i, \pm 3i$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (16) คือ $y = a_1 \cos 2x + a_2 \sin 2x + a_3 \cos 3x + a_4 \sin 3x$

เมื่อ a_1, a_2, a_3, a_4 เป็นตัวคงค่า

5.6 รากของสมการช่วยเป็นจำนวนเชิงซ้อนและมีภาวะรากซ้ำกันบางค่า

กำหนดให้ $r = a + bi$ เป็นรากของสมการช่วย $P(r) = 0$ ที่ซ้ำกัน k รากจะได้ว่า $r = a - bi$ เป็นรากของสมการช่วย $P(r) = 0$ ที่ซ้ำกัน k รากในทำนองเดียวกันกับรากที่เป็นจำนวนจริงซ้ำกัน จะได้ว่าผลเฉลยของ $P(D)y = 0$ ที่สมนัยกับ $r = a + bi$ และ $a - bi$ คือ

$$
\begin{aligned}
y &= (c_1 + c_2x + \cdots + c_kx^{k-1})e^{(a+bi)x} + (d_1 + d_2x + \cdots + d_kx^{k-1})e^{(a-bi)x} \\
&= e^{ax}(c_1 + c_2x + \cdots + c_kx^{k-1})e^{ibx} + e^{ax}(d_1 + d_2x + \cdots + d_kx^{k-1})e^{-ibx} \\
&= e^{ax}\left[(c_1 + c_2x + \cdots + c_kx^{k-1})(\cos bx + i\sin bx)\right] \\
&\quad + e^{ax}\left[(d_1 + d_2x + \cdots + d_kx^{k-1})(\cos bx - i\sin bx)\right] \\
&= e^{ax}\left[(c_1 + c_2x + \cdots + c_kx^{k-1})\cos bx + (c_1 + c_2x + \cdots + c_kx^{k-1})i\sin bx +\right] \\
&\quad - e^{ax}\left[(d_1 + d_2x + \cdots + d_kx^{k-1})\cos bx - (d_1 + d_2x + \cdots + d_kx^{k-1})i\sin bx\right] \\
&= e^{ax}\left[(c_1 + c_2x + \cdots + c_kx^{k-1})\cos bx + (d_1 + d_2x + \cdots + d_kx^{k-1})\cos bx\right] \\
&\quad + e^{ax}\left[(c_1 + c_2x + \cdots + c_kx^{k-1})i\sin bx - (d_1 + d_2x + \cdots + d_kx^{k-1})\right]i\sin bx \\
&= e^{ax}\left[\left((c_1 + d_1) + (c_2 + d_2)x + \cdots + (c_k + d_k)x^{k-1}\right)\cos bx\right] \\
&\quad + e^{ax}\left[\left((c_1 - d_1) + (c_2 - d_2)x + \cdots + (c_k - d_k)x^{k-1}\right)i\sin bx\right] \\
&= e^{ax}\left[\left((c_1 + d_1) + (c_2 + d_2)x + \cdots + (c_k + d_k)x^{k-1}\right)\cos bx\right] \\
&\quad + e^{ax}\left((c_1 - d_1)i + (c_2 - d_2)ix + \cdots + (c_k - d_k)ix^{k-1}\right)\sin bx \\
&= e^{ax}\left[(s_1 + s_2x + \cdots + s_kx^{k-1})\cos bx + (t_1 + t_2x + \cdots + t_kx^{k-1})\sin bx\right]
\end{aligned}
$$

เมื่อ $c_j, d_j, j = 1,2,\ldots,k$ เป็นตัวคงค่า $s_j = c_j + d_j$ และ $t_j = (c_j - d_j)i$ สำหรับ $j = 1,2,\ldots,k$ ในกรณีรากของสมการช่วย $P(r) = 0$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่มากกว่าหนึ่งตัวและผลเฉลยที่สมนัยกับรากที่ต่างกันและมีภาวะรากซ้ำนั้นสามารถหาได้ในทำนองเดียวกับรากที่เป็นจำนวนจริงที่มีภาวะรากซ้ำกันมากกว่าหนึ่งตัว (นงนุช สุขวารี, 2542 : 208)

ตัวอย่าง 5.16 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

(17) $$(y'' + 6y' + 13y)^2 = 0$$

วิธีทำ จากสมการ (17) จะได้ $P(D) = (D^2 + 6D + 13)^2$

และพหุนามช่วย $P(r) = (r^2 + 6r + 13)^2$

รากของสมการช่วย $P(r) = 0$ คือ $r = 2 \pm 3i, 2 \pm 3i$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (17) คือ $y = e^{3x}\left[(s_1 + s_2 x)\cos 2x + (s_3 + s_4 x)\sin 2x\right]$

เมื่อ s_1, s_2, s_3, s_4 เป็นตัวคงค่า

ตัวอย่าง 5.17 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

(18) $$(D^6 - 6D^5 + 18D^4 - 32D^3 + 36D^2 - 24D + 8)y = 0$$

วิธีทำ จากสมการ (18) จะได้ $P(D) = D^6 - 6D^5 + 18D^4 - 32D^3 + 36D^2 - 24D + 8$

และพหุนามช่วย
$$\begin{aligned} P(r) &= r^6 - 6r^5 + 18r^4 - 32r^3 + 36r^2 - 24r + 8 \\ &= (r - 2r + 2)^3 \end{aligned}$$

พิจารณาหารากของสมการ $r - 2r + 2 = 0$

$$\begin{aligned} r &= \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(1)(2)}}{2} \\ &= \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} \\ &= \frac{2 \pm 2i}{2} \\ &= 1 \pm i \end{aligned}$$

รากของสมการช่วย $P(r) = 0$ คือ $r = 1 \pm i, 1 \pm i, 1 \pm i$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (17) คือ

$y = e^{3x}\left[(s_1 + s_2 x + s_3 x^2)\cos 2x + (s_4 + s_5 x + s_6 x^2)\sin 2x\right]$

เมื่อ $s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6$ เป็นตัวคงค่า

ในกรณีที่รากของสมการช่วย $P(r) = 0$ มีหลายลักษณะปนกันเราก็สามารถหาผลเฉลยของสมการ $P(D)y = 0$ ได้โดยที่ผลเฉลยของสมการคือการรวมเชิงเส้นของฟังก์ชันที่ได้ในแต่ละกรณี

ตัวอย่าง 5.18 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

(19) $$(D^6 - 6D^5 + 18D^4 - 32D^3 + 36D^2 - 24D + 28)y = 0$$

วิธีทำ จากสมการ (19) จะได้ $P(D) = D^6 - 6D^5 + 18D^4 - 32D^3 + 36D^2 - 24D + 28$

และพหุนามช่วย $P(r) = r^6 - 6r^5 + 18r^4 - 32r^3 + 36r^2 - 24r + 28$

$= (r+4)(r-2)^2(r^2+9)$

รากของสมการช่วย $P(r) = 0$

คือ $r = 4, 2, 2, \pm 3i, \pm 3i$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (19) คือ

$y = (c_1 + c_2 x)e^{2x} + c_3 e^{4x} + \left[(s_1 + s_2 x)\cos 3x + (s_3 + s_4 x)\sin 3x\right]$

เมื่อ $c_1, c_2, c_3, s_1, s_2, s_3, s_4$ เป็นตัวคงค่า

ตัวอย่าง 5.19 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

(20) $$(D^6 - 16D^5 + 142D^4 - 592D^3 + 1097D^2 + 1624D - 6724)y = 0$$

วิธีทำ จะได้ $P(D) = D^6 - 16D^5 + 142D^4 - 592D^3 + 1097D^2 + 1624D - 6724$

และพหุนามช่วย $P(r) = r^6 - 16r^5 + 142r^4 - 592r^3 + 1097r^2 + 1624r - 6724$

$= (r-2)(r+2)(r^2 - 8r + 41)^2$

พิจารณาหารากของสมการ $r^2 - 8r + 41 = 0$

$$\begin{aligned} r &= \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4(1)(41)}}{2} \\ &= \frac{8 \pm \sqrt{-100}}{2} \\ &= \frac{4 \pm 10i}{2} \\ &= 4 \pm 5i \end{aligned}$$

รากของสมการช่วย $P(r) = 0$

คือ $r = -2, 2, 4 \pm 5i, 4 \pm 5i$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (20) คือ

$y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{2x} + e^{4x}\left[(s_1 + s_2 x)\cos 5x + (s_3 + s_4 x)\sin 5x\right]$

เมื่อ $c_1, c_2, s_1, s_2, s_3, s_4$ เป็นตัวคงค่า

5.7 สรุปท้ายบทที่ 5

การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นเอกพันธุ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว

$$a_0 \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}\frac{dy}{dx} + a_n y = 0$$

หรือ

$$P(D)y = 0$$

เมื่อ $P(D) = a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_{n-1}D + a_n$ เป็นตัวดำเนินการอันดับที่ n และ $a_0, a_1, ..., a_n$ เป็นค่าคงตัว การหาผลแฉลยนั้นจะสมมติให้ $y = e^{rx}$ เป็นผลเฉลยของสมการ จะได้ $P(D)e^{rx} = P(r)e^{rx}$ เนื่องจาก $P(D)y = 0$ ดังนั้น $P(r)e^{rx} = 0$ และ $e^{rx} \neq 0$ ฉะนั้น $P(r) = 0$ และเรียกสมการ $P(r) = 0$ ว่า **สมการช่วย** ของสมการ $P(D)y = 0$ แล้วดำเนินการหาค่ารากของสมการช่วยโดยรากของสมการช่วยนั้นจะมีลักษณะดังนี้

1. รากของสมการช่วยเป็นจำนวนจริงและต่างกันทุกตัว
2. รากของสมการช่วยเป็นจำนวนจริงและมีภาวะรากซ้ำกันบางค่า
3. รากของสมการช่วยเป็นจำนวนเชิงซ้อนต่างกันทุกตัว
4. รากของสมการช่วยเป็นจำนวนเชิงซ้อนและมีภาวะรากซ้ำกันบางค่า

ทำให้ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นเอกพันธุ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัวมีผลเฉลยแตกต่างกันตามรูปแบบของค่ารากสมการช่วยทั้ง 4 รูปแบบ

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 5

1. จงหาพหุนามช่วย สมการช่วย และหาค่ารากของสมการช่วยของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

   1.1 $y'' + y' - 6y = 0$

   1.2 $y''' - 2y'' + 16y' - 32y = 0$

   1.3 $(D^3 - 4D^2 + 9D - 10)y = 0$

   1.4 $(D^4 - 12D^3 + 61D^2 - 168D - 208)y = 0$

   1.5 $(D^4 - 11D^3 + 45D^2 - 81D + 54)y = 0$

2. จงหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

   2.1 $y'' + 3y' - 4y = 0$

   2.2 $y^{(4)} - 5y'' + 4y = 0$

   2.3 $y''' + 6y'' + 11y' + 6y = 0$

   2.4 $y''' + 4y'' - 13y' - 50y = 0$

   2.5 $y'' - 6y' + 13y = 0$

   2.6 $y''' + 7y'' + 31y' + 25y = 0$

   2.7 $y^{(4)} + 3y''' - 9y'' - 77y' + 150y = 0$

   2.8 $y^{(4)} + 8y''' + 26y'' + 40y' + 25y = 0$

   2.9 $y^{(4)} - 2y''' + 5y'' - 8y' + 4y = 0$

3. จงหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

   3.1 $y'' - y' - 2y = 0$ $\quad y(0) = 1,\ y'(0) = 8$

   3.2 $y'' + 3y = 0$ $\quad y(0) = 3,\ y'(0) = 6$

   3.3 $y'' + 6y' + 5y = 0$ $\quad y(0) = 0,\ y'(0) = 3$

   3.4 $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0$ $\quad y(0) = 1,\ y'(0) = 3,\ y''(0) = 6$

   3.5 $y''' - 13y' + 12y = 0$ $\quad y(0) = 0,\ y'(0) = -9,\ y''(0) = -1$

   3.6 $y''' + 6y'' + 11y' + 6y = 0$ $\quad y(0) = 6,\ y'(0) = 3,\ y''(0) = 5$

   3.7 $y''' + 7y'' + 31y' + 25y = 0$ $\quad y(0) = 6,\ y'(0) = -34,\ y''(0) = 94$

บทที่ 6
สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ
เชิงเส้นไม่เอกพันธุ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว

ในบทนี้เป็นการศึกษาถึงวิธีการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นไม่เอกพันธุ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว $P(D)y = g(x)$ เมื่อ $P(D) = a_0D^n + a_1D^{n-1} + \cdots + a_{n-1}D + a_n$ เป็นตัวดำเนินการอันดับที่ n และ $a_0, a_1, ..., a_n$ เป็นค่าคงตัว เมื่อ $g(x) \neq 0$ จะมีผลเฉลยทั่วไปอยู่ในรูป $y = y_c + y_p$ โดยที่ y_c เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการ $P(D)y = 0$ และ y_p เป็นผลเฉลยของสมการ $P(D)y = g(x)$

ตัวอย่างเช่น สมการ $y'' - 2y' - 4y = 16x$

มีผลเฉลย $y_c = c_1e^{-x} + c_2e^{4x}$ เมื่อ c_1, c_2 เป็นตัวคงค่า

และมีผลเฉลย $y_p = 3 - 4x$

ผลเฉลยทั่วไปคือ $y = y_c + y_p = c_1e^{-x} + c_2e^{4x} + 3 - 4x$

ดังนั้นการหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นสามัญไม่เอกพันธุ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัวนั้นจะแบ่งการหาผลเฉลยออกเป็นสองผลเฉลยคือ y_c และ y_p แต่สำหรับการหา y_c นั้นคือผลเฉลยทั่วไปของสมการ $P(D)y = 0$ ซึ่งเป็นสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นสามัญเอกพันธุ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว เราได้ศึกษามาแล้วในเนื้อหาของบทก่อนหน้านี้ ดังนั้นในบทนี้จะกล่าวถึงเฉพาะวิธีการหาผลเฉลย y_p ที่เป็นผลเฉลยของสมการโดยมีวิธีการดังต่อไปนี้

6.1 การหาผลเฉลยโดยวิธีการเทียบสัมประสิทธิ์

ก่อนที่จะกล่าวถึงการหาผลเฉลย y_p โดยวิธีนี้นั้นมีเนื้อหาที่จำเป็นต้องทราบเพื่อที่จะได้ทำความเข้าใจในวิธีการเทียบสัมประสิทธิ์ได้ดียิ่งขึ้นดังต่อไปนี้

จากเนื้อหาบทที่ผ่านมานั้น เมื่อเราทราบรากของสมการช่วย (ค่า r) แล้วเราสามารถหาผลเฉลยของสมการเชิงเส้นแบบเอกพันธุ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัวได้เช่น

ถ้า $r = a$; $y = e^{ax}$

ถ้า $r = a, a$; $y = e^{ax}, xe^{ax}$

ถ้า $r = a \pm bi$; $y = e^{ax}\cos bx, e^{ax}\sin bx$

ถ้า $r = a \pm bi, a \pm bi$; $y = e^{ax}\cos bx, e^{ax}\sin bx, e^{ax}x\cos bx, e^{ax}x\sin bx$

โดยในทางกลับกันถ้าผลเฉลยมีพจน์ e^{ax} แสดงว่ามาจากรากสมการช่วย $f(r) = 0$ ที่มีรากหนึ่งคือ $r = a$ นั่นคือ ตัวดำเนินการ $f(D)$ ต้องมีตัวประกอบหนึ่งเป็น $D - a$

ถ้าผลเฉลยมีพจน์ xe^{ax} แสดงว่ามาจากรากสมการช่วย $f(r) = 0$ ที่มีรากหนึ่งคือ $r = a, a$ นั่นคือ ตัวดำเนินการ $f(D)$ ต้องเป็นตัวประกอบหนึ่งเป็น $(D - a)^2$

ถ้าเฉลยมีพจน์ $e^{ax}\cos bx$ หรือ $e^{ax}\sin bx$ แสดงว่ามาจากรากสมการช่วย $f(r) = 0$ ที่มีรากหนึ่งคือ $r = a \pm bi$ นั่นคือ ตัวดำเนินการ $f(D)$ ต้องเป็นตัวประกอบหนึ่งเป็น $\left[(D-a)^2 + b^2\right]$

ถ้าผลเฉลยมีพจน์ $e^{ax}x\cos bx$ หรือ $e^{ax}x\sin bx$ แสดงว่ามาจากรากสมการช่วย $f(r) = 0$ ที่มีรากหนึ่งคือ $r = a \pm bi, a \pm bi$ นั่นคือ ตัวดำเนินการ $f(D)$ ต้องเป็นตัวประกอบหนึ่งเป็น $\left[(D-a)^2 + b^2\right]^2$

ซึ่งจากการใช้การพิจารณาข้างต้นนี้ สามารถนำมาใช้สร้างสมการเชิงอนุพันธ์ได้ดังจะแสดงในตัวอย่างต่อไปนี้ (สุนีย์ สุวรรณตระกูล และวรนุช เกิดสินธ์ชัย, 2530 : 211-213)

ตัวอย่าง 6.1 จงหาสมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธุ์ จากผลเฉลยเฉพาะ

(1) $$y = 4e^{3x} + 2x$$

วิธีทำ e^{3x} มาจากรากสมการช่วย $f(r) = 0$ ที่มีรากหนึ่งคือ $r = 3$

นั่นคือ $D - 3$ เป็นตัวประกอบหนึ่งของ $f(D)$

x มาจากรากสมการช่วย $f(r) = 0$ ที่มีรากคือ $r = 0, 0$

นั่นคือ D^2 เป็นตัวประกอบหนึ่งของ $f(D)$

จะได้ $f(D) = D^2(D-3)$

สมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธุ์ที่ต้องการคือ

(2) $$D^2(D-3)y = 0$$

ซึ่งผลเฉลยทั่วไปของสมการ (2) คือ $y = c_1e^{3x} + c_2 + c_3x$ เมื่อ $c_1 = 4, c_2 = 0$ และ $c_3 = 2$ จะได้ผลเฉลยเฉพาะตามโจทย์คือ $y = 4e^{3x} + 2x$

ตัวอย่าง 6.2 จงหาสมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธุ์ จากผลเฉลยเฉพาะ

(3) $$y = 5 + 4xe^{x} - \cos 2x$$

วิธีทำ 5 มาจากรากสมการช่วย $f(r) = 0$ ที่มีรากหนึ่งคือ $r = 0$

นั่นคือ D เป็นตัวประกอบหนึ่งของ $f(D)$

xe^{x} มาจากรากสมการช่วย $f(r) = 0$ ที่มีรากคือ $r = 1,1$

นั่นคือ $(D-1)^2$ เป็นตัวประกอบหนึ่งของ $f(D)$

$\cos 2x$ มาจากรากสมการช่วย $f(r) = 0$ ที่มีรากคือ $r = \pm 2i$

นั่นคือ $D^2 + 4$ เป็นตัวประกอบหนึ่งของ $f(D)$

จะได้ $f(D) = D(D-1)^2(D^2+4)$

สมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธุ์ที่ต้องการคือ

(4) $$D(D-1)^2(D^2+4)y = 0$$

ซึ่งผลเฉลยทั่วไปของสมการ (3) คือ $y = c_1 + (c_2 + c_3 x)e^{x} + c_4 \cos 2x + c_5 \sin 2x$

เมื่อ $c_1 = 5, c_2 = 0, c_3 = 4, c_4 = -1, c_5 = 0$ จะได้ผลเฉลยเฉพาะตามโจทย์คือ

$y = 5 + 4xe^{x} - \cos 2x$

ตัวอย่าง 6.3 จงหาสมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธุ์ จากผลเฉลยเฉพาะ

(5) $$y = -7xe^{2x} \sin 3x$$

วิธีทำ $xe^{2x} \sin 3x$ มาจากรากสมการช่วย $f(r) = 0$ ที่มีรากคือ $r = 2 \pm 3i, 2 \pm 3i$

นั่นคือ $\left[(D-2)^2 + 9\right]^2$ เป็นตัวประกอบของ $f(D)$

จะได้ $f(D) = \left[(D-2)^2 + 9\right]^2$

สมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธุ์ที่ต้องการคือ

$$\left[(D-2)^2 + 9\right]^2 y = 0$$

หรือ

(6) $$(D^2 - 4D + 13)^2 y = 0$$

ซึ่งผลเฉลยทั่วไปของสมการ (5) คือ $y = e^{2x}\left[(c_1 + c_2 x)\cos 3x + (c_3 + c_4 x)\sin 3x\right]$

เมื่อ $c_1 = c_2 = c_3 = 0, c_4 = -7$ จะได้ผลเฉลยเฉพาะตามโจทย์คือ

$y = 5 + 4xe^{x} - \cos 2x$

เมื่อเราสามารถหาสมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธุ์ จากผลเฉลยเฉพาะได้แล้วนั้นเราสามารถนำวิธีการที่กล่าวมาข้างต้นนั้นไปหาผลเฉลย y_p โดยมีขั้นตอนวิธีการดังต่อไปนี้

สมการ

(7) $$P(D)y = g(x)$$

ให้รากของสมการช่วย $P(r) = 0$ คือ

$$r = r_1, r_2, ..., r_n$$

ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (7) คือ

(8) $$y = y_p + y_c$$

สมมติว่าฟังก์ชัน $g(x)$ เป็นผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงเส้นแบบเอกพันธุ์

(9) $$P_1(D)g(x) = 0$$

มีรากของสมการช่วยของสมการ (9) เป็น

$R = R_1, R_2, ...R_k$ (หา R ได้เหมือนกับตัวอย่าง 6.1-6.3 ที่ผ่านมา)

พิจารณาสมการ

(10) $$P_1(D)P(D)y = 0$$

จะพบว่าผลเฉลยทั่วไปของสมการ (10) นั้นจะประกอบด้วย y_c ของสมการ (8) โดยสมมติให้ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (10) คือ

$$y = y_c + y_r$$

และผลเฉลยเฉพาะ (y_p) ของสมการ (7) ต้องสอดคล้องกับสมการ (10) ด้วย เพราะว่า

$P_1(D)P(D)y = P_1(D)g(x) = 0$ เนื่องจาก $P(D)y_p = g(x)$

และถ้า $P(D)(y_c + y_r) = g(x)$ แล้ว $P(D)y_r = g(x)$ เนื่องจาก $P(D)y_c = 0$

ดังนั้นแสดงว่า $y_r = y_p$ เมื่อกำหนดสัมประสิทธิ์ใน y_r ซึ่งการกำหนดสัมประสิทธิ์ดังกล่าวทำได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้ (วีระศักดิ์ วาจาบัณฑิตย์, 2541 : 158)

ข้อสังเกต 6.1

การหาผลเฉลยเฉพาะโดยวิธีเทียบสัมประสิทธิ์นี้จะทำได้ก็ต่อเมื่อ ฟังก์ชัน $g(x)$ ต้องอยู่ในรูปผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงเส้นแบบเอกพันธุ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัวเท่านั้น

ตัวอย่าง 6.4 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

(11) $$(D^2-4D+3)y=2e^{-x}-2$$

วิธีทำ รากของสมการช่วยของสมการ (11) คือ $r=1,3$

จะได้ $y_c=c_1e^x+c_2e^{3x}$

และจากสมการ (11) นั้น $g(x)=2e^{-x}-2$

มากจาก $R=-1,0$

เป็นผลเฉลยของสมการ

$$D(D-1)y=0$$

พิจารณาสมการ

$$D(D-1)(D^2-4D+3)y=0$$

ซึ่งมีผลเฉลยทั่วไปคือ

$$y=c_1e^x+c_2e^{3x}+c_3+c_4e^{-x}$$

โดยที่ $y_c=c_1e^x+c_2e^{3x}$ ดังนั้น

$$y_r=c_3+c_4e^{-x}$$

เพื่อหาสัมประสิทธิ์ c_3,c_4 เรากำหนด

$$y_p=y_r=c_3+c_4e^{-x}$$

และเพื่อให้สอดคล้องกับสมการ (11)

$$Dy_p=-c_4e^{-x}$$
$$D^2y_p=c_4e^{-x}$$

แทนค่าในสมการ (11) จะได้

$$c_4e^{-x}+4c_4e^{-x}+3(c_3+c_4e^{-x})=2e^{-x}-2$$
$$c_4e^{-x}+4c_4e^{-x}+3c_3+3c_4e^{-x}=2e^{-x}-2$$

(12) $$8c_4e^{-x}+3c_3=2e^{-x}-2$$

เนื่องจากสมการ (12) เป็นเอกลักษณ์และฟังก์ชัน $e^{-x},1$ เป็นอิสระเชิงเส้นกัน เราสามารถเทียบสัมประสิทธิ์ได้ ดังนี้

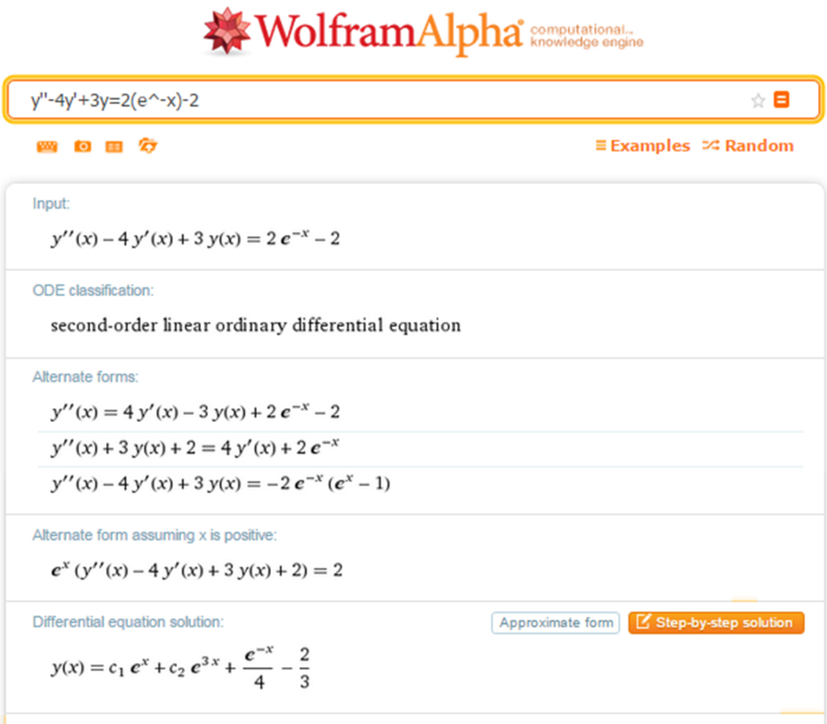
$$8c_4=2$$
$$3c_3=-2$$

นั่นคือ $c_4=\dfrac{1}{4},c_3=-\dfrac{2}{3}$

จะได้ $y_p = -\frac{2}{3} + \frac{1}{4}e^{-x}$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (11) คือ $y = c_1e^x + c_2e^{3x} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4}e^{-x}$

ใช้ Wolfram Alpha เพื่อหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ (11) ดังภาพที่ 6.1



ภาพที่ 6.1 ผลเฉลยทั่วไปของสมการ $(D^2 - 4D + 3)y = 2e^{-x} - 2$ โดยใช้ Wolfram Alpha

ตัวอย่าง 6.5 จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการ

(13) $$(D^3 - D)y = 4e^{-x} + 3e^{2x}$$

เมื่อกำหนดเงื่อนไข $y(0) = 0, y'(0) = -1$ และ $y''(0) = 2$

วิธีทำ รากของสมการช่วยของสมการ (13)

คือ $r = 0,1,-1$

และจากสมการ (13) นั้น $g(x) = 4e^{-x} + 3e^{2x}$

จะได้ $R = -1,2$

$$y_c = c_1 + c_2e^x + c_3e^{-x}$$
$$y_p = c_4xe^{-x} + c_5e^{2x}$$

และเพื่อให้สอดคล้องกับสมการ (13)

$$Dy_p = c_4(-xe^{-x} + e^{-x}) + 2c_5e^{2x}$$
$$D^2y_p = c_4(xe^{-x} - e^{-x} - e^{-x}) + 4c_5e^{2x}$$
$$= c_4(xe^{-x} - 2e^{-x}) + 4c_5e^{2x}$$
$$D^3y_p = c_4(-xe^{-x} + e^{-x} + 2e^{-x}) + 8c_5e^{2x}$$
$$= c_4(-xe^{-x} + 3e^{-x}) + 8c_5e^{2x}$$

แทนค่าในสมการ (13) จะได้

$$c_4(-xe^{-x} + 3e^{-x}) + 8c_5e^{2x} - c_4(-xe^{-x} + e^{-x}) + 2c_5e^{2x} = 4e^{-x} + 3e^{2x}$$
$$-c_4xe^{-x} + 3c_4e^{-x} + 8c_5e^{2x} + c_4xe^{-x} - c_4e^{-x} + 2c_5e^{2x} = 4e^{-x} + 3e^{2x}$$

หรือ

(14) $$2c_4e^{-x} + 6c_5e^{2x} = 4e^{-x} + 3e^{2x}$$

เนื่องจากสมการ (14) เป็นเอกลักษณ์และฟังก์ชัน e^{-x}, e^{2x} เป็นอิสระเชิงเส้นกัน เราสามารถเทียบสัมประสิทธิ์ได้ ดังนี้

$$2c_4 = 4$$
$$6c_5 = 3$$

นั่นคือ $c_4 = 2, c_3 = \frac{1}{2}$

ฉะนั้น $y_p = 2xe^{-x} + \frac{1}{2}e^{2x}$

ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (13) คือ $y = y_c + y_p$

(15) $$y = c_1 + c_2e^x + c_3e^{-x} + 2xe^{-x} + \frac{1}{2}e^{2x}$$

ต่อไปหาผลเฉลยเฉพาะของสมการ (13) การหาค่า c_1, c_2, c_3 เราหาอนุพันธ์สมการ (14) ได้

(16) $$y' = c_2e^x - c_3e^{-x} - 2xe^{-x} + 2e^x + e^{2x}$$

และ

(17) $$y'' = c_2 e^x + c_3 e^{-x} + 2xe^{-x} - 4e^{-x} + 2e^{2x}$$

จากเงื่อนไข $y(0) = 0, y'(0) = -1$ และ $y''(0) = 2$ แทนในสมการ (15), (16) และ (17) ได้

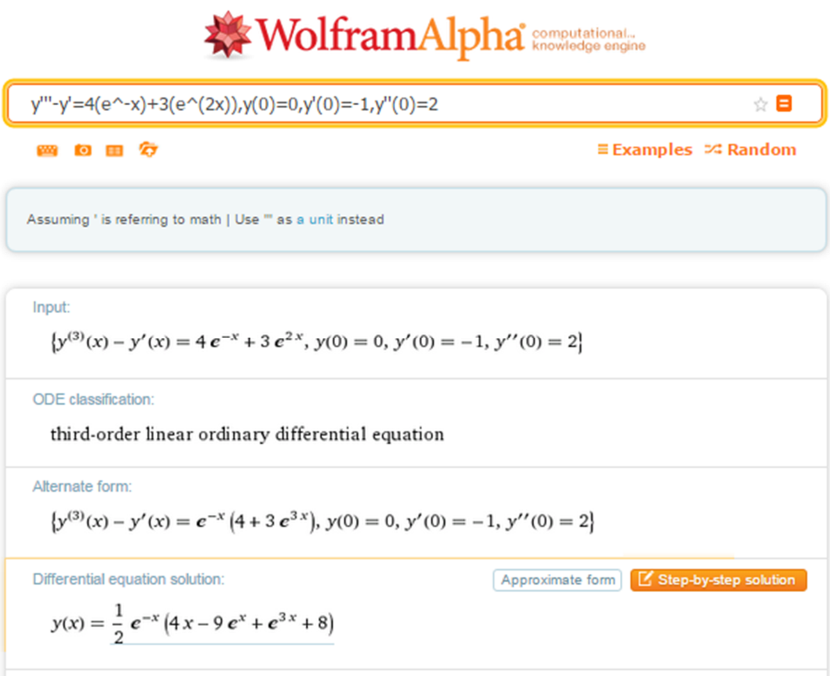
$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + c_3 + \frac{1}{2} &= 0 \\ c_2 - c_3 + 3 &= 0 \\ c_2 + c_3 - 2 &= 0 \end{aligned}$$

และแก้ระบบสมการข้างต้นได้

$$\begin{aligned} c_1 &= -\frac{9}{2} \\ c_2 &= 0 \\ c_3 &= 4 \end{aligned}$$

ดังนั้น ผลเฉลยเฉพาะของสมการ (13) คือ $y = -\frac{9}{2} + 4e^{-x} + 2xe^{-x} + \frac{1}{2}e^{2x}$

ใช้ Wolfram Alpha เพื่อหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ (13) ดังภาพที่ 6.2



ภาพที่ 6.2 ผลเฉลยเฉพาะของสมการ $(D^3 - D)y = 4e^{-x} + 3e^{2x}$ โดยใช้ Wolfram Alpha

ตัวอย่าง 6.6 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

(18) $$(D^2+4)y = \sin 2x + x$$

วิธีทำ รากของสมการช่วยของสมการ (17)

คือ $r = \pm 2i$

และจากสมการ (17) นั้น $g(x) = \sin 2x + x$

จะได้ $R = \pm 2i, 0, 0$

$$y_c = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$$

$$y_p = c_3 + c_4 x + c_5 x\cos 2x + c_6 x \sin 2x$$

และเพื่อให้สอดคล้องกับสมการ (17)

$$Dy_p = c_4 + c_5(-2x\sin 2x + \cos 2x) + c_6(2x\cos 2x + \sin 2x)$$

$$D^2 y_p = -4c_5 \sin 2x - 4c_5 x\cos 2x + 4c_6 x\cos 2x - 4c_6 \sin 2x$$

แทนค่าในสมการ (17) จะได้$(D^2+4)y = \sin 2x + x$

$$\begin{aligned}&(-4c_5 \sin 2x - 4c_5 x\cos 2x + 4c_6 x \cos 2x - 4c_6 \sin 2x)\\ &\qquad - 4(c_3 + c_4 x + c_5 x\cos 2x + c_6 x \sin 2x) = \sin 2x + x\end{aligned}$$

หรือ

$$4c_3 + 4c_4 x + (4c_6 - 4c_5)\sin 2x - 4c_6 x \sin 2x + 4c_6 x\cos 2x = \sin 2x + x$$

เนื่องจากสมการ นี้เป็นเอกลักษณ์และฟังก์ชัน $1, x, \sin 2x, x\sin 2x, \cos 2x, x\cos 2x$ เป็นอิสระเชิงเส้นกัน เราสามารถเทียบสัมประสิทธิ์ได้ ดังนี้

$$\begin{aligned} c_3 &= 0\\ 4c_4 &= 1\\ 4c_6 - 4c_5 &= 1\\ -4c_6 &= 0\\ 4c_6 &= 0 \end{aligned}$$

นั่นคือ $c_4 = \dfrac{1}{4}, c_6 = -\dfrac{1}{4}$

ฉะนั้น $y_p = \dfrac{1}{4}x - \dfrac{1}{4}x\cos 2x$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (17) คือ $y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \dfrac{1}{4}x - \dfrac{1}{4}x\cos 2x$

6.2 การหาผลเฉลยด้วยวิธีแปรตัวพารามิเตอร์

เนื่องจากการหา y_p โดยวิธีเทียบสัมประสิทธิ์ของสมการ $P(D)y = g(x)$ ไม่สามารถใช้ได้กับกรณีที่ฟังก์ชัน $g(x)$ มีรูปแบบอื่น ๆ เช่น $\sec x, \tan x, \cos^{-1} x$ หรืออื่น ๆ แต่วิธีการหา y_p โดยการแปรตัวพารามิเตอร์ นั้นจะสามารถแก้ปัญหานี้ได้ และเป็นวิธีใช้ได้กับฟังก์ชันทุกรูปแบบ

วิธีการหารผลเฉลย y_p ด้วยวิธีการแปรตัวพารามิเตอร์นั้นคือการใช้ผลเฉลย y_c ที่หาได้มากำหนดเป็น y_p โดยเปลี่ยนตัวคงค่าเป็นตัวแปร จึงเรียกการหาผลเฉลยแบบนี้ว่าวิธีแปรตัวพารามิเตอร์ เพื่อให้ง่ายต่อการทำความเข้าใจพิจารณาสมการอันดับสอง (ดำรง ทิพย์โยธา, 2541 : 166-167)

(19) $$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = g(x)$$

สมมติว่าเราทราบผลเฉลย y_c คือ

(20) $$y_c(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$$

พิจารณาให้

(21) $$y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$$

โดยที่ $u_1(x)$ และ $u_2(x)$ เป็นฟังก์ชันที่ต้องกำหนดเพื่อให้ y_p เป็นผลเฉลยของสมการ (19)
เพื่อความสะดวกจึงกำหนดให้ $y(x) = y$ และ $u_i(x) = u_i$ สำหรับ $i = 1,2$
ดังนั้นจากสมการ (21) ได้

(22) $$y_p = u_1y_1 + u_2y_2$$

หาอนุพันธ์สมการ (22) ได้

(23) $$y_p' = u_1y_1' + u_1'y_1 + u_2y_2' + u_2'y_2$$

เนื่องจากสมการนั้นเกี่ยวข้องกับฟังก์ชันไม่ทราบค่า 2 ฟังก์ชันคือ u_1 และ u_2 แต่เรามีเพียงเงื่อนไขเดียวคือ y_p ที่ต้องสอดคล้องกับสมการ (19) ดังนั้นเราจึงต้องหาอีกเงื่อนไขหนึ่งเพื่อแก้ปัญหานี้ และต้องหาอนุพันธ์สมการ (23) อีกครั้งเพื่อแทนในสมการ (19) ซึ่งจะทำให้ปรากฏพจน์ $u_1''y_1$ และ $u_2''y_2$ เป็นเหตุให้เราไม่สามารถหา u_1 และ u_2 ได้ เราจึงกำหนดเงื่อนไขให้

(24) $$u_1'y_1 + u_2'y_2 = 0$$

จากนั้นหาอนุพันธ์สมการ (23) ได้

(25) $$y_p'' = u_1y_1'' + u_2y_2'' + u_1'y_1' + u_2'y_2'$$

แทนค่า y_p, y_p' และ y_p'' ในสมการ (19) ได้

$$a_0(x)\left(u_1y_1'' + u_2y_2'' + u_1'y_1' + u_2'y_2'\right) + a_1(x)\left(u_1y_1' + u_1'y_1 + u_2y_2' + u_2'y_2\right) + a_2(x)\left(u_1y_1 + u_2y_2\right) = g(x)$$

เพื่อความสะดวกจึงกำหนดให้ $a(x) = a$ ได้

$$a_0\left(u_1y_1'' + u_2y_2'' + u_1'y_1' + u_2'y_2'\right) + a_1\left(u_1y_1' + u_1'y_1 + u_2y_2' + u_2'y_2\right) + a_2\left(u_1y_1 + u_2y_2\right) = g(x)$$

หรือ

(26) $$u_1(a_0y_1'' + a_1y_1' + a_2y_1) + u_2(a_0y_2'' + a_1y_2' + a_2y_2) + a_0(u_1'y_1' + u_2'y_2') = g(x)$$

แต่ u_1 และ u_2 เป็นผลเฉลยของ $a_0y'' + a_1y' + a_2y = 0$

ดังนั้นจากสมการ (26) จะเหลือเพียง

$$a_0(u_1'y_1' + u_2'y_2') = g(x)$$

หรือ

(27) $$u_1'y_1' + u_2'y_2' = \frac{g(x)}{a_0(x)}$$

จากสมการ (24) และสมการ (27) เราสามารถหา u_1' และ u_2' ได้เพราะว่า

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0$$

เนื่องจาก y_1 และ y_2 เป็นอิสระเชิงเส้นกันและใช้หลักเกณฑ์ของคราเมอร์จะได้

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ \dfrac{g(x)}{a_0(x)} & y_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}}$$

และ

$$u_2' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & \dfrac{g(x)}{a_0(x)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}}$$

หรือ

$$u_i' = \frac{W_i(x)}{W(x)}, \quad i = 1,2$$

โดยที่ $W(x)$ คือรอนสเกียนของ y_1 และ y_2 และ $W_i(x)$ คือดีเทอร์มิแนนต์ที่ได้จาก $W(x)$ โดยแทนหลักที่ i ด้วย $\left[0, \dfrac{g(x)}{a_0(x)}\right]^t$ จากนั้นหาปริพันธ์ของ u_1' และ u_2' จะได้ u_1 และ u_2 ดังจะแสดงในตัวอย่างต่อไปนี้ (วีระศักดิ์ วาจาบัณฑิตย์, 2541 : 167-169)

ตัวอย่าง 6.7 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

(28) $$(D^2 + 1)y = \sec x$$

วิธีทำ จากโจทย์จะพบว่า

$$y_c = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

ดังนั้นให้

(29) $$y_p(x) = u_1(x)\cos x + u_2(x)\sin x$$

ให้ $u_1(x) = u_1$ และ $u_2(x) = u_2$ และหาอนุพันธ์สมการ (29) ได้

$$y_p'(x) = -u_1 \sin x + u_1' \cos x + u_2 \cos x + u_2' \sin x$$

หรือ

(30) $$y_p'(x) = -u_1 \sin x + u_2 \cos x + u_1' \cos x + u_2' \sin x$$

กำหนดเงื่อนไขให้

(31) $$u_1' \cos x + u_2' \sin x = 0$$

ได้

(32) $$y_p'(x) = -u_1 \sin x + u_2 \cos x$$

หาอนุพันธ์สมการ (32) ได้

(33) $$y_p''(x) = -u_1 \cos x - u_1' \sin x - u_2 \sin x + u_2' \cos x$$

นำ $y_p(x)$ และ $y_p''(x)$ จากสมการ (29) และ (33) แทนในสมการ (28) ได้

$$-u_1 \cos x - u_1' \sin x - u_2 \sin x + u_2' \cos x + u_1(x)\cos x + u_2(x)\sin x = \sec x$$

หรือ

(34) $$-u_1' \sin x + u_2' \cos x = \sec x$$

หา u_1' และ u_2' จากสมการ (31) และสมการ (34) โดยหลักเกณฑ์คราเมอร์ได้

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \sec x & \cos x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}} \qquad \text{และ} \qquad u_2' = \frac{\begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \sec x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}}$$

$$u_1' = \sin x \sec x \qquad \text{และ} \qquad u_2' = 1$$

หาปริพันธ์ได้

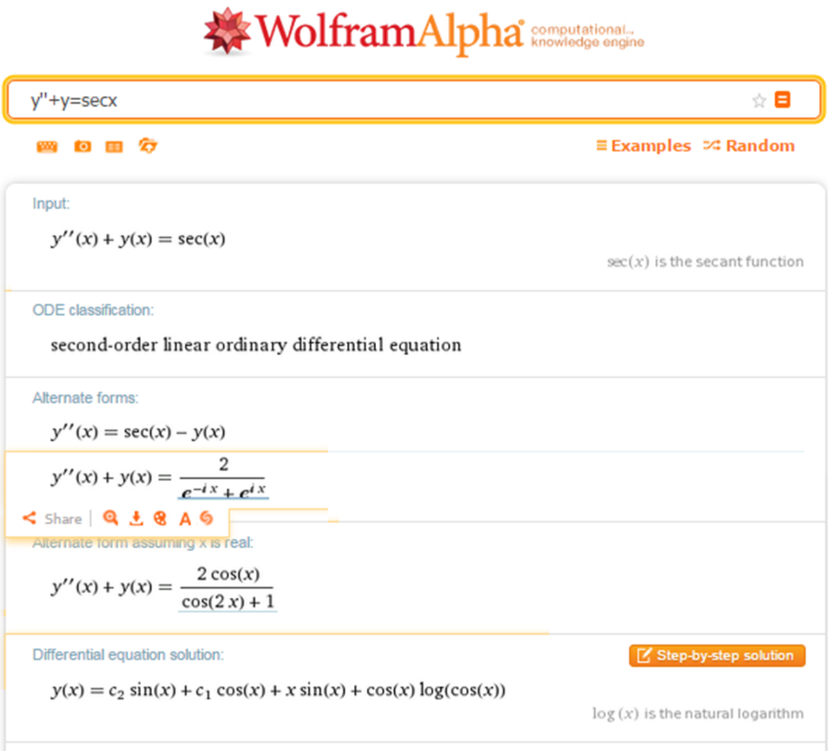
$$u_1 = -\int \sin x \sec x \, dx \qquad \text{และ} \qquad u_2 = \int 1 \, dx$$

$$u_1 = \ln\left|\cos x\right| \qquad \text{และ} \qquad u_2 = x$$

แทนค่า u_1 และ u_2 ในสมการ (29) ได้

$$y_p = (\ln\left|\cos x\right|)\cos x + x \sin x$$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (28) คือ $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + (\ln|\cos x|)\cos x + x\sin x$
ใช้ Wolfram Alpha เพื่อหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ (28) ดังภาพที่ 6.3



ภาพที่ 6.3 ผลเฉลยทั่วไปของสมการ $(D^2 + 1)y = \sec x$ โดยใช้ Wolfram Alpha

ตัวอย่าง 6.8 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

(35) $$(D^2 - 3D + 2)y = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

วิธีทำ จากโจทย์จะพบว่า

$$y_c = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$$

ดังนั้นให้

(36) $$y_p(x) = u_1(x)e^x + u_2(x)e^{2x}$$

ให้ $u_1(x) = u_1$ และ $u_2(x) = u_2$ และหาอนุพันธ์สมการ (36) ได้

$$y_p'(x) = u_1 e^x + u_1' e^x + 2u_2 e^{2x} + u_2' e^{2x}$$

หรือ

(37) $$y_p'(x) = u_1 e^x + 2u_2 e^{2x} + u_1' e^x + u_2' e^{2x}$$

กำหนดเงื่อนไขให้

(38) $$u_1' e^x + u_2' e^{2x} = 0$$

ได้

(39) $$y_p'(x) = u_1 e^x + 2u_2 e^{2x}$$

หาอนุพันธ์สมการ (39) ได้

(40) $$y_p''(x) = u_1 e^x + u_1' e^x + 4u_2 e^{2x} + 2u_2' e^{2x}$$

นำ $y_p(x), y_p'(x)$ และ $y_p''(x)$ จากสมการ (36), (39) และ (40) แทนในสมการ (35) ได้

$$u_1 e^x + u_1' e^x + 4u_2 e^{2x} + 2u_2' e^{2x} - 3(u_1 e^x + 2u_2 e^{2x}) + 2(u_1 e^x + u_2 e^{2x}) = \frac{1}{1+e^{-x}}$$

หรือ

(41) $$u_1' e^x + 2u_2' e^{2x} = \frac{1}{1+e^{-x}}$$

หา u_1' และ u_2' จากสมการ (38) และสมการ (41) โดยหลักเกณฑ์คราเมอร์ได้

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{2x} \\ (1+e^{-x})^{-1} & 2e^{2x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^x & e^{2x} \\ e^x & 2e^{2x} \end{vmatrix}} = \frac{-e^{2x}(1+e^{-x})^{-1}}{e^{3x}}$$

และ $$u_2' = \frac{\begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & (1+e^{-x})^{-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^x & e^{2x} \\ e^x & 2e^{2x} \end{vmatrix}} = \frac{e^x(1+e^{-x})^{-1}}{e^{3x}}$$

หรือ

$$u_1' = \frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}} \qquad \text{และ} \qquad u_2' = \frac{e^{-2x}}{1+e^{-x}}$$

หาปริพันธ์ได้

$$u_1 = \int \frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}dx \qquad \text{และ} \qquad u_2 = \int \frac{e^{-2x}}{1+e^{-x}}dx$$

$$u_1 = \ln\left|1+e^{-x}\right| \qquad \text{และ} \qquad u_2 = -e^{-x} + \ln\left|1+e^{-x}\right|$$

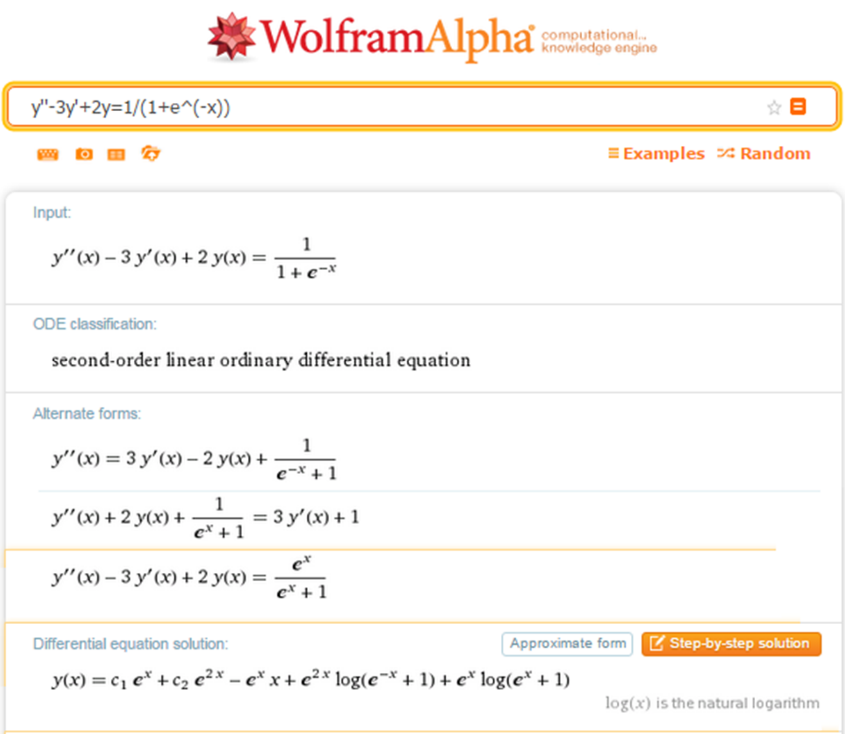
แทนค่า u_1 และ u_2 ในสมการ (36) ได้

$$y_p(x) = e^x \ln\left|1+e^{-x}\right| - e^x + e^{2x}\ln\left|1+e^{-x}\right|$$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปสมการ (28) คือ

$$y = c_1e^x + c_2e^{2x} + e^x \ln\left|1+e^{-x}\right| - e^x + e^{2x}\ln\left|1+e^{-x}\right|$$

ใช้ Wolfram Alpha เพื่อหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ (35) ดังภาพที่ 6.4



ภาพที่ 6.4 ผลเฉลยทั่วไปของสมการ $(D^2 - 3D + 2)y = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$ โดยใช้ Wolfram Alpha

จากตัวอย่าง 6.7 และ 6.8 ที่ผ่านมานั้นเป็นการหาผลเฉลย y_p ด้วยวิธีแปรตัวพารามิเตอร์สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่สองเท่านั้น สำหรับกรณีสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ n เราสามารถทำได้โดยวิธีเดียวกันดังนี้

จากสมการเชิงเส้น

$$(a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_{n-1} D + a_n) y = g(x)$$

สมมติว่า

$$y_c = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x)$$

และ

$$y_p = u_1(x) y_1(x) + u_1(x) y_2(x) + \cdots + u_n(x) y_n(x)$$

กำหนดเงื่อนไข

$$\begin{aligned} u_1' y_1 + u_2' y_2 + \cdots + u_n' y_n &= 0 \\ u_1' y_1' + u_2' y_2' + \cdots + u_n' y_n' &= 0 \\ u_1' y_1'' + u_2' y_2'' + \cdots + u_n' y_n'' &= 0 \\ \vdots \qquad\qquad & \vdots \\ u_1' y_1^{(n-2)} + u_2 y_2^{(n-2)} + \cdots + u_n' y_n^{(n-2)} &= 0 \\ a_0 (u_1' y_1^{(n-1)} + u_2 y_2^{(n-1)} + \cdots + u_n' y_n^{(n-1)}) &= g(x) \end{aligned}$$

ซึ่งจากระบบสมการ n สมการ เราสามารถแก้สมการเนื่องจากรอนสเกียนของ $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ไม่เป็นศูนย์ โดยหลักเกณฑ์คราเมอร์ได้

$$u_i'(x) = \frac{W_i(x)}{W(x)}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

โดยที่ $W(x)$ คือรอนสเกียนของ $y_1, y_2, \ldots, y_n$ และ $W_i(x)$ คือดีเทอร์มิแนนต์ที่ได้จาก $W(x)$ โดยแทนหลักที่ i ด้วย $\left[0, 0, \ldots, 0, \dfrac{g(x)}{a_0(x)}\right]^t$ จากนั้นหาปริพันธ์ของ $u_i'(x)$ จะได้ $u_i(x)$

ตัวอย่าง 6.9 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

(42) $$(D^3 - D)y = x$$

วิธีทำ จากโจทย์จะพบว่า

$$y_c = c_1 + c_2e^{x} + c_3e^{-x}$$

ดังนั้นให้

(43) $$y_p = u_1(x) + u_2(x)e^{x} + u_3(x)e^{-x}$$

ให้ $u_1(x) = u_1, u_2(x) = u_2$ และ $u_3(x) = u_3$ และหาอนุพันธ์สมการ (43) ได้

$$y_p'(x) = u_1' + u_2e^{x} + u_2'e^{x} - u_3e^{-x} + u_3'e^{-x}$$

หรือ

(44) $$y_p'(x) = u_1' + u_2'e^{x} + u_3'e^{-x} + u_2e^{x} - u_3e^{-x}$$

กำหนดเงื่อนไขให้

(45) $$u_1' + u_2'e^{x} + u_3'e^{-x} = 0$$

ได้

(46) $$y_p'(x) = u_2e^{x} - u_3e^{-x}$$

หาอนุพันธ์สมการ (46) ได้

(47) $$y_p''(x) = u_2e^{x} + u_2'e^{x} + u_3e^{-x} - u_3'e^{-x}$$

หรือ

$$y_p''(x) = u_2'e^{x} - u_3'e^{-x} + u_2e^{x} + u_3e^{-x}$$

กำหนดเงื่อนไขให้

(48) $$u_2'e^{x} - u_3'e^{-x} = 0$$

ได้

(49) $$y_p''(x) = u_2 e^x + u_3 e^{-x}$$

หาอนุพันธ์สมการ (49) ได้

(50) $$y_p'''(x) = u_2 e^x + u_2' e^x - u_3 e^{-x} + u_3' e^{-x}$$

นำ $y_p'(x)$ และ $y_p'''(x)$ จากสมการ (46) และ (50) แทนในสมการ (42) ได้

(51) $$u_2' e^x + u_3' e^{-x} = x$$

หา u_1', u_2' และ u_3' จากสมการ (45) , (48) และ (51) โดยหลักเกณฑ์คราเมอร์ได้

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^x & e^{-x} \\ 0 & e^x & -e^{-x} \\ x & e^x & e^{-x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & e^x & e^{-x} \\ 0 & e^x & -e^{-x} \\ 0 & e^x & e^{-x} \end{vmatrix}} = \frac{-2x}{2} = -x$$

$$u_2' = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & e^{-x} \\ 0 & 0 & -e^{-x} \\ 0 & x & e^{-x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & e^x & e^{-x} \\ 0 & e^x & -e^{-x} \\ 0 & e^x & e^{-x} \end{vmatrix}} = \frac{xe^{-x}}{2}$$

$$u_3' = \frac{\begin{vmatrix} 1 & e^x & 0 \\ 0 & e^x & 0 \\ 0 & e^x & x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & e^x & e^{-x} \\ 0 & e^x & -e^{-x} \\ 0 & e^x & e^{-x} \end{vmatrix}} = \frac{xe^x}{2}$$

หาปริพันธ์ได้

$$u_1 = \int -x\,dx = -\frac{1}{2}x^2$$

$$u_2 = \int \frac{xe^{-x}}{2}dx = \frac{1}{2}(-xe^{-x} - e^{-x})$$

$$u_3 = \int \frac{xe^{x}}{2}dx = \frac{1}{2}(xe^{x} - e^{x})$$

แทนค่า u_1, u_2 และ u_3 ในสมการ (43) ได้

$$y_p = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}e^{x}(-xe^{-x} - e^{-x}) + \frac{1}{2}e^{-x}(xe^{x} - e^{x})$$

หรือ

$$y_p = -\frac{1}{2}x^2 - 1$$

แต่เนื่องจาก -1 เป็นค่าคงตัวที่อยู่ใน y_c แล้วดังนั้น

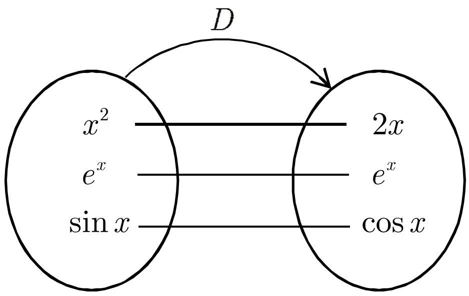
$$y_p = -\frac{1}{2}x^2$$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปสมการ (42) คือ $y = c_1 + c_2e^{x} + c_3e^{-x} - \dfrac{1}{2}x^2$

6.3 การหาผลเฉลยโดยใช้ตัวดำเนินการผกผัน

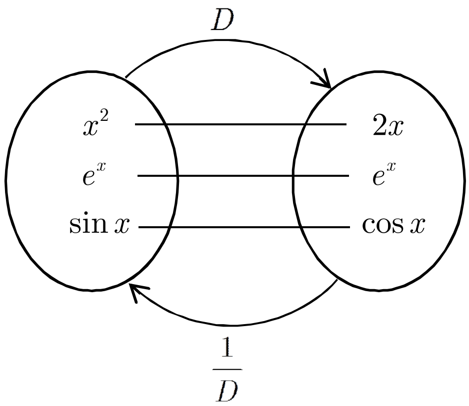
สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นไม่เอกพันธุ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัวที่มีอันดับสูงๆ นั้นการหา y_p โดยวิธีแปรตัวพารามิเตอร์ที่ผ่านมานั้นจะยุ่งยากมาก เพราะว่าในการหา $u_i(x)$ โดยใช้หลักเกณฑ์ของคราเมอร์ จะต้องหาดีเทอร์มิแนนต์ที่มีมิติมากตามไปด้วย ดังนั้นการหาผลเฉลยโดยใช้ตัวดำเนินการผกผันจึงถูกนำมาใช้เพื่อให้ง่ายขึ้น

ตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ D เป็นการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันเช่น $Dx^2 = \dfrac{dx^2}{dx} = 2x$ $De^{x} = \dfrac{de^{x}}{dx} = e^{x}$ หรือ $D\sin x = \dfrac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$ พิจารณาในรูปแบบของการส่งค่าจะได้



ภาพที่ 6.5 แสดงการส่งค่าของตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ D

หากพิจารณาย้อนกลับจะได้ว่า $\int 2x\,dx = x^2 + c$, $\int e^x\,dx = e^x + c$ และ $\int \cos x\,dx = \sin x + c$ เมื่อเราไม่คำนึงถึงตัวคงค่าของปริพันธ์จะได้ว่า $\int 2x\,dx = x^2$, $\int e^x\,dx = e^x$ และ $\int \cos x\,dx = \sin x$ สำหรับการหาปริพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x) = 2x$ ที่ไม่เอาค่าคงตัวเราจะใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $\frac{1}{D}$ นั้นคือ $\frac{1}{D}(2x) = \int 2x\,dx = x^2$, $\frac{1}{D}(e^x) = \int e^x\,dx = e^x$ และ $\frac{1}{D}(\cos x) = \int \cos x\,dx = \sin x$ จากความหมายตัวดำเนินการ D และ $\frac{1}{D}$ จะได้ว่า D และ $\frac{1}{D}$ เป็นตัวดำเนินการผกผันซึ่งกันและกัน ซึ่งแสดงได้ดังภาพที่ 6.6



ภาพที่ 6.6 แสดงการส่งค่าของตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ D และ $\frac{1}{D}$

สมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นไม่เอกพันธุ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว $P(D)y = g(x)$ เมื่อ $P(D) = a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_{n-1} D + a_n$ เราสามารถหาผลเฉลยเฉพาะ y_p ของสมการ $P(D)y = g(x)$ โดยวิธีการดังต่อไปนี้ (ดำรง ทิพย์โยธา, 2541 : 127)

ในการหาผลเฉลยเฉพาะของสมการ

(52) $$P(D)y = g(x)$$

สามารถเขียนได้ว่า

(53) $$y_p = \frac{1}{P(D)} g(x)$$

โดยที่ $\frac{1}{P(D)}$ นั้นเป็นตัวดำเนินการผกผันของ $P(D)$ ซึ่งมีสมบัติว่า

(54) $$P(D)\frac{1}{P(D)} g(x) = g(x)$$

ดังนั้นจากสมการ (53) ถ้าเอาตัวดำเนินการ $P(D)$ กระทำทางซ้ายจะได้

$$\begin{aligned} P(D)y_p &= P(D)\frac{1}{P(D)} g(x) \\ &= g(x) \end{aligned}$$

บทนิยาม 6.1

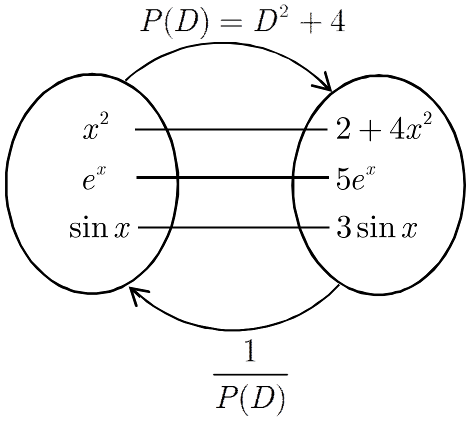
$P(D) = a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_{n-1} D + a_n$ เป็นพหุนามของตัวดำเนินการอนุพันธ์และ $a_0, a_1, ..., a_n$ เป็นค่าคงตัว ถ้า $P(D)\frac{1}{P(D)} g(x) = g(x)$ เรียก $\frac{1}{P(D)}$ ว่าเป็น**ตัวดำเนินการผกผัน** ของตัวดำเนินการ $P(D)$

ตัวอย่างเช่น ให้ $P(D) = D^2 + 4$

จะได้ว่า $P(D)(x^2) = (D^2 + 4)(x^2) = 2 + 4x^2$

$$P(D)(e^x) = (D^2 + 4)(e^x) = 5e^x$$

$$P(D)(\sin x) = (D^2 + 4)(\sin x) = 3\sin x$$



ภาพที่ 6.7 แสดงการส่งค่าของตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ $P(D)$ และ $\dfrac{1}{P(D)}$

ตัวอย่าง 6.10 กำหนดให้ $P(D) = D + 1$ จงหาค่าของ $\dfrac{1}{P(D)}(e^{2x})$

วิธีทำ สมมติให้ $(D+1)y = e^{2x}$

หรือ $\dfrac{dy}{dx} + y = e^{2x}$

จะได้ว่า $y = e^{-x}\int e^{2x}e^{x}\,dx = e^{-x}\int e^{3x}\,dx = e^{-x}\left(\dfrac{1}{3}e^{3x}\right) = \dfrac{1}{3}e^{2x}$

ดังนั้น $\dfrac{1}{P(D)}(e^{2x}) = \dfrac{1}{3}e^{2x}$

ถ้าเราหา $\dfrac{1}{P(D)}$ กับฟังก์ชันเช่น $\dfrac{1}{P(D)}x^n$, $\dfrac{1}{P(D)}(e^{ax})$, $\dfrac{1}{P(D)}(\sin ax)$ จะทำให้เราสามารถหา y_p ของสมการ $P(D)y = g(x)$ ได้โดยใช้สมบัติของ $\dfrac{1}{P(D)}$ ที่สำคัญต่อไปนี้ (จินดา อาจริยะกุล, 2540 : 206)

สมบัติของตัวดำเนินการผกผัน

1. $\dfrac{1}{P(D)}\left[c_1 g_1(x) + c_2 g_2(x)\right] = c_1\dfrac{1}{P(D)}g_1(x) + c_2\dfrac{1}{P(D)}g_2(x)$

   เมื่อ $g_1(x), g_2(x)$ เป็นฟังก์ชันและ c_1, c_2 เป็นค่าคงตัว

2. $\dfrac{1}{D-a}\,g(x) = e^{ax}\int e^{-ax}g(x)\,dx$

3. $$\frac{1}{P_1(D)P_2(D)}\,g(x) = \frac{1}{P_1(D)}\left[\frac{1}{P_2(D)}\,g(x)\right]$$
$$= \frac{1}{P_2(D)}\left[\frac{1}{P_1(D)}\,g(x)\right]$$
$$= \frac{1}{P_2(D)P_1(D)}\,g(x)$$

4. $\dfrac{1}{(D-a)^n}\,g(x) = e^{ax}\underbrace{\iiint\cdots\int}_{n} e^{-ax}\;g(x)\;dx \quad ;n = 1,2,3,\ldots$

จากสมบัติของตัวดำเนินการทั้ง 4 ข้อที่กล่าวมาข้างต้นนั้นเป็นที่เพียงพอที่เราจะสามารถหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์โดยใช้ตัวดำเนินการผกผันดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 6.11 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

(55) $$(D-4)y = e^{2x}$$

วิธีทำ จากโจทย์จะพบว่า

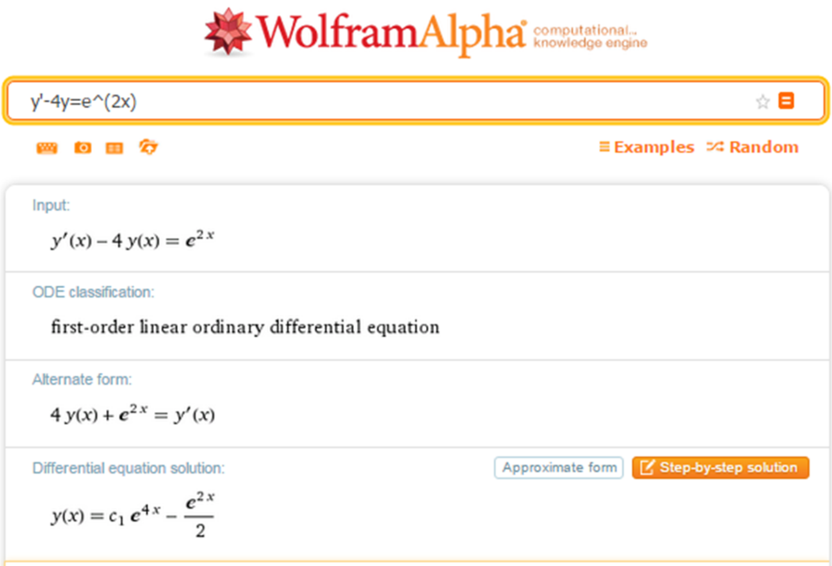
$$y_c = c_1 e^{4x}$$

สมการ (55) สามารถเขียนในรูปตัวดำเนินการผกผัน ได้

$$y_p = \frac{1}{D-4}e^{2x}$$
$$= e^{4x}\int e^{-4x}e^{2x}\,dx$$
$$= e^{4x}\int e^{-2x}\,dx$$
$$= e^{4x}\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)$$
$$= -\frac{1}{2}e^{2x}$$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (55) คือ $y = c_1e^{4x} - \dfrac{1}{2}e^{2x}$

ใช้ Wolfram Alpha เพื่อหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ (55) ดังภาพที่ 6.8



ภาพที่ 6.8 ผลเฉลยทั่วไปของสมการ $(D-4)y = e^{2x}$ โดยใช้ Wolfram Alpha

ตัวอย่าง 6.12 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

(56) $$(D^2 - D)y = \sin x$$

วิธีทำ จากโจทย์จะพบว่า $y_c = c_1 + c_2 e^x$

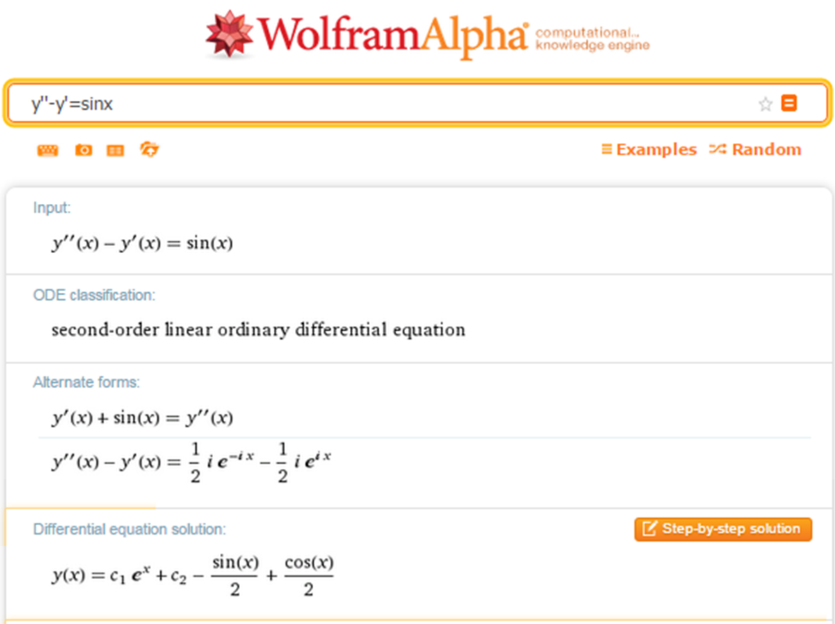
สมการ (56) สามารถเขียนในรูปตัวดำเนินการผกผัน ได้

$$\begin{aligned}
y_p &= \frac{1}{D^2 - D}\sin x \\
&= \frac{1}{(D-1)D}\sin x \\
&= \frac{1}{(D-1)}\left[\frac{1}{D}\sin x\right] \\
&= \frac{1}{(D-1)}\left[\int \sin x\,dx\right] \\
&= \frac{1}{(D-1)}(-\cos x) \\
&= -e^x \int e^{-x}\cos x\,dx
\end{aligned}$$

$$= -e^{x}\frac{1}{2}(e^{-x}\sin x - e^{-x}\cos x)$$
$$= \frac{\cos x - \sin x}{2}$$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (56) คือ $y = c_1 + c_2 e^{x} + \dfrac{\cos x - \sin x}{2}$

ใช้ Wolfram Alpha เพื่อหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ (56) ดังภาพที่ 6.9



ภาพที่ 6.9 ผลเฉลยทั่วไปของสมการ $(D^2 - D)y = \sin x$ โดยใช้ Wolfram Alpha

ตัวอย่าง 6.13 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

(57) $$(D^2 - 4D + 3)y = e^{5x}$$

วิธีทำ จากโจทย์จะพบว่า

$$y_c = c_1 e^{x} + c_2 e^{3x}$$

สมการ (57) สามารถเขียนในรูปตัวดำเนินการผกผัน ได้

$$y_p = \frac{1}{D^2 - 4D + 3}e^{5x}$$
$$= \frac{1}{(D-3)(D-1)}e^{5x}$$

$$= \frac{1}{(D-3)}\left[\frac{1}{(D-1)}e^{5x}\right]$$

$$= \frac{1}{(D-3)}\left[e^{x}\int e^{-x}e^{5x}\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{(D-3)}\left[e^{x}\int e^{4x}\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{(D-3)}e^{x}\left(\frac{1}{4}e^{4x}\right)$$

$$= \frac{1}{(D-3)}\left(\frac{1}{4}e^{5x}\right)$$

$$= e^{3x}\frac{1}{4}\int e^{-3x}e^{5x}\,dx$$

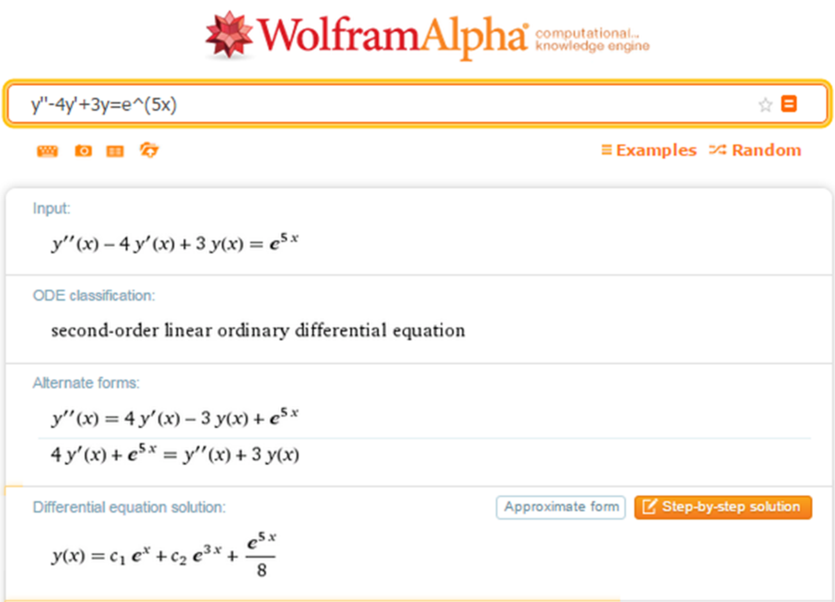
$$= e^{3x}\frac{1}{4}\int e^{2x}dx$$

$$= e^{3x}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)$$

$$= \frac{1}{8}e^{5x}$$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (57) คือ $y = c_1e^{x} + c_2e^{3x} + \frac{1}{8}e^{5x}$

ใช้ Wolfram Alpha เพื่อหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ (57) ดังภาพที่ 6.10



ภาพที่ 6.10 ผลเฉลยทั่วไปของสมการ $(D^2 - 4D + 3)y = e^{5x}$ โดยใช้ Wolfram Alpha

ตัวอย่าง 6.14 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

(58) $$(D-2)^3 y = e^{4x}$$

วิธีทำ จากโจทย์จะพบว่า

$$y_c = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + c_3 x^2 e^{2x}$$

สมการ (58) สามารถเขียนในรูปตัวดำเนินการผกผัน ได้

$$\begin{aligned} y_p &= \frac{1}{(D-2)^3} e^{4x} \\ &= e^{2x} \iiint e^{-2x} e^{4x}\, dx dx dx \\ &= e^{2x} \iiint e^{2x}\, dx dx dx \\ &= e^{2x} \iint \frac{1}{2} e^{2x}\, dx dx \\ &= e^{2x} \frac{1}{2} \iint e^{2x}\, dx dx \\ &= e^{2x} \frac{1}{2} \int \frac{1}{2} e^{2x}\, dx \\ &= e^{2x} \frac{1}{4} \int e^{2x}\, dx \\ &= e^{2x} \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} e^{2x} \right) \\ &= \frac{1}{8} e^{4x} \end{aligned}$$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (58) คือ $y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + c_3 x^2 e^{2x} + \frac{1}{8} e^{4x}$

การหาค่าของ $\frac{1}{P(D)} g(x)$ นั้นสามารถทำได้โดยการแยก $\frac{1}{P(D)}$ ออกเป็นผลบวกของเศษส่วนย่อยของตัวดำเนินการผกผันเช่น

$$\begin{aligned} y_p &= \frac{1}{D^2 - 4D + 3} e^{5x} \\ &= \frac{1}{(D-3)(D-1)} e^{5x} \\ &= \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{(D-3)} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(D-1)} \right) \right] e^{5x} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(D-3)}\right)e^{5x} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(D-1)}\right)e^{5x}$$
$$= \frac{1}{2}e^{3x}\int e^{-3x}e^{5x}\,dx - \frac{1}{2}e^{x}\int e^{-x}e^{5x}\,dx$$
$$= \frac{1}{4}e^{5x} - \frac{1}{8}e^{5x}$$
$$= \frac{1}{8}e^{5x}$$

ตัวอย่าง 6.15 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

(59) $$(D^2 + D - 2)y = e^{-3x}$$

วิธีทำ จากโจทย์จะพบว่า

$$y_c = c_1e^{x} + c_2e^{-2x}$$

สมการ (59) สามารถเขียนในรูปตัวดำเนินการผกผัน ได้

$$y_p = \frac{1}{D^2 + D - 2}e^{-3x}$$
$$= \frac{1}{(D+2)(D-1)}e^{-3x}$$

และจากการแยกเศษส่วนย่อย ได้

$$\frac{1}{(D+2)(D-1)} = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{(D+2)}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{(D-1)}\right)$$

ดังนั้น

$$y_p = \left[-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{(D+2)}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{(D-1)}\right)\right]e^{-3x}$$
$$= -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{(D-3)}\right)e^{-3x} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{(D-1)}\right)e^{-3x}$$
$$= -\frac{1}{3}e^{3x}\int e^{3x}e^{-3x}\,dx + \frac{1}{3}e^{x}\int e^{-x}e^{-3x}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}e^{-3x} - \frac{1}{12}e^{-3x}$$
$$= \frac{1}{4}e^{-3x}$$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (59) คือ $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-2x} + \frac{1}{4}e^{-3x}$

6.4 การหาค่าของ $\frac{1}{P(D)}g(x)$ เมื่อ $g(x)$ มีรูปแบบเฉพาะ

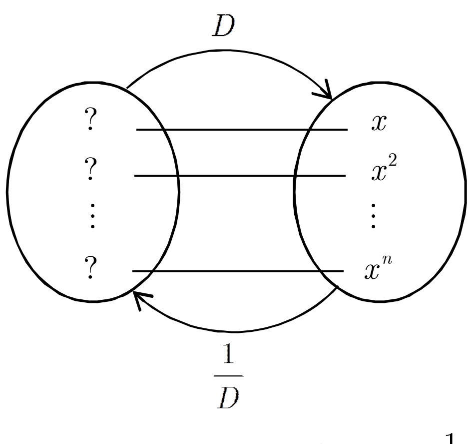
ในหัวข้อนี้จะศึกษาเฉพาะกรณีที่ $g(x)$ เป็นการรวมเชิงเส้นของฟังก์ชันที่มีรูปแบบเฉพาะดังต่อไปนี้ (ศิวิไล ถนอมสวย และสุรางค์ สีโท, 2541 : 187)

1. พหุนาม $1, x, x^2, ..., x^n$
2. เอกซ์โพเนนเชียลฟังก์ชัน e^{ax} เมื่อ a เป็นจำนวนจริงใด ๆ
3. ฟังก์ชัน $\sin ax, \cos bx$ เมื่อ a, b เป็นจำนวนจริงใด ๆ
4. ผลคูณของฟังก์ชันในข้อ 1, 2 และ 3

เช่น $P(D)y = 1 + x + x^2, P(D)y = xe^{2x} + \sin 3x$ ซึ่งจะทำการหาผลเฉลยโดยแบ่งเป็นกรณีได้ดังต่อไปนี้

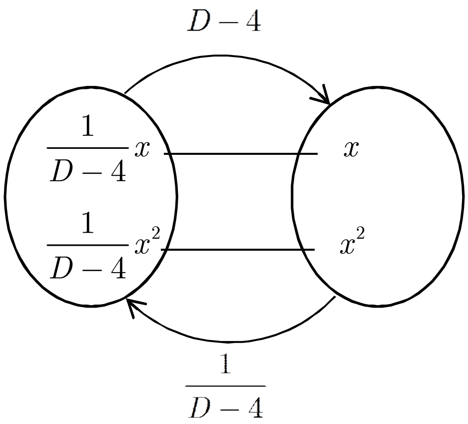
กรณีที่1 การหาค่า $\frac{1}{P(D)}g(x)$ เมื่อ $g(x)$ ปีนฟังก์ชันพหุนาม

เมื่อ $P(D)$ เป็นตัวดำเนินการที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัวการหาค่าของ $\frac{1}{P(D)}x^n$ คือการหาฟังก์ชัน $G(x)$ ที่ทำให้ $P(D)G(x) = x^n$ (ดำรง ทิพย์โยธา, 2541 : 137-139)



ภาพที่ 6.11 แสดงตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ D และ $\frac{1}{D}$ ของ $g(x)$ ที่เป็นฟังก์ชันพหุนาม

ก่อนที่จะพิจารณาในลักษณะพจน์ทั่วไปนั้นให้ศึกษาจาก $P(D) = D - 4$ ดังภาพต่อไปนี้



ภาพที่ 6.12 แสดงตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ $D - 4$ และ $\dfrac{1}{D-4}$ ของ $g(x)$ ที่เป็นฟังก์ชันพหุนาม

การหา $\dfrac{1}{D-4}x$ พิจารณาดังนี้

เพราะว่า $(D-4)x = 1 - 4x$ และ $(D-4)\left(\dfrac{1}{4}\right) = -1$

ดังนั้น $(D-4)\left(x + \dfrac{1}{4}\right) = (1-4x) + (-1) = -4x$

ซึ่งจะได้ว่า $(D-4)\left(-\dfrac{1}{4}\right)\left(x + \dfrac{1}{4}\right) = x$ นั่นคือ $\dfrac{1}{D-4}x = -\dfrac{1}{4}\left(x + \dfrac{1}{4}\right)$

การหา $\dfrac{1}{D-4}x^2$ พิจารณาดังนี้

เพราะว่า $(D-4)x^2 = 2x - 4x^2$ และ $(D-4)\left(\dfrac{2x}{4}\right) = \dfrac{1}{2} - 2x$

และ $(D-4)\left(\dfrac{2}{4^2}\right) = -\dfrac{1}{2}$

ดังนั้น $(D-4)\left(x^2 + \dfrac{2x}{4} + \dfrac{2}{4^2}\right) = (2x - 4x^2) + (\dfrac{1}{2} - 2x) + \left(-\dfrac{1}{2}\right) = -4x^2$

ซึ่งจะได้ว่า $(D-4)\left[\left(-\dfrac{1}{4}\right)\left(x^2 + \dfrac{2x}{4} + \dfrac{2}{4^2}\right)\right] = x^2$

นั่นคือ $\dfrac{1}{D-4}x^2 = -\dfrac{1}{4}\left(x^2 + \dfrac{2x}{4} + \dfrac{2}{4^2}\right)$

การหา $\dfrac{1}{D-4}x^3$ พิจารณาดังนี้

เพราะว่า $(D-4)x^3 = 3x^2 - 4x^3$

$$(D-4)\left(\frac{3}{4}x^2\right) = \frac{(3)(2)}{4}x - 3x^2$$

$$(D-4)\left(\frac{(3)(2)}{4^2}x\right) = \frac{(3)(2)}{4^2} - \frac{(3)(2)}{4}x$$

$$(D-4)\left(\frac{(3)(2)(1)}{4^3}\right) = -\frac{(3)(2)(1)}{4^2}$$

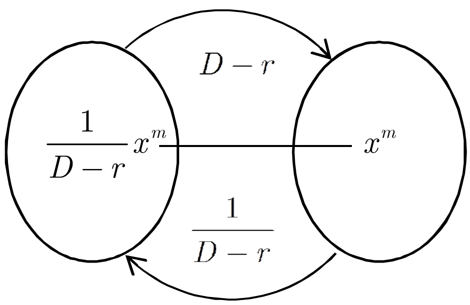
เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned}(D-4)\left(x^3 + \frac{3}{4}x^2 + \frac{(3)(2)}{4^2}x + \frac{(3)(2)(1)}{4^3}\right) &= (3x^2 - 4x^3)\left(\frac{(3)(2)}{4}x - 3x^2\right) \\ &\quad + \left(\frac{(3)(2)}{4^2} - \frac{(3)(2)}{4}x\right) + \left(-\frac{(3)(2)(1)}{4^2}\right) \\ &= -4x^3\end{aligned}$$

นั่นคือ $\dfrac{1}{D-4}x^3 = x^3 + \dfrac{3}{4}x^2 + \dfrac{(3)(2)}{4^2}x + \dfrac{(3)(2)(1)}{4^2}$

หรือ $\dfrac{1}{D-4}x^3 = -\dfrac{1}{4}\left(x^3 + \dfrac{3}{4}x^2 + \dfrac{(3)(2)}{4^2}x + \dfrac{(3)(2)(1)}{4^2}\right)$

ต่อไปพิจารณากรณีที่ $P(D) = D - r$ การหา x^m พิจารณาดังนี้



ภาพที่ 6.13 แสดงตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ $D-r$ และ $\dfrac{1}{D-r}$ ของ $g(x) = x^m$

$$
\begin{aligned}
(D-r)x^{m} &= mx^{m-1} - rx^{m} \\
(D-r)\frac{m}{r}x^{m-1} &= \frac{m(m-1)}{r}x^{m-2} - rx^{m-1} \\
(D-r)\frac{m(m-1)}{r^2}x^{m-2} &= \frac{m(m-1)(m-2)}{r^2}x^{m-3} - \frac{m(m-1)}{r}x^{m-2} \\
&\vdots \\
(D-r)\frac{m(m-1)(m-2)...3\cdot 2\cdot 1}{r^{m-1}}x &= \frac{m(m-1)(m-2)...3\cdot 2\cdot 1}{r^{m-1}} - \frac{m(m-1)(m-2)...3\cdot 2\cdot 1}{r^{m-2}}x \\
&= \frac{m!}{r^{m-1}} - \frac{m(m-1)(m-2)...3\cdot 2\cdot 1}{r^{m-2}}x \\
(D-r)\frac{m!}{r^{m}} &= -\frac{m!}{r^{m-1}}
\end{aligned}
$$

บวกสมการข้างต้นเข้าด้วยกันจะได้

$$
(D-r)\left(x^{m} + \frac{m}{r}x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{r^2}x^{m-2} + \cdots + \frac{m(m-1)(m-2)...3\cdot 2\cdot 1}{r^{m-1}}x + \frac{m!}{r^{m}}\right) = -rx^{m}
$$

เพราะฉะนั้น

$$
\frac{1}{D-r}\left(-rx^{m}\right) = x^{m} + \frac{m}{r}x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{r^2}x^{m-2} + \cdots + \frac{m(m-1)(m-2)...3\cdot 2\cdot 1}{r^{m-1}}x + \frac{m!}{r^{m}}
$$

และ

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{D-r}(x^{m}) &= \left(-\frac{1}{r}\right)\left(x^{m} + \frac{m}{r}x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{r^2}x^{m-2} + \cdots + \frac{m(m-1)(m-2)...3\cdot 2\cdot 1}{r^{m-1}}x + \frac{m!}{r^{m}}\right) \\
&= \left(-\frac{1}{r}\right)\sum_{k=0}^{m}\frac{m!\,x^{m-k}}{(m-k)!\,r^{k}}
\end{aligned}
$$

จากทฤษฎีบททวินาม $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots$ และ $\dfrac{1}{x-1} = -(1 + x + x^2 + \cdots)$

ดังนั้น $\quad \dfrac{1}{x-r} = \left(\dfrac{1}{r}\right)\left(\dfrac{1}{\left(\dfrac{x}{r}\right)-1}\right) = \left(-\dfrac{1}{r}\right)\left(1 + \dfrac{x}{r} + \left(\dfrac{x}{r}\right)^2 + \cdots\right)$

ในทำนองเดียวกัน

$$\frac{1}{D-r} = \left(-\frac{1}{r}\right)\left(1+\frac{D}{r}+\left(\frac{D}{r}\right)^2+\cdots+\left(\frac{D}{r}\right)^m+\left(\frac{D}{r}\right)^{m+1}+\cdots\right)$$

$$= \left(-\frac{1}{r}\right)\left(1+\frac{D}{r}+\frac{D^2}{r^2}+\cdots+\frac{D^m}{r^m}+\frac{D^{m+1}}{r^{m+1}}+\cdots\right)$$

$$= \left(-\frac{1}{r}\right)\left(1+\frac{1}{r}D+\frac{1}{r^2}D^2+\cdots+\frac{1}{r^m}D^m+\frac{1}{r^{m+1}}D^{m+1}+\cdots\right)$$

และ

$$\frac{1}{D-r}x^m = \left(-\frac{1}{r}\right)\left(x^m+\frac{1}{r}Dx^m+\frac{1}{r^2}D^2x^m+\cdots+\frac{1}{r^m}D^mx^m+\frac{1}{r^{m+1}}D^{m+1}x^m+\cdots\right)$$

เพราะว่า $D^{m+1}x^m = 0$ และ $D^{m+i}x^m = 0,\ i = 0,1,2,\ldots$

เพราะฉะนั้นเราทำการกระจาย $\dfrac{1}{D-r}$ จนถึงพจน์ของ D^m เท่านั้นและจะได้ว่า

$$\frac{1}{D-r}x^m = \left(-\frac{1}{r}\right)\left(x^m+\frac{1}{r}Dx^m+\frac{1}{r^2}D^2x^m+\cdots+\frac{1}{r^m}D^mx^m\right)$$

$$= \left(-\frac{1}{r}\right)\left(x^m+\frac{m}{r}x^{m-1}+\frac{m(m-1)}{r^2}x^{m-2}+\cdots+\frac{m(m-1)(m-2)\ldots3\cdot2\cdot1}{r^{m-2}}x+\frac{m!}{r^m}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{-r}\right)\sum_{k=0}^{m}\frac{m!\,x^{m-k}}{(m-k)!\,r^k}$$

ในทางปฏิบัติเราจะทำการหาค่าของ $\dfrac{1}{P(D)}$ โดยการตั้งหารยาวจนกระทั่งได้กำลังสูงสุดของ D เท่านั้นระดับขั้นของพหุนาม $g(x)$ ตัวอย่างเช่น $f(x) = x^m$ เมื่อ

$$\frac{1}{P(D)} = A_0 + A_1D + A_2D^2 + \cdots + A_mD^m$$

เพราะฉะนั้น

$$\frac{1}{P(D)}x^m = (A_0 + A_1D + A_2D^2 + \cdots + A_mD^m)x^m$$

ตัวอย่าง 6.16 จงหาผลเฉลยของสมการ

(60) $$(D^2-1)y = 3+x^4$$

วิธีทำ จากโจทย์จะพบว่า

$$y_c = c_1e^x + c_2e^{-x}$$

และ $P(D) = D^2-1$ พิจารณาค่าของ $\dfrac{1}{x^2-1}$ โดยการตั้งหารยาวดังต่อไปนี้

$$\begin{array}{r|l} & -1-x^2-x^4 \\ \hline -1+x^2 & 1 \\ & \underline{1-x^2} \\ & \quad x^2 \\ & \quad \underline{x^2-x^4} \\ & \qquad x^4 \\ & \qquad \underline{\underline{x^4-x^6}} \end{array}$$

เพราะว่าระดับขั้นของ $g(x) = 3+x^4$ มีค่าเท่ากับ 4 เพราะฉะนั้นผลหารของ $\dfrac{1}{x^2-1}$ ถึงพจน์ที่ x^4 ก็เพียงพอที่จะหา y_p ได้

จาก $\dfrac{1}{x^2-1} = -1-x^2-x^4-\cdots$

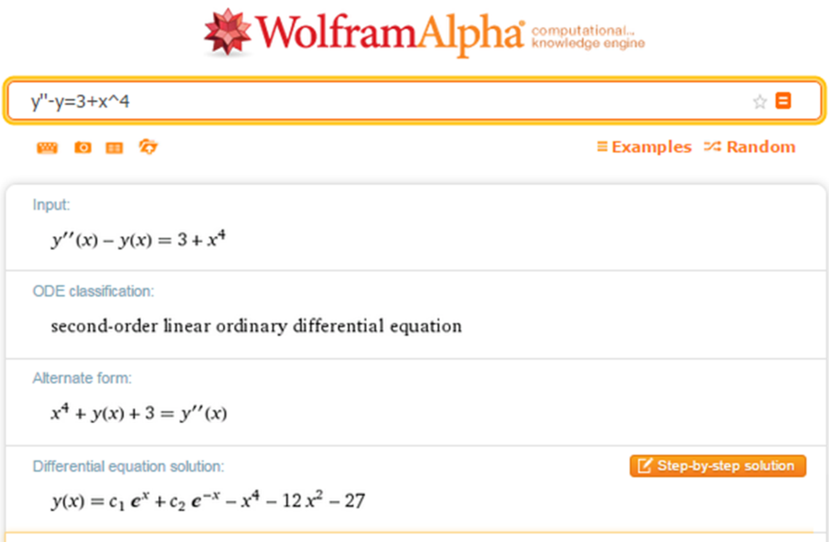
ดังนั้น $\dfrac{1}{D^2-1}g(x) = (-1-D^2-D^4)(3+x^4)$

และ $y_p = \dfrac{1}{D^2-1}g(x)$

$$\begin{aligned} y_p &= (-1-D^2-D^4)(3+x^4) \\ &= -1(3+x^4) - D^2(3+x^4) - D^4(3+x^4) \\ &= -3-x^4-12x^2-24 \\ &= -27-12x^2-x^4 \end{aligned}$$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (60) คือ $y = c_1e^x + c_2e^{-x} - 27 - 12x^2 - x^4$

ใช้ Wolfram Alpha เพื่อหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ (60) ดังภาพที่ 6.14



ภาพที่ 6.14 ผลเฉลยทั่วไปของสมการ $(D^2 - 1)y = 3 + x^4$ โดยใช้ Wolfram Alpha

ตัวอย่าง 6.17 จงหาผลเฉลยของสมการ

(61) $$(D^2 - 3D + 2)y = 1 + x - 3x^3$$

วิธีทำ จากโจทย์จะพบว่า

$$y_c = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$$

และ $P(D) = D^2 - 3D + 2$ พิจารณาค่าของ $\dfrac{1}{1 + x - 3x^3}$

โดยการตั้งหารยาวดังต่อไปนี้

$$
\begin{array}{r l}
 & \frac{1}{2}+\frac{3}{4}x+\frac{7}{8}x^2+\frac{15}{16}x^3 \\ \cline{2-2}
2-3x+x^2 \big) & \quad 1 \\
 & 1-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}x^2 \\ \cline{2-2}
 & \quad \frac{3}{2}x-\frac{1}{2}x^2 \\
 & \quad \frac{3}{2}x-\frac{9}{4}x^2+\frac{3}{4}x^3 \\ \cline{2-2}
 & \qquad \frac{7}{4}x^2-\frac{3}{4}x^3 \\
 & \qquad \frac{7}{4}x^2-\frac{21}{8}x^3+\frac{7}{8}x^4 \\ \cline{2-2}
 & \qquad\quad \frac{15}{8}x^3-\frac{7}{8}x^4 \\
 & \qquad\quad \frac{15}{8}x^3-\frac{45}{16}x^4+\frac{15}{16}x^5 \\ \hline\hline
\end{array}
$$

เพราะว่าระดับขั้นของ $g(x)=1+x-3x^3$ มีค่าเท่ากับ 3 เพราะฉะนั้นผลหารของ $\dfrac{1}{1+x-3x^3}$ ถึงพจน์ที่ x^3 ก็เพียงพอที่จะหา y_p ได้จาก

$$\frac{1}{1+x-3x^3}=\frac{1}{2}+\frac{3}{4}x+\frac{7}{8}x^2+\frac{15}{16}x^3+\cdots$$

ดังนั้น $\dfrac{1}{D^2-3D+2}g(x)=(\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{4}D+\dfrac{7}{8}D^2+\dfrac{15}{16}D^3)(1+x-3x^3)$

$$
\begin{aligned}
y_p &= \frac{1}{D^2-3D+2}g(x) \\
&= (\frac{1}{2}+\frac{3}{4}D+\frac{7}{8}D^2+\frac{15}{16}D^3)(1+x-3x^3) \\
&= \frac{1}{2}(1+x-3x^3)+\frac{3}{4}D(1+x-3x^3)+\frac{7}{8}D^2(1+x-3x^3)+\frac{15}{16}D^3(1+x-3x^3)
\end{aligned}
$$

$$= \frac{1}{2}(1 + x - 3x^3) + \frac{3}{4}(1 - 9x^2) + \frac{7}{8}(-18x) + \frac{15}{16}(-18)$$

$$= -\frac{125}{4} - \frac{61}{4}x - \frac{27}{4}x^2 - \frac{3}{2}x^3$$

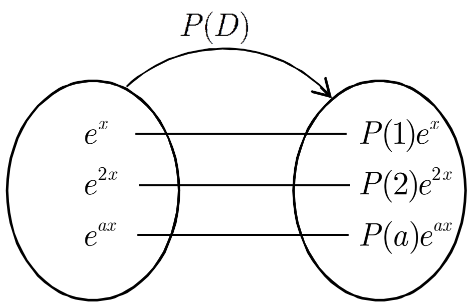
ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (61) คือ $y = c_1e^x + c_2e^{2x} - \frac{125}{4} - \frac{61}{4}x - \frac{27}{4}x^2 - \frac{3}{2}x^3$

กรณีที่2 การหาค่า $\frac{1}{P(D)}g(x)$ เมื่อ $g(x) = e^{ax}$

ตัวอย่างของสมการเชิงอนุพันธ์ $P(D)y = g(x)$ เมื่อ $g(x)$ เป็นฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล เช่น $(D^2 - 3D + 2)y = e^{3x}$, $(D^2 - 4)y = 2e^{3x} - e^x$ จากสมบัติตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ $P(D)$ ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว $P(D) = a_0D^n + a_1D^{n-1} + \cdots + a_{n-1}D + a_n$ จะได้

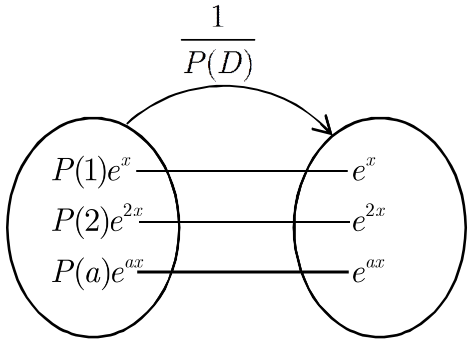
$$\begin{aligned} P(D)e^{ax} &= (a_0D^n + a_1D^{n-1} + \cdots + a_{n-1}D + a_n)e^{ax} \\ &= a_0D^ne^{ax} + a_1D^{n-1}e^{ax} + \cdots + a_{n-1}De^{ax} + a_ne^{ax} \\ &= a_0a^ne^{ax} + a_1a^{n-1}e^{ax} + \cdots + a_{n-1}ae^{ax} + a_ne^{ax} \\ &= P(a)e^{ax} \end{aligned}$$

จากสมการ $P(D)e^{ax} = P(a)e^{ax}$ ได้รูปแบบการส่งของ $P(D)$ ตามแผนภูมิดังต่อไปนี้



ภาพที่ 6.15 แสดงการส่งค่าของตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ $P(D)$

จากบทนิยามของตัวดำเนินการผกผัน $\dfrac{1}{P(D)}$ จะได้ว่า



ภาพที่ 6.16 แสดงการส่งค่าของตัวดำเนินการผกผัน $\dfrac{1}{P(D)}$

สิ่งที่เราสนใจต่อไปก็คือ $\dfrac{1}{P(D)}e^{x}$ จะมีรูปแบบเป็นอย่างไร ซึ่งแนวทางในการหาคำตอบก็จะพิจารณาเมื่อ $P(a) \neq 0$ จะได้ว่า $P(D)\dfrac{e^{ax}}{P(a)} = \dfrac{1}{P(a)}P(a)e^{ax} = e^{ax}$ เพราะฉะนั้น $\dfrac{1}{P(D)}e^{ax} = \dfrac{e^{ax}}{P(a)}$ เมื่อ $P(a) \neq 0$ (ดำรง ทิพย์โยธา, 2541 : 142)

ตัวอย่าง 6.18 จงหาผลเฉลยของสมการ

(62) $$(D^2+4)y = e^{4x}$$

วิธีทำ จากโจทย์จะพบว่า

$$y_c = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$$

และ $P(D) = D^2 + 4$

จะได้ $y_p = \dfrac{1}{P(D)}e^{4x}$

$= \dfrac{1}{P(D)}e^{4x}$

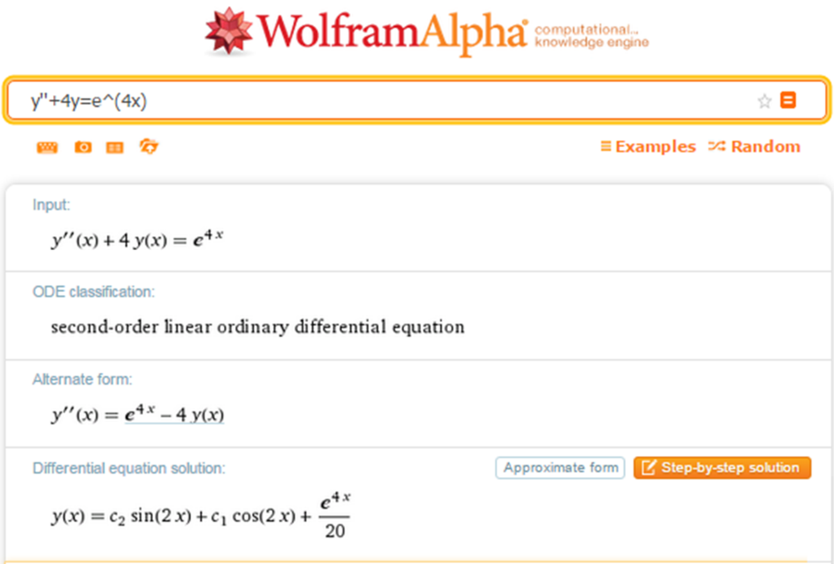
$= \dfrac{1}{P(4)}e^{4x}$

$$= \frac{e^{4x}}{4^2 + 4}$$

$$= \frac{e^{4x}}{20}$$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (62) คือ $y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \dfrac{e^{4x}}{20}$

ใช้ Wolfram Alpha เพื่อหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ (62) ดังภาพที่ 6.17



ภาพที่ 6.17 ผลเฉลยทั่วไปของสมการ $(D^2 + 4)y = e^{4x}$ โดยใช้ Wolfram Alpha

ตัวอย่าง 6.19 จงหาผลเฉลยของสมการ

(63) $$(D^2 + 4D - 5)y = 4 + 3e^{2x}$$

วิธีทำ จากโจทย์จะพบว่า

$$y_c = c_1 e^{-5x} + c_2 e^{x}$$

และ $P(D) = D^2 + 4D - 5$

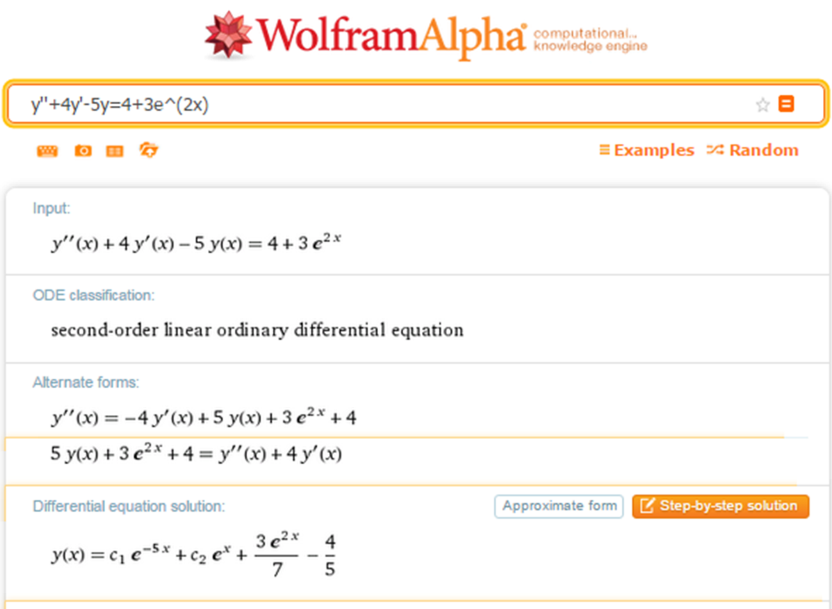
จะได้ $$y_p = \frac{1}{P(D)}(4 + 3e^{2x})$$

$$= \frac{1}{P(D)}(4) + \frac{1}{P(D)}(3e^{2x})$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{P(D)}(4e^{0x}) + \frac{1}{P(D)}(3e^{2x}) \\
&= 4\frac{1}{P(D)}(e^{0x}) + 3\frac{1}{P(D)}(e^{2x}) \\
&= \frac{4}{P(0)}(e^{0x}) + \frac{3}{P(2)}(e^{2x}) \\
&= \frac{4}{P(0)}(e^{0x}) + \frac{3}{P(2)}(e^{2x}) \\
&= \frac{4e^{0x}}{(0)^2 + 4(0) - 5} + \frac{3e^{2x}}{(2)^2 + 4(2) - 5} \\
&= -\frac{4}{5} + \frac{3}{7}e^{2x}
\end{aligned}
$$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (63) คือ $y = c_1 e^{-5x} + c_2 e^{x} - \frac{4}{5} + \frac{3}{7}e^{2x}$

ใช้ Wolfram Alpha เพื่อหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ (63) ดังภาพที่ 6.18



ภาพที่ 6.18 ผลเฉลยทั่วไปของสมการ $(D^2 + 4D - 5)y = 4 + 3e^{2x}$ โดยใช้ Wolfram Alpha

ถ้าเราต้องการหาค่าของ $\frac{1}{P(D)}e^{x}$ เมื่อ $P(a) = 0$ จากการที่ $P(a) = 0$ จะได้ว่า a เป็นรากของสมการช่วย $P(r) = 0$ ให้ k เป็นภาวะรากซ้ำของ a เพราะฉะนั้น $(r-a)^k$ เป็นตัวประกอบของ $P(r)$ และ $(D-a)^k$ เป็นตัวประกอบของ $P(D)$ ให้ $Q(D)$ เป็นพหุนามที่ทำให้

$P(D)=(D-a)^k Q(D)$ เพราะฉะนั้น $Q(a)\neq 0$ เพราะว่า $(D-a)^k(x^k e^{ak})=k!e^{ak}$
เพราะฉะนั้น $P(D)(x^k e^{ax})=Q(D)(D-a)^k(x^k e^{ax})=Q(D)k!e^{ax}=k!Q(D)e^{ax}$
เพราะว่า $P(D)\left(\dfrac{x^k e^{ax}}{Q(a)k!}\right)=\dfrac{1}{Q(a)k!}P(D)(x^k e^{ax})=\dfrac{1}{Q(a)k!}k!Q(D)(e^{ax})=e^{ax}$
ดังนั้น $\dfrac{1}{P(D)}e^{ax}=\dfrac{x^k e^{ax}}{Q(a)k!}$

ตัวอย่าง 6.20 จงหาผลเฉลยของสมการ

(64) $$(D^3-2D^2-4D+8)y=e^{2x}$$

วิธีทำ จากโจทย์จะพบว่า $y_c=c_1e^{-2x}+c_2e^{2x}+c_3xe^{2x}$
จาก $P(D)=D^3-2D^2-4D+8$
จะได้ $P(r)=r^3-2r^2-4r+8=(r+2)(r-2)^2$
เพราะว่า $P(2)=2^3-2(2)^2-4(2)+8=0$ และ $P(r)=(r+2)(r-2)^2$
เพราะฉะนั้น $P(D)=(D+2)(D-2)^2$ นั่นคือ $Q(D)=(D+2)$ และ $k=2$

ได้ $$y_p=\frac{1}{P(D)}(e^{2x})=\frac{x^2e^{2x}}{Q(2)2!}=\frac{x^2e^{2x}}{8}$$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (64) คือ $y=c_1e^{-2x}+c_2e^{2x}+c_3xe^{2x}+\dfrac{x^2e^{2x}}{8}$

การคำนวณ $\dfrac{1}{P(D)}e^{ax}=\dfrac{x^k e^{ax}}{Q(a)k!}$ เมื่อ $P(a)=0$ มีขั้นตอนการคำนวณที่สำคัญคือการหาค่าภาวะรากซ้ำของ $P(r)=0$ และการพหุนาม $Q(D)$ เพื่อความสะดวกในการคำนวณเราจึงหาแนวทางคำนวณค่าของ $Q(a)$ และค่า k พร้อมกันได้ดังนี้ จากสูตรอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

$$(gh)'=g'h+h'g$$
$$(gh)''=(g'h+h'g)'=g''h+g'h'+g'h'+gh''=g''h+2g'h'+gh''$$
$$(gh)'''=g'''h+3g''h'+3g'h''+gh''$$

ในทำนองเดียวกันจะได้ $(gh)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}g^{(n-1)}h^{(i)}$ จากการที่ $r = a$ เป็นรากที่มีภาวะซ้ำ k จะได้ $P(x) = Q(x)(x-a)^k$ ดังนั้น $\left(P(x)\right)^{(n)} = \left(Q(x)(x-a)^k\right)^{(n)}$ หรือ

$$
\begin{aligned}
P^n(x) &= \left(Q(x)(x-a)^k\right)^{(n)} \\
&= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}Q^{(n-1)}(x)\left((x-a)^k\right)^{(i)} \\
&= \binom{n}{0}Q^{(n)}(x)(x-a)^k + \binom{n}{1}Q^{(n-1)}(x)\left((x-a)^k\right)^{(1)} + \binom{n}{2}Q^{(n-2)}(x)\left((x-a)^k\right)^{(2)} + \\
&\quad \cdots + \binom{n}{n-1}Q^{(1)}(x)\left((x-a)^k\right)^{(n-1)} + \binom{n}{n}Q(x)\left((x-a)^k\right)^{(n)}
\end{aligned}
$$

เพราะว่า $P^{(n)}(a) = 0$ ทุกค่า $n = 0,1,2,\ldots,k-1$ และ $P^{(k)}(a) = Q(a)k!$

เพราะฉะนั้น $Q(a) = \dfrac{P^{(k)}(a)}{k!}$ และ $\dfrac{1}{P(D)}e^{ax} = \dfrac{x^k e^{ax}}{Q(a)k!} = \dfrac{x^k e^{ax}}{P^{(k)}(a)}$ เมื่อ a เป็นรากที่มีภาวะรากซ้ำ k รากของสมการช่วย $P(r) = 0$

สำหรับพหุนาม $p(x)$ ที่มี $x = a$ เป็นรากของสมการ $p(x) = 0$ เราสามารถตรวจสอบภาวะรากซ้ำของ a ดังนี้

ถ้า $p(a) = 0$ และ $p'(a) \neq 0$ แล้วภาวะรากซ้ำมีค่าเท่ากับ 1

ถ้า $p'(a) = 0$ และ $p''(a) \neq 0$ แล้วภาวะรากซ้ำมีค่าเท่ากับ 2

ถ้า $p''(a) = 0$ และ $p'''(a) \neq 0$ แล้วภาวะรากซ้ำมีค่าเท่ากับ 3

$\vdots$

ถ้า $p^{(k-1)}(a) = 0$ และ $p^{(k)}(a) \neq 0$ แล้วภาวะรากซ้ำมีค่าเท่ากับ k

ตัวอย่าง 6.21 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

(65) $$(D^4 - 2D^3 - 12D^2 + 40D - 32)y = e^{2x}$$

วิธีทำ จากสมการ (63) ได้ $P(D) = D^4 - 2D^3 - 12D^2 + 40D - 32$

และ $P(2) = 2^4 - 2(2)^3 - 12(2)^2 + 40(2) - 32$

เพราะฉะนั้น $r = 2$ เป็นรากของสมการช่วย $P(r) = 0$

พิจารณาภาวะราซ้ำดังต่อไปนี้

ให้ $P(r) = r^4 - 2r^3 - 12r^2 + 40r - 32$

$P'(r) = 4r^3 - 6r^2 - 24r + 40$ และ $P'(2) = 4(2)^3 - 6(2)^2 - 24(2) + 40 = 0$

$P''(r) = 12r^2 - 12r - 24$ และ $P''(2) = 12(2)^2 - 12(2) - 24 = 0$

$P''(r) = 24r - 12$ และ $P'''(2) = 24(2) - 12 = 36 \neq 0$

ดังนั้น $r = 2$ มีภาวะรากซ้ำ $k = 3$

ผลเฉลย y_p ของสมการ $P(D)y = e^{2x}$ คือ

$$y_p = \frac{1}{P(D)}e^{2x} = \frac{x^3e^{2x}}{P'''(2)} = \frac{x^3e^{2x}}{36}$$

และ $P(r) = r^4 - 2r^3 - 12r^2 + 40r - 32 = (r-2)^3(r+4)$

ได้ $y_c = (c_1 + c_2x + c_3x^2)e^{2x} + c_4e^{-4x}$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (65) คือ $y = (c_1 + c_2x + c_3x^2)e^{2x} + c_4e^{-4x} + \dfrac{x^3e^{2x}}{36}$

กรณีที่3 การหาค่า $\dfrac{1}{P(D)}g(x)$ เมื่อ $g(x) = \sin ax$ หรือ $g(x) = \cos ax$

ตัวอย่างของสมการเชิงอนุพันธ์ $P(D)y = g(x)$ เมื่อ $g(x)$ เป็นฟังก์ชันตรีโกณมิติ sine หรือ cosine เช่น

$$(D^2 - 3D + 2)y = \sin 2x$$

$$(D^2 - 4)y = \cos x + \sin 2x$$

สำหรับแนวทางในการหา $\dfrac{1}{P(D)}\sin ax$ และ $\dfrac{1}{P(D)}\cos ax$ แบ่งออกเป็น 4 วิธีดังต่อไปนี้ (ดำรง ทิพย์โยธา, 2541 : 145-153)

วิธีที่ 1 เนื่องจาก $e^{iax} = \cos ax + i\sin ax$ และ $e^{-iax} = \cos ax - i\sin ax$ เพราะฉะนั้น $\sin ax = \dfrac{e^{iax} - e^{-iax}}{2i}$ และ $\cos ax = \dfrac{e^{iax} + e^{-iax}}{2i}$ และ

$$\frac{1}{P(D)}\sin ax = \frac{1}{P(D)}\left(\frac{e^{iax} - e^{-iax}}{2i}\right)$$

$$\frac{1}{P(D)}\cos ax = \frac{1}{P(D)}\left(\frac{e^{iax} + e^{-iax}}{2i}\right)$$

ตัวอย่าง 6.22 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

(66) $$(D^2+1)y=\sin 2x$$

วิธีทำ จากสมการ (66) ได้ $P(D)=D^2+1$

และ $P(r)=r^2+1$

$P(r)=0$ เมื่อ $r=\pm i$

จะได้ผลเฉลย $y_c=c_1\cos x+c_2\sin x$

ผลเฉลย y_p ของ $P(D)y=\sin 2x$ คือ

$$\begin{aligned}
y_p &= \frac{1}{P(D)}\sin 2x \\
&= \frac{1}{P(D)}\left(\frac{e^{i2x}-e^{-i2x}}{2i}\right) \\
&= \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{P(D)}(e^{i2x}-e^{-i2x})\right) \\
&= \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{P(D)}e^{i2x}-\frac{1}{P(D)}e^{-i2x}\right) \\
&= \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{P(i2)}e^{i2x}-\frac{1}{P(-i2)}e^{-i2x}\right) \\
&= \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{-4+1}e^{i2x}-\frac{1}{-4+1}e^{-i2x}\right) \\
&= -\frac{1}{3}\left(\frac{e^{i2x}-e^{-i2x}}{2i}\right) \\
&= -\frac{1}{3}\sin 2x
\end{aligned}$$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (66) คือ $y=c_1\cos x+c_2\sin x-\frac{1}{3}\sin 2x$

วิธีที่2 เนื่องจาก $e^{iax}=\cos ax+i\sin ax$ ดังนั้

$\frac{1}{P(D)}(\cos ax+i\sin ax)=\frac{1}{P(D)}e^{iax}$ และ $\frac{1}{P(D)}\cos ax+i\frac{1}{P(D)}\sin ax=\frac{1}{P(D)}e^{iax}$

เพราะฉะนั้น $\frac{1}{P(D)}\cos ax=\mathrm{Re}\left(\frac{1}{P(D)}e^{iax}\right)$ และ $\frac{1}{P(D)}\sin ax=\mathrm{Im}\left(\frac{1}{P(D)}e^{iax}\right)$

และ

$$\frac{1}{P(D)}\cos ax = \frac{1}{P(D)}\left(\frac{e^{iax}+e^{-iax}}{2i}\right)$$

ตัวอย่าง 6.23 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

(67) $$(D^2-4D+5)y = \cos 3x$$

วิธีทำ จากสมการ (65) ได้ $P(D) = D^2-4D+5$

และ $P(r) = r^2-4r+5$

$P(r)=0$ เมื่อ $r = 2\pm i$

จะได้ผลเฉลย $y_c = (c_1\cos x + c_2\sin x)e^{2x}$

ผลเฉลย y_p ของ $P(D)y = \cos 3x$ คือ

$$\begin{aligned}
y_p &= \frac{1}{P(D)}\cos 3x \\
&= \mathrm{Re}\left(\frac{1}{P(D)}e^{i3x}\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\frac{1}{P(3i)}e^{i3x}\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\frac{1}{-4-12i}e^{i3x}\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\frac{e^{i3x}}{-4-12i}\left(\frac{-4+12i}{-4+12i}\right)\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\frac{\cos 3x + i\sin 3x}{160}(-4+12i)\right) \\
&= \frac{1}{160}\mathrm{Re}(-4+12i)(\cos 3x + i\sin 3x) \\
&= \frac{1}{160}\mathrm{Re}(-4\cos 3x - 4i\sin 3x + 12i\cos 3x - 12\sin 3x) \\
&= \frac{1}{160}(-4\cos 3x - 12\sin 3x) \\
&= \frac{1}{40}(-\cos 3x - 3\sin 3x)
\end{aligned}$$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (67) คือ

$$y = (c_1 \cos x + c_2 \sin x)e^{2x} + \frac{1}{40}(-\cos 3x - 3\sin 3x)$$

ตัวอย่าง 6.24 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

(68) $$(D^2 + 1)y = \sin 2x$$

วิธีทำ จากสมการ (64) ได้ $P(D) = D^2 + 1$

และ $P(r) = r^2 + 1$

$P(r) = 0$ เมื่อ $r = \pm i$

จะได้ผลเฉลย $y_c = c_1 \cos x + c_2 \sin x$

ผลเฉลย y_p ของ $P(D)y = \sin 2x$ คือ

$$\begin{aligned}
y_p &= \frac{1}{P(D)} \sin 2x \\
&= \mathrm{Im}\left(\frac{1}{P(D)} e^{i2x} \right) \\
&= \mathrm{Im}\left(\frac{1}{P(2i)} e^{i2x} \right) \\
&= \mathrm{Im}\left(\frac{1}{-4-1} e^{i3x} \right) \\
&= \mathrm{Im}\left(\frac{\cos 2x + i \sin 2x}{-3} \right) \\
&= -\frac{1}{3} \mathrm{Im}(\cos 2x + i \sin 2x) \\
&= -\frac{1}{3} \sin 2x
\end{aligned}$$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (68) คือ $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \dfrac{1}{3} \sin 2x$

กรณีที่4 การหาค่า $\dfrac{1}{P(D)}g(x)$ เมื่อ $g(x) = e^{ax}h(x)$

โดยใช้สมบัติของตัวดำเนินการ $P(D)$ และ $P(D+a)$ เมื่อ a เป็นค่าคงตัวและ $h(x)$ เป็นฟังก์ชันของ x จะได้ว่า

$$P(D)(e^{ax}y) = e^{ax}P(D+a)y$$

แทนค่า $y = \dfrac{1}{P(D+a)}h(x)$

จะได้ $P(D)\left(e^{ax}\left(\dfrac{1}{P(D+a)}h(x)\right)\right) = e^{ax}P(D+a)\left(\dfrac{1}{P(D+a)}h(x)\right) = e^{ax}h(x)$

นั่นคือ $\dfrac{1}{P(D)}\big(e^{ax}h(x)\big) = e^{ax}\left(\dfrac{1}{P(D+a)}h(x)\right)$

ตัวอย่าง 6.25 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

(69) $$(D^2 - 4D + 3)y = e^{3x}\sin 4x$$

วิธีทำ จากสมการ (64) ได้ $P(D) = D^2 - 4D + 3$

และ $P(r) = r^2 - 4r + 3$

$P(r) = 0$ เมื่อ $r = 1,3$

จะได้ผลเฉลย $y_c = c_1e^x + c_2e^{3x}$

จาก $P(D) = D^2 - 4D + 3$

และ
$$\begin{aligned} P(D+3) &= (D+3)^2 - 4(D+3) + 3 \\ &= D^2 + 6D + 9 - 4D - 12 + 3 \\ &= D^2 + 2D \end{aligned}$$

ผลเฉลย y_p ของ $P(D)y = e^{3x}\sin 4x$

$$\begin{aligned} y_p &= \frac{1}{P(D)}(e^{3x}\sin 4x) \\ &= e^{3x}\frac{1}{P(D+3)}(\sin 4x) \\ &= e^{3x}\left(\frac{1}{D^2+2D}\sin 4x\right) \end{aligned}$$

$$= e^{3x}\,\mathrm{Im}\left(\frac{1}{D^2+2D}e^{i4x}\right)$$

$$= e^{3x}\,\mathrm{Im}\left(\frac{1}{(4i)^2-2(4i)}e^{i4x}\right)$$

$$= e^{3x}\,\mathrm{Im}\left(\frac{\cos 4x + i\sin 4x}{-16-8i}\right)$$

$$= e^{3x}\,\mathrm{Im}\left(\frac{\cos 4x + i\sin 4x}{-16-8i}\left(\frac{-16+8i}{-16+8i}\right)\right)$$

$$= e^{3x}\,\mathrm{Im}\left(\frac{\cos 4x + i\sin 4x}{320}(-16+8i)\right)$$

$$= \frac{1}{320}e^{3x}\,\mathrm{Im}(\cos 4x + i\sin 4x)(-16+8i)$$

$$= \frac{1}{320}e^{3x}\,\mathrm{Im}(-16\cos 4x - 16i\sin 3x + 8i\cos 3x - 8\sin 3x)$$

$$= \frac{1}{320}e^{3x}(-16\sin 4x + 8\cos 4x)$$

$$= -\frac{1}{40}e^{3x}(2\sin 4x - \cos 4x)$$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (69) คือ $y = c_1e^{x} + c_2e^{3x} - \frac{1}{40}e^{3x}(2\sin 4x - \cos 4x)$ ( )

ตัวอย่าง 6.26 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

(70) $$(D^2-2D+1)y = e^{-2x}\cos x$$

วิธีทำ จากสมการ (64) ได้ $P(D) = D^2 - 2D + 1$

และ $P(r) = r^2 - 2r + 1$

$P(r) = 0$ เมื่อ $r = 1,1$

จะได้ผลเฉลย $y_c = c_1e^{x} + c_2xe^{x}$

จาก $P(D) = D^2 - 2D + 1$

และ
$$\begin{aligned} P(D-2) &= (D-2)^2 - 2(D-2) + 1 \\ &= D^2 - 4D + 4 - 2D + 4 + 1 \\ &= D^2 - 6D + 9 \end{aligned}$$

ผลเฉลย y_p ของ $P(D)y = e^{-2x}\cos x$

$$\begin{aligned}
y_p &= \frac{1}{P(D)}(e^{-2x}\cos x) \\
&= e^{-2x}\left(\frac{1}{P(D-2)}(\cos x)\right) \\
&= e^{-2x}\left(\frac{1}{D^2-6D+9}(\cos x)\right) \\
&= e^{-2x}\left(\frac{1}{-1^2-6D+9}(\cos x)\right) \\
&= e^{-2x}\left(\frac{1}{-6D+8}(\cos x)\right) \\
&= e^{-2x}\left(\left(\frac{-6D-8}{-6D-8}\right)\frac{1}{-6D+8}(\cos x)\right) \\
&= e^{-2x}\left((-6D-8)\left(\frac{1}{-6D-8}\right)\frac{1}{-6D+8}(\cos x)\right) \\
&= e^{-2x}\left((-6D-8)\left(\frac{1}{36D^2-64}\right)(\cos x)\right) \\
&= e^{-2x}\left((-6D-8)\left(\frac{\cos x}{-36(1)^2-64}\right)\right) \\
&= e^{-2x}\left((-6D-8)\left(\frac{\cos x}{-100}\right)\right) \\
&= e^{-2x}\left(-\frac{1}{100}\right)\Big((-6D-8)\cos x\Big) \\
&= e^{-2x}\left(-\frac{1}{100}\right)\Big(6\sin x-8\cos x\Big) \\
&= -\frac{e^{-2x}}{50}\Big(3\sin x-4\cos x\Big)
\end{aligned}$$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (70) คือ $y = c_1e^x + c_2xe^x - \dfrac{e^{-2x}}{50}(3\sin x - 4\cos x)$

การหาผลเฉลยเฉพาะที่มีรูปแบบเกี่ยวข้องกับฟังก์ชันพหุนาม ตรีโกณมิติ เอกซ์โพเนนเชียลในรูปแบบอื่น ๆ เราใช้การจัดรูปทางพีชคณิตหรือเอกลักษณ์ตรีโกณมิติเข้ามาช่วยหาผลเฉลยได้เช่น

$$P(D)y = \sin^2 x$$

สามารถใช้สูตร $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$ และ

$$y_p = \frac{1}{P(D)}\sin^2 x = \frac{1}{P(D)}\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)$$

ตัวอย่าง 6.27 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

(71) $$(D^2+4D+3)y = \sin^2 2x$$

วิธีทำ จากสมการ (71) ได้ $P(D) = D^2+4D+3$

และ $P(r) = r^2+4r+3$

$P(r) = 0$ เมื่อ $r = -1, -3$

จะได้ผลเฉลย $y_c = c_1e^{-x} + c_2e^{-3x}$

เนื่องจาก $\sin^2 2x = \dfrac{1-\cos 4x}{2} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\cos 4x$

$$\frac{1}{P(D)}\sin^2 2x = \frac{1}{P(D)}\frac{1}{2} - \frac{1}{P(D)}\left(\frac{1}{2}\cos 4x\right) = \frac{1}{6} - \frac{1}{2}\frac{1}{P(D)}(\cos 4x)$$

เพราะว่า
$$\begin{aligned}\frac{1}{P(D)}(\cos 4x) &= \frac{1}{D^2+4D+3}\cos 4x\\ &= \frac{1}{-(4)^2+4D+3}\cos 4x\\ &= \frac{1}{4D-13}\cos 4x\\ &= \left(\frac{4D+13}{4D+13}\right)\left(\frac{1}{4D-13}\right)\cos 4x\\ &= (4D+13)\left(\frac{1}{-16(4)^2-169}\right)\cos 4x\\ &= (4D+13)\left(\frac{\cos 4x}{-425}\right)\end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{425}(4D+13)(\cos 4x)$$

$$= -\frac{1}{425}(-16\sin 4x + 13\cos 4x)$$

$$= \frac{1}{425}(16\sin 4x - 13\cos 4x)$$

เพราะฉะนั้น

$$y_p = \frac{1}{P(D)}\sin^2 x$$

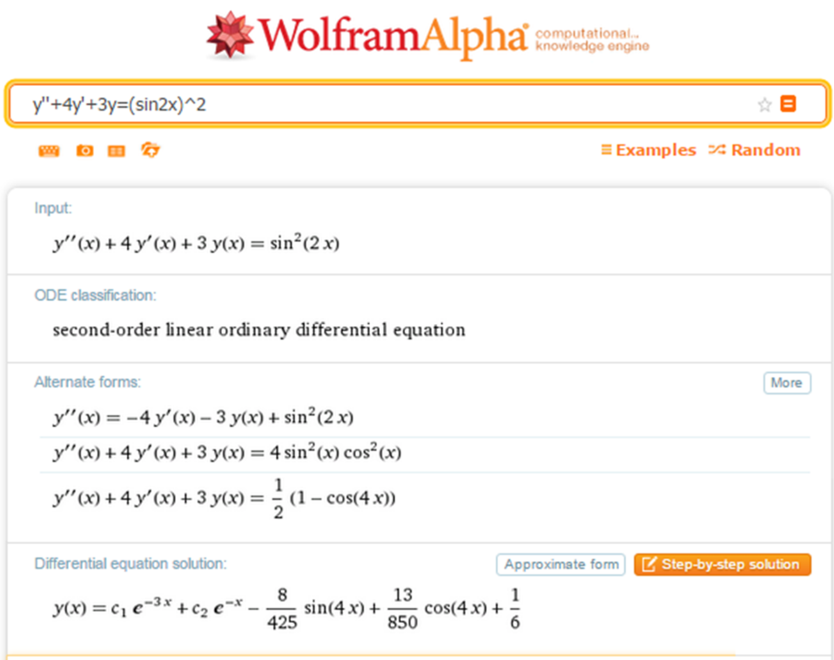
$$= \frac{1}{6} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{P(D)}(\cos 4x)\right)$$

$$= \frac{1}{6} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{425}(16\sin 4x - 13\cos 4x)\right)$$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (71) คือ

$$y = c_1e^{-x} + c_2e^{-3x} - \frac{1}{6} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{425}(16\sin 4x - 13\cos 4x)\right)$$

ใช้ Wolfram Alpha เพื่อหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ (71) ดังภาพที่ 6.19



ภาพที่ 6.19 ผลเฉลยทั่วไปของสมการ $(D^2 + 4D + 3)y = \sin^2 2x$ โดยใช้ Wolfram Alpha

6.5 สรุปท้ายบทที่ 6

สมการ $P(D)y = g(x)$ ที่เป็นสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นสามัญไม่เอกพันธุ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัวนั้นจะมีผลเฉลยทั่วไป คือ $y = y_c + y_p$ ซึ่งแบ่งการหาผลเฉลยออกเป็นสองผลเฉลยคือ y_c และ y_p สำหรับการหา y_c นั้นคือผลเฉลยทั่วไปของสมการ $P(D)y = 0$ ที่เราได้ศึกษามาแล้วในบทที่ 5 แต่สำหรับผลเฉลย y_p นั้นบางสมการก็จะมีวิธีการหาผลเฉลยที่อยู่ในรูปแบบเฉพาะ เราสามารถหาผลเฉลยได้โดยวิธีการเทียบสัมประสิทธิ์ โดยเทียบจาก $g(x)$ ดังต่อไปนี้

ถ้ามีพจน์ e^{ax} ตัวดำเนินการ $f(D)$ ต้องมีตัวประกอบหนึ่งเป็น $D - a$

ถ้ามีพจน์ xe^{ax} ตัวดำเนินการ $f(D)$ ต้องเป็นตัวประกอบหนึ่งเป็น $(D - a)^2$

ถ้ามีพจน์ $e^{ax}\cos bx$ หรือ $e^{ax}\sin bx$ ตัวดำเนินการ $f(D)$ ต้องเป็นตัวประกอบหนึ่งเป็น $\left[(D-a)^2 + b^2\right]$

ถ้ามีพจน์ $e^{ax}x\cos bx$ หรือ $e^{ax}x\sin bx$ ตัวดำเนินการ $f(D)$ ต้องเป็นตัวประกอบหนึ่งเป็น $\left[(D-a)^2 + b^2\right]^2$

แต่ถ้าฟังก์ชัน $g(x)$ มีรูปแบบอื่น ๆ เช่น $\sec x, \tan x, \cos^{-1} x$ หรืออื่น ๆ จะใช้วิธีการหา y_p โดยการแปรตัวพารามิเตอร์ เป็นวิธีใช้ได้กับฟังก์ชันทุกรูปแบบ สำหรับวิธีการหารผลเฉลย y_p ด้วยวิธีการแปรตัวพารามิเตอร์นั้นคือการใช้ผลเฉลย y_c ที่หาได้มากำหนดเป็น y_p โดยเปลี่ยนตัวคงค่าเป็นตัวแปร และบางสมการก็สามารถจัดให้อยู่ในรูปแบบที่หาผลเฉลยได้ สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นไม่เอกพันธุ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัวที่มีอันดับสูงๆ นั้นการหา y_p โดยวิธีแปรตัวพารามิเตอร์นั้นจะยุ่งยากมาก ดังนั้นจะใช้วิธีการหาผลเฉลยโดยใช้ตัวดำเนินการผกผันจากความหมายตัวดำเนินการ D และ $\frac{1}{D}$ จะได้ว่า D และ $\frac{1}{D}$ เป็นตัวดำเนินการผกผันซึ่งกันและกัน ดังนั้นในการหาผลเฉลยเฉพาะของสมการ $P(D)y = g(x)$ สามารถเขียนได้ว่า $y_p = \frac{1}{P(D)}g(x)$ โดยที่ $\frac{1}{P(D)}$ นั้นเป็นตัวดำเนินการผกผันของ $P(D)$ ซึ่งมีสมบัติว่า $P(D)\frac{1}{P(D)}g(x) = g(x)$ ดังนั้นจากสมการถ้าเอาตัวดำเนินการ $P(D)$ กระทำทางซ้ายจะได้ $P(D)y_p = P(D)\frac{1}{P(D)}g(x) = g(x)$ และสำหรับการหาค่าของ $\frac{1}{P(D)}g(x)$ เมื่อ $g(x)$ มีรูปแบบเฉพาะ เช่น $g(x)$ ป็นฟังก์ชันพหุนาม , $g(x) = e^{ax}$, $g(x) = \sin ax$ หรือ $g(x) = \cos ax$ และ $g(x) = e^{ax}h(x)$ ก็จะมีวิธีการหาผลเฉลยแต่ละรูปแบบแตกต่างกันออกไป

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 6

1. จงหาผลเฉลยทั่วไปและหาผลเฉลยเฉพาะสำหรับข้อที่กำหนดเงื่อนไขเริ่มต้นมาให้ ของสมการต่อไปนี้โดยวิธีเทียบสัมประสิทธิ์

   1.1 $(D^2 - 6D + 9)y = e^x$

   1.2 $(D^2 + 3D + 2)y = 1 + 3x + x^2$

   1.3 $(D^2 + D)y = -\cos x$

   1.4 $(D^2 - 1)y = 8xe^x$

   1.5 $(D^2 + 9)y = 5e^x - 12x$

   1.6 $(D^3 - D)y = x$

   1.7 $(D^2 + 1)y = 10e^{2x}$ เมื่อกำหนด $y(0) = 0, y'(0) = 1$

   1.8 $(D^2 - 4)y = 2 - 8x$ เมื่อกำหนด $y(0) = 1, y'(1) = 0$

   1.9 $(D^2 - 3D)y = 9x$ เมื่อกำหนด $y(0) = 0, y'(0) = 2$

2. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการต่อไปนี้โดยวิธีแปรตัวพารามิเตอร์

   2.1 $(D^2 - 1)y = e^x + 1$

   2.2 $(D^2 + 1)y = \sec^3 x$

   2.3 $(D^2 - 2D + 1)y = e^{2x}(e^x + 1)^{-2}$

   2.4 $(D^3 - 2D^2 - D + 2)y = e^{4x}$

   2.5 $(D^2 + 1)y = \sin^2 x$

   2.6 $(D^3 - D)y = e^x$

3. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการต่อไปนี้โดยใช้ตัวดำเนินการผกผัน

   3.1 $(D^2 - 2D - 2)y = x^2 - x$

   3.2 $(D^2 - 4D + 4)y = x^2e^{2x}$

   3.3 $(D^3 - D^2 - 5D - 3)y = 2e^{-x} + 4e^{4x}$

   3.4 $(D^3 - 3D^2 + 4)y = e^{3x}$

   3.5 $(D^4 + D^2 + 16)y = 16x^2 + 256$

   3.6 $(D - 2)^4 y = e^x$

4. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการต่อไปนี้

   4.1 $(D^2 - D - 2)y = 2x^2 + 5$

   4.2 $(D^2 - 2D + 10)y = 3e^{2x} - 5e^{3x}$

   4.3 $(D^2 + 6D + 10)y = 8e^{x}\sin x$

   4.4 $(D^3 - 3D^2 + 4)y = e^{3x}$

   4.5 $(D^2 + 1)y = \cos x$

   4.6 $(D^2 + 1)y = \sin 2x$

   4.7 $(D^2 + 1)y = e^{3x}\sin x$

   4.8 $(D^2 - 2D + 5)y = e^{x}\sin x$

บทที่ 7
สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปร

ในบทที่ผ่านมานั้นเราได้หาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นเอกพันธุ์ และไม่เอกพันธุ์ที่มีสัมประสิทธ์เป็นค่าคงตัวไปแล้วนั้น สำหรับในบทนี้จะเป็นการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปร โดยเริ่มจากสมการโคชี – ออยเลอร์ ซึ่งเป็นสมการที่มีรูปแบบเฉพาะสามารถแปลงเป็นสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัวได้ แต่ถ้าสมการไม่ได้อยู่ในรูปแบบเฉพาะแล้ว อาจจะใช้วิธีการลดอันดับของสมการลงทีละหนึ่งเพื่อให้ได้ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ได้ออกมาได้เช่นกัน หรือบางครั้งถ้าสมการเชิงอนุพันธ์ไม่สามารถหาผลเฉลยในรูปของ ฟังก์ชันพีชคณิต ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน ฟังก์ชันชี้กำลัง หรือฟังก์ชันลอกาลิทึม เพราะฉะนั้นจึงมีวิธีการหาผลเฉลยแบบอนุกรม นั่นคือ การหาผลเฉลยรอบจุดสามัญ และผลเฉลยรอบจุดเอกฐาน

7.1 สมการโคชี – ออยเลอร์

สมการโคชี – ออยเลอร์ เป็นสมการที่อยู่ในรูป (ดำรง ทิพย์โยธา, 2541 : 475-476)

(1) $$a_0x^n\frac{d^ny}{dx^n}+a_1x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}x\frac{dy}{dx}+a_ny=F(x)$$

โดยที่ $a_0, a_1, \ldots, a_n$ เป็นค่าคงตัว

แก้สมการ (1) โดยการแปลง $x=e^t$ ซึ่งจะเปลี่ยนสมการ (1) ให้เป็นสมการเชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัวได้ ดังจะแสดงการพิสูจน์เมื่อ $n=2$ สำหรับกรณีที่ $n>2$ การพิสูจน์ก็จะเป็นทำนองเดียวกัน

(2) $$a_0x^2\frac{d^2y}{dx^2}+a_1x\frac{dy}{dx}+a_2y=F(x)$$

ให้ $x=e^t$ ซึ่ง $x>0$ ดังนั้น $t=\ln x$ และ $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$ โดยกฎลูกโซ่จะได้

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}$$

หรือ

(3) $$x\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}$$

และ

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

$$=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}\right)$$

$$=\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right)+\frac{dy}{dt}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$=\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right)-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}$$

$$=\frac{1}{x}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)\frac{dt}{dx}\right]-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}$$

$$=\frac{1}{x}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)\frac{1}{x}\right]-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}$$

$$=\frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}$$

$$=\frac{1}{x^2}\left[\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right]$$

หรือ

(4) $$x^2\frac{d^2y}{dx^2}=\left[\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right]$$

แทนสมการ (3) และ (4) ในสมการ (2) จะได้

$$a_0\left[\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right]+a_1\frac{dy}{dt}+a_2y=F(e^t)$$

หรือ

(5) $$A\frac{d^2y}{dt^2}+B\frac{dy}{dt}+Cy=G(t)$$

เมื่อ $A=a_0, B=a_1-a_0, C=a_2$ และ $F(e^t)=G(t)$

ซึ่งสมการ (5) เป็นสมการเชิงเส้นอันดับสองที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว

ข้องสังเกต 7.1

ในการแทนค่า $x = e^t$ เรากำหนดว่า $x > 0$ ถ้า $x < 0$ จะแทนค่า $x = -e^t$ ถ้าโจทย์ไม่กำหนดเงื่อนไขของ x ให้ถือว่า $x > 0$ สำหรับ $x = 0$ จะไม่พิจารณาเพราะว่าสมการที่กำหนดมาจะไม่เป็นสมการเชิงอนุพันธ์

ตัวอย่าง 7.1 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

(6) $$x^2y'' - 3xy' + 3y = 0$$

วิธีทำ สมการที่กำหนดมาเป็นสมการ โคชี – ออยเลอร์ จะต้องเปลี่ยนให้เป็นสมการเชิงเส้นแบบเอกพันธุ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่างคังตัว ดังนั้นให้ $x = e^t$ ซึ่ง $x > 0$ และ $\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{x}$ โดยกฎลูกโซ่จะได้

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dt}$$

หรือ

(7) $$x\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}$$

และ

$$\begin{aligned}
\frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) \\
&= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}\right) \\
&= \frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right) + \frac{dy}{dt}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) \\
&= \frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right) - \frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} \\
&= \frac{1}{x}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)\frac{dt}{dx}\right] - \frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} \\
&= \frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} \\
&= \frac{1}{x^2}\left[\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right]
\end{aligned}$$

หรือ

(8) $$x^2\frac{d^2y}{dx^2}=\left[\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right]$$

แทนสมการ (7) และ (8) ในสมการ (6) จะได้

$$\left[\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right]-3\frac{dy}{dt}+3y=e^{3t}$$

หรือ

(9) $$\frac{d^2y}{dt^2}-4\frac{dy}{dt}+3y=0$$

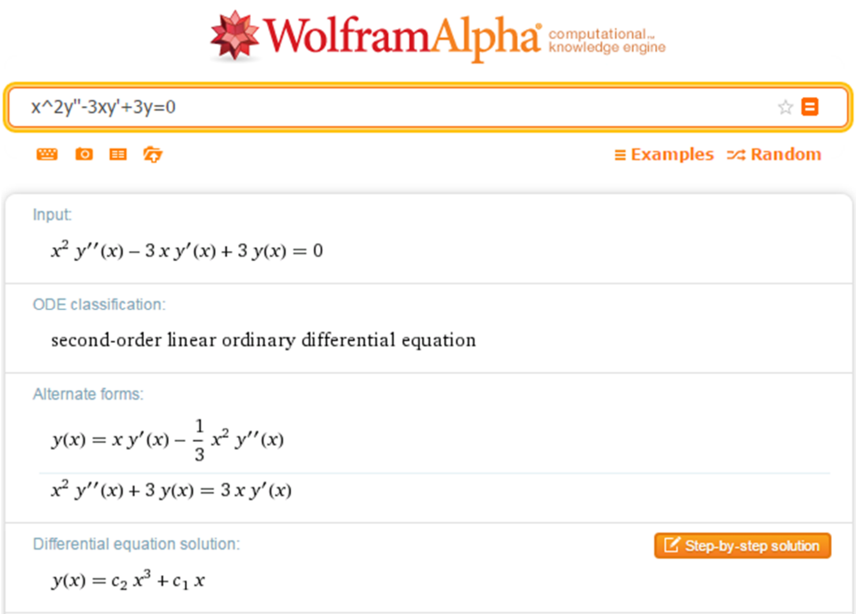
สมการ (9) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นเอกพันธุ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว ที่มีผลเฉลย

(10) $$y=c_1e^t+c_2e^{3t}$$

แทนค่า $x=e^t$ ในสมการ (10) จะได้ $y=c_1x+c_2x^3$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (6) คือ $y=c_1x+c_2x^3$

ใช้ Wolfram Alpha เพื่อหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ (6) ดังภาพที่ 7.1



ภาพที่ 7.1 ผลเฉลยของสมการ $x^2y''-3xy'+3y=0$ โดยใช้ Wolfram Alpha

ตัวอย่าง 7.2 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

(11) $$x^2\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+2y=x^3$$

วิธีทำ สมการที่กำหนดมาเป็นสมการ โคชี – ออยเลอร์ จะต้องเปลี่ยนให้เป็นสมการเชิงเส้นแบบไม่เอกพันธุ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว ดังนั้นให้ $x=e^t$ ซึ่ง $x>0$ และ $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$ โดยกฎลูกโซ่จะได้

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}$$

หรือ

(12) $$x\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}$$

และ

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2}&=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)\\&=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}\right)\\&=\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right)+\frac{dy}{dt}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)\\&=\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right)-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}\\&=\frac{1}{x}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)\frac{dt}{dx}\right]-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}\\&=\frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}\\&=\frac{1}{x^2}\left[\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right]\end{aligned}$$

หรือ

(13) $$x^2\frac{d^2y}{dx^2}=\left[\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right]$$

แทนสมการ (12) และ (13) ในสมการ (11) จะได้

$$\left[\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right]-2\frac{dy}{dt}+2y=e^{3t}$$

หรือ

(14) $$\frac{d^2y}{dt^2}-3\frac{dy}{dt}+2y=e^{3t}$$

สมการ (14) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นไม่เอกพันธุ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัวที่มีผลเฉลย

(15) $$y_c=c_1e^t+c_2e^{2t}$$

และ

(16) $$y_p=c_3e^{3t}$$

ดังนั้น $y_p'=3c_3e^{3t}$ และ $y_p''=9c_3e^{3t}$ นำไปแทนในสมการ (14) จะได้

$$9c_3e^{3t}-3(3c_3e^{3t})+2c_3e^{3t}=e^{3t}$$

หรือ

$$2c_3e^{3t}=e^{3t}$$

$$c_3=\frac{1}{2}$$

แทนในสมการ (16) จะได้

(17) $$y_p=\frac{1}{2}e^{3t}$$

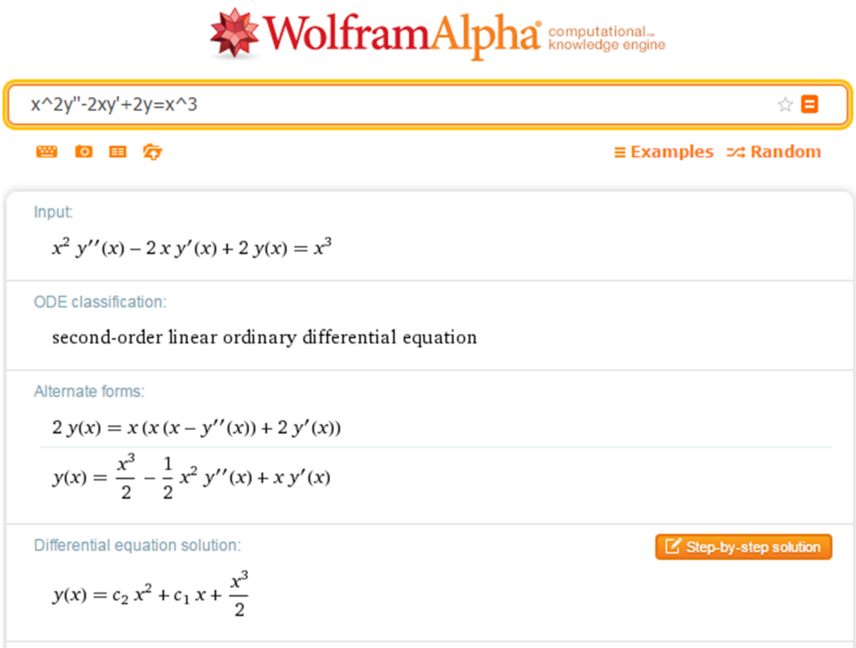
ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปของสมการ (14) คือ

(18) $$y=c_1e^t+c_2e^{2t}+\frac{1}{2}e^{3t}$$

แทนค่า $x=e^t$ ในสมการ (18) จะได้ $y=c_1x+c_2x^2+\frac{1}{2}x^3$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (11) คือ $y=c_1x+c_2x^2+\frac{1}{2}x^3$

ใช้ Wolfram Alpha เพื่อหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ (11) ดังภาพที่ 7.2



ภาพที่ 7.2 ผลเฉลยของสมการ $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2x\dfrac{dy}{dx} + 2y = x^3$ โดยใช้ Wolfram Alpha

ตัวอย่าง 7.3 จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการ

(19) $$x^2y'' + 4xy' + 2y = 0$$

เมื่อกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้น $y(1) = 0\,,\ y'(1) = 2$

วิธีทำ สมการที่กำหนดมาเป็นสมการ โคชี – ออยเลอร์ จะต้องเปลี่ยนให้เป็นสมการเชิงเส้นแบบเอกพันธุ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว ดังนั้นให้ $x = e^t$ ซึ่ง $x > 0$ และ $\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{x}$ โดยกฎลูกโซ่จะได้

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dt}$$

หรือ

(20) $$x\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}$$

และ

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}\right)$$

$$= \frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right) + \frac{dy}{dt}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right) - \frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}$$

$$= \frac{1}{x}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)\frac{dt}{dx}\right] - \frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}$$

$$= \frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}$$

$$= \frac{1}{x^2}\left[\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right]$$

หรือ

(21) $$x^2\frac{d^2y}{dx^2} = \left[\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right]$$

แทนสมการ (20) และ (21) ในสมการ (19) จะได้

$$\left[\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right] + 4\frac{dy}{dt} - 2y = 0$$

หรือ

(22) $$\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} - 2y = 0$$

สมการ (22) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นเอกพันธุ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว ที่มีผลเฉลยทั่วไป คือ

(23) $$y = c_1e^{-t} + c_2e^{-2t}$$

แทนค่า $x = e^t$ ในสมการ (23) จะได้ ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (19) คือ

(24) $$y = c_1x^{-1} + c_2x^{-2}$$

และ

(25) $$y' = -c_1 x^{-1} - 2c_2 x^{-2}$$

แทนเงื่อนไขเริ่มต้น $y(1) = 0$, $y'(1) = 2$ ในสมการ (24) และ (25) ได้

$$c_1 + c_2 = 0$$
$$-c_1 - 2c_2 = 0$$

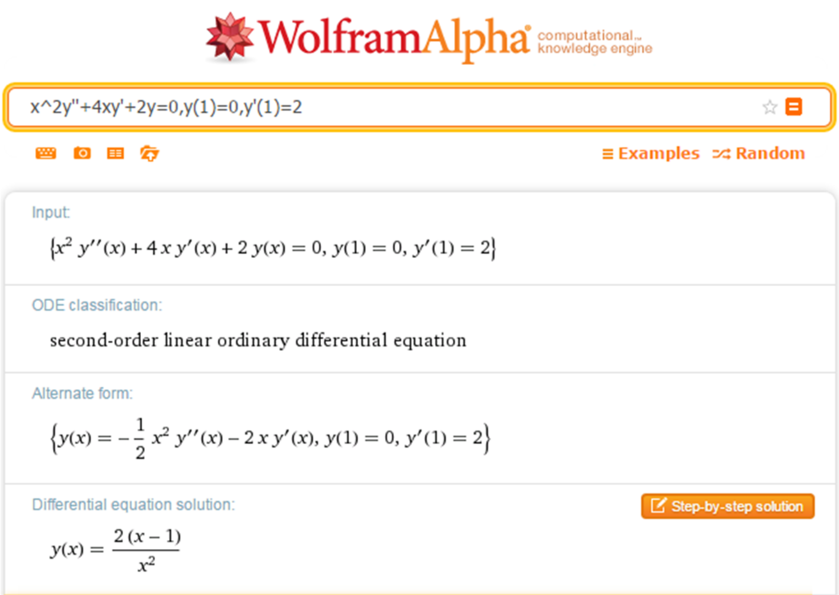
จะได้

$$c_1 = 2$$
$$c_2 = -2$$

แทนค่า $c_1 = 2, c_2 = -2$ ในสมการ (24) จะได้ $y = 2x^{-1} - 2x^{-2}$ หรือ $y = \dfrac{2x-1}{x^2}$

ดังนั้น ผลเฉลยเฉพาะของสมการ (19) คือ $y = \dfrac{2x-1}{x^2}$

ใช้ Wolfram Alpha เพื่อหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ (19) ดังภาพที่ 7.3



ภาพที่ 7.3 ผลเฉลยของสมการ $x^2y'' + 4xy' + 2y = 0$ โดยใช้ Wolfram Alpha

ตัวอย่าง 7.4 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

(26) $$x^3y''' - 4x^2y'' + 8xy' - 8y = 4\ln x$$

วิธีทำ สมการที่กำหนดมาเป็นสมการ โคชี – ออยเลอร์ จะต้องเปลี่ยนให้เป็นสมการเชิงเส้นแบบไม่เอกพันธุ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว ดังนั้นให้ $x = e^t$ ซึ่ง $x > 0$ และ $\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{x}$

โดยกฎลูกโซ่จะได้

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dt}$$

หรือ

(27) $$x\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}$$

และ

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x^2}\left[\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right]$$

หรือ

(28) $$x^2\frac{d^2y}{dx^2} = \left[\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right]$$

และ

$$\begin{aligned}
\frac{d^3y}{dx^3} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) \\
&= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2}\left[\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right]\right) \\
&= \frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}\left[\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right] + \left[\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right]\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2}\right) \\
&= \frac{1}{x^2}\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) - \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right)\right] - \frac{2}{x^3}\left[\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right] \\
&= \frac{1}{x^2}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)\frac{dt}{dx} - \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right)\frac{dt}{dx}\right] - \frac{2}{x^3}\left[\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right] \\
&= \frac{1}{x^3}\left[\frac{d^3y}{dt^3} - \frac{d^2y}{dt^2}\right] - \frac{2}{x^3}\left[\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right] \\
&= \frac{1}{x^3}\left[\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\right]
\end{aligned}$$

หรือ

(29) $$x^3\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d^3y}{dt^3}-3\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}$$

แทนสมการ (27),(28) และ (29) ในสมการ (26) จะได้

$$\left(\frac{d^3y}{dt^3}-3\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}\right)-4\left[\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right]+8x\frac{dy}{dt}-8y=4t$$

หรือ

(30) $$\frac{d^3y}{dt^3}-7\frac{d^2y}{dt^2}+14\frac{dy}{dt}-8y=4t$$

สมการ (30) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นไม่เอกพันธุ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว ที่มีผลเฉลย

$$y_c=c_1e^t+c_2e^{2t}+c_3e^{4t}$$

หาผลเฉลย y_p ของสมการ (30) โดยวิธีเทียบสัมประสิทธิ์จะได้

$$y_p=-\frac{1}{2}t-\frac{7}{8}$$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปของสมการของสมการ (30) คือ

$$y=c_1e^t+c_2e^{2t}+c_3e^{4t}-\frac{1}{2}t-\frac{7}{8}$$

แทนค่า $x=e^t$ ในสมการ (30) จะได้ $y=c_1x+c_2x^2+c_3x^4-\frac{1}{2}\ln x-\frac{7}{8}$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (26) คือ $y=c_1x+c_2x^2+c_3x^4-\frac{1}{2}\ln x-\frac{7}{8}$

7.2 การลดอันดับสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับ n

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการหาผลเฉลยของสมการเชิงเส้นอันดับ n โดยการลดอันดับของสมการลงทีละหนึ่ง (วารี เกตรอ, 2542 :122-124)

ทฤษฎีบท 7.1

ให้ $f(x) \neq 0$ และเป็นผลเฉลยของสมการอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับที่ n ต่อไปนี้

(31) $$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = 0$$

เมื่อแทน $y = f(x)v$ ในสมการแล้วสมการ (31) จะเปลี่ยนสมการเชิงเส้นอันดับ $n-1$ ของตัวแปรตาม $w = \dfrac{dv}{dx}$

จากทฤษฎีบท 7.1 พิจารณาการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับ 2 ได้ดังต่อไปนี้

กำหนด

(32) $$a_0(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_2(x)y = 0$$

ที่มี $f(x)$ ที่ $f(x) \neq 0$ เป็นผลเฉลยของสมการ (32) แทน $y = f(x)v$ ในสมการ (32) ได้

$$a_0(x)\frac{d^2}{dx^2}\left[f(x)v\right] + a_1(x)\frac{d}{dx}\left[f(x)v\right] + a_2(x)\left[f(x)v\right] = 0$$

หรือ

(33) $$a_0(x)f(x)\frac{d}{dx}\left(\frac{dv}{dx}\right) + \left[2a_0(x)\frac{d}{dx}\left[f(x)\right] + a_1(x)f(x)\right]\left(\frac{dv}{dx}\right) = 0$$

และให้ $w = \dfrac{dv}{dx}$ แทนในสมการ (33) จะได้

(34) $$a_0(x)f(x)\frac{dw}{dx} + \left[2a_0(x)\frac{d}{dx}\left[f(x)\right] + a_1(x)f(x)\right]w = 0$$

จะได้ว่าผลเฉลยเฉพาะผลเฉลยหนึ่งของสมการ (34) คือ

(35) $$w = \frac{\exp\left[-\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx\right]}{\left[f(x)\right]^2}$$

ให้ $g(x) = f(x)v(x)$ เป็นผลเฉลยของสมการ (32) ที่เป็นอิสระเชิงเส้นกับ $f(x)$ เมื่อ $v(x) = \int w(x)\,dx$

เนื่องจาก $f(x)$ เป็นผลเฉลยของสมการ (32) จึงได้ว่า

(36) $$a_0(x)f''(x) + a_1(x)f'(x) + a_2(x)f(x) = 0$$

จากสมการ (34) จัดรูปสมการใหม่ได้

(37) $$\frac{dw}{dx} + \frac{\left[2a_0(x)\frac{d}{dx}\left[f(x)\right] + a_1(x)f(x)\right]w}{a_0(x)f(x)} = 0$$

สมการ (37) เป็นสมการเชิงเส้น ที่มีตัวประกอบปริพันธ์ คือ

$$\begin{aligned}
\exp\left[\int \frac{2a_0(x)\frac{d}{dx}\left[f(x)\right] + a_1(x)f(x)}{a_0(x)f(x)}\,dx\right] &= \exp\left[2\int \frac{df(x)}{f(x)}\,dx + \int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}\,dx\right] \\
&= \exp\left[\ln\left(f(x)\right)^2\right]\exp\left[\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}\,dx\right] \\
&= \left[f(x)\right]^2 \exp\left[\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}\,dx\right]
\end{aligned}$$

นำตัวประกอบปริพันธ์คูณตลอดสมการ (37) ได้

$$\left[f(x)\right]^2 \exp\left[\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}\,dx\right]\left(\frac{dw}{dx} + \frac{\left[2a_0(x)\frac{d}{dx}\left[f(x)\right] + a_1(x)f(x)\right]w}{a_0(x)f(x)}\right) = 0$$

หรือ

(38) $$d\left(w\left[f(x)\right]^2 \exp\left[\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}\,dx\right]\right) = 0$$

หาปริพันธ์ตลอดสมการ (38) ได้

$$w\left[f(x)\right]^2 \exp\left[\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}\,dx\right] = c$$

หรือ

(39)
$$w = \frac{c\exp\left[-\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}\,dx\right]}{\left[f(x)\right]^2}$$

ถ้าเลือก $c = 1$ จะได้ w มีค่าเท่ากับสมการ (35)

ตรวจสอบ $f(x)$ และ $g(x)$ เป็นอิสระเชิงเส้นหรือไม่โดยการใช้รอนสเกียนดังนี้

$$\begin{aligned}
W(x : f(x), g(x)) &= \begin{vmatrix} f(x) & f(x)v \\ f_1'(x) & f(x)v' + f'(x)v \end{vmatrix} \\
&= f(x)\left[f(x)v' + f'(x)v\right] - f_1'(x)\ f(x)v \\
&= \left[f(x)\right]^2 v' \\
&= \left[f(x)\right]^2 w \\
&= \left[f(x)\right]^2 \left(\frac{\exp\left[-\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}\,dx\right]}{\left[f(x)\right]^2}\right) \\
&= \exp\left[-\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}\,dx\right] \neq 0
\end{aligned}$$

ดังนั้น $f(x)$ และ $g(x)$ เป็นผลเฉลยที่เป็นอิสระเชิงเส้นกันของสมการ (32)

ตัวอย่าง 7.5 กำหนดให้ $y = x$ เป็นผลเฉลยหนึ่งของสมการ

(40)
$$(x^2 + 1)y'' - 2xy' + 2y = 0$$

จงหาอีกผลเฉลยหนึ่งที่เป็นอิสระเชิงเส้นกันโดยวิธีการลดอันดับ

วิธีทำ $y = x$ เป็นผลเฉลยหนึ่งของสมการ (40) และ

กำหนดให้ $y = g(x)$ เป็นอีกผลเฉลยหนึ่งของสมการ (40)

ให้ $y = vx$ ดังนั้น

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{dv}{dx} + v$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = x\frac{d^2v}{dx^2} + 2\frac{dv}{dx}$$

แทนค่า $\frac{dy}{dx}$ และ $\frac{d^2y}{dx^2}$ ในสมการ (40) จะได้

$$(x^2+1)\left[x\frac{d^2v}{dx^2} + 2\frac{dv}{dx}\right] - 2x\left[x\frac{dv}{dx} + v\right] + 2vx = 0$$

หรือ

(41) $$x(x^2+1)\frac{d^2v}{dx^2} + 2\frac{dv}{dx} = 0$$

ให้ $w = \frac{dv}{dx}$ แทนในสมการ (41) จะได้

$$x(x^2+1)\frac{dw}{dx} + 2w = 0$$

จัดสมการ ให้อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์แบบแยกกันได้ ดังต่อไปนี้

(42) $$\frac{1}{w}dw = \frac{2}{x(x^2+1)}dx$$

ทำสมการ (42) เป็นเศษส่วนย่อย จะได้

(43) $$\frac{1}{w}dw = \left[-\frac{2}{x} + \frac{2x}{x^2+1}\right]dx$$

หาปริพันธ์ตลอดสมการ (43) จะได้

$$\int\frac{1}{w}dw = \int\left[-\frac{2}{x} + \frac{2x}{x^2+1}\right]dx$$

$$\ln w = -2\ln x + \ln(x^2+1) + \ln c_1$$

$$\ln w = \ln x^{-2}(x^2+1)c_2$$

$$w = \frac{(x^2+1)c}{x^2}$$

ถ้าเลือก $c = 1$ จะได้

$$w = \frac{x^2+1}{x^2}$$

หรือ

(44) $$\frac{dv}{dx} = \frac{x^2+1}{x^2}$$

หาปริพันธ์ตลอดสมการ (44) จะได้

$$v = x - \frac{1}{x}$$

จาก $g(x) = vx$ ดังนั้น $g(x) = x\left(x - \frac{1}{x}\right)$

หรือ

$$g(x) = x^2 - 1$$

ตรวจสอบ $f(x)$ และ $g(x)$ เป็นอิสระเชิงเส้นหรือไม่โดยการใช้รอนสเกียนดังนี้

$$W(x : f(x), g(x)) = \begin{vmatrix} x & x^2-1 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = x^2 + 1 \neq 0$$

ดังนั้น $g(x) = x^2 - 1$ เป็นอีกผลเฉลยหนึ่งของสมการ (40)

7.3 ผลเฉลยแบบอนุกรมของสมการเชิงเส้น

การหาผลเฉลยของสมการเชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปร นอกจากที่กล่าวในเรื่องของสมการโคชี – ออยเลอร์ แล้วยังมีสมการเชิงอนุพันธ์บางรูปแบบที่ไม่สามารถหาผลเฉลยของสมการได้โดยวิธีที่ได้ศึกษามาแล้วในหัวข้อที่ผ่านมา และสมการเชิงอนุพันธ์นั้นบางสมการนั้นเราทราบจากทฤษฎีบทของการมีผลเฉลยแล้วว่าสมการนั้นมีผลเฉลย แต่ไม่สามารถหาผลเฉลยในรูปของ ฟังก์ชันพีชคณิต ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน ฟังก์ชันชี้กำลัง หรือฟังก์ชันลอกาลิทึมได้

เพราะฉะนั้นจึงมีวิธีการหาผลเฉลยแบบอนุกรม ซึ่งการหาผลเฉลยแบบอนุกรมนี้จะเป็นวิธีที่ดีที่สุดในการหาผลเฉลยของสมการเชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปร (ศิริพร พัสดร, 2552 : 209)

7.3.1 จุดสามัญ และจุดเอกฐาน

ก่อนที่จะไปหาผลเฉลยในวิธีการนี้นั้นจะกล่าวถึงบทนิยามต่าง ๆ ที่สำคัญ และเป็นประโยชน์สำหรับการหาผลเฉลย ดังต่อไปนี้ (วารี เกตรอ, 2542 : 133- 134)

บทนิยาม 7.1

อนุกรมกำลัง คืออนุกรมที่อยู่ในรูป

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

สำหรับทุกค่าจริง x และ a_n เป็นค่าคงตัวสำหรับทุก ๆ n และเรียก a_n ว่า**สัมประสิทธิ์** และเรียนกอนุกรมกำลังที่อยู่ในรูป

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots$$

ว่า **อนุกรมกำลังรอบจุด** x_0 โดยที่ x_0 ค่าคงตัวและเรียก x_0 ว่า **จุดศูนย์กลางของการกระจาย**

บทนิยาม 7.2

ให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ทุกอันดับ ณ จุด x_0 เรียกอนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ ว่า**อนุกรมเทเลอร์**ของฟังก์ชัน f ณ จุด x_0 และถ้า $x_0 = 0$ เรียกอนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ ว่า**อนุกรมแมคคลอรีน**

บทนิยาม 7.3

อนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ จะ**ลู่เข้า**สู่ x ถ้า $\lim_{x\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ มีจริงสำหรับ x นั้น ๆ แต่การลู่เข้าของอนุกรม ขณะ $x = x_0$ นั้นอาจลู่เข้าสำหรับทุกค่า x หรืออาจลู่เข้าสำหรับบางค่าของ x หรือไม่มีการลู่เข้า

บทนิยาม 7.4

f เป็น**ฟังก์ชันวิเคราะห์**ที่ x_0 ถ้าอนุกรมเทเลอร์รอบจุด x_0 มีอยู่และลู่เข้าสู่ $f(x)$ สำหรับทุก x ในบางช่วงเปิดที่บรรจุ x_0

ตัวอย่างของฟังก์ชันวิเคราะได้ทุกจุดได้แก่ พหุนาม $e^x, \sin x, \cos x$ สำหรับฟังก์ชันตรรกยะของฟังก์ชันวิเคราะห์ได้ที่จุดทุกจุดจะยังเป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ได้ยกเว้นที่จุดซึ่งส่วนเป็นศูนย์ เช่น ฟังก์ชัน $\dfrac{1}{x^2-4x+3}$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ทุกจุดยกเว้นที่จุด $x=1$ และ $x=3$

พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับ 2 ต่อไปนี้

(45) $$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$$

คูณ $\dfrac{1}{a_0(x)}$ ตลอดสมการ (45) จะได้

$$y'' + \frac{a_1(x)}{a_0(x)}y' + \frac{a_2(x)}{a_0(x)}y = 0$$

หรือ

(46) $$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

เมื่อ $\dfrac{a_1(x)}{a_0(x)} = P(x)$ และ $\dfrac{a_2(x)}{a_0(x)} = Q(x)$

บทนิยาม 7.5

จะกล่าวว่า จุด x_0 เป็น**จุดสามัญ**ของสมการ (46) ถ้าฟังก์ชัน P และ Q ในสมการ (46) ต่างก็วิเคราะห์ได้ที่ x_0 แต่ถ้าฟังก์ชันใดฟังก์ชันหนึ่งหรือทั้งสองฟังก์ชันไม่เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่ x_0 จะกล่าวว่า x_0 เป็น**จุดเอกฐาน** ของสมการ (46)

ตัวอย่าง 7.6 พิจารณาสมการ

(47) $$y'' + xy' + (x^2 + 2)y = 0$$

วิธีทำ จากสมการ (47) $P(x) = x$ และ $Q(x) = x^2 + 2$
เนื่องจาก P และ Q เป็นพหุนาม ดังนั้น P และ Q วิเคราะห์ได้ทุกจุดที่เป็นจำนวนจริง เพราะฉะนั้นจำนวนจริงทุกจำนวนเป็นจุดสามัญของสมการ (47)

ตัวอย่าง 7.7 พิจารณาสมการ

(48) $$(x-1)y'' + xy' + \frac{1}{x}y = 0$$

วิธีทำ คูณ $\dfrac{1}{x-1}$ ตลอดสมการ (48) ได้

(49) $$y'' + \frac{x}{x-1}y' + \frac{1}{x(x-1)}y = 0$$

จากสมการ (49) $P(x) = \dfrac{x}{x-1}$ และ $Q(x) = \dfrac{1}{x(x-1)}$

ฟังก์ชัน P วิเคราะห์ได้ทุกจุด ยกเว้นที่ $x = 1$
ฟังก์ชัน Q วิเคราะห์ได้ทุกจุด ยกเว้นที่ $x = 0$ และ $x = 1$

ดังนั้น $x = 0$ และ $x = 1$ เป็นจุดเอกฐาน และจุดอื่น ๆ เป็นจุดสามัญของสมการ (48)

7.3.2 ผลเฉลยแบบอนุกรมรอบจุดสามัญ

ในหัวข้อ 7.3.1 ที่ผ่านมานั้นได้ให้นิยาม อนุกรมต่าง ๆ รวมทั้งบทนิยามของจุดสามัญ และจุดเอกฐาน พร้อมทั้งตัวอย่างการหาจุดสามัญและจุดเอกฐานของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นเอกพันธุ์อันดับ 2 ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปร ไปแล้วนั้น สำหรับในหัวข้อนี้จะเป็นการหาผลเฉลยแบบอนุกรมรอบจุดสามัญ (ศิริพร พัสดร, 2552 : 217-212)

ทฤษฎีบท 7.2

ถ้า x_0 เป็นจุดสามัญของสมการ (45) แล้วสมการ (45) จะมีผลเฉลยซึ่งเป็นอิสระเชิงเส้นกันในรูป

(50) $$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$$

แล้วอนุกรมนี้ลู่เข้าในช่วง $\left|x - x_0\right| < R$ สำหรับบางค่าของ R

เรียกผลเฉลย (50) ว่า**ผลเฉลยแบบอนุกรมรอบจุด** x_0
สำหรับการหาผลเฉลยแบบอนุกรมในรูปสมการ (50) นั้นเมื่อกำหนด

(51) $$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \cdots$$

หาค่า y' และ y'' โดยใช้ความรู้เกียวกับอนุกรมกำลังได้ดังต่อไปนี้

(52) $$y' = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n (x - x_0)^{n-1} = c_1 + 2c_2(x - x_0) + 3c_2(x - x_0)^2 + \cdots$$

(53) $$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n (x - x_0)^{n-2} = 2c_2 + 6c_3(x - x_0) + 12c_4(x - x_0)^2 + \cdots$$

แทนค่าสมการ (51), (52) และ (53) ลงในสมการ (45) แล้วจัดรูปสมการ

(54) $$k_0 + k_1(x - x_0) + k_2(x - x_0)^2 + \cdots = 0$$

เมื่อสัมประสิทธิ์ k_i $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ เป็นฟังก์ชันของสัมประสิทธิ์ c_n เงื่อนไขที่ทำให้สมการ (54) เป็นจริงสำหรับทุก x ในช่วงของการลู่เข้า $\left| x - x_0 \right| < R$ คือ $k_0 = k_1 = k_2 = \cdots = 0$ ดังนั้นจะหาค่าสัมประสทธิ์ c_n ได้และทำให้ได้ผลเฉลย y ของสมการ (45)

ตัวอย่าง 7.8 จงหาผลเฉลยที่เป็นอนุกรมกำลังของ x ของสมการ

(55) $$y'' + xy' + (x^2 + 2)y = 0$$

วิธีทำ จะเห็นได้ว่าจำนวนจริงทุกจำนวนเป็นจุดสามัญของสมการ (55)
ในที่นี้ให้ $x_0 = 0$ จะได้

(56) $$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

หาอนุพันธ์ตลอดสมการ (56) จะได้

(57) $$y' = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1}$$

หาอนุพันธ์ตลอดสมการ (57) จะได้

(58) $$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2}$$

แทนค่าสมการ (56), (57) และ (58) ลงในสมการ (55) จะได้

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} + x\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} + (x^2+2)\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

หรือ

(59) $$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+2} + 2\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

จัดรูปสมการทางซ้ายข้องสมการ(59) เพื่อเปลี่ยนให้เลขชี้กำลังของ x ให้มีค่าเท่ากับ n ทั้งหมดดังต่อไปนี้

(59.1) $$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2}$$

ให้ $m = n-2$ จะได้ $n = m+2$ แทนค่าในอนุกรม (59.1) จะได้

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} &= \sum_{m+2=2}^{\infty} (m+2)\big[(m+2)-1\big]c_{m+2} x^{(m+2)-2} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} (m+2)(m+1)c_{m+2} x^{m}\end{aligned}$$

เมื่อแทน m ด้วย n จะได้

(59.2) $$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2} x^{n}$$

ในทำนองเดียวกัน

(59.3) $$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+2}$$

แทนด้วย

(59.4) $$\sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2} x^{n}$$

ดังนั้นเมื่อแทน (59.2) และ (59.4) ในสมการ (59) จะได้

(60) $$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n + \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^n + \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2}x^n + 2\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

หรือ

(61) $$\sum_{n=2}^{\infty}\Big[(n+1)(n+2)c_{n+2}x^n + (n+2)c_n + c_{n-2}x^n\Big]x^n$$

$$(2c_0 + 2c_2) + (3c_1 + 6c_3)x = 0$$

จะเป็นจริงสำหรับทุก x ในช่วงของการลู่เข้า $\left|x\right| < R$ ดังนั้นสมการ (61) สัมประสิทธิ์ทุกพจน์ต้องเป็นศูนย์ จะได้

(62) $$(2c_0 + 2c_2) = 0$$

(63) $$(3c_1 + 6c_3) = 0$$

(64) $$(n+1)(n+2)c_{n+2} + (n+2)c_n + c_{n-2} = 0 \text{ สำหรับ } n \geq 2$$

จากสมการ (62) จะได้

(65) $$c_2 = -c_0$$

จากสมการ (63)

(66) $$c_3 = -\frac{1}{2}c_1$$

จากสมการ (64)

(67) $$c_{n+2} = -\frac{(n+2)c_n + c_{n-2}x^n}{(n+1)(n+2)x^n} \text{ สำหรับ } n \geq 2$$

แทนค่า $n = 2$ ในสมการ (67) จะได้

$$c_4 = -\frac{2c_2 + c_0}{12} = -\frac{1}{4}c_0$$

แทนค่า $n = 3$ ในสมการ (67) จะได้

$$c_5 = -\frac{5c_3 + c_1}{20} = \frac{3}{40}c_1$$

สำหรับสัมประสิทธิ์ $c_6, c_7, c_8, \ldots$ จะหาได้ในทำนองเดียวกัน

นำค่า $c_0, c_1, c_2, \ldots$ แทนในสมการ(56) จะได้

$$y = c_0 + c_1 x - c_0 x^2 + \frac{1}{2}c_1 x^3 - \frac{1}{4}c_0 x^4 + \frac{3}{40}c_1 x^5 + \cdots$$

หรือ

(68) $$y = c_0\left(1 - x^2 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots\right) + c_1\left(x + \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \cdots\right)$$

ดังนั้น ผลเฉลยที่เป็นอนุกรมกำลังของ x ของสมการ (55) คือ

$$y = c_0\left(1 - x^2 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots\right) + c_1\left(x + \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \cdots\right)$$

ตัวอย่าง 7.9 จงหาผลเฉลยเฉพาะแบบอนุกรมกำลังของสมการ

(69) $$(x^2 - 1)y'' + 3xy' + xy = 0$$

เมื่อกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้น $y(0) = 4,\ y'(0) = 6$

วิธีทำ จะเห็นได้ว่าทุกจุด $x_0 \neq \pm 1$ เป็นจุดสามัญของสมการ (69) ดังนั้นจะมีผลเฉลยแบบอนุกรมรอบจุด x_0 ใด ๆ เมื่อ $x_0 \neq \pm 1$ แต่เนื่องจากเงื่อนไขเริ่มต้นที่กำหนดเป็นค่าที่จุด 0 ดังนั้นเราจะหาผลเฉลยแบบอนุกรมรอบจุด 0 ให้

ในที่นี้ให้ $x_0 = 0$ จะได้

(70) $$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

หาอนุพันธ์ตลอดสมการ (56) จะได้

(71) $$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}$$

(72) $$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}$$

แทนค่าสมการ (70), (71) และ (72) ลงในสมการ (69) จะได้

$$(x^2-1)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} + 3x\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} + x\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

หรือ

(73) $$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^n - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} + 3\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1} = 0$$

จัดรูปสมการทางซ้ายข้องสมการ(73) เพื่อเปลี่ยนให้เลขชี้กำลังของ x ให้มีค่าเท่ากับ n ทั้งหมดได้ดังนี้

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)c_{n+2} x^n + 3\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^n$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} x^n = 0$$

หรือ

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^n - 2c_2 - 6c_3 x - \sum_{n=2}^{\infty} (n+1)(n+2)c_{n+2} x^n$$
$$+3c_1 x + 3\sum_{n=2}^{\infty} nc_n x^n + c_0 x + \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-1} x^n = 0$$

หรือ

(74) $$\sum_{n=2}^{\infty}\Big[-(n+2)(n+1)c_{n+2} + n(n+2)c_n + c_{n-1}\Big]x^n$$
$$-2c_2 - (c_0 + 3c_1 - 6c_3)x = 0$$

จะเป็นจริงสำหรับทุก x ในช่วงของการลู่เข้า $|x| < R$ ดังนั้นสมการ (74) สัมประสิทธิ์ทุกพจน์ต้องเป็นศูนย์ จะได้

(75) $$-2c_2 = 0$$

(76) $$3c_0 + 3c_1 - 6c_3 = 0$$

(77) $$-(n+2)(n+1)c_{n+2} + n(n+2)c_n + c_{n-1} = 0 \text{ สำหรับ } n \ge 2$$

จากสมการ (75) จะได้

(78) $$c_2 = 0$$

จากสมการ (76)

(79) $$c_3 = \frac{1}{6}c_0 + \frac{1}{2}c_1$$

จากสมการ (77)

(80) $$c_{n+2} = \frac{n(n+2)c_n + c_{n-1}}{(n+2)(n+1)} \text{ สำหรับ } n \geq 2$$

จะได้

$$c_4 = \frac{8c_2 + c_1}{12} = \frac{1}{12}c_1$$

$$c_5 = \frac{15c_3 + c_2}{20} = \frac{1}{8}c_0 + \frac{3}{8}c_1$$

สำหรับสัมประสิทธิ์ $c_6, c_7, c_8, \ldots$ จะหาได้ในทำนองเดียวกัน

นำค่า $c_0, c_1, c_2, \ldots$ แทนในสมการ (70) จะได้

$$y = c_0 + c_1 x - c_0 x^2 + \left(\frac{c_0}{6} + \frac{c_1}{2}\right)x^3 + \frac{c_1}{12}x^4 + \left(\frac{c_0}{8} + \frac{3c_1}{8}\right)x^5 + \cdots$$

หรือ

(81) $$y = c_0\left(1 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{8}x^5 + \cdots\right) + c_1\left(x + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{3}{8}x^5 + \cdots\right)$$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปของสมการ (69) คือ (81)

แทนเงื่อนไขเริ่มต้น $y(0) = 4$ ในสมการ (81)

$$4 = c_0\left(1 + \frac{1}{6}(0)^3 + \frac{1}{8}(0)^5 + \cdots\right) + c_1\left((0) + \frac{1}{2}(0)^3 + \frac{1}{12}(0)^4 + \frac{3}{8}(0)^5 + \cdots\right)$$

หรือ

$$c_0 = 4$$

หาปริพันธ์ตลอดสมการ (81) จะได้

(82) $$y' = c_0\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{8}x^4 + \cdots\right) + c_1\left(1 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{15}{8}x^4 + \cdots\right)$$

แทนเงื่อนไขเริ่มต้น เงื่อนไขเริ่มต้น $y'(0) = 6$ ในสมการ (82) จะได้

$$6 = c_0\left(\frac{1}{2}(0)^2 + \frac{5}{8}(0)^4 + \cdots\right) + c_1\left(1 + \frac{3}{2}(0)^2 + \frac{1}{3}(0)^3 + \frac{15}{8}(0)^4 + \cdots\right)$$

หรือ

$$c_1 = 6$$

แทนค่า $c_0 = 4$ และ $c_1 = 6$ ในผลเฉลยทั่วไป (81) จะได้

(83) $$y = 4\left(1 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{8}x^5 + \cdots\right) + 6\left(x + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{3}{8}x^5 + \cdots\right)$$

ดังนั้น ผลเฉลยเฉพาะที่เป็นอนุกรมกำลังของ x ของสมการ (69) คือ

$$y = 4\left(1 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{8}x^5 + \cdots\right) + 6\left(x + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{3}{8}x^5 + \cdots\right)$$

ตัวอย่าง 7.10 จงหาผลเฉลยเฉพาะแบบอนุกรมรอบจุด 0 ของสมการ

(84) $$xy'' + (\sin x)y' + 2xy = 3x^2$$

วิธีทำ เนื่องจาก $\dfrac{\sin x}{x}$ กระจายเป็นอนุกรมแมคคลอรินได้ ดังนั้น $x = 0$ เป็นจุดสามัญของสมการ (84) เพราะฉะนั้นเราจะหาผลเฉลยแบบอนุกรมรอบจุด 0 ให้

(85) $$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

หาอนุพันธ์ตลอดสมการ (85) จะได้

(86) $$y' = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1}$$

(87) $$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2}$$

แทนค่าสมการ (85), (86) และ (87) ลงในสมการ (84) จะได้

$$x\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} + \sin x\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} + 2x\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 3x^2$$

หรือ

(88) $$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-1} + \sin x\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} + 2\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1} = 3x^2$$

จะเห็นว่าไม่สามารถจัดรูปสมการทางซ้ายของสมการ(88) เพื่อเปลี่ยนให้เลขชี้กำลังของ x ให้มีค่าเท่ากับ n ทั้งหมดได้ดังนั้นจึงกระจาย $\sin x$ ให้อยู่ในรูปอนุกรมแมคคลอรีนได้ดังต่อไปนี้

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-1} + \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\right)\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} + 2\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1} = 3x^2$$

หรือ

(89) $$\begin{aligned}&(2c_2x + 6c_3x^2 + 12c_4x^3 + 20c_5x^4 + \cdots)\\ &+\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \cdots\right)(c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + 4c_4x^3 + \cdots)\\ &\qquad + (2c_0x + 2c_1x^2 + 2c_3x^3 + \cdots) - 3x^2 = 0\end{aligned}$$

จะเป็นจริงสำหรับทุก x ในช่วงของการลู่เข้า $|x| < R$ ดังนั้นสมการ (89) เทียบสัมประสิทธิ์ของ x กำลังต่าง ๆ ให้เท่ากับศูนย์ จะได้

(90) $$2c_2 + c_1 + 2c_0 = 0$$

(91) $$6c_3 + 2c_2 + 2c_1 = 3$$

(92) $$12c_4 + 3c_3 - \frac{1}{6}c_1 + 2c_2 = 0$$

(93) $$20c_5 + 4c_4 - \frac{1}{3}c_2 + 2c_3 = 0$$

แก้สมกาหาค่า c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 จากสมการ (75) - (93) จะได้

$$c_2 = -\frac{c_1 + 2c_0}{2}$$

$$c_3 = -\frac{c_1 - 2c_0}{6} + \frac{1}{2}$$

$$c_4 = \frac{5}{36}c_1 + \frac{1}{12}c_0 - \frac{1}{8}$$

$$c_5 = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{7}{18}c_1 + \frac{4c_0}{3}}{20}$$

นำค่า c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 แทนในสมการ (85) จะได้

(94) $$y = c_0\left(1 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{8}x^5 + \cdots\right) + c_1\left(x + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{3}{8}x^5 + \cdots\right)$$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปของสมการ (84) คือ (94)

แทนเงื่อนไขเริ่มต้น เงื่อนไขเริ่มต้น $y(0) = 4$ ในสมการ (94) จะได้

(95) $$y = c_0\left(1 - x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} + \cdots\right)$$
$$+c_1\left(x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{5x^4}{36} - \frac{7x^5}{360} + \cdots\right) + \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{8} - \frac{7x^5}{40} + \cdots$$

ดังนั้น จงหาผลเฉลยเฉพาะแบบอนุกรมรอบจุด 0 ของสมการ (84) คือ

$$y = c_0\left(1 - x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} + \cdots\right)$$
$$+c_1\left(x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{5x^4}{36} - \frac{7x^5}{360} + \cdots\right) + \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{8} - \frac{7x^5}{40} + \cdots$$

7.3.3 ผลเฉลยแบบอนุกรมรอบจุดเอกฐาน

จากบทนิยาม 7.4 นั้นได้กล่าวถึง จุดสามัญ และจุดเอกฐาน ของสมการเชิงอนุพันธ์ไปแล้วนั้น และในหัวข้อ 7.3.2 การหาผลเฉลยแบบอนุกรมรอบจุดสามัญไปแล้วนั้นสำหรับหัวข้อนี้จะเป็นการกาผลเฉลยรอบจุดเอกฐาน (ดำรง ทิพย์โยธา, 2541 : 505-506).

(96) $$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$$

เมื่อเราทราบว่า x_0 เป็นจุดสามัญ ในกรณีนี้เราไม่ทราบว่า

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$$

จะเป็นผลเฉลยสมการ (96) หรือไม่ แต่ถ้า x_0 เป็นจุดเอกฐานปกติซึ่งจะได้ให้บทนิยามต่อไป เราจะได้ว่าสมการ (96) มีผลเฉลยในรูป

$$y = \left|x - x_0\right|^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$$

บทนิยาม 7.6

จากสมการ (96) กำหนดให้ $P(x) = \dfrac{a_1(x)}{a_0(x)}$ และ $Q(x) = \dfrac{a_2(x)}{a_0(x)}$ กล่าวว่าจุด x_0 เป็น**จุดเอกฐานปกติ**ของสมการ (96) ถ้า $(x - x_0)P(x)$ และ $(x - x_0)^2 Q(x)$ วิเคราะห์ได้ที่ x_0 ถ้าไม่เป็นเช่นนี้กล่าวว่า x_0 เป็น**จุดเอกฐานไม่ปกติ** ของสมการ (96)

ตัวอย่าง 7.11 พิจารณาสมการ

(97) $$2x^2 y'' - xy' + (x - 5)y = 0$$

วิธีทำ สมการ (97) สามารถจัดได้ในรูป

$$y'' - \frac{x}{2x^2} y' + \frac{x-5}{2x^2} y = 0$$

$$P(x) = -\frac{x}{2x^2} \text{ และ } Q(x) = \frac{x-5}{2x^2}$$

จะได้ $xP(x) = -\dfrac{1}{2}$ และ $x^2 Q(x) = \dfrac{x-5}{2}$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ได้ที่ $x = 0$

ดังนั้น $x = 0$ เป็นจุดเอกฐานปกติของสมการ (97)

ตัวอย่าง 7.12 พิจารณาสมการ

(98) $$x^2 (x-2)^2 y'' + 2(x-2)y' + (x+1)y = 0$$

วิธทำ สมการ (98) สามารถจัดได้ในรูป

$$y'' + \frac{2}{x^2(x-2)^2}y' + \frac{x+1}{x^2(x-2)^2}y = 0$$

$$P(x) = \frac{2}{x^2(x-2)^2} \text{ และ } Q(x) = \frac{x+1}{x^2(x-2)^2}$$

จะได้ $xP(x) = \dfrac{2}{x(x-2)^2}$ และ $x^2Q(x) = \dfrac{x+1}{(x-2)^2}$

จะเห็นว่า $x^2Q(x)$ วิเคราะห์ได้ที่ $x = 0$ แต่ $xP(x)$ ไม่วิเคราะห์ได้ที่ $x = 0$

ดังนั้น $x = 0$ เป็นจุดเอกฐานไม่ปกติของสมการ (98) แต่ $x = 2$ เป็นจุดเอกฐานไม่ปกติของสมการ (98) เพราะว่า $(x-2)P(x)$ และ $(x-2)^2Q(x)$ ต่างก็วิเคราะห์ได้ที่ $x = 2$

ทฤษฎีบท 7.3

ถ้า x_0 เป็นจุดเอกฐานปกติของสมการ (96) แล้วจะได้ว่าสมการ (96) มีอย่างน้อยหนึ่งผลเฉลยที่ไม่เป็นศูนย์ซึ่งอยู่ในรูป

(99) $$y = \left|x - x_0\right|^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$$

เมื่อ r เป็นค่าคงตัวที่จะหาค่าได้ และผลเฉลย (99) เป็นจริงในช่วง $0 = \left|x - x_0\right|^r < R$ สำหรับบางค่า $R > 0$

การหาผลเฉลย (99) นี้วิธีการคล้ายกับการหาผลเฉลยแบบอนุกรมรอบจุดสามัญที่เราได้ศึกษาในหัวข้อที่ผ่านมา คือต้องหาสัมประสิทธิ์ c_n แต่ที่เพิ่มมาสำหรับการหาผลรอบจุดเอกฐานปกติคือต้องหา r ซึ่งเรียกวิธีนี้ว่า วิธีของโฟรเบนิอุส เพื่อเป็นเกียรติประวัติกับผู้คิดค้น ซึ่งจะมีวิธีการหาตามขั้นตอนดังต่อไปนี้ (วารี เกรอต 2542, : 141-145)

ขั้นที่ 1 ให้ x_0 เป็นจุดเอกฐานปกติของสมการ

(100) $$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$$

และสมมติว่าผลเฉลยในรูป (4) คือ

$$y = (x - x_0)^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$$

เป็นจริงในช่วง $0 < x - x_0 < R$ เมื่อ $c_0 \neq 0$ เขียนผลเฉลยโดยรวมเทอม $(x - x_0)$ จะได้

(101) $$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^{n+r}$$

ขั้นที่ 2 หาอนุพันธ์สมการ (101) เทียบกับ x จะได้

(102) $$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) c_n (x - x_0)^{n+r-1}$$

และหาอนุพันธ์สมการ (102) เทียบกับ x จะได้

(103) $$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) c_n (x - x_0)^{n+r-2}$$

นำค่า y, y' และ y'' ในสมการ (101), (102) และ (103)แทนในสมการ (100)

ขั้นที่ 3 จากขั้นที่ 2 ทำให้เป็นรูปอย่างง่ายจะได้อนุกรมในรูปต่อไปนี้

(104) $$k_0 (x - x_0)^{r+k} + k_1 (x - x_0)^{r+k+1} + k_2 (x - x_0)^{r+k+2} + \cdots = 0$$

เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มที่แน่นอนซึ่งทำให้ $r + k$ เป็นกำลังที่น้อยที่สุดของอนุกรมที่ได้ในขั้นที่ 2 และ k_n ($n = 0,1,2,\ldots$) เป็นฟังก์ชันของ r และสัมประสิทธิ์ c_n

ขั้นที่ 4 เพื่อให้สมการ (104) เป็นจริงทุก x ในช่วง $0 < x - x_0 < R$ จะได้

$$k_0 = k_1 = k_2 = \cdots = 0$$

ขั้นที่ 5 จากสมการ $k_0 = 0$ จะได้สมการกำลังสองของ r ซึ่งจะเรียกว่าสมการช่วย สมมติให้รากสมการช่วยคือ r_1 และ r_2 (อาจเป็นจำนวนเชิงซ้อนได้) และให้ $\mathrm{Re}(r_1) > \mathrm{Re}(r_2)$ และราก r_1, r_2 เรียกว่าเลขชี้กำลัง

ขั้นที่ 6 แก้สมการ k_n ($n = 0,1,2,\ldots$) จะได้เซตของเงื่อนไขที่เกี่ยวข้องกับค่า r และสัมประสิทธิ์ c_n

ขั้นที่ 7 แทนค่าราก r_1 สำหรับ r ในเงื่อนไขที่ได้ในขั้นที่ 6 จะได้ค่าของ c_n ซึ่งเมื่อนำไปแทนใน (101) และแทนค่า r ใน (101) ด้วย r_1 ผลที่ได้จะเป็นผลเฉลยหนึ่งของสมการ (100)

ตัวอย่าง 7.13 จงใช้วิธีของโฟรเบนิอุสหาผลเฉลยของสมการ

(105) $$2x^2y'' - 2xy' + (x-5)y = 0$$

ในช่วง $0 < x < R$ สำหรับบางค่า R

วิธีทำ เนื่องจาก $x = 0$ เป็นจุดเอกฐานปกติของสมการ (105) ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 7.3 สมการจะมีผลเฉลยในรูป

(106) $$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^{n+r}$$

เมื่อ $c_n \neq 0$ แล้วจะได้ว่า

(107) $$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) c_n (x - x_0)^{n+r-1}$$

(108) $$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) c_n (x - x_0)^{n+r-2}$$

นำค่า y, y' และ y'' ในสมการ (106), (107) และ (108) แทนในสมการ (105) จะได้

$$2x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) c_n (x - x_0)^{n+r-2} - 2x \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) c_n (x - x_0)^{n+r-1}$$

$$+ (x-5) \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^{n+r} = 0$$

ทำให้เป็นรูปอย่างง่ายจะได้

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Big[2(n+r)(n+r-1) - (n+r) - 5\Big] c_n x^{n+r} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} x^{n+r} = 0$$

หรือ

(109) $$\Big[2r(r-1) - r - 5\Big] c_0 x^r$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\Big[2(n+r)(n+r-1) - (n+r) - 5\Big] c_n + c_{n-1}\Big) x^{n+r} = 0$$

ซึ่งอยู่ในรูปสมการ (104) และมีค่า $k = 0$ ดังนั้นสมการช่วย คือ

$$2r(r-1)-r-5=0$$

หาค่าราก r_1, r_2 ของสมการนี้ได้ $r_1 = \frac{5}{2}$ และ $r_2 = -1$

แก้สมการ k_n ($n = 0,1,2,\ldots$) จะได้เซตของเงื่อนไขที่เกี่ยวข้องกับค่า r และสัมประสิทธิ์ c_n ดังนี้

(110) $$\left[2(n+r)(n+r-1)-(n+r)-5\right]c_n + c_{n-1} = 0 \text{ สำหรับ } n \geq 1$$

แทนค่า $r = r_1 = \frac{5}{2}$ ในสมการ (110) จะได้

$$\left[2(n+\frac{5}{2})(n+\frac{5}{2}-1)-(n+\frac{5}{2})-5\right]c_n + c_{n-1} = 0 \text{ สำหรับ } n \geq 1$$

หรือ

(111) $$c_n = -\frac{c_{n-1}}{n(2n+7)} \text{ สำหรับ } n \geq 1$$

จากสมการ (111)หาค่าสัมประสิทธิ์ c_n ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} c_1 &= -\frac{c_0}{9} \\ c_2 &= -\frac{c_1}{22} = \frac{c_0}{198} \\ c_3 &= -\frac{c_2}{39} = -\frac{c_0}{7722} \\ &\vdots \end{aligned}$$

แทนค่า $r = r_1 = \frac{5}{2}$ และแทนค่า $c_1, c_2, c_3, \ldots$ในสมการ (106) จะได้

$$y = c_0\left(x^{5/2} - \frac{1}{9}x^{7/2} + \frac{1}{198}x^{9/2} - \frac{1}{7722}x^{11/2} + \cdots\right)$$

หรือ

(112) $$y = c_0 x^{5/2}\left(1 - \frac{1}{9}x + \frac{1}{198}x^2 - \frac{1}{7722}x^3 + \cdots\right)$$

ดังนั้น (112) เป็นผลเฉลยหนึ่งของสมการ (105)

ถ้าแทนค่า $r = r_2 = -1$ ในสมการ (110) จะได้

$$\Big[2(n-1)(n-1-1)-(n-1)-5\Big]c_n + c_{n-1} = 0 \text{ สำหรับ } n \geq 1$$

หรือ

(113) $$c_n = -\frac{c_{n-1}}{n(2n-7)} \text{ สำหรับ } n \geq 1$$

จากสมการ (113)หาค่าสัมประสิทธิ์ c_n ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{c_0}{5} \\ c_2 &= \frac{c_1}{6} = \frac{c_0}{30} \\ c_3 &= \frac{c_2}{3} = \frac{c_0}{90} \\ &\vdots \end{aligned}$$

แทนค่า $r = r_2 = -1$ และแทนค่า $c_1, c_2, c_3, \ldots$ ในสมการ (106) จะได้

$$y = c_0\left(x^{-1} + \frac{1}{5} + \frac{1}{30}x + \frac{1}{90}x^2 + \cdots\right)$$

หรือ

(114) $$y = c_0 x^{-1}\left(1 + \frac{1}{5}x + \frac{1}{30}x^2 + \frac{1}{90}x^3 + \cdots\right)$$

และเนื่องจากผลเฉลย (112) และผลเฉลย (114) เป็นอิสระเชิงเส้นกัน

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (105) คือ

$$y = a_1 x^{5/2}\left(1 - \frac{1}{9}x + \frac{1}{198}x^2 - \frac{1}{7722}x^3 + \cdots\right) + a_2 x^{-1}\left(1 + \frac{1}{5}x + \frac{1}{30}x^2 + \frac{1}{90}x^3 + \cdots\right)$$

เมื่อ a_1, a_2 เป็นตัวคงค่า

ในกรณีที่รากของสมการช่วยมีค่าเท่ากัน เราจะได้เพียง 1 ผลเฉลยเท่านั้น หรือถึงแม้ว่ารากของสมการช่วยจะเป็นจำนวนจริงที่ต่างกัน แต่ถ้าผลเฉลยที่ได้จากรากทั้งคู่อาจจะไม่อิสระเชิงเส้นกันก็ได้ ดังนั้นจึงมีคำถามเกี่ยวกับผลเฉลยของสมการ

(115) $$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$$

1. ภายใต้เงื่อนไขอะไรจึงจะรับประกันได้ว่าสมการ (115) มี 2 ผลเฉลยที่เป็นอิสระเชิงเส้นกัน

2. ถ้าสมการ (115) ไม่มี 2 ผลเฉลยที่เป็นอิสระเชิงเส้นกันแล้ว 2 ผลเฉลยที่เป็นอิสระกันจะเป็นรูปใด

ผลเฉลยของ 2 คำถามคือทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 7.4

กำหนดให้ x_0 เป็นจุดเอกฐานปกติของสมการ (115) ให้ r_1, r_2 $\left[\mathrm{Re}(r_1) > \mathrm{Re}(r_2)\right]$ เป็นรากของสมการช่วยที่จุด x_0

1. ถ้า $r_1 - r_2 \neq N$ เมื่อ N เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบแล้วจะได้ว่าสมการ (115) มีผลเฉลย y_1, y_2 ที่เป็นอิสระเชิงเส้นกัน ซึ่งหาค่าได้ดังนี้

$$y_1(x) = \left|x - x_0\right|^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$$

เมื่อ $c_0 \neq 0$ และ

$$y_2(x) = \left|x - x_0\right|^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$$

เมื่อ $c_0 \neq 0$

2. ถ้า $r_1 - r_2 = N$ เมื่อ N เป็นจำนวนเต็มบวก แล้วจะได้ว่าสมการ (115) มีผลเฉลย y_1, y_2 ที่เป็นอิสระเชิงเส้นกัน ซึ่งหาค่าได้ดังนี้

$$y_1(x) = \left|x - x_0\right|^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$$

เมื่อ $c_0 \neq 0$

$$y_2(x) = \left|x - x_0\right|^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n + C y_1(x) \ln\left|x - x_0\right|$$

เมื่อ $c_0 \neq 0$ และ C เป็นค่าคงตัวซึ่งอาจเป็น 0 ได้

3. ถ้า $r_1 - r_2 = 0$ แล้วจะได้ว่าสมการ (115) มีผลเฉลยที่เป็นอิสระเชิงเส้นกันคือ y_1, y_2 ซึ่งหาค่าได้ดังนี้

$$y_1(x) = \left|x - x_0\right|^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$$

เมื่อ $c_0 \neq 0$

$$y_2(x) = \left|x - x_0\right|^{r_1+1} \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n + y_1(x) \ln\left|x - x_0\right|$$

ผลเฉลยในข้อ 1 - 3 ในทฤษฎีบท 7.4 นั้นจะเป็นจริงในช่วง $0 < \left|x - x_0\right| < R$ สำหรับบางค่า $R > 0$

ตัวอย่าง 7.14 จงใช้วิธีของโฟรเบนิอุสหาผลเฉลยของสมการ

(116) $$2x^2y'' + xy' + (x^2 - 3)y = 0$$

ในช่วง $0 < x < R$ สำหรับบางค่า R

วิธีทำ เนื่องจาก $x = 0$ เป็นจุดเอกฐานปกติของสมการ (116) ดังนั้นหาผลเฉลยสำหรับ $0 < x < R$ โดยกำหนดให้

(117) $$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^{n+r}$$

เมื่อ $c_n \neq 0$ แล้วจะได้ว่า

(118) $$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)c_n (x - x_0)^{n+r-1}$$

(119) $$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)c_n (x - x_0)^{n+r-2}$$

นำค่า y, y' และ y'' ในสมการ (117), (118) และ (119)แทนในสมการ (116) จะได้

$$2x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)c_n (x - x_0)^{n+r-2} + x\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)c_n (x - x_0)^{n+r-1}$$

$$+(x^2 - 3)\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^{n+r} = 0$$

ทำให้เป็นรูปอย่างง่ายจะได้

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Big[2(n+r)(n+r-1) + (n+r) - 3\Big] c_n x^{n+r} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-2} x^{n+r} = 0$$

หรือ

(120) $$\Big[2r(r-1)\Big] c_0 x^r + \Big[2(r+1)r + (r+1) - 3\Big] c_1 x^{r+1}$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty} \Big(\Big[2(n+r)(n+r-1) + (n+r) - 3\Big] c_n - c_{n-2}\Big) x^{n+r} = 0$$

เมื่อเทียบสัมประสิทธิ์ของ x กำลังน้อยสุดในสมการ (120) ให้เท่ากับศูนย์จะได้สมการช่วย

$$2r(r-1)+r-3=0$$

หาค่าราก r_1, r_2 ของสมการนี้ได้ $r_1 = \frac{3}{2}$ และ $r_2 = -1$

เนื่องจากผลต่าง $r_1 - r_2 = \frac{5}{2}$ ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 7.4 จะได้ว่าสมการ (116) มี 2 ผลเฉลยที่เป็นอิสระเชิงเส้นกันในรูป (117) โดยแทนค่า $r = r_1$ และ $r = r_2$

เทียบสัมประสิทธิ์ของ x ที่มีกำลังมากกว่า r เป็น 0 จะได้

(121) $$\Big[2(r-1)r+(r+1)-3\Big]c_1 = 0$$

ได้เซตของเงื่อนไขที่เกี่ยวข้องกับค่า r และสัมประสิทธิ์ c_n ดังนี้

(122) $$\Big[2(n+r)(n+r-1)+(n+r)-3\Big]c_n + c_{n-2} = 0 \text{ สำหรับ } n \geq 2$$

แทนค่า $r = r_1 = \frac{3}{2}$ ใน (121) จะได้ $c_1 = 0$

ดังนั้นแทนค่า $c_1 = 0$ และ $r = r_1 = \frac{3}{2}$ ในสมการ (122) จะได้

$$n(2n+5)c_n + c_{n-2} = 0 \text{ สำหรับ } n \geq 2$$

หรือ

(123) $$c_n = -\frac{c_{n-2}}{n(2n+5)} \text{ สำหรับ } n \geq 2$$

แทนค่า $n = 2, 3, 4, \ldots$ ในสมการ (123)

$$\begin{aligned} c_2 &= -\frac{c_0}{18} \\ c_3 &= -\frac{c_1}{33} = 0 \\ c_4 &= -\frac{c_2}{52} = \frac{c_0}{96} \\ &\vdots \end{aligned}$$

นั่นคือสัมประสิทธิ์ $c_1, c_2, c_3, \ldots$ เป็นศูนย์ทั้งหมด จะได้ผลเฉลย $y = y_1(x)$ สำหรับราก r_1 ดังนี้

(124) $$y_1(x) = c_0 x^{3/2}\left(1 - \frac{1}{18}x^2 + \frac{1}{936}x^4 - \cdots\right)$$

ต่อไปแทนค่าถ้าแทนค่า $r = r_2 = -1$ ในสมการ (121) จะได้ $c_1 = 0$

ดังนั้นแทนค่า $c_1 = 0$ และ $r = r_2 = -1$ ในสมการ (122) จะได้

(125) $$c_n = -\frac{c_{n-2}}{n(2n-5)} \text{ สำหรับ } n \geq 2$$

แทนค่า $n = 2, 3, 4, \ldots$ ในสมการ (123)

$$c_2 = \frac{c_0}{2}$$
$$c_3 = -\frac{c_1}{3} = 0$$
$$c_4 = -\frac{c_2}{12} = -\frac{c_0}{24}$$
$$\vdots$$

กรณีนี้สัมประสิทธิ์ $c_1, c_2, c_3, \ldots$ เป็นศูนย์ทั้งหมด จะได้ผลเฉลย $y = y_2(x)$ สำหรับราก r_2 ดังนี้

(126) $$y_2(x) = c_0 x^{-1}\left(1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + \cdots\right)$$

และเนื่องจากผลเฉลย (124) และผลเฉลย (126) เป็นอิสระเชิงเส้นกัน

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (116) คือ

$y = a_1 y_1(x) + a_2 y_2(x)$ เมื่อ a_1, a_2 เป็นตัวคงค่า

ตัวอย่าง 7.15 จงใช้วิธีของโฟรเบนิอุสหาผลเฉลยของสมการ

(127) $$x^2 y'' + (x^2 - 3x)y' + 3y = 0$$

ในช่วง $0 < x < R$ สำหรับบางค่า R

วิธีทำ เนื่องจาก $x=0$ เป็นจุดเอกฐานปกติของสมการ (127) ดังนั้นหาผลเฉลยสำหรับ $0<x<R$ โดยกำหนดให้

(128) $$y=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_0)^{n+r}$$

เมื่อ $c_n\neq 0$ แล้วจะได้ว่า

(129) $$y'=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n(x-x_0)^{n+r-1}$$

(130) $$y''=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_n(x-x_0)^{n+r-2}$$

นำค่า y,y' และ y'' ในสมการ (128), (129) และ (130) แทนในสมการ (127) จะได้

$$\begin{aligned} &x^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_n(x-x_0)^{n+r-2}\\ &+(x^2-3x)\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n(x-x_0)^{n+r-1}+3\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_0)^{n+r}=0\end{aligned}$$

ทำให้เป็นรูปอย่างง่ายจะได้

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Big[(n+r)(n+r-1)-3(n+r)+3\Big]c_nx^{n+r}+\sum_{n=1}^{\infty}(n+r-1)c_{n-1}x^{n+r}=0$$

หรือ

(131) $$\begin{aligned}&\Big[r(r-1)-3r+3\Big]c_0x^r\\ &+\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\Big[(n+r)(n+r-1)-3(n+r)+3\Big]c_n-(n+r-1)c_{n-1}\Big)x^{n+r}=0\end{aligned}$$

เมื่อเทียบสัมประสิทธ์ของ x กำลังน้อยสุดในสมการ (131) ให้เท่ากับศูนย์จะได้สมการช่วย

$$r^2-4r+3=0$$

หาค่าราก r_1,r_2 ของสมการนี้ได้ $r_1=3$ และ $r_2=1$

เนื่องจากผลต่าง $r_1 - r_2 = 2$ ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 7.4 จะได้ว่าสมการ (127) มี 2 ผลเฉลยที่เป็นอิสระเชิงเส้นกันในรูป (128) โดยแทนค่า $r = r_1$ และ $r = r_2$

สำหรับราก $r_1 = 3$ ในการหาคำตอบนี้จะเทียบสัมประสิทธิ์ของ x ที่มีกำลังมากกว่า r ในสมการ (131) ให้ทำกับ 0 จะได้

(132) $$\left[(n+r)(n+r-1) - 3(n+r) + 3\right]c_n + (n+r-1)c_{n-1} = 0$$

สำหรับ $n \geq 1$

แทนค่า $r = r_1 = 3$ ใน (132) จะได้

$$\left[(n+3)(n+3-1) - 3(n+3) + 3\right]c_n + (n+3-1)c_{n-1} = 0$$

สำหรับ $n \geq 1$ หรือ

(133) $$c_n = -\frac{c_{n-1}}{n} \text{ สำหรับ } n \geq 1$$

แทนค่า $n = 1, 2, 3, \ldots$ ในสมการ (133)

$$\begin{aligned} c_1 &= -c_0 \\ c_2 &= -\frac{c_1}{2} = \frac{c_0}{2!} \\ c_3 &= -\frac{c_2}{3} = \frac{c_0}{3!} \\ &\vdots \\ c_n &= (-1)^n \frac{c_0}{n!} \end{aligned}$$

แทนค่าสัมประสิทธิ์ $c_1, c_2, c_3, \ldots$ ในสมการ (128) และแทน $r_1 = 3$ จะได้ผลเฉลย $y = y_1(x)$ สำหรับราก r_1 ดังนี้

$$y_1(x) = c_0 x^3 \left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \cdots\right)$$

หรือ

(134) $$y_1(x) = c_0 x^3 e^{-x}$$

ต่อไปแทนค่าถ้าแทนค่า $r_2 = 1$ ดังนั้นแทนค่า $r = r_2 = 1$ ใน (132) จะได้

$$\left[(n+1)(n+1-1) - 3(n+1) + 3\right]c_n + (n+1-1)c_{n-1} = 0$$

สำหรับ $n \geq 1$ หรือ

(135) $$c_n = -\frac{c_{n-1}}{n-2} \text{ สำหรับ } n \geq 1 \text{ และ } n \neq 2$$

แทนค่า $n = 1$ ในสมการ (135) จะได้ $c_1 = c_0$ และแทน $n = 2$ จะได้ $0c_2 + 2c_1 = 0$ นั่นคือ $c_1 = 0$ แต่ $c_1 = c_0$ เพราะฉะนั้น $c_0 = 0$ ด้วยซึ่งขัดกับที่กำหนดไว้ตอนต้น แสดงว่าไม่มีผลเฉลยสำหรับ $c_0 \neq 0$ ในกรณีของราก $r = r_2 = 1$ นอกจากนี้เรายังสังเกตได้ว่าเมื่อแทน $n \geq 3$ ในสมการ (128) ก็จะได้ผลเฉลยเดิมคือ $y_1(x)$ ทั้งนี้เพราะว่าจาก $0c_2 + 2c_1 = 0$ จะได้ว่า c_2 เป็นค่าคงตัวไม่เจาะจงและเมื่อแทน $r = 1$ ในสมการ (128) พร้อมกับแทนสัมประสิทธิ์ในสมการ (135) จะได้

$$\begin{aligned} y &= c_2 x\left(x^2 - x^3 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^5}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+2}}{n!} + \cdots\right) \\ &= c_2 x^3\left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \cdots\right) \\ &= c_2 x^3 e^{-x} \end{aligned}$$

ดังนั้นผลเฉลยสมการ (127) ที่เป็นอิสระเชิงเส้นกับ $y_1(x)$ ซึ่งอยู่ในรูป

(136) $$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1} + Cy_1(x)\ln x$$

เมื่อ $c_0 \neq 0$ และ $C \neq 0$

ในที่นี้เราจะใช้วิธีลดอันดับในการหาผลเฉลยในรูปสมการ (136) ให้

(137) $$y = y_1(x)v = x^3 e^{-x} v$$

ดังนั้นจะได้

(138) $$y' = x^3 e^{-x}\frac{dv}{dx} + (3x^2 e^{-x} - x^3 e^{-x})v$$

และ

(139) $$y'' = x^3e^{-x}\frac{d^2v}{dx^2} + 2(3x^2e^{-x} - x^3e^{-x})\frac{dv}{dx} + (x^3e^{-x} - 6x^2e^{-x} + 6xe^{-x})v$$

นำค่า y, y' และ y'' ในสมการ (137), (138) และ (139)แทนในสมการ (127) จัดรูปแล้วจะได้

(140) $$x\frac{d^2v}{dx^2} + (3-x)\frac{dv}{dx} = 0$$

แทน $w = \dfrac{dv}{dx}$ ในสมการ (140) จะได้

(141) $$x\frac{dw}{dx} + (3-x)w = 0$$

สมการ (141) เป็นสมการเชิงเส้นที่มี $w = x^{-3}e^x$ เป็นผลเฉลยเฉพาะ แต่เนื่องจากกำหนดให้ $w = \dfrac{dv}{dx}$ ดังนั้นผลเฉลยของสมการ (140) คือ

$$v = \int x^{-3}e^x dx$$

ดังนั้นผลเฉลยของสมการ (127) คือ $y = y_2(x)$ เมื่อ

(142) $$y_2(x) = x^3e^{-x}\int x^{-3}e^x dx$$

ซึ่งเป็นอิสระเชิงเส้นกับผลเฉลย $y_1(x)$

ต่อไปจะแสดงว่า $y_2(x)$ อยู่ในรูป (136) โดยการกระจายเป็นอนุกรมแมคคลอรินสำหรับ e^x ใน (142) จะได้

$$\begin{aligned} y_2(x) &= x^3e^{-x}\int x^{-3}\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)dx \\ &= x^3e^{-x}\int\left(x^{-3} + x^{-2} + \frac{x^{-1}}{2!} + \frac{x^0}{3!} + \cdots\right)dx \end{aligned}$$

หาปริพันธ์ทีละเทอมจะได้

$$y_2(x) = x^3 e^{-x}\left(-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln x + \cdots\right)$$

เมื่อแทนอนุกรมแมคลอรินสำหรับ e^{-x} จะได้

$$y_2(x) = \left(x^3 - x^4 + \frac{x^5}{2} - \frac{x^6}{6} + \cdots\right)\left(-\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x} + \frac{x}{6} + \frac{x^2}{48} + \cdots\right)$$

$$+\frac{x^3 e^{-x}\ln x}{2}$$

หรือ

$$y_2(x) = \left(-\frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{3x^3}{4} - \frac{x^4}{4}\cdots\right) + \frac{x^3 e^{-x}\ln x}{2}$$

ซึ่งอยู่ในรูป (136) เมื่อ $y_1(x) = x^3 e^{-x}$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (127) คือ

$y = a_1 y_1(x) + a_2 y_2(x)$ เมื่อ a_1, a_2 เป็นตัวคงค่า

7.4 สรุปท้ายบทที่ 7

การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปร ถ้าสมการเชิงเส้นนั้นอยู่ในรูปแบบ

$$a_0 x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}x\frac{dy}{dx} + a_n y = F(x)$$

จะเรียกสมการนี้ว่าสมการ โคชี – ออยเลอร์ ซึ่งเป็นสมการที่มีรูปแบบเฉพาะ และสามารถหาผลเฉลยโดยการแปลงเป็นสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัวแล้วหาผลเฉลยของสมการเชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว แต่ถ้าสมการอยู่ในรูปแบบ

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = 0$$

ซึ่งสมการนี้ไม่เป็นสมการ โคชี – ออยเลอร์แล้วเราจะใช้การลดอันดับของสมการลงที่ละหนึ่งโดยแทน $y = f(x)v$ ในสมการแล้วสมการดังกล่าว แล้วสมการนั้นจะเปลี่ยนสมการเชิงเส้นอันดับ

$n-1$ ของตัวแปรตาม $w = \dfrac{dv}{dx}$ ทำให้สามารถหาผลเฉลยของสมการในรูปแบบดังกล่าวได้ แต่ยังมีสมการเชิงอนุพันธ์ในบางรูปแบบที่ไม่สามารถหาผลเฉลยของสมการได้โดยวิธีก่อนหน้า และถ้าทราบจากทฤษฎีบทของการมีผลเฉลยแล้วว่าสมการนั้นมีผลเฉลยแต่ไม่สามารถหาผลเฉลยในรูปของฟังก์ชันพีชคณิต ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน ฟังก์ชันชี้กำลัง หรือฟังก์ชันลอกาลิทึมได้ ดังนั้นผลเฉลยจะอยู่ในรูปแบบอนุกรมซึ่งมีวิธีการหาผลเฉยรอบจุดสามัญ และผลเฉลยรอบจุดเอกฐาน

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 7

1. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการต่อไปนี้

   1.1 $x^2y'' + xy' + 3y = 0$

   1.2 $x^2y'' - 2xy' + y = 0$

   1.3 $2x^2y'' - xy' + 3y = 0$

   1.4 $-x^2y'' + 2xy' - y = 0$

   1.5 $-2x^2y'' + 6xy' - 2y = 0$

   1.6 $x^3y''' - x^2y'' - 6xy' + 18y = 0$

2. กำหนดผลเฉลย y_1 ของสมการเชิงอนุพันธ์ให้จงหาอีกผลเฉลยหนึ่งที่เป็นอิสระเชิงเส้นกับ y_1

   2.1 $(1-2x-x^2)y'' + 2(1+x)y' - 2y = 0$, $y_1 = x+1$

   2.2 $(1+2x)y'' + 4xy' - 4y = 0$, $y_1 = e^{-2x}$

   2.3 $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$, $y_1 = x^2 + x^3$

   2.4 $y'' + 3\tan xy' - 4y = 0$, $y_1 = 1$

   2.5 $x^2y'' - 5xy' + 9y = 0$, $y_1 = x^3 \ln x$

3. จงหาจุดเอกฐานทั้งหมดของสมกาเชิงอนุพันธ์ที่กำหนดให้ต่อไปนี้

   3.1 $(1-x)y'' + \dfrac{3x}{x+2}y' + \dfrac{(1-x)^2}{x+3}y = 0$

   3.2 $(x^2+x)y'' + \dfrac{x^3}{x-1}y' + \dfrac{x^4+3x}{x+2}y = 0$

   3.3 $\dfrac{1}{x}y'' + \dfrac{3x^3}{x-1}y' + \dfrac{2x}{x+2}y = 0$

   3.4 $e^xy'' + \dfrac{3x+4}{x+4}y' + \dfrac{x}{x-4}y = 0$

4. จงหาจุดเอกฐานทั้งหมดและตรวจสอบว่าจุดใดเป็นจุดเอกฐานปกติ

4.1 $x^2(x^2-1)y'' + \frac{x(x+1)}{x-4}y' + \frac{3(x-1)}{x^2-16}y = 0$

4.2 $x(x^2-3x+10)y'' + \frac{x+4}{x-2}y' + 16y = 0$

4.3 $x(x-1)y'' + \frac{x+1}{x-4}y' + \frac{1}{x+2}y = 0$

4.4 $e^x y'' + 3xy' + \frac{1}{1-e^x}y = 0$

5. จงหาผลเฉลยแบบอนุกรมรอบจุด 0

5.1 $y'' + xy' + (2x^2+1)y = 0$

5.2 $y'' + xy' + (3x+2)y = 0$

5.3 $(x^2+1)y'' + xy' + xy = 0$

5.4 $(1-x^2)y'' + 2xy' + 5y = 0$

6. จงหาผลเฉลยแบบอนุกรมของปัญหาค่าเริ่มต้นที่กำหนดให้

6.1 $y'' + xy' + y = 0$ $\quad y(0) = 1, y'(0) = 0$

6.2 $y'' + xy' + 2xy = 0$ $\quad y(0) = 2, y'(0) = 3$

6.3 $x^2y'' + y' + 2y = 0$ $\quad y(1) = 0, y'(1) = 1$

7. จงหาผลเฉลยแบบอนุกรมรอบจุด 0 โฟรเบนิอุส

7.1 $xy'' - \left(x - \frac{1}{2}\right)y' - \frac{1}{2}y = 0$

7.2 $2x^2y'' + 5xy' + (2x^2-1)y = 0$

7.3 $2xy'' + (1+x)y' - 2y = 0$

7.4 $xy'' + y' + y = 0$

บทที่ 8
ผลการแปลงลาปลาซ

การหาผลเฉลยขอสมการเชิงอนุพันธ์ในบทที่ผ่านมานั้นได้มีการนำประโยชน์ของตัวดำเนินการ D มาช่วยในการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ และจากความหมายของ $D(f(x))$ คืออนุพันธ์ของฟังก์ชันแสดงได้ดังนี้

$$\begin{array}{lcl} f(x) = x^2 & \rightleftarrows & F(x) = 2x \\ f(x) = e^x & \rightleftarrows & F(x) = e^x \\ f(x) = \sin x & \rightleftarrows & F(x) = \cos x \end{array}$$

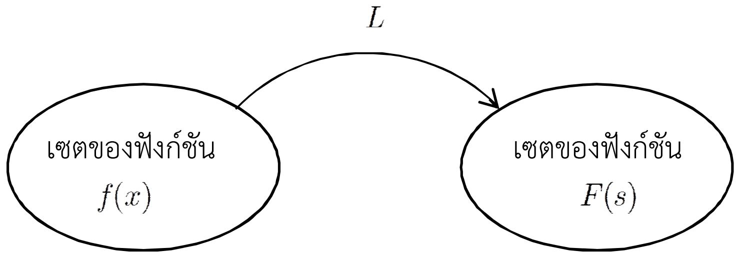
จะเห็นได้ว่าตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ D เป็นฟังก์ชันที่ส่งฟังก์ชันไปเป็นฟังก์ชันกล่าวคือ

$$\begin{array}{lll} D\big(f(x)\big) = D(x^2) & \text{เป็นฟังก์ชัน} & F(x) = 2x \\ D\big(f(x)\big) = D(e^x) & \text{เป็นฟังก์ชัน} & F(x) = e^x \\ D\big(f(x)\big) = D(\sin x) & \text{เป็นฟังก์ชัน} & F(x) = \cos x \end{array}$$

การแปลงลาปลาซมีประโยชน์อย่างมากในการการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ และสามารถนำไปประยุกต์ใช้กับการแก้ปัญหาทางวิทยาศาสตร์และวิศวกรรมศาสตร์ได้เป็นอย่างดีดังนั้นในบทนี้จะศึกษาเกี่ยวกับการแปลงลาปลาซที่เป็นผลของการแปลงลาปลาซและการหาผลการแปลงลาปลาซแบบต่าง ๆ สมบัติของผลการแปลงลาปลาซ และการนำผลการแปลงลาปลาซไปใช้ในการแก้สมการเชิงอนุพันธ์

8.1 ผลการแปลงลาปลาซ

ผลการแปลงลาปลาซ เป็นการส่งค่าที่เป็นฟังก์ชันไปเป็นฟังก์ชันโดยใช้สัญลักษณ์แทนผลการแปลงลาปลาซด้วย L ตัวอย่างเช่น $L\{f\} = F$ (ดำรง ทิพย์โยธา, 2541 : 177)



ภาพที่ 8.1 แสดงการแปลงลาปลาซ

ดังนั้นการแปลงลาปลาซ หรือผลการแปลงลาปลาซ สามารถนำไปช่วยแก้สมการเชิงอนุพันธ์อย่างหนึ่ง ซึ่งจะต้องอาศัยเรื่องของการหาปริพันธ์ไม่ตรงแบบ ดังจะกล่าวถึงในบทนิยาม

ถ้ากำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันค่าจริงที่นิยามบนช่วง $[0,\infty]$ หรือ $f(x)$ หาค่าได้สำหรับ $x \geq 0$ จะได้ว่า $\int\limits_0^\infty f(x)\,dx = \lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_0^b f(x)\,dx$ ซึ่งเป็นค่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบในรูปของลิมิต หลักการดังกล่าวนี้สามารถสร้างเป็นบทนิยามได้ดังนี้คือ

บทนิยาม 8.1

กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องบนช่วง $[0,b]$ เมื่อ $b > 0$ ถ้า $\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_0^b f(x)\,dx$ หาค่าได้และเป็นค่าจำกัด จะกล่าวว่า **ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ** $\int\limits_0^\infty f(x)\,dx$ **ลู่เข้า** ไม่เช่นนั้นกล่าวว่า $\int\limits_0^\infty f(x)\,dx$ **ลู่ออก** เมื่อ $\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_0^b f(x)\,dx = L$ จะเขียน $\int\limits_0^\infty f(x)\,dx = L$

ข้อสังเกต 8.1

ถ้าปริพันธ์ไม่ตรงแบบลู่เข้า จะเห็นว่าค่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบดังกล่าวเป็นการแปลงฟังก์ชัน $f(x)$ ไปเป็น $F(s) = \int\limits_0^\infty k(s,x)f(x)\,dx$

ในที่นี้ถ้ากำหนดให้ $K(s,x) = e^{-sx}$ จะได้นิยามของการแปลงลาปลาซได้ดังต่อไปนี้

บทนิยาม 8.2

ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่หาค่าได้บนช่วง $[0,\infty)$ แล้วค่าปริพันธ์

$\int_0^\infty e^{-sx} f(x)\,dx = F(s)$ จะเรียกว่า ซึ่งถ้าลิมิตหาค่าได้ จะเรียกว่า**การแปลงลาปลาซ**

หรือผลการแปลงลาปลาซของ f ถ้าปริพันธ์นี้หาค่าได้ การแปลงลาลาซของ f แทนด้วย

$L\left\{f\right\}$ หรือ $L\{f(x)\}$

ตัวอย่าง 8.1 จงหา $L\{f(x)\}$ เมื่อกำหนด $f(x) = 2$

วิธีทำ เนื่องจาก $L\{f(x)\} = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)\,dx$

สำหรับทุกค่าของ s ที่ทำให้ปริพันธ์ไม่ตรงแบบลู่เข้า และ $f(x)$ หาค่าได้บนช่วง $[0,\infty]$

จะได้ว่า
$$
\begin{aligned}
L\{2\} &= \int_0^\infty e^{-sx}(2)\,dx \\
&= \lim_{b\to\infty} \int_0^b 2e^{-sx}\,dx \\
&= \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{2}{s}e^{-sx}\right]\Bigg|_0^b \\
&= -2\lim_{b\to\infty}\left[\frac{e^{-sb}}{s} - \frac{e^{-s(0)}}{s}\right] \\
&= -2\lim_{b\to\infty}\left[\frac{e^{-sb}}{s} - \frac{1}{s}\right]
\end{aligned}
$$

1. สำหรับ $s = 0$ จะทำให้ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\int_0^\infty e^{-sx} f(x)\,dx$ ลู่ออก เพราะว่าถ้า $s = 0$

   จะได้ $\int_0^\infty e^{-(0)x}(2)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b 2\,dx = \lim_{b\to\infty}[2x]\Big|_0^b = \lim_{b\to\infty}[2b - 0] = \infty$

2. สำหรับ $s < 0$ จะทำให้ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\int_0^\infty e^{-sx} f(x)\,dx$ ลู่ออก เพราะว่าถ้า $s < 0$

   จะได้ $-sb > 0$ และ $\lim_{b\to\infty} e^{-sb} = \infty$

3. สำหรับ $s > 0$ จะทำให้ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\int_0^\infty e^{-sx} f(x)\,dx$ ลู่เข้าเพราะว่าถ้า $s > 0$

   จะได้ $-sb < 0$ และ $\lim_{b\to\infty} e^{-sb} = 0$

ดังนั้น $L\{2\} = \dfrac{2}{s}$ สำหรับ $s > 0$

จากตัวอย่าง 8.1 ใช้วิธีการหาเช่นเดียวกันจะได้ว่า $L\{a\} = \dfrac{a}{s}$ สำหรับ $s > 0$ เมื่อ a เป็นค่าคงตัว

ตัวอย่าง 8.2 จงหา $L\left\{e^{5x}\right\}$

วิธีทำ เนื่องจาก
$$
\begin{aligned}
L\left\{e^{5x}\right\} &= \int_0^\infty e^{-sx}(e^{5x})\,dx \\
&= \int_0^\infty e^{(5-s)x}\,dx \\
&= \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{(5-s)x}\,dx \\
&= \lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{5-s}e^{(5-s)x}\right]\Bigg|_0^b \\
&= \frac{1}{5-s}\lim_{b\to\infty}\left[e^{(5-s)b} - e^{(5-s)(0)}\right] \\
&= \frac{1}{5-s}\lim_{b\to\infty}\left[e^{(5-s)b} - 1\right]
\end{aligned}
$$

สำหรับ $s > 5$
$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{5-s}(0-1) \\
&= \frac{1}{s-5}
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $L\left\{e^{5x}\right\} = \dfrac{1}{s-5}$ สำหรับ $s > 5$

จากตัวอย่าง 8.2 ใช้วิธีการหาเช่นเดียวกันจะได้ว่า $L\left\{e^{ax}\right\} = \dfrac{1}{s-a}$ สำหรับ $s > a$ เมื่อ a เป็นค่าคงตัว

ตัวอย่าง 8.3 จงหา $L\{x\}$

วิธีทำ เนื่องจาก
$$
\begin{aligned}
L\{x\} &= \int_0^\infty e^{-sx}(x)\,dx \\
&= \int_0^\infty xe^{-sx}\,dx \\
&= \lim_{b\to\infty}\int_0^b xe^{-sx}\,dx
\end{aligned}
$$

หาปริพันธ์ทีละส่วนจะได้ว่า

$$\int xe^{-sx}\,dx = \left[-\frac{xe^{-sx}}{s} - \frac{e^{-sx}}{s^2}\right]$$

จะได้ $$L\{x\} = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{xe^{-sx}}{s} - \frac{e^{-sx}}{s^2}\right]\Bigg|_0^b$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[\left(-\frac{be^{-sb}}{s} - \frac{e^{-sb}}{s^2}\right) - \left(-\frac{(0)e^{-s(0)}}{s} - \frac{e^{-s(0)}}{s^2}\right)\right]$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{be^{-sb}}{s} - \frac{e^{-sb}}{s^2} + \frac{1}{s^2}\right]$$

สำหรับ $s > 0$

$$= -0 - 0 + \frac{1}{s^2}$$

$$= \frac{1}{s^2}$$

ดังนั้น $L\{x\} = \dfrac{1}{s^2}$ สำหรับ $s > 0$

ตัวอย่าง 8.4 จงหา $L\left\{x^2\right\}$

วิธีทำ เนื่องจาก $L\left\{x^2\right\} = \int_0^\infty e^{-sx}(x^2)\,dx$

$$= \int_0^\infty x^2 e^{-sx}\,dx$$

$$= \lim_{b\to\infty}\int_0^b x^2 e^{-sx}\,dx$$

หาปริพันธ์ทีละส่วนสองครั้งจะได้ว่า

$$\int x^2 e^{-sx}\,dx = \left[-\frac{x^2e^{-sx}}{s} - \frac{2xe^{-sx}}{s^2} - \frac{2e^{-sx}}{s^3}\right]$$

จะได้

$$L\left\{x^2\right\} = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{x^2e^{-sx}}{s} - \frac{2xe^{-sx}}{s^2} - \frac{2e^{-sx}}{s^3}\right]\Bigg|_0^b$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[\left(-\frac{b^2e^{-sb}}{s} - \frac{2be^{-sb}}{s^2} - \frac{2e^{-sb}}{s^3}\right) - \left(-\frac{(0)^2e^{-s(0)}}{s} - \frac{2(0)e^{-s(0)}}{s^2} - \frac{2e^{-s(0)}}{s^3}\right)\right]$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{b^2e^{-sb}}{s} - \frac{2be^{-sb}}{s^2} - \frac{2e^{-sb}}{s^3} + \frac{2}{s^3}\right]$$

สำหรับ $s > 0$

$$= -0 - 0 - 0 + \frac{2}{s^3}$$
$$= \frac{2}{s^3}$$

ดังนั้น $L\{x\} = \frac{2}{s^3}$ สำหรับ $s > 0$

จากตัวอย่าง 8.3 และ 8.4 ใช้วิธีการหาเช่นเดียวกันจะได้ว่า $L\{x^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$ สำหรับ $s > 0$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก

ตัวอย่าง 8.5 จงหา $L\{\sin 3x\}$

วิธีทำ เนื่องจาก $L\{\sin 3x\} = \int_0^\infty e^{-sx}(\sin 3x)\,dx$
$$= \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-sx}\sin 3x\,dx$$

หาปริพันธ์ทีละส่วนสองครั้งและใช้สมบัติของฟังก์ชันตรีโกณมิติจะได้ว่า

$$\int e^{-sx}\sin 3x\,dx = \frac{e^{-sx}(-s\sin 3x - 3\cos 3x)}{(-s)^2 + 3^2}$$

และ

$$L\{e^{-sx}\sin 3x\} = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{e^{-sx}(-s\sin 3x - 3\cos 3x)}{s^2+3^2}\right]\Bigg|_0^b$$
$$= \lim_{b\to\infty}\left[\left(\frac{e^{-sb}(-s\sin 3b - 3\cos 3b)}{s^2+3^2}\right) - \left(\frac{e^{-s(0)}(-s\sin 3(0) - 3\cos 3(0))}{s^2+3^2}\right)\right]$$
$$= \lim_{b\to\infty}\left[\frac{e^{-sb}(-s\sin 3b - 3\cos 3b)}{s^2+3^2} + \frac{3}{s^2+3^2}\right]$$

สำหรับ $s > 0$
$$= 0 + \frac{3}{s^2+3^2}$$
$$= \frac{3}{s^2+3^2}$$

ดังนั้น $L\{\sin 3x\} = \frac{3}{s^2+3^2}$ สำหรับ $s > 0$

จากตัวอย่าง 8.5 ใช้วิธีการหาเช่นเดียวกันจะได้ว่า $L\{\sin ax\} = \dfrac{a}{s^2 + a^2}$ สำหรับ $s > 0$ เมื่อ a เป็นค่าคงตัว และในทำนองเดียวกัน $L\{\cos ax\} = \dfrac{s}{s^2 + a^2}$ สำหรับ $s > 0$

ตัวอย่าง 8.6 จงหา $L\left\{xe^{5x}\right\}$

วิธีทำ เนื่องจาก
$$L\left\{xe^{5x}\right\} = \int_0^\infty e^{-sx}(xe^{5x})\,dx$$
$$= \int_0^\infty xe^{(5-s)x}\,dx$$
$$= \lim_{b\to\infty}\int_0^b xe^{(5-s)x}\,dx$$

หาปริพันธ์ทีละส่วนจะได้ว่า
$$\int xe^{(5-s)x}\,dx = \left[\frac{xe^{(5-s)x}}{5-s} - \frac{e^{(5-s)x}}{(5-s)^2}\right]$$

และ
$$L\{x\} = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{xe^{(5-s)x}}{5-s} - \frac{e^{(5-s)x}}{(5-s)^2}\right]\Bigg|_0^b$$
$$= \lim_{b\to\infty}\left[\left(\frac{be^{(5-s)b}}{5-s} - \frac{e^{(5-s)b}}{(5-s)^2}\right) - \left(\frac{(0)e^{(5-s)(0)}}{5-s} - \frac{e^{(5-s)(0)}}{(5-s)^2}\right)\right]$$
$$= \lim_{b\to\infty}\left[\frac{be^{(5-s)b}}{5-s} - \frac{e^{(5-s)b}}{(5-s)^2} + \frac{1}{(5-s)^2}\right]$$

สำหรับ $s > 0$
$$= 0 - 0 + \frac{1}{(5-s)^2}$$
$$= \frac{1}{(5-s)^2}$$

ดังนั้น $L\left\{xe^{5x}\right\} = \dfrac{1}{(5-s)^2}$ สำหรับ $s > 5$

จากตัวอย่าง 8.6 ใช้วิธีการหาเช่นเดียวกันจะได้ว่า $L\left\{xe^{ax}\right\} = \dfrac{1}{(a-s)^2}$ สำหรับ $s > a$ เมื่อ a เป็นค่าคงตัว

จากตัวอย่างที่ผ่านมาข้างต้น ผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันพื้นฐาน จะสรุปเป็นสูตรซึ่งสามารถนำไปใช้ได้โดยการแทนค่าได้ กำหนดให้ a เป็นค่าคงตัว (ก่อสุข วีระถาวร, 2539 : 106)

1. $L\{a\} = \dfrac{a}{s}$ สำหรับ $s > 0$
2. $L\{e^{ax}\} = \dfrac{1}{s-a}$ สำหรับ $s > a$
3. $L\{x^{n}\} = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$ สำหรับ $s > 0$ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก
4. $L\{\sin ax\} = \dfrac{a}{s^2 + a^2}$ สำหรับ $s > 0$
5. $L\{\cos ax\} = \dfrac{s}{s^2 + a^2}$ สำหรับ $s > 0$
6. $L\{xe^{ax}\} = \dfrac{1}{(a-s)^2}$ สำหรับ $s > a$
7. $L\{\sinh ax\} = \dfrac{a}{s^2 - a^2}$ สำหรับ $s > |a|$
8. $L\{\cosh ax\} = \dfrac{s}{s^2 - a^2}$ สำหรับ $s > |a|$

ตัวอย่างเช่น

$L\{4\} = \dfrac{4}{s}$ สำหรับ $s > 0$

$L\{e^{-2x}\} = \dfrac{1}{s+2}$ สำหรับ $s > -2$

$L\{x^3\} = \dfrac{6}{s^4}$ สำหรับ $s > 0$

$L\{\sin(-2x)\} = -\dfrac{2}{s^2+4}$ สำหรับ $s > 0$

$L\{\cos x\} = \dfrac{s}{s^2+1}$ สำหรับ $s > 0$

$L\{xe^{10x}\} = \dfrac{1}{(10-s)^2}$ สำหรับ $s > 10$

$L\{\sinh x\} = \dfrac{1}{s^2-1}$ สำหรับ $s > 1$

$L\{\cosh 5x\} = \dfrac{5}{s^2-25}$ สำหรับ $s > 5$

สำหรับฟังก์ชันอื่น ๆ ที่ไม่เป็นไปตามสูตรการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันพื้นฐานข้างต้น นั้นสามารถหาได้จากบทนิยาม $L\{f(x)\} = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x)\,dx$ โดยตรง หรือบางครั้งอาจต้องใช้วิธีการเปลี่ยนรูปของฟังก์ชัน และถ้ามีความยุ่งยากจะต้องใช้เทคนิคที่จะกล่าวถึงต่อไปนี้มาช่วย

ตัวอย่าง 8.7 จงหา $L\left\{\sin^2 x\right\}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$

ดังนั้น $L\left\{\sin^2 x\right\} = \int\limits_0^\infty e^{-sx}\left(\dfrac{1-\cos 2x}{2}\right)dx$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty e^{-sx}(1-\cos 2x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int\limits_0^\infty e^{-sx}\,dx - \int\limits_0^\infty e^{-sx}\cos 2x\,dx\right]$$

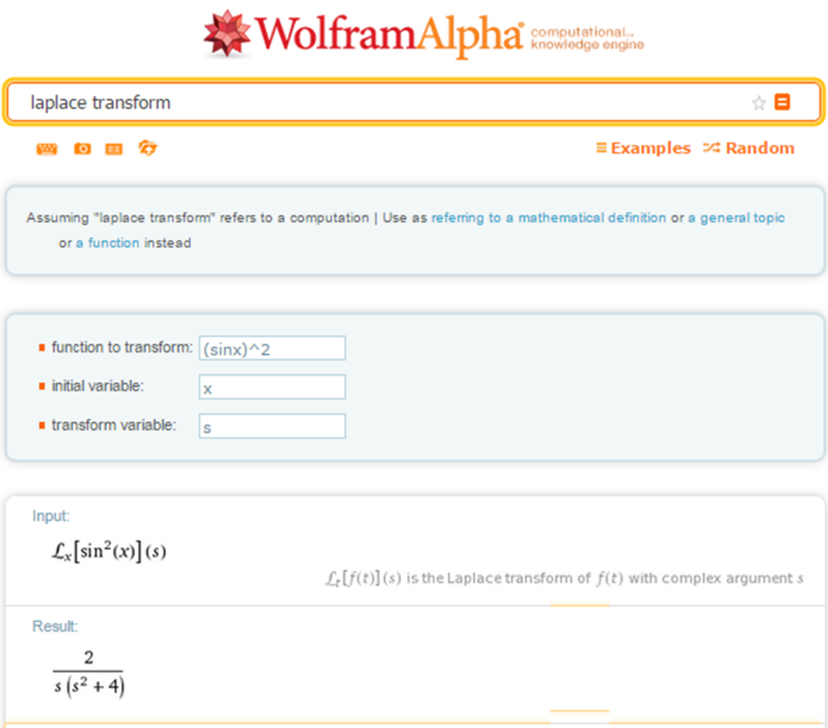
$$= \frac{1}{2}\left[L\{1\} - L\{\cos 2x\}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s} - \frac{s}{s+4}\right]$$

$$= \frac{2}{s(s^2+4)}$$

ดังนั้น $L\left\{\sin^2 x\right\} = \dfrac{2}{s(s^2+4)}$ สำหรับ $s > 0$

ใช้ Wolfram Alpha เพื่อหา $L\left\{\sin^2 x\right\}$ ดังภาพที่ 8.2



ภาพที่ 8.2 หา $L\left\{\sin^2 x\right\}$ โดยใช้ Wolfram Alpha

ตัวอย่าง 8.8 จงหา $L\left\{\sin(2x-3)\right\}$

วิธีทำ เนื่องจาก $L\left\{\sin(2x-3)\right\} = \int_0^\infty e^{-sx}\sin(2x-3)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-sx}\sin(2x-3)\,dx$

หาปริพันธ์ทีละส่วนจะได้ว่า

$$\int e^{-sx}\sin(2x-3)\,dx = \left[\frac{-se^{-sx}\sin(2x-3)}{s^2+4} + \frac{2e^{-sx}\cos(2x-3)}{s^2+4}\right]$$

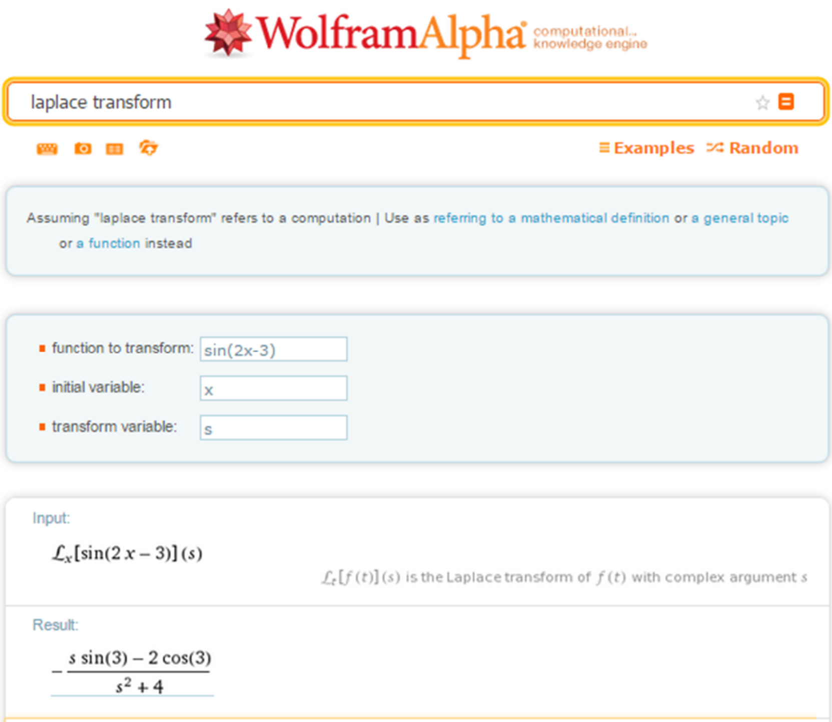
จะได้ $$L\left\{\sin(2x-3)\right\} = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{-se^{-sx}\sin(2x-3)}{s^2+4} + \frac{2e^{-sx}\cos(2x-3)}{s^2+4}\right]\Bigg|_0^b$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[\left(\frac{-se^{-sb}\sin(2b-3)}{s^2+4} + \frac{2e^{-sb}\cos(2b-3)}{s^2+4}\right) - \left(\frac{-se^{-s(0)}\sin(2(0)-3)}{s^2+4} + \frac{2e^{-s(0)}\cos(2(0)-3)}{s^2+4}\right)\right]$$

$$= \left[\frac{s\sin(-3)+2\cos(-3)}{s^2+4}\right]$$

ดังนั้น $L\left\{\sin(2x-3)\right\} = \dfrac{s\sin(-3)+2\cos(-3)}{s^2+4}$ สำหรับ $s>0$

ใช้ Wolfram Alpha เพื่อหา $L\left\{\sin(2x-3)\right\}$ ดังภาพที่ 8.3



ภาพที่ 8.3 หา $L\left\{\sin(2x-3)\right\}$ โดยใช้ Wolfram Alpha

สำหรับฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ นั้นก็สามารถหาผลการแปลงลาปลาซได้เช่นเดียวกัน แต่ต้องมีเงื่อนไขเพิ่มเติมดังบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 8.3

ฟังก์ชัน f จะกล่าวว่ามี**อันดับเลขชี้กำลังเท่ากับ** c ถ้ามีค่าคงตัว c สำหรับบาง $M > 0$ และ $x_0 > 0$ ซึ่งทำให้ $|f(x)| \leq Me^{cx}$ ทุกค่า $x > x_0$

ตัวอย่างเช่น

$f(x) = e^x$ จะมีค่าอันดับเลขชี้กำลังเป็น 1 เพราะว่า $|e^x| \leq 1 \cdot e^x$

$f(x) = e^{-x}$ จะมีค่าอันดับเลขชี้กำลังเป็น 1 เพราะว่า $|e^{-x}| \leq 1 \cdot e^x$

$f(x) = 2\sin x$ จะมีค่าอันดับเลขชี้กำลังเป็น 1 เพราะว่า $|2\sin x| \leq 2 \cdot e^x$

บทนิยาม 8.4

ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $(0,\infty)$ และมีอันดับเลขชี้กำลังเท่ากับ c แล้วจะได้ว่า $L\{f(x)\}$ หาค่าได้สำหรับ $s > c$

และในการหาผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันที่ต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ ก็สามารถหาได้โดยการหาปริพันธ์ในแต่ละช่วงที่ $x > 0$

ตัวอย่าง 8.9 จงหา $L\{f(x)\}$ เมื่อกำหนด $f(x) = \begin{cases} -1, & x \leq 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$

วิธีทำ เนื่องจาก $L\{f(x)\} = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)\,dx = \int_0^2 e^{-sx}(-1)\,dx + \int_2^\infty e^{-sx}(1)\,dx$

จะได้ว่า $L\{f(x)\} = \left[\dfrac{e^{-sx}}{s}\right]\Bigg|_0^2 + \lim\limits_{b\to\infty}\int_2^b e^{-sx}\,dx$

$$= \left[\left(\frac{e^{-s(2)}}{s}\right) - \left(\frac{e^{-s(0)}}{s}\right)\right] + \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{e^{-sx}}{s}\right]\Bigg|_2^b$$

$$= \left[\frac{e^{-2s}}{s} - \frac{1}{s}\right] - \lim_{b\to\infty}\left[\frac{e^{-sb}}{s} - \frac{e^{-s(2)}}{s}\right]$$

$$= \left[\frac{e^{-2s}}{s} - \frac{1}{s}\right] - \left[-\frac{e^{-s(2)}}{s}\right]$$

$$= \frac{2e^{-2s}}{s} - \frac{1}{s}$$

ดังนั้น $L\{f(x)\} = \frac{2e^{-2s}}{s} - \frac{1}{s}$ สำหรับ $s > 0$

ตัวอย่าง 8.10 จงหา $L\{f(x)\}$ เมื่อกำหนด $f(x) = \begin{cases} 2, & 0 \le x \le 1 \\ e^x, & 1 \le x \le 3 \\ 0, & x > 3 \end{cases}$

วิธีทำ เนื่องจาก $L\{f(x)\} = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)\,dx = \int_0^1 e^{-sx}(2)\,dx + \int_1^3 e^{-sx}(e^x)\,dx + \int_3^\infty e^{-sx}(0)\,dx$

จะได้ว่า $L\{f(x)\} = \left[\frac{-2e^{-sx}}{s}\right]\Bigg|_0^1 + \left[\frac{e^{(1-s)x}}{s-1}\right]\Bigg|_1^3 + \lim_{b\to\infty}\int_3^\infty e^{-sx}(0)\,dx$

$$= \left[\left(\frac{-2e^{-s(1)}}{s}\right) - \left(\frac{-2e^{-s(0)}}{s}\right)\right] + \left[\left(\frac{e^{(1-s)(3)}}{s-1}\right) - \left(\frac{e^{(1-s)(1)}}{s-1}\right)\right] + 0$$

$$= \left[\frac{-2e^{-s}}{s} + \frac{2}{s}\right] + \left[\frac{e^{(3-3s)}}{s-1} - \frac{e^{(1-s)}}{s-1}\right]$$

$$= \frac{-2e^{-s}}{s} + \frac{2}{s} + \frac{e^{(3-3s)}}{s-1} - \frac{e^{(1-s)}}{s-1}$$

ดังนั้น $L\{f(x)\} = \frac{-2e^{-s}}{s} + \frac{2}{s} + \frac{e^{(3-3s)}}{s-1} - \frac{e^{(1-s)}}{s-1}$ สำหรับ $s > 1$

8.2 สมบัติบางประการของผลการแปลงลาปลาซ

ผลการแปลงลาปลาซนั้นมีสมบัติที่สำคัญเพื่อช่วยในการหาผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันรูปแบบต่าง ๆ ได้ง่ายขึ้นและสมบัติที่สำคัญที่นำมาใช้ได้แก่ (วีระศักดิ์ วาจาบัณฑิตย์, 2536 : 266).

8.2.1 สมบัติเชิงเส้นของผลการแปลงลาปลาซ

สามารถสรุปเป็นทฤษฎีบทได้ดังนี้

ทฤษฎีบท 8.1

ถ้า $f(x)$ และ $g(x)$ มีผลการแปลงลาปลาซแล้วจะได้ว่า

$L\{af(x) + bg(x)\} = aL\{f(x)\} + bL\{g(x)\}$ เมื่อ a และ b เป็นค่าคงตัว

จากทฤษฎีบท 8.1 สามารถนำไปใช้ได้กับสมบัติดังนี้ได้

1. $L\{af(x)-bg(x)\}=aL\{f(x)\}-bL\{g(x)\}$
2. $L\{af(x)\}=aL\{f(x)\}$

ตัวอย่าง 8.11 จงหา $L\{f(x)\}$ เมื่อกำหนด $f(x)=2x^2-3x+4$

วิธีทำ เนื่องจาก $L\{f(x)\}=L\{2x^2-3x+4\}$

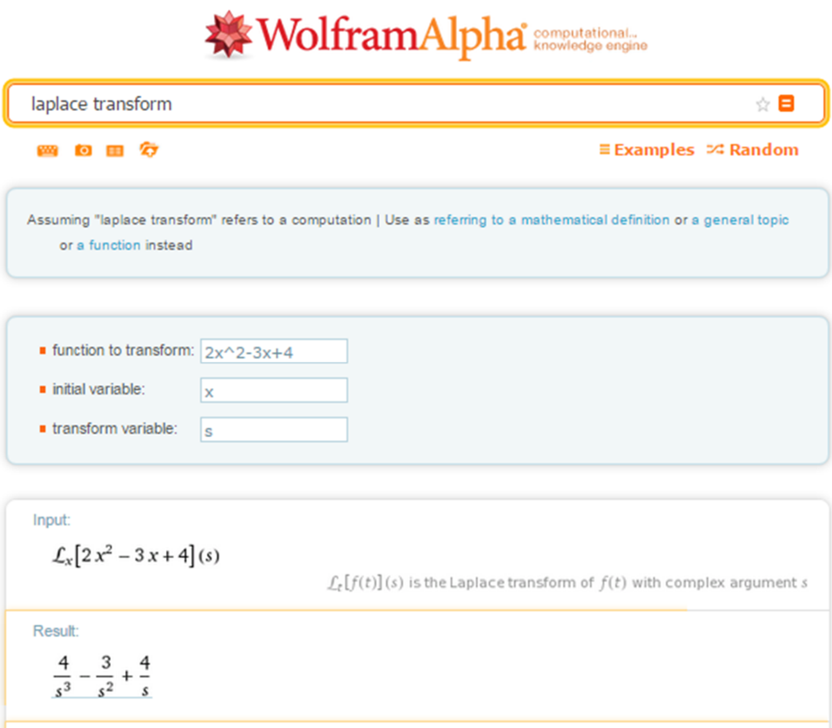
$$=2L\{x^2\}-3L\{x\}+L\{4\}$$

$$=2\left(\frac{2!}{s^3}\right)-3\left(\frac{1}{s^2}\right)+4\left(\frac{1}{s}\right)$$

$$=\frac{4}{s^3}-\frac{3}{s^2}+\frac{4}{s}$$

ดังนั้น $L\{f(x)\}=\frac{4}{s^3}-\frac{3}{s^2}+\frac{4}{s}$ สำหรับ $s>0$

ใช้ Wolfram Alpha เพื่อหา $L\{f(x)\}$ เมื่อกำหนด $f(x)=2x^2-3x+4$ ดังภาพที่ 8.4



ภาพที่ 8.4 หา $L\{2x^2-3x+4\}$ โดยใช้ Wolfram Alpha

ตัวอย่าง 8.12 จงหาผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน $3\sin x + 2\cos 4x$

วิธีทำ เนื่องจาก $L\{3\sin x + 2\cos 4x\} = 3L\{\sin x\} + 2L\{\cos 4x\}$

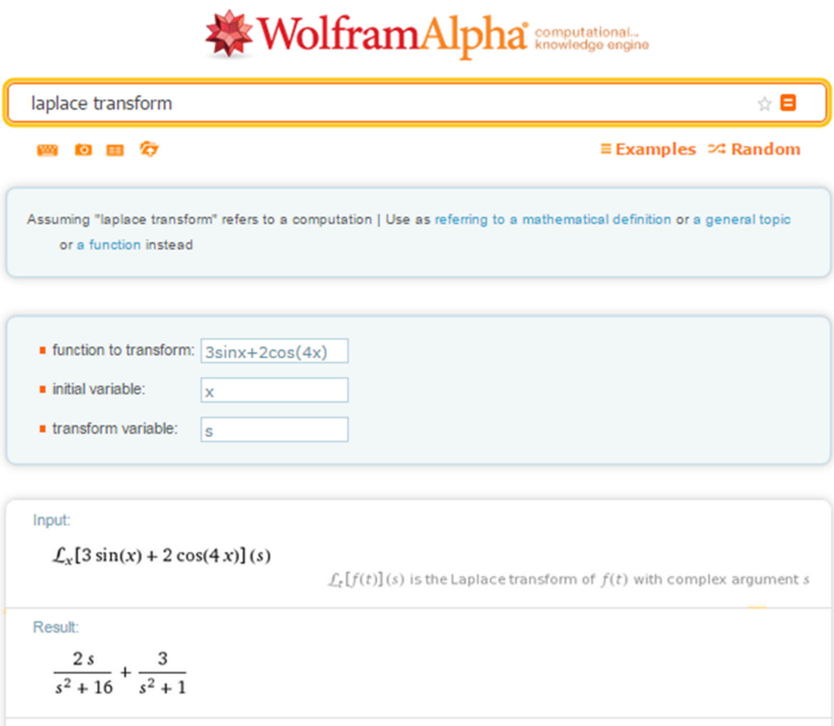
$$= 3L\left\{\sin x\right\} + 2L\left\{\cos 4x\right\}$$

$$= 3\left(\frac{1}{s^2+1}\right) + 2\left(\frac{s}{s^2+16}\right)$$

$$= \frac{3}{s^2+1} + \frac{2s}{s^2+16}$$

ดังนั้น $L\{3\sin x + 2\cos 4x\} = \dfrac{3}{s^2+1} + \dfrac{2s}{s^2+16}$ สำหรับ $s > 0$

ใช้ Wolfram Alpha เพื่อหา $L\left\{3\sin x + 2\cos 4x\right\}$ ดังภาพที่ 8.5



ภาพที่ 8.5 หา $L\left\{3\sin x + 2\cos 4x\right\}$ โดยใช้ Wolfram Alpha

ตัวอย่าง 8.13 จงหา $L\{f(x)\}$ เมื่อกำหนด $f(x)=2e^{3x}-3\cos 5x+4x^3-1$

วิธีทำ เนื่องจาก $L\{f(x)\}=L\left\{2e^{3x}-3\cos 5x+4x^3-1\right\}$

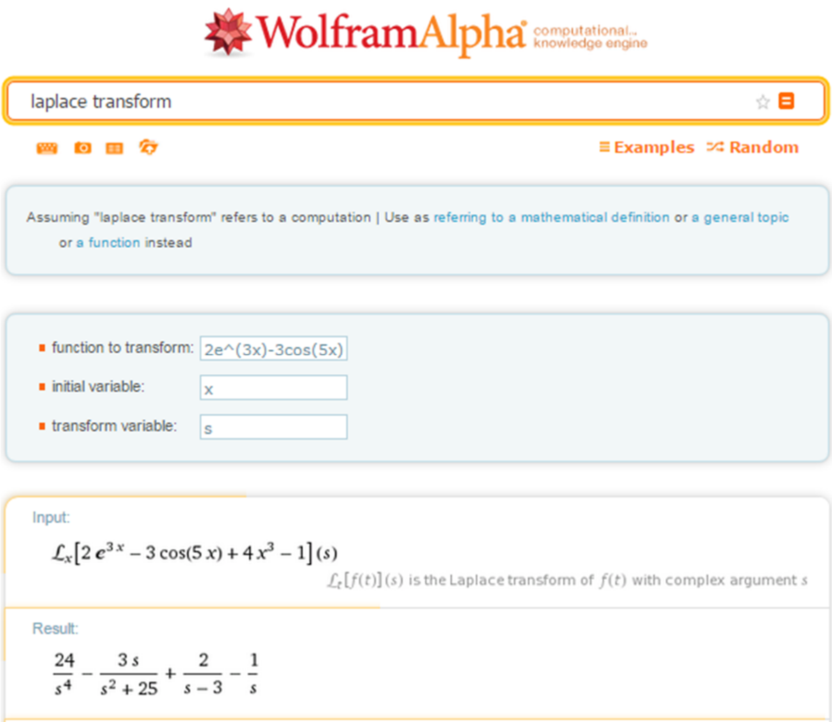
$$=2L\left\{e^{3x}\right\}-3L\left\{\cos 5x\right\}+4L\left\{x^3\right\}-L\left\{1\right\}$$

$$=2\left(\frac{1}{s-3}\right)-3\left(\frac{s}{s^2+25}\right)+4\left(\frac{3!}{s^4}\right)+\left(\frac{1}{s}\right)$$

$$=\frac{2}{s-3}-\frac{3s}{s^2+25}+\frac{24}{s^4}+\frac{1}{s}$$

ดังนั้น $L\left\{f(x)\right\}=\dfrac{2}{s-3}-\dfrac{3s}{s^2+25}+\dfrac{24}{s^4}+\dfrac{1}{s}$ สำหรับ $s>3$

ใช้ Wolfram Alpha เพื่อหา $L\{f(x)\}$ เมื่อกำหนด $f(x)=2e^{3x}-3\cos 5x+4x^3-1$ ดังภาพที่ 8.6



ภาพที่ 8.6 หา $L\left\{2e^{3x}-3\cos 5x+4x^3-1\right\}$ โดยใช้ Wolfram Alpha

ตัวอย่าง 8.14 จงหา $L\{2\sin x\cos 3x\}$

วิธีทำ เพื่อให้สามารถใช้สูตรและสมบัติเชิงเส้นของผลการแปลงลาปลาซได้จะต้องจัดให้อยู่ในรูปที่ง่าย โดยใช้ความสัมพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned} 2\sin x\cos 3x &= \sin(x+3x)+\sin(x-3x) \\ &= \sin 4x+\sin(-2x) \\ &= \sin 4x-\sin 2x \end{aligned}$$

จะได้ว่า
$$\begin{aligned} L\{2\sin x\cos 3x\} &= L\{\sin 4x\}-L\{\sin 2x\} \\ &= \left(\frac{4}{s^2+16}\right)-\left(\frac{2}{s^2+4}\right) \\ &= \frac{4(s^2+4)-2(s^2+16)}{(s^2+16)(s^2+4)} \\ &= \frac{4s^2+16-2s^2-32}{(s^2+16)(s^2+4)} \\ &= \frac{2s^2-16}{(s^2+16)(s^2+4)} \end{aligned}$$

ดังนั้น $L\{2\sin x\cos 3x\}=\dfrac{2s^2-16}{(s^2+16)(s^2+4)}$

8.2.2 สมบัติผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันที่คูณด้วยตัวแปรอิสระ

สำหรับฟังก์ชันที่คูณด้วยตัวแปรอิสระเช่น $x^3e^{3x}, x\sin 3x, x^5\cos 2x$ เป็นต้น ฟังก์ชันเหล่านี้สามารถหาผลการแปลงลาปลาซได้เช่นเดียวกันและสามารถสรุปเป็นทฤษฎีบทได้ดังนี้ (สุรัตนา สังข์หนุน, 2558 : 204)

ทฤษฎีบท 8.2

ถ้ากำหนดให้ $L\{f(x)\}=F(s)$ แล้วจะได้ว่า $L\{x^n f(x)\}=(-1)^n\dfrac{d^n}{dx^n}F(s)$

โดยที่ $n=1,2,3,\ldots$

ตัวอย่าง 8.15 จงหา $L\{xe^{-3x}\}$

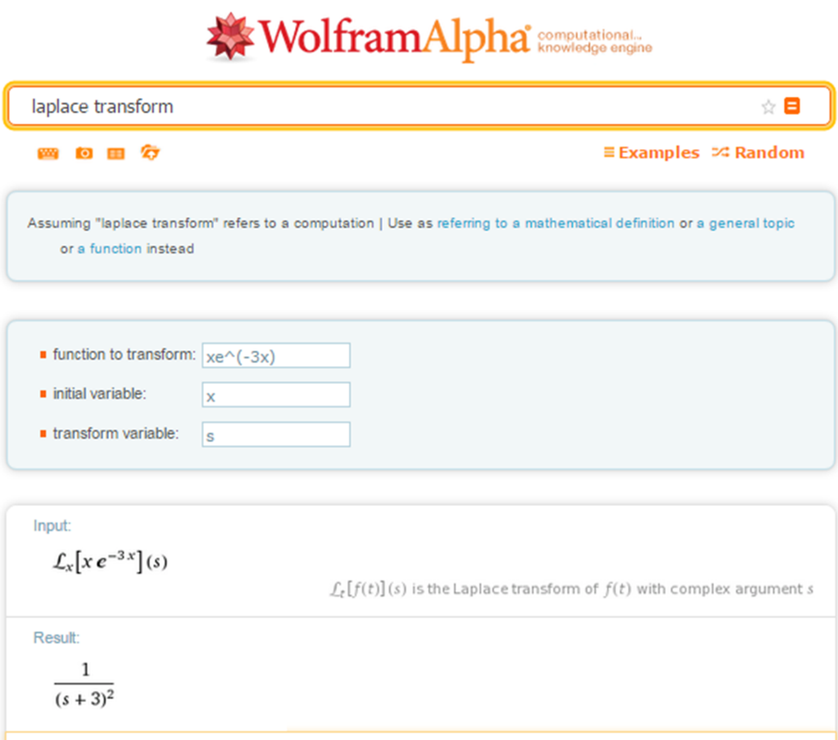
วิธีทำ เนื่องจาก $L\{e^{-3x}\} = \dfrac{1}{s+3} = F(s)$

จากทฤษฎีบท 8.2 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} L\{xe^{-3x}\} &= (-1)^1 \frac{d}{ds} F(s) \\ &= (-1)^1 \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s+3}\right) \\ &= -1\left(-\frac{1}{(s+3)^2}\right) \\ &= \frac{1}{(s+3)^2} \end{aligned}$$

ดังนั้น $L\{xe^{-3x}\} = \dfrac{1}{(s+3)^2}$ สำหรับ $s > -3$

ใช้ Wolfram Alpha เพื่อหา $L\{xe^{-3x}\}$ ดังภาพที่ 8.7



ภาพที่ 8.7 หา $L\{xe^{-3x}\}$ โดยใช้ Wolfram Alpha

ตัวอย่าง 8.16 จงหา $L\left\{x^3e^{2x}\right\}$

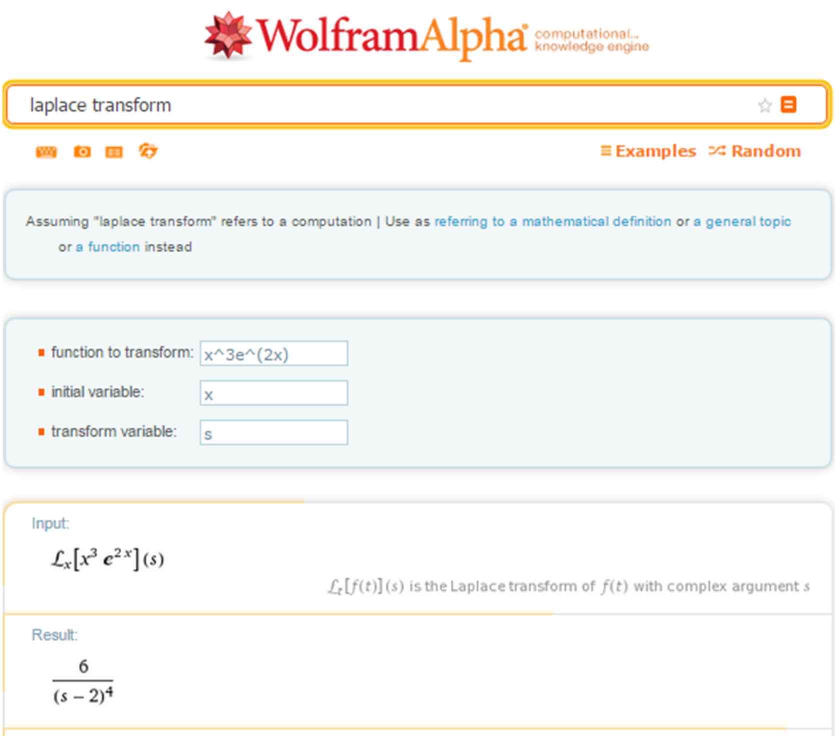
วิธีทำ เนื่องจาก $L\left\{e^{2x}\right\} = \dfrac{1}{s-2} = F(s)$

จากทฤษฎีบท 8.2 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} L\left\{x^3e^{2x}\right\} &= (-1)^3\frac{d^3}{ds^3}F(s) \\ &= (-1)^3\frac{d^3}{ds^3}\left(\frac{1}{s-2}\right) \\ &= -1\left(-\frac{6}{(s-2)^4}\right) \\ &= \frac{6}{(s-2)^4} \end{aligned}$$

ดังนั้น $L\left\{x^3e^{2x}\right\} = \dfrac{6}{(s-2)^4}$ สำหรับ $s > 2$

ใช้ Wolfram Alpha เพื่อหา $L\left\{\sin^2 x\right\}$ ดังภาพที่ 8.8



ภาพที่ 8.8 หา $L\left\{\sin^2 x\right\}$ โดยใช้ Wolfram Alpha

ตัวอย่าง 8.17 จงหา $L\left\{x^2 \sin 3x\right\}$

วิธีทำ เนื่องจาก $L\{\sin 3x\} = \dfrac{3}{s^2+9} = F(s)$

จากทฤษฎีบท 8.2 จะได้ว่า

$$L\left\{x^2 \sin 3x\right\} = (-1)^2 \frac{d^2}{ds^2} F(s)$$

จาก $F(s) = \dfrac{3}{s^2+9}$

จะได้ $\dfrac{d}{ds} F(s) = -\dfrac{6s}{(s^2+9)^2}$

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{ds^2} F(s) &= -\frac{6(s^2+9)^2 - 24s^2(s^2+9)}{(s^2+9)^4} \\ &= -\frac{6(s^2+9) - 24s^2}{(s^2+9)^3} \\ &= -\frac{6s^2+54-24s^2}{(s^2+9)^3} \\ &= \frac{18s^2-54}{(s^2+9)^3} \\ &= \frac{9(2s^2-6)}{(s^2+9)^3}\end{aligned}$$

นั่นคือ $(-1)^2 \dfrac{d^2}{ds^2}\left(\dfrac{3}{s^2+9}\right) = \dfrac{9(2s^2-6)}{(s^2+9)^3}$

ดังนั้น $L\left\{x^2 \sin 3x\right\} = \dfrac{9(2s^2-6)}{(s^2+9)^3}$ สำหรับ $s > 0$

8.2.3 สมบัติการเลื่อนขนานของผลการแปลงลาปลาซ

มีทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับสมบัติการเลื่อนขนานมีอยู่ 2 ทฤษฎีบทดังจะกล่าวถึงดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 8.3

ถ้า $L\{f(x)\} = F(s)$ แล้วจะได้ว่า $L\left\{e^{ax} f(x)\right\} = F(s-a)$

ตัวอย่าง 8.18 จงหา $L\left\{x^2e^{3x}\right\}$

วิธีทำ เนื่องจาก $L\left\{x^2\right\} = \dfrac{2}{s^3} = F(s)$

จากทฤษฎีบท 8.3 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} L\left\{x^2e^{3x}\right\} &= F(s-3) \\ &= \frac{2}{(s-3)^2} \end{aligned}$$

ดังนั้น $L\left\{x^2e^{3x}\right\} = \dfrac{2}{(s-3)^2}$ สำหรับ $s > 3$

ตัวอย่าง 8.19 จงหา $L\left\{e^{3x}\cos 5x\right\}$

วิธีทำ เนื่องจาก $L\{\cos 5x\} = \dfrac{s}{s^2+25} = F(s)$

จากทฤษฎีบท 8.3 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} L\left\{e^{3x}\cos 5x\right\} &= F(s-3) \\ &= \frac{s-3}{(s-3)^2+25} \\ &= \frac{s-3}{s^2-6s+9+25} \\ &= \frac{s-3}{s^2-6s+34} \end{aligned}$$

ดังนั้น $L\left\{e^{3s}\sin 5x\right\} = \dfrac{s-3}{s^2-6s+34}$ สำหรับ $s > 3$

ตัวอย่าง 8.20 จงหา $L\left\{e^{2x}(3\cos 5x - 5\sin 6x)\right\}$

วิธีทำ เนื่องจาก $L\{3\cos 5x - 5\sin 6x\} = 3L\{\cos 5x\} - 5L\{\sin 6x\}$

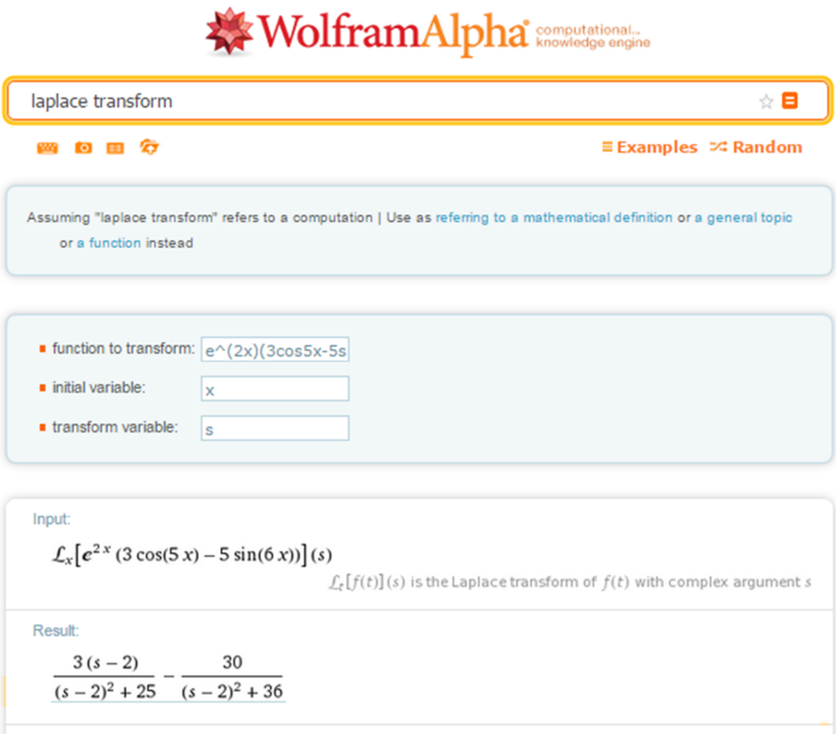
$$\begin{aligned} &= 3\left(\frac{s}{s^2+25}\right) - 5\left(\frac{6}{s^2+36}\right) \\ &= \frac{3s}{s^2+25} - \frac{30}{s^2+36} \\ &= F(s) \end{aligned}$$

จากทฤษฎีบท 8.3 จะได้ว่า

$$L\left\{e^{2x}(3\cos 5x - 5\sin 6x)\right\} = F(s-2)$$
$$= \frac{3(s-2)}{(s-2)^2+25} - \frac{30}{(s-2)^2+36}$$

ดังนั้น $L\left\{e^{2x}(3\cos 5x - 5\sin 6x)\right\} = \dfrac{3(s-2)}{(s-2)^2+25} - \dfrac{30}{(s-2)^2+36}$ สำหรับ $s > 2$

ใช้ Wolfram Alpha เพื่อหา $L\left\{e^{2x}(3\cos 5x - 5\sin 6x)\right\}$ ดังภาพที่ 8.9



ภาพที่ 8.9 หา $L\left\{e^{2x}(3\cos 5x - 5\sin 6x)\right\}$ โดยใช้ Wolfram Alpha

ตัวอย่าง 8.21 จงหา $L\left\{e^{-x}x\cos 2x\right\}$

วิธีทำ เนื่องจาก $L\{\cos 2x\} = \dfrac{s}{s^2+4} = F(s)$

และ $\dfrac{d}{dx}F(s) = \dfrac{(s^2+4) - s(2s)}{(s^2+4)^2} = \dfrac{-s^2+4}{(s^2+4)^2}$

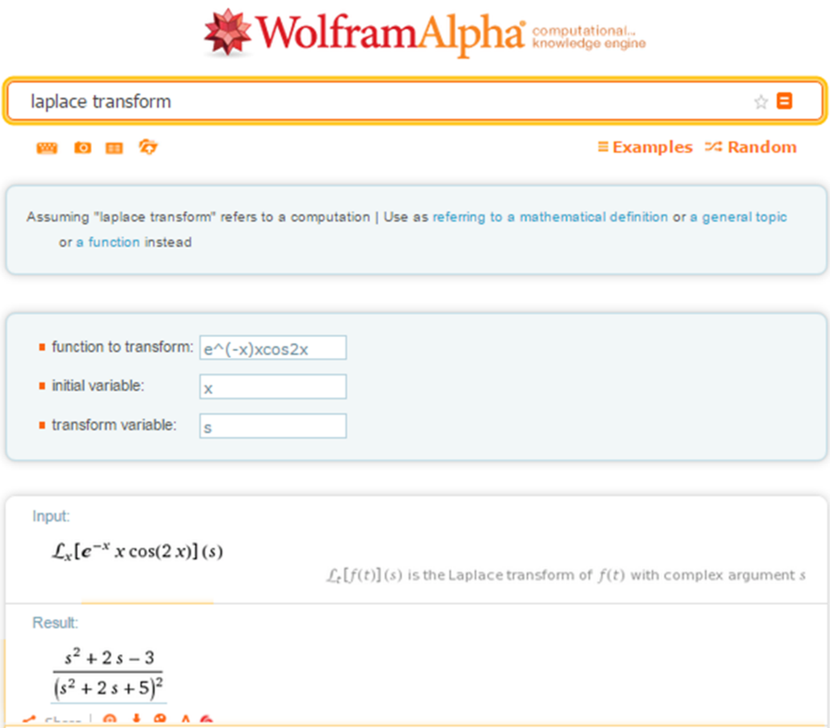
จากทฤษฎีบท 8.2 สมบัติผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันที่คูณด้วยตัวแปรอิสระจะได้

$$\begin{aligned} L\{x\cos 2x\} &= (-1)^1 \frac{d}{ds}F(s) \\ &= -1\left(\frac{-s^2+4}{(s^2+4)^2}\right) \\ &= \frac{s^2-4}{(s^2+4)^2} \\ &= G(s) \end{aligned}$$

นั่นคือ $L\{e^{-x}x\cos 2x\} = G(s+1) = \dfrac{(s+1)^2-4}{\left((s+1)^2+4\right)^2}$

ดังนั้น $L\{e^{-x}x\cos 2x\} = \dfrac{(s+1)^2-4}{\left((s+1)^2+4\right)^2}$ สำหรับ $s > -1$

ใช้ Wolfram Alpha เพื่อหา $L\{e^{-x}x\cos 2x\}$ ดังภาพที่ 8.10



ภาพที่ 8.10 หา $L\{e^{-x}x\cos 2x\}$ โดยใช้ Wolfram Alpha

8.2.4 ผลการแปลงลาปลาซกับฟังก์ชันแกมมา

ฟังก์ชันแกมมาเป็นอีกฟังก์ชันหนึ่งที่เกี่ยวข้องกับผลการแปลงลาปลาซโดยที่สามารถนำไปใช้ในการหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขตและหาผลการแปลงลาปลาซได้เช่นกัน ซึ่งความหมายของฟังก์ชันแกมมาได้ให้บทนิยามไว้ดังนี้คือ (อุบล กลองกระโทก, 2549 : 286-288)

บทนิยาม 8.5

ฟังก์ชันแกมมา คือฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $\int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}\,dx$ และแทนด้วยสัญลักษณ์ $\Gamma(p)$ สำหรับจำนวนจริงบวก p ใด ๆ เป็น

นั่นคือ $\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}\,dx$ ซึ่งจะเห็นว่าอยู่ในรูปของการหาปริพันธ์ไม่ตรงแบบคล้ายกับผลการแปลงลาปลาซดังจะแสดงดังตัวอย่างต่อไปนี้

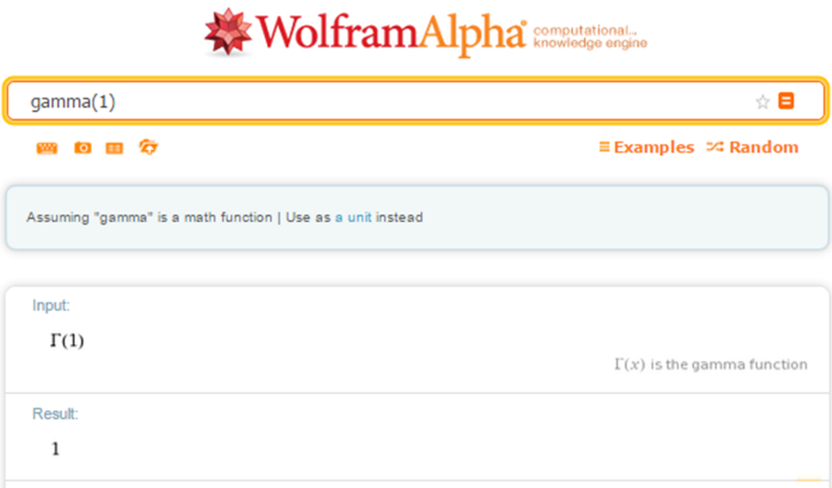
ตัวอย่าง 8.22 จงหาค่าของ $\Gamma(1)$

วิธีทำ เนื่องจาก $\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}\,dx$

ดังนั้น
$$\begin{aligned}
\Gamma(1) &= \int_0^\infty x^{1-1}e^{-x}\,dx \\
&= \int_0^\infty x^{0}e^{-x}\,dx \\
&= \int_0^\infty e^{-x}\,dx \\
&= \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-x}\,dx \\
&= \lim_{b\to\infty}\left[-e^{-x}\right]\Big|_0^b \\
&= \lim_{b\to\infty}\left[\left(e^{-b}\right)-\left(-e^{-0}\right)\right] \\
&= 1
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\Gamma(1) = 1$

ใช้ Wolfram Alpha เพื่อหา $\Gamma(1)$ ดังภาพที่ 8.11



ภาพที่ 8.11 หา $\Gamma(1)$ โดยใช้ Wolfram Alpha

ตัวอย่าง 8.23 จงหาค่าของ $\Gamma(3)$

วิธีทำ เนื่องจาก $\Gamma(p)=\int\limits_0^\infty x^{p-1}e^{-x}\,dx$

ดังนั้น $\Gamma(3)=\int\limits_0^\infty x^{3-1}e^{-x}\,dx$

$$=\int\limits_0^\infty x^2e^{-x}\,dx$$

$$=\lim_{b\to\infty}\int\limits_0^b x^2e^{-x}\,dx$$

หาปริพันธ์ทีละส่วนสองครั้งจะได้ว่า

$$\int x^2e^{-x}\,dx=\left[-x^2e^{-x}-2xe^{-x}-2e^{-x}\right]$$

$$=\lim_{b\to\infty}\left[-x^2e^{-x}-2xe^{-x}-2e^{-x}\right]\Big|_0^b$$

$$=\lim_{b\to\infty}\left[\left(-x^2e^{-b}-2xe^{-b}-2e^{-b}\right)-\left(-(0)^2e^{-0}-2(0)e^{-0}-2e^{-0}\right)\right]$$

$$=2$$

ดังนั้น $\Gamma(3)=2$

จากตัวอย่าง 8.22 และ 8.23 ใช้วิธีการหาเช่นเดียวกันจะได้ว่า $\Gamma(n-1)=n!$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก

ตัวอย่าง 8.24 จงหาค่าของ $\dfrac{10\Gamma(4)}{\Gamma(2)}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\Gamma(n-1) = n!$

จะได้ $\dfrac{10\Gamma(4)}{\Gamma(2)} = \dfrac{10(3!)}{1!} = 60$

ดังนั้น $\dfrac{10\Gamma(4)}{\Gamma(2)} = 60$

จากบทนิยามของฟังก์ชันแกมมา เราสามารถนำมาใช้ในการหาค่าของปริพันธ์ไม่ตรงแบบและหาผลการแปลงลาปลาซได้ดังต่อไปนี้

ตัวอย่าง 8.25 จงหาค่าของ $\int\limits_0^\infty x^4 e^{-x}\, dx$

วิธีทำ เนื่องจาก $\Gamma(p) = \int\limits_0^\infty x^{p-1} e^{-x}\, dx$

และ
$$\begin{aligned}\int\limits_0^\infty x^4 e^{-x}\, dx &= \int\limits_0^\infty x^{5-1} e^{-x}\, dx \\ &= \Gamma(5) \\ &= \Gamma(4+1) \\ &= 4! \\ &= 24\end{aligned}$$

ดังนั้น $\int\limits_0^\infty x^4 e^{-x}\, dx = 24$

ตัวอย่าง 8.26 จงหาค่าของ $\int\limits_0^\infty x^3 e^{-2x}\, dx$

วิธีทำ ให้ $u = 2x$

ได้ $du = 2dx$ หรือ $dx = \dfrac{du}{2}$

จะได้ว่า
$$\begin{aligned}\int\limits_0^\infty x^3 e^{-2x}\, dx &= \int\limits_0^\infty \left(\frac{u}{2}\right)^3 e^{-u} \frac{du}{2} \\ &= \frac{1}{16}\int\limits_0^\infty u^3 e^{-u}\, du\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{16}\int_0^\infty u^{4-1}e^{-u}\,du$$

$$= \frac{1}{16}\Gamma(4)$$

$$= \frac{1}{16}\Gamma(3+1)$$

$$= \frac{1}{16}(3!)$$

$$= \frac{3}{8}$$

ดังนั้น $\int_0^\infty x^3e^{-2x}\,dx = \frac{3}{8}$

ตัวอย่าง 8.27 จงหาค่าของ $\int_0^\infty x^3e^{-2x}\,dx$

วิธีทำ ให้ $u = 2x$ หรือ $x = \frac{u}{2}$

ได้ $du = 2dx$ หรือ $dx = \frac{du}{2}$

จะได้ว่า $\int_0^\infty x^3e^{-2x}\,dx = \int_0^\infty \left(\frac{u}{2}\right)^3 e^{-u}\,\frac{du}{3}$

$$= \frac{1}{24}\int_0^\infty u^3e^{-u}\,du$$

$$= \frac{1}{24}\int_0^\infty u^{4-1}e^{-u}\,du$$

$$= \frac{1}{24}\Gamma(4)$$

$$= \frac{1}{24}\Gamma(3+1)$$

$$= \frac{1}{24}3!$$

$$= \frac{1}{4}$$

ดังนั้น $\int_0^\infty x^3e^{-2x}\,dx = \frac{1}{4}$

จากตัวอย่างการหาฟังก์ชันแกมมาและการหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขตที่ผ่านมานั้น เราสามารถนำมาหาผลการแปลงลาปลาซได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 8.28 จงหา $L\left\{x^2\right\}$

วิธีทำ เนื่องจาก $L\left\{x^2\right\} = \int_0^\infty x^2 e^{-sx}\, dx$

ให้ $sx = z$ หรือ $x = \dfrac{z}{s}$

จะได้ $dx = \dfrac{1}{s}dz$ เมื่อ $s > 0$

ทำให้ $L\left\{x^2\right\} = \int_0^\infty e^{-z}\left(\dfrac{z}{s}\right)^2 \dfrac{1}{s}dz$

$$= \frac{1}{s^3}\int_0^\infty e^{-z} z^2\, dz$$

$$= \frac{1}{s^3}\int_0^\infty e^{-z} z^{3-1}\, dz$$

$$= \frac{1}{s^3}\Gamma(3)$$

$$= \frac{2}{s^3}$$

ดังนั้น $L\left\{x^2\right\} = \dfrac{2}{s^2}$

จากตัวอย่าง 8.4 และ 8.28 $L\left\{x^2\right\} = \dfrac{2}{s^2}$ ต่างก็มีค่าเท่ากัน แต่หรับวิธีทำตัวอย่าง 8.28 นั้นเป็นการหาผลการแปลงลาปลาซโดยใช้ฟังก์ชันแกมมา ก็จะทำได้ง่ายสะดวกและรวดเร็วขึ้น ทำให้ได้ว่า $L\{x^n\} = \dfrac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}$ เมื่อ $n > -1$ และ $s > 0$

ตัวอย่าง 8.29 จงหา $L\left\{x^5\right\}$

วิธีทำ เนื่องจาก $L\left\{x^5\right\} = \dfrac{\Gamma(5+1)}{s^6}$

$$= \frac{5!}{s^6}$$

ดังนั้น $L\left\{x^5\right\} = \dfrac{5!}{s^6}$

8.2.5 ผลการแปลงลาปลาซกับฟังก์ชันคาบ

กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันถ้า $f(x+T)=f(x)$ เรียก T ว่าคาบของฟังก์ชัน และเรียก f ว่าฟังก์ชันคาบ ซึ่งสามารถให้บทนิยามได้ดังนี้ (อุบล กลองกระโทก, 2549 : 289)

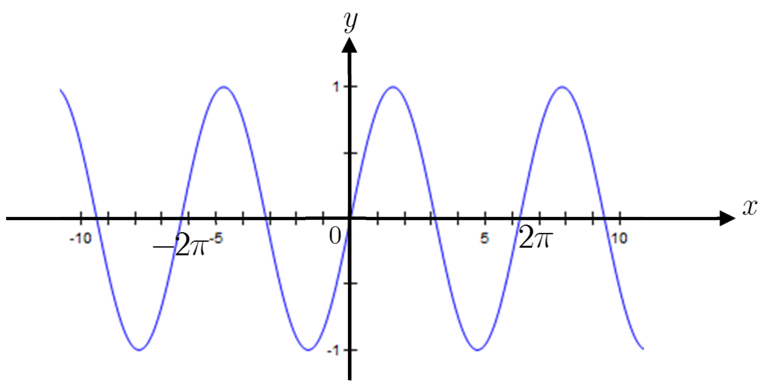
บทนิยาม 8.6

กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันและ $T>0$ ถ้า $f(x+T)=f(x)$ จะเรียก f ว่า**ฟังก์ชันคาบ** และเรียก T ว่า**คาบของฟังก์ชัน**

ตัวอย่างเช่น $f(x)=\sin x$ เป็นฟังก์ชันคาบเพราะ

$$f(x+2\pi)=\sin(x+2\pi)=\sin x=f(x)$$

เขียนกราฟได้ดังนี้

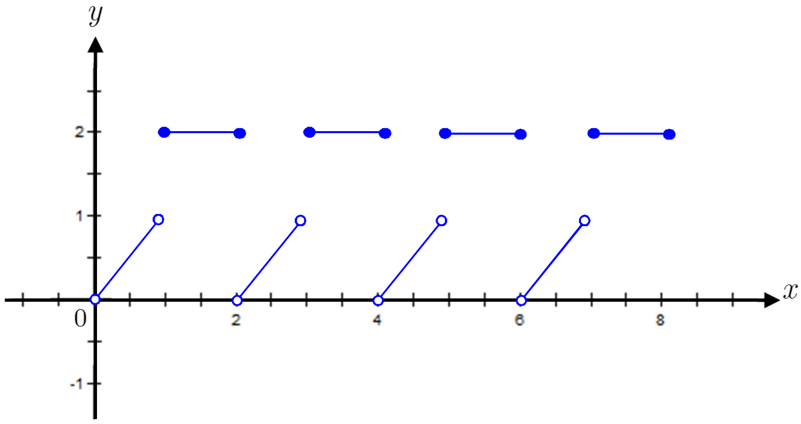


x

ภาพที่ 8.12 กราฟแสดงฟังก์ชันคาบ $f(x)=\sin x$

กำหนดให้ $f(x)=\begin{cases} x, & 0<x<1 \\ 2, & 1\le x\le 2 \end{cases}$ สำหรับช่วง $(0,2]$ เป็นฟังก์ชันคาบและมีคาบเท่ากับ 2

เขียนกราฟได้ดังนี้



ภาพที่ 8.13 กราฟแสดงฟังก์ชันคาบในช่วง $(0,2]$

ทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันคาบมีดังต่อไปนี้

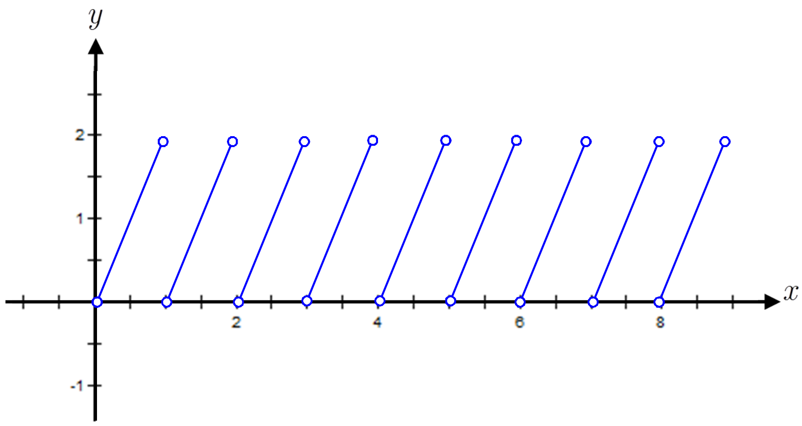
ทฤษฎีบท 8.4

ถ้า f เป็นฟังก์ชันคาบ โดย $f(x+T)=f(x),\, T>0$ แล้ว

$$L\{f(x)\}=\frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-sx}f(x)\,dx$$

ตัวอย่าง 8.30 จงวาดกราฟของฟังก์ชัน f ซึ่งเป็นฟังก์ชันคาบและมีคาบเท่ากับ 1 ซึ่งมีบทนิยามโดย $f(x)=2x$ ในช่วง $(0,1)$ และจงหาผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน f

วิธีทำ เขียนกราฟของฟังก์ชันคาบได้ดังนี้



ภาพที่ 8.14 กราฟแสดงฟังก์ชันคาบ $f(x)=2x$ ในช่วง $(0,1)$

เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันคาบ ดังนั้น $L\{f(x)\} = \dfrac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-sx} f(x)\,dx$

แทนค่า $T = 1$ และ $f(x) = 2x$ จะได้

$$\begin{aligned} L\left\{f(x)\right\} &= \frac{1}{1-e^{-s}}\int_0^1 e^{-sx}(2x)\,dx \\ &= \frac{2}{1-e^{-s}}\int_0^1 xe^{-sx}\,dx \end{aligned}$$

ใช้เทคนิคการหาปริพันธ์แบบแยกเศษส่วนย่อย

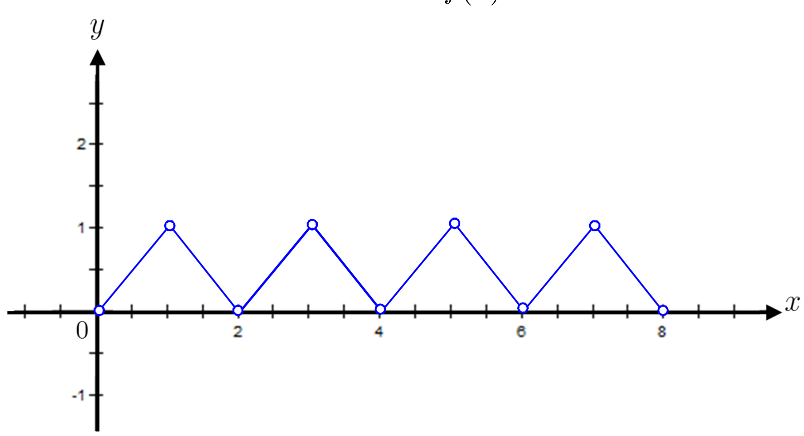
$$\begin{aligned} \int_0^1 xe^{-sx}dx &= \left[-\frac{xe^{-sx}}{s} - \frac{e^{-sx}}{s^2}\right]\Bigg|_0^1 \\ &= \left[-\frac{(1)e^{-s(1)}}{s} - \frac{e^{-s(1)}}{s^2}\right] - \left[-\frac{(0)e^{-s(0)}}{s} - \frac{e^{-s(0)}}{s^2}\right] \\ &= -\frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-s}}{s^2} + \frac{1}{s^2} \end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} L\left\{f(x)\right\} &= \frac{1}{1-e^{-s}}\left(-\frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-s}}{s^2} + \frac{1}{s^2}\right) \\ &= \frac{-se^{-s} - e^{-s} + 1}{s^2(1-e^{-s})} \\ &= \frac{1-(s+1)e^{-s}}{s^2(1-e^{-s})} \end{aligned}$$

ดังนั้น $L\{f(x)\} = \dfrac{1-(s+1)e^{-s}}{s^2(1-e^{-s})}$

ตัวอย่าง 8.31 จงหาผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน $f(x)$ จากภาพที่กำหนดให้



วิธีทำ จากภาพที่กำหนดให้ $f(x)$ นี้เป็นฟังก์ชันเลื่อย ซึ่งเป็นฟังก์ชันคาบและมีคาบเท่ากับ 2 พิจารณาสมการของ $f(x)$ ในช่วง $(0,2)$ ได้ดังต่อไปนี้

เมื่อ $0 < t < 1$ จะได้ $f(x) = x$

เมื่อ $1 < t < 2$ จะได้ $f(x) = 2 - x$

จึงนิยามฟังก์ชันคาบ $f(x)$ ได้ดังนี้

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1 \\ 2 - x, & 1 < x < 2 \end{cases}$$

เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันคาบและมีคาบเท่ากับ 2 ดังนั้น

$$L\{f(x)\} = \frac{1}{1 - e^{-s}} \int_0^2 e^{-sx} f(x)\,dx$$

และ
$$\begin{aligned}
\int_0^2 e^{-sx} f(x)\,dx &= \int_0^1 e^{-sx}(x)\,dx + \int_1^2 e^{-sx}(2 - x)\,dx \\
&= \int_0^1 xe^{-sx}\,dx + \int_1^2 2e^{-sx}dx - \int_1^2 xe^{-sx}dx \\
&= \left[-\frac{xe^{-sx}}{s} - \frac{e^{-sx}}{s^2}\right]\Bigg|_0^1 + \left[-\frac{2e^{-sx}}{s}\right]\Bigg|_1^2 - \left[-\frac{xe^{-sx}}{s} - \frac{e^{-sx}}{s^2}\right]\Bigg|_1^2 \\
&= -\frac{e^{-s}}{s} - \frac{1}{s^2}(e^{-s} - 1) - \frac{2e^{-2s}}{s} + \frac{2e^{-s}}{s} + \frac{2e^{-2s}}{s} \\
&\quad - \frac{e^{-s}}{s} + \frac{1}{s^2}(e^{-2s} - e^{-s}) \\
&= \frac{(1 - e^{-s})^2}{s^2}
\end{aligned}$$

ดังนั้น $L\{f(x)\} = \dfrac{(1 - e^{-s})^2}{s^2}$

8.3 ผลการแปลงลาปลาซผกผัน

จากหัวข้อที่ผ่านมาแล้วนั้น ผลการแปลงลาปลาซของ $f(x)$ แทนด้วย $L\{f(x)\} = F(s)$ หมายถึงการส่งค่าที่เป็นฟังก์ชัน $f(x)$ ไปเป็นฟังก์ชัน $F(s)$ และเรียก $f(x)$ ว่าเป็นผลการแปลงลาปลาซผกผันของ $F(s)$ สำหรับผลการแปลงลาปลาซผกผันนั้น มีประโยชน์ในการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ ดังนั้นก่อนที่จะไปหาผลเฉลยสมการเชิงอนุพันธ์โดยใช้ผลการแปลงลาปลาซผกผันนั้นต้องศึกษาผลการแปลงผกผันลาปลาซดังหัวข้อต่อไปนี้ (ก่อสุข วีระถาวร, 2539 : 137)

8.3.1 การหาผลการแปลงลาปลาซผกผัน

ก่อนที่จะศึกษาการแปลงลาปลาซผกผันจะได้ให้นิยามของผลการแปลลาปลาซผกผัน ดังต่อไปนี้

บทนิยาม 8.7

ถ้า $L\{f(x)\} = F(s)$ เรียก $f(x)$ ว่า**ผลการแปลงลาปลาซผกผัน**ของ $F(s)$ และแทนด้วยสัญลักษณ์ $L^{-1}\{F(s)\} = f(x)$

จากบทนิยาม 8.6 นั้น $L^{-1}\{F(s)\} = f(x)$ เมื่อ $L\{f(x)\} = F(s)$ แสดงว่าสมบัติและสูตรต่าง ๆ ของผลการแปลงลาปลาซ สามารถนำมาใช้กับการแปลงลาปลาซผกผันได้

ตัวอย่างเช่น $L\{1\} = \dfrac{1}{s}$ เมื่อ $L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s}\right\} = 1$

$L\{e^{ax}\} = \dfrac{1}{s-a}$ เมื่อ $L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s-a}\right\} = e^{ax}$

ดังนั้นสมบัติพื้นฐานสำคัญ ๆ ที่จะช่วยในการหาผลการแปลงลาปลาซผกผันของฟังก์ชันพื้นฐานสรุปเป็นสูตรได้ดังต่อไปนี้

1. $L^{-1}\left\{\dfrac{2}{s}\right\}$
2. $L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s-a}\right\} = e^{ax}$
3. $L^{-1}\left\{\dfrac{n!}{s^{n+1}}\right\} = x^n$
4. $L^{-1}\left\{\dfrac{a}{s^2+a^2}\right\} = \sin ax$
5. $L^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2+a^2}\right\} = \cos ax$

ตัวอย่าง 8.32 จงหา

1. $L^{-1}\left\{\dfrac{2}{s}\right\}$ 2. $L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s-2}\right\}$ 3. $L^{-1}\left\{\dfrac{30}{s^4}\right\}$

4. $L^{-1}\left\{\dfrac{5}{s^2+4}\right\}$ 5. $L^{-1}\left\{\dfrac{2s}{s^2+25}\right\}$

วิธีทำ ใช้สมบัติของผลการแปลงลาปลาซผกผัน ได้ดังนี้

1. $L^{-1}\left\{\frac{2}{s}\right\} = 2L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = 2(1) = 2$

2. $L^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} = e^{2x}$

3. $L^{-1}\left\{\frac{30}{s^4}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{5(6)}{s^{3+1}}\right\} = 5L^{-1}\left\{\frac{6}{s^{3+1}}\right\} = 5L^{-1}\left\{\frac{3!}{s^{3+1}}\right\} = 5x^3$

4. $L^{-1}\left\{\frac{5}{s^2+4}\right\} + L^{-1}\left\{\left(\frac{5}{2}\right)\frac{2}{s^2+4}\right\} = \frac{5}{2}L^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+2^2}\right\} = \frac{5}{2}\sin 2x$

5. $L^{-1}\left\{\frac{2s}{s^2+25}\right\} = 2L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+25}\right\} = 2L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+5^2}\right\} = 2\cos 5x$

ทฤษฎีบท 8.5

ถ้า L^{-1} เป็นการแปลงลาปลาซผกผันแล้วจะได้ว่า L^{-1} เป็นการแปลงเชิงเส้น นั่นคือ $L^{-1}\{aF(x) + bG(x)\} = aL^{-1}\{F(x)\} + bL^{-1}\{G(x)\}$

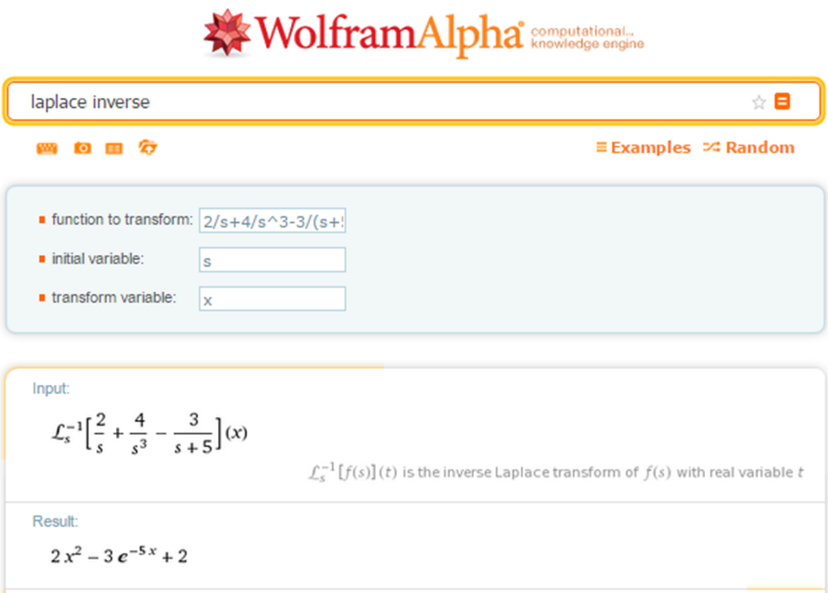
ตัวอย่าง 8.33 จงหา $L^{-1}\left\{\frac{2}{s} + \frac{4}{s^3} - \frac{3}{s+5}\right\}$

วิธีทำ ใช้สมบัติของผลการแปลงลาปลาซผกผัน และทฤษฎีบท 8.5 ได้

$$\begin{aligned} L^{-1}\left\{\frac{2}{s} + \frac{4}{s^3} - \frac{3}{s+5}\right\} &= L^{-1}\left\{\frac{2}{s}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{4}{s^3}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{3}{s+5}\right\} \\ &= 2L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + 2L^{-1}\left\{\frac{2}{s^{2+1}}\right\} - 3L^{-1}\left\{\frac{1}{s-(-5)}\right\} \\ &= 2 + 2x^2 - 3e^{-5x} \end{aligned}$$

ดังนั้น $L^{-1}\left\{\frac{2}{s} + \frac{4}{s^3} - \frac{3}{s+5}\right\} = 2 + 2x^2 - 3e^{-5x}$

ใช้ Wolfram Alpha เพื่อหา $L^{-1}\left\{\frac{2}{s}+\frac{4}{s^3}-\frac{3}{s+5}\right\}$ ดังภาพที่ 8.15



ภาพที่ 8.15 หา $L^{-1}\left\{\frac{2}{s}+\frac{4}{s^3}-\frac{3}{s+5}\right\}$ โดยใช้ Wolfram Alpha

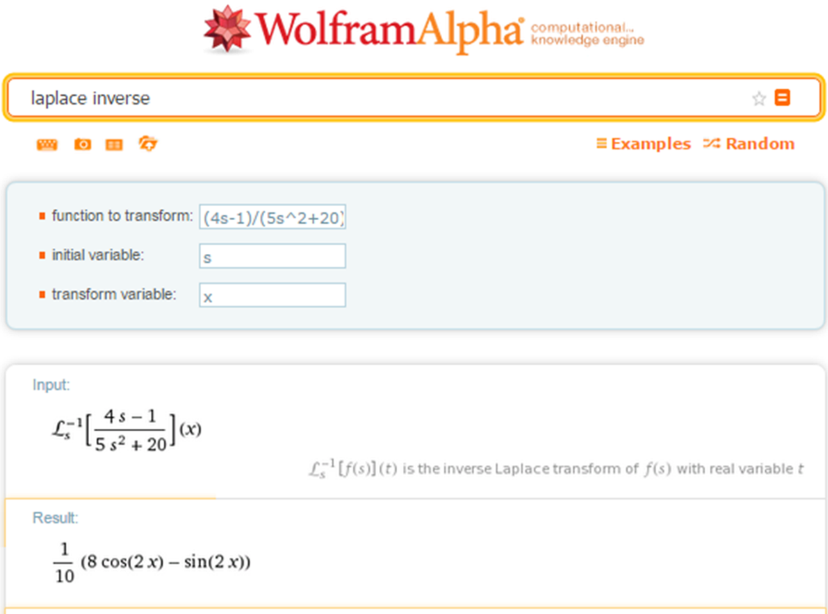
ตัวอย่าง 8.34 จงหา $L^{-1}\left\{\frac{4s-1}{5s^2+20}\right\}$

วิธีทำ

$$
\begin{aligned}
L^{-1}\left\{\frac{4s-1}{5s^2+20}\right\} &= \frac{1}{5}L^{-1}\left\{\frac{4s-1}{s^2+4}\right\} \\
&= \frac{1}{5}L^{-1}\left\{\frac{4s}{s^2+4}-\frac{1}{s^2+4}\right\} \\
&= \frac{1}{5}L^{-1}\left\{\frac{4s}{s^2+4}\right\}-\frac{1}{5}L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\} \\
&= \frac{4}{5}L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+2^2}\right\}-\frac{1}{10}L^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+2^2}\right\} \\
&= \frac{4}{5}\cos 2x-\frac{1}{10}\sin 2x
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $L^{-1}\left\{\frac{4s-1}{5s^2+20}\right\} = \frac{4}{5}\cos 2x-\frac{1}{10}\sin 2x$

ใช้ Wolfram Alpha เพื่อหา $L^{-1}\left\{\dfrac{4s-1}{5s^2+20}\right\}$ ดังภาพที่ 8.16



ภาพที่ 8.16 หา $L^{-1}\left\{\dfrac{4s-1}{5s^2+20}\right\}$ โดยใช้ Wolfram Alpha

8.3.2 การหาผลการแปลงลาปลาซผกผันโดยการทำเป็นกำลังสองสมบูรณ์

ถ้าเราไม่สามารถหาผลการแปลงลาปลาซผกผันโดยใช้สมบัติพื้นฐาน 5 ข้อที่ผ่านมานั้น และจากมีสมบัติของผลการแปลงลาปลาซผกผันที่อยู่ในรูปกำลังสองสมบูรณ์ เช่น

$$L^{-1}\left\{\frac{a}{s^2+a^2}\right\}=\sin ax \text{ หรือ } L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+a^2}\right\}=\cos ax$$

การจัดรูป $F(s)$ ให้อยู่ในรูปดังกล่าวจะช่วยให้หาค่าผลการแปลงลาปลาซผกผันได้ง่ายและสะดวกขึ้น ซึ่งมีหลักการจัดดังตัวอย่างต่อไปนี้ (อุบล กลองกระโทก, 2549 : 296)

$$s^2+4s+3=(s^2+4s+4)+3-4=(s+2)^2-1$$

$$\begin{aligned}3s^2-12s+15&=3(s^2-4s+5)=3\left[(s^2-4s+4)+5-4\right]\\&=3\left[(s-2)^2+1\right]=3(s-2)^2+3\end{aligned}$$

และสำหรับกรณีทั่ว ๆ ไป as^2+bs+c โดยที่ a,b และ c เป็นค่าคงตัว สามารถจัดให้อยู่ในรูปมาตรฐานได้ดังนี้คือ

$$\begin{aligned} as^2+bs+c &= a\left[s^2+\frac{b}{a}s\right]+c \\ &= a\left[s^2+\frac{b}{a}s+\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right]-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+c \\ &= a\left(s+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a} \end{aligned}$$

เช่นถ้าเราจัด $3s^2-12s+15$ ให้เป็นกำลังสองสมบูรณ์โดยแทนค่า $a=3, b=-12$ และ $c=15$ ได้ $3s^2-12s+15=3\left(s+\dfrac{(-12)}{2(3)}\right)^2+\dfrac{4(3)(15)-(-12)^2}{4(3)}=3(s-2)^2+3$

หลังจากที่จัดฟังก์ชันให้อยู่ในรูปกำลังสองสมบูรณ์ได้แล้วยังต้องอาศัยสมบัติการเลื่อนขนานด้วย ดังนี้

จากหัวข้อที่ผ่านมา ถ้า $L\{f(x)\}=F(s)$ แล้ว $L\{e^{ax}f(x)\}=F(s-a)$
ดังนั้น $L^{-1}\{F(s-a)\}=e^{ax}f(x)$

ตัวอย่าง 8.35 จงหา $L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2-2s+5}\right\}$

วิธีทำ จาก $L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2-2s+5}\right\}=L^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s^2-2s+1)+5-1}\right\}$

$$\begin{aligned} &= L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2+4}\right\} \\ &= L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2+2^2}\right\} \end{aligned}$$

เนื่องจาก $F(s-1)=\dfrac{1}{(s-1)^2+2^2}$ ดังนั้น $F(s)=\dfrac{1}{s^2+2^2}$

จะได้ว่า $f(x)=\dfrac{1}{2}\sin x$

และจาก $L^{-1}\{F(s-1)\}=e^{x}f(x)$

$$\begin{aligned} &= e^x\frac{1}{2}\sin 2x \\ &= \frac{1}{2}e^x\sin 2x \end{aligned}$$

ดังนั้น $L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2-2s+5}\right\}=\dfrac{1}{2}e^x\sin 2x$

ตัวอย่าง 8.36 จงหา $L^{-1}\left\{\dfrac{s+4}{s^2+4s+8}\right\}$

วิธีทำ จาก $L^{-1}\left\{\dfrac{s+4}{s^2+4s+8}\right\} = L^{-1}\left\{\dfrac{s+4}{(s^2+4s+4)+4}\right\}$

$$= L^{-1}\left\{\frac{s+4}{(s+2)^2+4}\right\}$$

$$= L^{-1}\left\{\frac{(s+2)+2}{(s+2)^2+2^2}\right\}$$

$$= L^{-1}\left\{\frac{s+2}{(s+2)^2+2^2}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{2}{(s+2)^2+2^2}\right\}$$

$$= e^{-2x}\cos 2x + e^{-2x}\sin 2x$$

$$= e^{-2x}(\cos 2x + \sin 2x)$$

ดังนั้น $L^{-1}\left\{\dfrac{s+4}{s^2+4s+8}\right\} = e^{-2x}(\cos 2x + \sin 2x)$

8.3.3 การหาผลการแปลงลาปลาซผกผันโดยการแยกเศษส่วนย่อย

การแยกเศษส่วนย่อยของฟังก์ชันเศษส่วนตรรกยะ $\dfrac{P(s)}{Q(s)}$ เมื่อ $Q(s) \neq 0$ โดยที่ $P(s)$ และ $Q(s)$ เป็นพหุนามที่ไม่มีตัวประกอบร่วม ซึ่งระดับขั้นของ $P(s)$ น้อยกว่า $Q(s)$ สามารถทำได้โดยมีลำดับขั้นตอนดังนี้

1) แยกตัวประกอบของ $Q(s)$ ซึ่งตัวประกอบของ $Q(s)$ จะมีแต่ตัวประกอบเชิงเส้นในรูปของ $(s-a)$ และตัวประกอบกำลังสองในรูป as^2+bs+c (ซึ่งแยกตัวประกอบต่อไปไม่ได้) เท่านั้น

2) ถ้า $(s-a)^m$ เป็นตัวประกอบของ $Q(s)$ แล้วจะเกิดผลบวกของเศษส่วนย่อย m เศษส่วนย่อยจากตัวประกอบ $(s-a)^m$ ในรูปของ

$$\frac{A_1}{s-a} + \frac{A_2}{(s-a)^2} + \frac{A_3}{(s-a)^3} + \cdots + \frac{A_m}{(s-a)^m}$$

3) ถ้า $(as^2+bs+c)^n$ เป็นตัวประกอบของ $Q(s)$ แล้วจะเกิดผลบวกของเศษส่วนย่อย n เศษส่วนย่อยจากตัวประกอบ $(as^2+bs+c)^n$ ในรูปของ

$$\frac{A_1s+B_1}{as^2+bs+c}+\frac{A_2s+B_2}{(as^2+bs+c)^2}+\frac{A_3s+B_3}{(as^2+bs+c)^3}+\cdots+\frac{A_ns+B_n}{(as^2+bs+c)^n}$$

4) แล้วหาค่าของสัมประสิทธิ์ทุกตัว โดยวิธีหนึ่งวิธีใดก็ได้ แต่โดยทั่ว ๆ ไปนิยมวิธีการเทียบสัมประสิทธิ์ หรือ การแทนค่าที่เหมาะสม

เมื่อแยกเศษส่วนย่อยเสร็จแล้วเราสามารถใช้สมบัติของผลการแปลงลาปลาซกับการเลื่อนขนานช่วยในกาหาผลการแปลงลาปลาซผกผัน ดังตัวอย่างต่อไปนี้ (ก่อสุข วีระถาวร, 2539 : 150-151)

ตัวอย่าง 8.37 จงหา $L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)(s+2)}\right\}$

วิธีทำ พิจารณา $\frac{1}{(s-1)(s+2)}=\frac{A}{s-1}+\frac{B}{s+2}$

$$1=\left(\frac{A}{s-1}+\frac{B}{s+2}\right)\left[(s-1)(s+2)\right]$$

$$1=A(s+2)+B(s-1)$$

$$1=As+2A+Bs-B$$

$$1=(A+B)s+2A-B$$

จากการเทียบสัมประสิทธิ์ จะได้ว่า $A+B=0$ และ $2A-B=1$

แก้ระบบสมการได้ $A=\frac{1}{3}$ และ $B=-\frac{1}{3}$

นั่นคือ $\frac{1}{(s-1)(s+2)}=\frac{1}{3(s-1)}-\frac{1}{3(s+2)}$

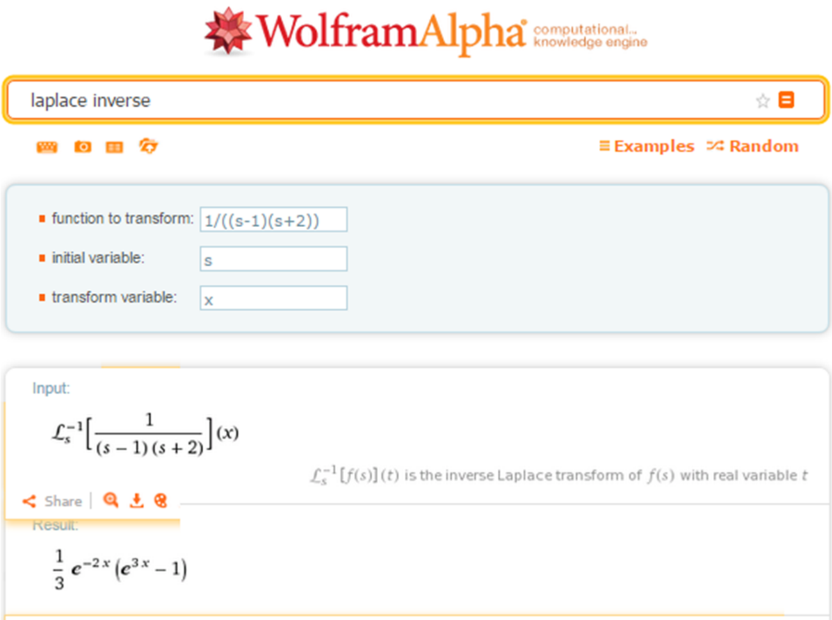
และ $L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)(s+2)}\right\}=\frac{1}{3}L^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}-\frac{1}{3}L^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}$

$$=\frac{1}{3}e^{x}-\frac{1}{3}e^{-2x}$$

$$=\frac{1}{3}(e^{x}-e^{-2x})$$

ดังนั้น $L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)(s+2)}\right\}=\frac{1}{3}(e^{x}-e^{-2x})$

ใช้ Wolfram Alpha เพื่อหา $L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)(s+2)}\right\}$ ดังภาพที่ 8.17



ภาพที่ 8.17 หา $L^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s-1)(s+2)}\right\}$ โดยใช้ Wolfram Alpha

ตัวอย่าง 8.38 จงหา $L^{-1}\left\{\dfrac{3s+1}{(s-1)(s^2+1)}\right\}$

วิธีทำ พิจารณา $\dfrac{3s+1}{(s-1)(s^2+1)} = \dfrac{A}{s-1} + \dfrac{Bs+C}{s^2+1}$

$$3s+1 = \left(\frac{A}{s-1} + \frac{Bs+C}{s^2+1}\right)\left[(s-1)(s^2+1)\right]$$

$$3s+1 = A(s^2+1) + (Bs+C)(s-1)$$

หาคา A, B และ C โดยการแทนค่า s ที่เหมาะสมดังต่อไปนี้

ให้ $s=1$ จะได้ $A=2$

$s=0$ จะได้ $C=1$

$s=-1$ จะได้ $B=-2$

นั่นคือ $$\frac{3s+1}{(s-1)(s^2+1)} = \frac{2}{s-1} + \frac{-2s+1}{s^2+1}$$

และ $L^{-1}\left\{\dfrac{3s+1}{(s-1)(s^2+1)}\right\} = L^{-1}\left\{\dfrac{2}{s-1} + \dfrac{-2s+1}{s^2+1}\right\}$

$$= L^{-1}\left\{\frac{2}{s-1}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{-2s+1}{s^2+1}\right\}$$
$$= 2L^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} - 2L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}$$
$$= 2e^x + 2\cos x + \sin x$$

ดังนั้น $L^{-1}\left\{\frac{3s+1}{(s-1)(s^2+1)}\right\} = 2e^x + 2\cos x + \sin x$

ตัวอย่าง 8.39 จงหา $L^{-1}\left\{\frac{5s^2-15s+7}{(s+1)(s-2)^3}\right\}$

วิธีทำ โดยการแยกเศษส่วนย่อยจะได้ว่า

$$\frac{5s^2-15s+7}{(s+1)(s-2)^3} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{(s-2)^2} + \frac{D}{(s-2)^3}$$
$$5s^2-15s+7 = \left[\frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{(s-2)^2} + \frac{D}{(s-2)^3}\right]\left[(s+1)(s-2)^3\right]$$
$$5s^2-15s+7 = A(s-2)^3 + B(s-2)^2 + C(s-2) + D$$

หาคา A, B, C และ D โดยการแทนค่า s ที่เหมาะสมดังต่อไปนี้

ให้ $s=-1$
$$5(1)-15(-1)+7 = A(-27)$$
$$A = -1$$
ให้ $s=2$
$$5(4)-15(2)+7 = D(3)$$
$$D = -1$$
ให้ $s=0$
$$7 = -8A+4B-2C+D$$
$$-2 = 4B-2C$$
ให้ $s=-1$
$$5-15+7 = -A+2B-2C+2D$$
$$-2 = 2B-2C$$

แก้สมการได้ $B = 1$ และ $C = 2$

นั่นคือ $$\frac{5s^2 - 15s + 7}{(s+1)(s-2)^3} = \frac{-1}{s+1} + \frac{1}{s-2} + \frac{2}{(s-2)^2} + \frac{1}{(s-2)^3}$$

และ $$L^{-1}\left\{\frac{5s^2 - 15s + 7}{(s+1)(s-2)^3}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{-1}{s+1} + \frac{1}{s-2} + \frac{2}{(s-2)^2} + \frac{1}{(s-2)^3}\right\}$$
$$= L^{-1}\left\{\frac{-1}{s+1}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{2}{(s-2)^2}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)^3}\right\}$$
$$= -e^{-x} + e^{2x} + 2xe^{2x} - \frac{1}{2}x^2e^{2x}$$

ดังนั้น $$L^{-1}\left\{\frac{5s^2 - 15s + 7}{(s+1)(s-2)^3}\right\} = -e^{-x} + e^{2x} + 2xe^{2x} - \frac{1}{2}x^2e^{2x}$$

8.4 การหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้นด้วยผลการแปลงลาปลาซ

จากที่ได้กล่าวมาแล้วในตอนต้นว่าการแปลงลาปลาซสามารถนำมาประยุกต์ใช้กับการหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้นได้ และยังมีทฤษฎีบทที่สำคัญที่ในการนำไปแก้ปัญหาสมการเชิงอนุพันธ์ที่เกี่ยวกับปัญหาค่าเริ่มต้นได้เป็นอย่างดี คือผลการแปลงลาปลาซของอนุพันธ์ (ดำรง ทิพย์โยธา, 2541 : 233-234)

ทฤษฎีบท 8.6

ถ้า $f(x), f'(x), f''(x), ..., f^{(n-1)}(x)$ ต่อเนื่องบนช่วง $[0,\infty)$ และถ้า $f^{(n)}(x)$ มีความต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ บน $[0,\infty)$ จะได้ว่า

$$L\left\{f^{(n)}(x)\right\} = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$$

โดยที่ $F(s) = L\{f(x)\}$

สำหรับการหาผลเฉลยของปัญหาเงื่อนไขค่าเริ่มต้นนั้นมีหลักการดังต่อไปนี้

1. จากสมการเชิงอนุพันธ์ที่กำหนดให้ หาผลการแปลงลาปลาซทั้งสองข้าง โดยใช้ทฤษฎีบท 8.6 ที่ได้กล่าวมาข้างต้น

2. จากเงื่อนไขค่าเริ่มต้น หาผลการแปลงปลาปลาซของฟังก์ชันในเทอม $F(s)$
3. หาผลการแปลงปลาปลาซของฟังก์ชัน $F(s)$ ในเทอมของฟังก์ชัน $f(x)$

ตัวอย่าง 8.40 จงแก้ปัญหาค่าเริ่มต้น

$$y' - 3y = 0 \ , \ \ y(0) = 5$$

วิธีทำ เนื่องจาก $y = f(x), y(0) = 5$ และ $L\{y\} = F(s)$
จากสมการ หาผลการแปลงลาปลาซทั้งสองข้างจะได้

$$\begin{aligned} L\left\{y' - 5y\right\} &= L\{0\} \\ L\left\{y'\right\} - L\left\{5y\right\} &= 0 \\ L\left\{y'\right\} - 5L\left\{y\right\} &= 0 \end{aligned}$$

จากทฤษฎีบท 8.6 ได้ว่า

$$\begin{aligned} L\left\{y'\right\} &= sF(s) - y(0) \\ L\{y\} &= F(s) \end{aligned}$$

จะได้ $sF(s) - y(0) - 3F(s) = 0$

$$(s-3)F(s) - 5 = 0$$

$$F(s) = \frac{5}{s-3}$$

หาผลการแปลงลาปลาซผกผันของ $F(s)$ จะได้ว่า

$$y = L^{-1}\left\{F(s)\right\} = L^{-1}\left\{\frac{5}{s-3}\right\} = 5L^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\} = 5e^{3x}$$

ดังนั้น ผลเฉลยปัญหาค่าเริ่มต้นของ $y' - 3y = 0$, $y(0) = 5$ คือ $y = 5e^{3x}$

ตัวอย่าง 8.41 จงแก้ปัญหาค่าเริ่มต้น

$$y'' - y' - 2y = 4x^2\,,\ y(0) = 2\,,\ y'(0) = 4$$

วิธีทำ จากสมการ หาผลการแปลงลาปลาซทั้งสองข้างจะได้

$$L\{y'' - y' - 2y\} = L\{4x^2\}$$
$$L\{y''\} - L\{y'\} - 2L\{y\} = 4L\{x^2\}$$

เนื่องจาก $y = f(x), y(0) = 2\,,\ y'(0) = 4$ และ $L\{y\} = F(s)$

จากทฤษฎีบท 8.6 ได้ว่า

$$L\{y''\} = s^2F(s) - sy(0) - y'(0) = s^2F(s) - s - 4$$
$$L\{y'\} = sF(s) - y(0) = sF(s) - 1$$
$$L\{y\} = F(s)$$

จะได้

$$[s^2F(s) - s - 4] - [sF(s) - 1] - 2F(s) = 4L\{x^2\}$$
$$s^2F(s) - s - 4 - sF(s) + 1 - 2F(s) = 4\left(\frac{2}{s^3}\right)$$
$$s^2F(s) - (s+2)F(s) - s - 3 = \frac{8}{s^3}$$
$$[s^2 - (s+2)]F(s) - s - 3 = \frac{8}{s^3}$$

$$F(s) = \frac{1}{s^2 - (s+2)}\left[\frac{8}{s^3} + s + 3\right] = \frac{s+3}{s^2 - s - 2} + \frac{8}{s^3(s^2 - s - 2)}$$

เนื่องจาก $y = L^{-1}\{F(s)\} = L^{-1}\left\{\dfrac{s+3}{s^2 - s - 2} + \dfrac{8}{s^3(s^2 - s - 2)}\right\}$

$$= L^{-1}\left\{\frac{s+3}{(s-2)(s+1)} + \frac{8}{s^3(s-2)(s+1)}\right\}$$

พิจารณา $\dfrac{s+3}{(s-2)(s+1)}$ โดยการแยกเศษส่วนย่อยดังต่อไปนี้

$$\frac{s+3}{(s-2)(s+1)} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s+1}$$
$$s + 3 = A(s+1) + B(s-2)$$

หาคา A และ B โดยการแทนค่า s ที่เหมาะสมดังต่อไปนี้

ให้ $s=-1$ จะได้

$$2=-3B$$

$$B=-\frac{2}{3}$$

ให้ $s=2$ จะได้

$$5=3A$$

$$A=\frac{5}{3}$$

นั่นคือ $\dfrac{s+3}{(s-2)(s+1)}=\dfrac{5}{3(s-2)}-\dfrac{2}{3(s+1)}$

และในทำนองเดียวกัน พิจารณา $\dfrac{8}{s^3(s-2)(s+1)}$ โดยการแยกเศษส่วนย่อย

ได้ดังนี้ $\dfrac{8}{s^3(s-2)(s+1)}=\dfrac{C}{s}+\dfrac{D}{s^2}+\dfrac{E}{s^3}+\dfrac{F}{s-2}+\dfrac{G}{s+1}$

หรือ

$$8=Cs^2(s-2)(s+1)+Ds(s-2)(s+1)+E(s-2)(s+1)+F(s+1)+G(s+1)$$

จากการแก้ระบบสมการเพื่อหาค่า D,D,E,F และ G ได้ดังนี้

$$D=-3, D=2, E=-4, F=\frac{1}{3} \text{ และ } G=\frac{8}{3}$$

นั่นคือ $\dfrac{8}{s^3(s-2)(s+1)}=-\dfrac{3}{s}+\dfrac{2}{s^2}-\dfrac{4}{s^3}+\dfrac{1}{3(s-2)}+\dfrac{8}{3(s+1)}$

ได้

$$\begin{aligned} y &= L^{-1}\left\{F(s)\right\} \\ &= L^{-1}\left\{\frac{s+3}{s^2-s-2}+\frac{8}{s^3(s^2-s-2)}\right\} \end{aligned}$$

$$= L^{-1}\left\{\frac{5}{3(s-2)} - \frac{2}{3(s+1)} - \frac{3}{s} + \frac{2}{s^2} - \frac{4}{s^3} + \frac{1}{3(s-2)} + \frac{8}{3(s+1)}\right\}$$

$$= L^{-1}\left\{\frac{5}{3(s-2)}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{2}{3(s+1)}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{3}{s}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{2}{s^2}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{4}{s^3}\right\}$$

$$+ L^{-1}\left\{\frac{1}{3(s-2)}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{8}{3(s+1)}\right\}$$

$$= \frac{5}{3}L^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} - \frac{2}{3}L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} - 3L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + 2L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} - 4L^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\}$$

$$+ \frac{1}{3}L^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} + \frac{8}{3}L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}$$

$$= \frac{5}{3}e^{2x} - \frac{2}{3}e^{-x} - 3 + 2x - 2x^2$$

ดังนั้น ผลเฉลยปัญหาค่าเริ่มต้นของ $y'' - y' - 2y = 4x^2$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 4$
คือ $y = \frac{5}{3}e^{2x} - \frac{2}{3}e^{-x} - 3 + 2x - 2x^2$

8.5 สรุปท้ายบทที่ 8

ผลการแปลงลาปลาซ เป็นการส่งค่าที่เป็นฟังก์ชันไปเป็นฟังก์ชันโดยใช้สัญลักษณ์แทน ผลการแปลงลาปลาซของ f แทนด้วย $L\{f\}$ หรือ $L\{f(x)\}$ หมายความว่าถ้า f เป็นฟังก์ชันที่หาค่าได้บนช่วง $[0,\infty)$ แล้ว $L\{f(x)\} = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)\,dx$ ผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันพื้นฐานสามารถนำไปใช้ได้โดยการแทนค่าได้ แต่ถ้า f ไม่อยู่ในรูปแบบที่สามารถใช้ฟังก์ชันพื้นฐานดังกล่าวได้ เราสามารถใช้คุณสมบัติต่าง ๆ เพื่อทำให้อยู่ในฟังก์ชันพื้นฐานโดยใช้ สมบัติเชิงเส้นของผลการแปลงลาปลาซ นั่นคือ

$L\{af(x) + bg(x)\} = aL\{f(x)\} + bL\{g(x)\}$ เมื่อ a และ b เป็นค่าคงตัว

สมบัติผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันที่คูณด้วยตัวแปรอิสระ

ถ้ากำหนดให้ $L\{f(x)\} = F(s)$ แล้วจะได้ว่า $L\{x^n f(x)\} = (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}F(s)$

สมบัติการเลื่อนขนานของผลการแปลงลาปลาซ

ถ้า $L\{f(x)\} = F(s)$ แล้วจะได้ว่า $L\left\{e^{ax} f(x)\right\} = F(s-a)$

และผลการแปลงลาปลาซกับฟังก์ชันแกมมา ซึ่งสามารถนำไปใช้ในการหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขต นำไปสู่หาผลการแปลงลาปลาซได้ เพราะ ฟังก์ชันแกมมา คือฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $\int_0^\infty x^{p-1} e^{-x}\, dx$ และแทนด้วยสัญลักษณ์ $\Gamma(p)$ สำหรับจำนวนจริงบวก p ใด ๆ นั่นคือ $\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x}\, dx$ ซึ่งจะเห็นว่าอยู่ในรูปของการหาปริพันธ์ไม่ตรงแบบคล้ายกับผลการแปลงลาปลาซ

ผลการแปลงลาปลาซผกผันของ $F(s)$ แทนด้วยสัญลักษณ์ $L^{-1}\left\{F(s)\right\}$ และ $L^{-1}\left\{F(s)\right\} = f(x)$ ถ้า $L\{f(x)\} = F(s)$ สำหรับการหาผลการแปลงลาปลาซผกผันนั้นถ้า $F(s)$ อยู่ในรูปฟังก์ชันพื้นฐานก็สามารถหา $L^{-1}\left\{F(s)\right\}$ โดยการแทนค่าได้แต่ถ้า $F(s)$ ไม่อยู่ในรูปฟังก์ชันพื้นฐาน แล้วเราสามารถหาผลการแปลงลาปลาซผกผันโดยการทำเป็นกำลังสองสมบูรณ์ หรือการหาผลการแปลงลาปลาซผกผันโดยการแยกเศษส่วนย่อย ขึ้นอยู่กับ $F(s)$ ว่าควรจะใช้วิธีการใด และผลการแปลงลาปลาซนี้ นำไปแก้ปัญหาสมการเชิงอนุพันธ์ที่เกี่ยวกับปัญหาค่าเริ่มต้นได้เป็นอย่างดี โดยใช้ผลการแปลงลาปลาซของอนุพันธ์

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 8

1. จงหาค่าต่อไปนี้

   1.1 $L\{e^{-6x}\}$

   1.2 $L\{xe^{3x}\}$

   1.3 $L\{\sin 5x\}$

   1.4 $L\{e^{-6x}\cos 3x\}$

   1.5 $L\{e^{2x}x^{3}\}$

   1.6 $L\{3x^{5}e^{x}\}$

   1.7 $L\{e^{x}\sin x\}$

   1.8 $L\{e^{3x+2}\}$

2. จงหาผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันต่อไปนี้

   2.1 $f(x)=\begin{cases}5, & 0<x<3\\ 0, & 3<x\end{cases}$

   2.2 $f(x)=\begin{cases}\sin 2x, & 0<x<1\\ x, & 1<x<5\\ 0, & 5<x\end{cases}$

   2.3 $f(x)=\begin{cases}0, & 0<x<3\\ 2x-1, & 3<x<5\\ 0, & 5<x\end{cases}$

   2.4 $f(x)=\begin{cases}e^{3x}, & 0<x<3\\ \sin x, & 3<x<5\\ x^{2}, & 5<x\end{cases}$

3. จงหาผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันต่อไปนี้

   3.1 $f(x) = x^3 + e^{5x}$

   3.2 $f(x) = x^5 - xe^{5x} + 3\cos 5x$

   3.3 $f(x) = \cos 2x + 5e^{6x} + 12$

   3.4 $f(x) = x^3 e^{5x} + 3e^{5x}\cos 5x$

   3.5 $f(x) = -e^{5x}\sin 2x + 8e^{6x}\cos 5x$

4. จงหาค่าของ

   4.1 $\Gamma(3)$

   4.2 $\Gamma(10)$

   4.3 $\int_0^\infty x^3 e^{-x}\, dx$

   4.4 $\int_0^\infty x^6 e^{-3x}\, dx$

5. จงเขียนกราฟของฟังก์ชันคาบและหาผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันคาบที่กำหนดให้ต่อไปนี้

   5.1 $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < 2 \\ 1, & 2 \le x < 3 \end{cases}$

   5.2 $f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1 \\ 1, & 1 < x < 2 \end{cases}$

   5.3 $f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 < x < \pi \\ 0, & \pi < x < 2\pi \end{cases}$

6. จงหาค่าต่อไปนี้

6.1 $L^{-1}\left\{\dfrac{5}{s}\right\}$

6.2 $L^{-1}\left\{\dfrac{3}{s-5}\right\}$

6.3 $L^{-1}\left\{\dfrac{6}{s^2+4}\right\}$

6.4 $L^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2+4}\right\}$

6.5 $L^{-1}\left\{\dfrac{3s+5}{s^2+9}\right\}$

7. จงหาผลการแปลงลาปลาซผกผันต่อไปนี้โดยการทำให้เป็นกำลังสองสมบูรณ์และการเลื่อนขนาน

7.1 $L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2+2s+1}\right\}$

7.2 $L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2+4s+6}\right\}$

7.3 $L^{-1}\left\{\dfrac{6s-4}{s^2-4s+20}\right\}$

7.4 $L^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2-2s+3}\right\}$

8. จงหาผลการแปลงลาปลาซผกผันต่อไปนี้โดยการทำให้เป็นเศษส่วนย่อย

8.1 $L^{-1}\left\{\dfrac{s+3}{(s-2)(s+1)}\right\}$

8.2 $L^{-1}\left\{\dfrac{3s+7}{s^2-2s+3}\right\}$

8.3 $L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s(s^2-4)}\right\}$

8.4 $L^{-1}\left\{\dfrac{s^2-4}{(s-3)(s-2)(s+1)}\right\}$

9. จงหาผลเฉลยโดยใช้ผลการแปลงลาปลาซผกผันของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

9.1 $y' - 5y = 0$, $y(0) = 2$

9.2 $y' - 5y = e^{5x}$, $y(0) = 2$

9.3 $y'' + 4y = 0$, $y(0) = 2, y'(0) = 2$

9.4 $y'' + 2y' + 5y = 0$, $y(0) = 2, y'(0) = 4$

บรรณานุกรม

ก่อสุข วีระถาวร. (2539). **ผลการแปลงฟูริเยร์และลาปลาซ.** กรุงเทพมหานคร : สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยรามคำแหง.

จินดา อาจริยะกุล. (2540). **Differential Equations.** กรุงเทพมหานคร : พิทักษ์การพิมพ์.

ดำรง ทิพย์โยธา. (2541). **การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ เล่ม 1.** กรุงเทพมหานคร : สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

__________. (2541). **การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ เล่ม 2.** กรุงเทพมหานคร : สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

ทศพร คล้ายอุดม. (2531). **สมการดิเฟอเรนเชียล.** กรุงเทพมหานคร : สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยรามคำแหง.

ธีระศักดิ์ อุรัจนานนท์. (2549). **สมการเชิงอนุพันธ์.** ปทุมธานี พิมพ์ครั้งที่ 1 : สำนักพิมพ์สกายบุ๊กส์

นงนุช สุขวารี. (2542). แปลและเรียบเรียงจาก Bronson, Richard. **2500 Solved Problems in Differential Equations.** แมคกรอ-ฮิล อินเตอร์เนชันแนล เอนเตอร์ไพรส์ อิงค์.

บัญญัติ สร้อยแสง. (2553). **แคลคูลัสและสมการเชิงอนุพันธ์สำหรับวิทยาศาสตร์ชีวภาพ.** ปทุมธานี : ภาควิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์.

ปรุงจันทร์ วงศ์วิเศษ และคณะ. (2529). **สมการเชิงอนุพันธ์เล่ม 2.** กรุงเทพมหานคร : ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์อุตสาหกรรมและวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี.

พรชัย สารทวาหา. (2545). **สมการเชิงอนุพันธ์.** กรุงเทพมหานคร : พิทักษ์การพิมพ์

พิชากร แปลงประสบโชค. **สมการเชิงอนุพันธ์แบบธรรมดาฉบับแนะนำ.** กรุงเทพมหานคร : มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.

พินิจ เพิ่มพงศ์พันธ์. (2540). **สมการเชิงอนุพันธ์.** กรุงเทพมหานคร : ห้างหุ้นส่วนจำกัด นำอักษรการพิมพ์.

ราชบัณฑิตยสถาน. (2553). **พจนานุกรมศัพท์คณิตศาสตร์ฉบับราชบัณฑิตยสถาน.** พิมพ์ครั้งที่ 10 กรุงเทพมหานคร : นานมีบุคส์พับลิเคชั่นส์.

วัชรพงศ์ ศรีแสง. (2555). **บทความ wolfram Alpha เพื่อการเรียนการสอนคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์แบบบูรณาการ นิตยสาร สสวท. ปีที่ 40 ฉบับที่ 178.** กรุงเทพมหานคร : สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี.

วารี เกรอต. (2542). **สมการเชิงอนุพันธ์.** กรุงเทพมหานคร : ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร

วีระศักดิ์ วาจาบัณฑิตย์.(2541). **สมการเชิงอนุพันธ์.** กรุงเทพมหานคร : ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยรามคำแหง

__________.(2536). **ผลการแปลงฟูริเยร์และลาปลาซ** กรุงเทพมหานคร : ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยรามคำแหง

ศิริพร พัสดร. (2552). **สมการเชิงอนุพันธ์** อุดรธานี : สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏอุดรธานี.

ศรีบุตร แววเจริญ และชนศักดิ์ บ่ายเที่ยง. (2542). **สมการเชิงอนุพันธ์ 1.** กรุงเทพมหานคร : บริษัทวงตะวัน.

ศิวิไล ถนอมสวย และสุรางค์ สีโท. (2541). **สมการเชิงอนุพันธ์.** กรุงเทพมหานคร : บริษัทศูนย์การพิมพ์แก่นจันทร์ จำกัด.

สมพร รัตนพันธ์ และสมชาติ รุ่งเรืองสรการ. (2531). **คณิตศาสตร์ประยุกต์ 1.** กรุงเทพมหานคร : สำนักพิมพ์สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ.

สมศักดิ์ เทศสวัสดิ์วงศ์. (2544). **สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ.** บุรีรัมย์ : คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีสถาบันราชภัฏบุรีรัมย์.

สุนีย์ สุวรรณตระกูล และวรนุช เกิดสินธ์ชัย. (2530). **สมการเชิงอนุพันธ์เล่ม 1.** กรุงเทพมหานคร : ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์อุตสาหกรรมและวิทยาศาสตร์สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี

สุรัตนา สังข์หนุน. (2558). **สมการเชิงอนุพันธ์ 1**. กรุงเทพมหานคร : ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ประยุกต์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ

สุวัฒน์ รอดผล. (2548). **สมการเชิงอนุพันธ์สำหรับวิศวกร.** กรุงเทพมหานคร : สมาคมส่งเสริมเทคโนโลยี(ไทย ญี่ปุ่น) ส.ส.ท.

อาทิตย์ ศรีแก้ว. (2546). **คณิตศาสตร์วิศวกรรม 1.** นครราชสีมา : สาขาวิศวกรรมไฟฟ้า คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี.

อุบล กลองกระโทก. (2549). **คณิตศาสตร์สำหรับวิทยาศาสตร์ 2.** กรุงเทพมหานคร : คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา.

Albert L. Rabenstien. (1996). **Introduction to Ordinary Differential Equations.** Academic Press,New York and London.

David Lomem and James Mark. (1988). **Differential Equations.** Prentice Hall International Inc.,Englewood Criff.NJ.

Dennis G. zill. (1982). **A fist Course in Differential Equations with Applications, Second Edition.** Prindle Weber & Schmidt, Boston.

Edward, C.H. and Penney , David E. (2000). **Elementary Differential Equations with Boundary Value Problems**, New Jersey : Prentice Hall, Inc.

Fred Brauer and John A. Nohel. (1986). **Introduction to Differential Equatons with Applications.** Harper & Row Publishers, New York.

Garrett Birkhoff and Glan-Carlo Rota. (1989). **Ordinary Differential Equations**, Fourth Edition, John Wiley & Son, New York.

Lomen, D. and Mark J. (1988). **Differential Equations.** Englewood Clift : Prentice Hall, Inc.

N.Finixio & G Ladas. (1982). **An Introduction to Differential Equations.** Wadswoeth Publishing Company, Belmont.

Perter V.O’Neil. (1995). **Advanced Engineering Mathematics, Fourth Edition.** PWS Publishing Company, Boston.

Richard K Miller. (1988). **Introduction to Differential Equations.** Prentics Hall Intermational Inc.,Englewood Criff.NJ.

Spiegel, Murray R. (1981). **Applied Differential Equations.** Third Edition, Prentice Hall,Inc.,Engewood Ciiffs.

Wolfram Alpha LLC. **Wolframalpha** (online) Avaiable : htt:/www.wolframlpha**.com** Wolfram, Stephen. (2003). **The Mathematica Book**. 5^{th}ed. Wolfram Media : Cambridge.

Zill, Dennis E. (2005). **A First Course in Differential Equations with Modeling Applications.** Toronto : Brooks/Cole Thomson Learning, Inc.

ดรรชนี