เอกสารประกอบการสอน
รายวิชาคณิตศาสตร์สำหรับวิทยาศาสตร์ 1

วชิรารักษ์ โอรสรัมย์

คณะวิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัยราชภัฏบุรีรัมย์

2561

เอกสารประกอบการสอน

รายวิชาคณิตศาสตร์สำหรับวิทยาศาสตร์ 1

วชิรารักษ์ โอรสรัมย์

(วท.ม. คณิตศาสตร์ศึกษา)

คณะวิทยาศาสตร์

มหาวิทยาลัยราชภัฏบุรีรัมย์

2561

คำนำ

เอกสารประกอบการสอนวิชาคณิตศาสตร์สำหรับวิทยาศาสตร์ 1 ผู้เขียนได้เรียบเรียงขึ้นเพื่อใช้ประกอบการสอนในรายวิชา คณิตศาสตร์สำหรับวิทยาศาสตร์ 1 รหัส 4091601 ซึ่งหัวข้อเรื่องได้ยึดหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต(วท.บ.4ปี) ของสาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏบุรีรัมย์ (หลักสูตรปรับปรุง พ.ศ. 2553) เป็นหมวดวิชาเฉพาะ กลุ่มวิชาเฉพาะด้าน ซึ่งเนื้อหาในเล่มนี้ประกอบไปด้วย ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน อนุพันธ์ของฟังก์ชัน การประยุกต์อนุพันธ์ และปริพันธ์ ผู้เขียนได้เพิ่มเนื้อหาในบทที่ 1 เข้าไปเพื่อให้นักศึกษาได้ทบทวนความรู้ทางด้านคณิตศาสตร์ที่จำเป็นและสามารถประยุกต์การแก้ปัญหากับปัญหาต่าง ๆ ในรายวิชาคณิตศาสตร์สำหรับวิทยาศาสตร์ 1 ได้ดียิ่งขึ้น

ข้าพเจ้าขอขอบพระคุณท่านผู้เรียบเรียงหนังสือและเอกสารที่ปรากฏอยู่ในเอกสารอ้างอิงเป็นอย่างสูง ข้าพเจ้าหวังเป็นอย่างยิ่งว่าเอกสารประกอบการสอนวิชาคณิตศาสตร์สำหรับวิทยาศาสตร์ 1 เล่มนี้ คงเป็นประโยชน์สำหรับนักศึกษา และผู้สนใจทั่วไป

วชิรารักษ์ โอรสรัมย์

พฤษภาคม 2561

สารบัญ

เรื่อง	หน้า
คำนำ	**(1)**
สารบัญ	**(3)**
สารบัญรูปภาพ	**(7)**
สารบัญตาราง	**(9)**
แผนบริหารการสอน	**(11)**
แผนบริหารการสอนประจำบทที่ 1	**1**
บทที่ 1 ความรู้พื้นฐาน	**3**
1.1 เซต	3
1.2 ระบบจำนวนจริง	12
1.3 การไม่เท่ากันในระบบจำนวน	20
1.4 ช่วงและการแก้อสมการ	21
1.5 ค่าสัมบูรณ์	27
1.6 ความสัมพันธ์ และฟังก์ชัน	31
1.7 สรุปท้ายบทที่ 1	43
คำถามท้ายบท	44
เอกสารอ้างอิง	47
แผนบริหารการสอนประจำบทที่ 2	**49**
บทที่ 2 ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน	**51**
2.1 บทนิยามของลิมิต	51
2.2 ทฤษฎีบทของลิมิต	65
2.3 ลิมิตที่เกี่ยวข้องกับอนันต์	76
2.4 ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน	101
2.5 สรุปท้ายบทที่ 2	104

สารบัญ(ต่อ)

เรื่อง **หน้า**

คำถามท้ายบท 107

เอกสารอ้างอิง 113

แผนบริหารการสอนประจำบทที่ 3 **115**

บทที่ 3 อนุพันธ์ของฟังก์ชัน 117

3.1 ส่วนเปลี่ยนแปลงและอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ย 117

3.2 อนุพันธ์ของฟังก์ชัน 118

3.3 การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิต 125

3.4 การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบ 133

3.5 การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ 139

3.6 การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันลอการิทึมและฟังก์ชันเลขชี้กำลัง 148

3.7 การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยปริยาย 156

3.8 อนุพันธ์อันดับสูง 158

3.9 สรุปท้ายบทที่ 3 161

คำถามท้ายบท 163

เอกสารอ้างอิง 167

แผนบริหารการสอนประจำบทที่ 4 169

บทที่ 4 การประยุกต์อนุพันธ์ 171

4.1 ความเร็ว และความเร่ง 171

4.2 อัตราสัมพัทธ์ 176

4.3 สมการเส้นสัมผัส และเส้นปกติ 181

4.4 ค่าสูงสุดค่าต่ำสุด และกราฟ 186

4.5 หลักเกณฑ์โลปิตาล 201

4.6 สรุปท้ายบทที่ 4 205

สารบัญ(ต่อ)

เรื่อง	**หน้า**
คำถามท้ายบท	207
เอกสารอ้างอิง	211
แผนบริหารการสอนประจำบทที่ 5	**213**
บทที่ 5 การประยุกต์อนุพันธ์	**215**
5.1 ปัญหาแนววิถีเชิงตั้งฉาก	215
5.2 ปัญหาทางกลศาสตร์	220
5.3 ปัญหาอัตราการเปลี่ยนแปลง	235
5.4 สรุปท้ายบทที่ 5	259
คำถามท้ายบท	261
เอกสารอ้างอิง	265
แผนบริหารการสอนประจำบทที่ 6	**267**
บทที่ 6 ฟังก์ชันหลายตัวแปรและอนุพันธ์ย่อย	**269**
6.1 ฟังก์ชันค่าจริงของสองตัวแปรหรือมากกว่า	269
6.2 ลิมิตของฟังก์ชันสองตัวแปร	273
6.3 อนุพันธ์ย่อย	279
6.4 กฎลูกโซ่ของฟังก์ชันของตัวแปร 2 ตัว	285
6.5 อนุพันธ์ย่อยอันดับสูง	290
6.6 สรุปท้ายบทที่ 5	300
คำถามท้ายบท	301
เอกสารอ้างอิง	305
แผนบริหารการสอนประจำบทที่ 7	**307**
บทที่ 7 ปริพันธ์	**309**
7.1 ปฏิยานุพันธ์	309
7.2 ปริพันธ์จำกัดเขต	326
7.3 สรุปท้ายบทที่ 6	330

สารบัญ(ต่อ)

เรื่อง **หน้า**

คำถามท้ายบท	331
เอกสารอ้างอิง	333
แผนบริหารการสอนประจำบทที่ 8	**335**
บทที่ 8 เทคนิคการหาปริพันธ์	**337**
8.1 กฎสำหรับการหาปฏิยานุพันธ์	337
8.2 การหาปริพันธ์โดยการแทนค่า หรือเปลี่ยนตัวแปร	339
8.3 การหาปริพันธ์โดยวิธีแยกเศษส่วนย่อย	347
8.4 การหาปริพันธ์ทีละส่วน	358
8.5 ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ	364
8.6 สรุปท้ายบทที่ 8	377
คำถามท้ายบท	379
เอกสารอ้างอิง	381
บรรณานุกรม	**383**

สารบัญรูปภาพ

ภาพประกอบ	หน้า
ภาพประกอบ 1.1 แผนภาพแสดงความสัมพันธ์ระหว่างเซต	8
ภาพประกอบ 1.2 แผนภาพแสดงส่วนที่แรเงา $A \cup B$	9
ภาพประกอบ 1.3 แผนภาพแสดงส่วนที่แรเงา $A \cap B$	9
ภาพประกอบ 1.4 แผนภาพแสดงส่วนที่แรเงา $A - B$	10
ภาพประกอบ 1.5 แผนภาพแสดงส่วนที่แรเงา A'	11
ภาพประกอบ 1.6 แผนภาพแสดงโครงสร้างของจำนวนจริง	14
ภาพประกอบ 1.7 แสดงเส้นจำนวนจริง	21
ภาพประกอบ 1.8 แสดงภาพฟังก์ชัน $y = f\left(x\right)$	38
ภาพประกอบ 1.9 แสดงแผนผังการประกอบของฟังก์ชัน	41
ภาพประกอบ 1.10 แสดงฟังก์ชันประกอบ $g \circ f$	42
ภาพประกอบ 2.1 กราฟของฟังก์ชัน $f(x) = x + 5$	52
ภาพประกอบ 2.2 แสดง $\varepsilon > 0$ และ $\delta > 0$	58
ภาพประกอบ 2.3 กราฟของฟังก์ชัน $f(x) = \dfrac{3x^2}{1+x^2}$	79
ภาพประกอบ 2.4 กราฟของฟังก์ชัน $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$	86
ภาพประกอบ 2.5 กราฟของฟังก์ชัน $f(x) = x^3$	95
ภาพประกอบ 2.6 กราฟของฟังก์ชัน $f(x) = x^3 - 5x + 1$	101
ภาพประกอบ 3.1. กราฟแสดงอัตราการเปลี่ยนแปลงความชันของฟังก์ชัน $f(x)$	118
ภาพประกอบ 3.2 วิธีการวัดมุม θ	139
ภาพประกอบ 3.3 มุม θ และมุม $-\theta$	140
ภาพประกอบ 4.1 แสดงเส้นปกติ และเส้นสัมผัส	176
ภาพประกอบ 4.2 แสดงจุดสูงสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันบนช่วง (x_1, x_2)	192
ภาพประกอบ 4.3 แสดงจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันบนช่วง (x_1, x_2)	192
ภาพประกอบ 4.4 แสดงจุดสูงสุดสัมพัทธ์โดยใช้อนุพันธ์อันดับที่สองบนช่วง $\left(x_1, x_2\right)$	194

สารบัญรูปภาพ(ต่อ)

ภาพประกอบ **หน้า**

ภาพประกอบ 4.5 แสดงจุดต่ำสุดสัมพัทธ์โดยใช้อนุพันธ์อันดับที่สองบนช่วง $\left(x_1, x_2\right)$ 194

ภาพประกอบ 4.6 แสดงจุดเปลี่ยนเว้าของฟังก์ชัน $y = f\left(x\right)$ 195

ภาพประกอบ 5.1 วงศ์เส้นโค้งของสมการ $x^2 + y^2 = c^2$ 215

ภาพประกอบ 5.2 วงศ์เส้นโค้ง $y = kx$ เป็นแนววิถีเชิงตั้งฉากกันและกันกับวงศ์เส้นโค้ง $x^2 + y^2 = c^2$ 217

ภาพประกอบ 5.3 ระยะทางการเคลื่อนที่ของวัตถุ B 221

ภาพประกอบ 6.1 แสดงเซต $B(A;r)$ 273

ภาพประกอบ 7.1 แสดงพื้นที่ A บนช่วงปิด $[a,b]$ 326

ภาพประกอบ 7.2 แสดงการหา S_n ช่วง $[a,b]$ 327

ภาพประกอบ 8.1 ลิมิตล่างเป็นอนันต์ 366

ภาพประกอบ 8.2 ทั้งลิมิตล่างและลิมิตบนเป็นอนันต์ 366

ภาพประกอบ 8.3 แสดง $\int_a^b f(x)\ dx$ 374

ภาพประกอบ 8.4 แสดง $\int_a^b f(x)\ dx = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)\ dx$ 375

สารบัญตาราง

ตาราง	หน้า
ตาราง 2.1 แสดงกรณี x มีค่าเข้าใกล้ 2 ทางซ้าย ($x<2$ และ x เข้าใกล้ 2)	53
ตาราง 2.2 แสดงกรณี x มีค่าเข้าใกล้ 2 ทางขวามือ($x>2$ และ x เข้าใกล้ 2)	53
ตาราง 2.3 ค่าของ $f(x)=\dfrac{3x^2}{1+x^2}$ เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ ∞ และ $-\infty$	78
ตาราง 2.4 ค่าของ $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 1	85
ตาราง 2.5 ค่าของ $f(x)=x^3$	94
ตาราง 5.1 ระบบหน่วย British system, cgs system และ mks system	223

มคอ. 3 รายละเอียดของรายวิชา

ชื่อสถาบันอุดมศึกษา	**มหาวิทยาลัยราชภัฏบุรีรัมย์**
วิทยาเขต/คณะ/ภาควิชา	คณะวิทยาศาสตร์ สาขาวิชา คณิตศาสตร์ Faculty of Science Program in in Mathematics

หมวดที่ 1 ข้อมูลทั่วไป

1. รหัสและชื่อรายวิชา	รหัสวิชา 4091601	ชื่อรายวิชา คณิตศาสตร์สำหรับวิทยาศาสตร์ 1
2. จำนวนหน่วยกิต	3 หน่วยกิต	3(3-0-6) (บรรยาย-ปฏิบัติ-ศึกษาด้วยตนเอง)
3. หลักสูตรและประเภทของรายวิชา		
3.1 **สำหรับ** ☑	หลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต	สาขาวิชาคณิตศาสตร์
สำหรับ ☑	หลายหลักสูตร	
3.2 ☑ **ประเภทของรายวิชา**	☐ ศึกษาทั่วไป	
	☑ วิชาเฉพาะด้าน	กลุ่มวิชา ☐ แกน ☐ เอกบังคับ ☑ เอกเลือก
	☐ วิชาเลือกเสรี	
4. อาจารย์ผู้รับผิดชอบรายวิชา		
4.1 อาจารย์ผู้รับผิดชอบรายวิชา		
-		
4.2 อาจารย์ผู้สอน		
อาจารย์วชิราวักษ์ โอรสรัมย์		
5. ภาคการศึกษา / ชั้นปีที่เรียน		
ภาคการศึกษาที่	☑ 1 ☐ 2	**ชั้นปีที่เรียน** ชั้นปีที่ 1
6. รายวิชาที่ต้องเรียนมาก่อน (pre-requisite) (ถ้ามี)		
ไม่มี		
7. รายวิชาที่ต้องเรียนพร้อมกัน (co-requisites) (ถ้ามี)		
ไม่มี		

8. สถานที่เรียน 541 อาคาร 5 มหาวิทยาลัยราชภัฏบุรีรัมย์
9. วันที่จัดทำหรือปรับปรุงรายละเอียดของรายวิชาครั้งล่าสุด
ภาคการศึกษาที่ ปีการศึกษา 2558 ☑ 1 ☐ 2

หมวดที่ 2 จุดมุ่งหมายและวัตถุประสงค์

1. จุดมุ่งหมายของรายวิชา 1. เพื่อให้นักศึกษามีความรู้ความเข้าใจในเรื่องลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน 2. เพื่อให้นักศึกษามีความรู้ความเข้าใจในเรื่องอนุพันธ์ 3. เพื่อให้นักศึกษามีความรู้ความเข้าใจในเรื่องการประยุกต์ของอนุพันธ์ 4. เพื่อให้นักศึกษามีความรู้ความเข้าใจในเรื่องอนุพันธ์ย่อย 5. เพื่อให้นักศึกษามีความรู้ความเข้าใจในเรื่องอินทิกรัล อินทิกรัลของฟังก์ชันชนิดต่าง ๆ อินทิกรัลจำกัลเขตและไม่จำกัดเขต 6. เพื่อให้นักศึกษาสามารถนำความรู้ในรายวิชาไปประยุกต์ในการแก้โจทย์ปัญหาในเนื้อหาที่เกี่ยวข้อได้อย่างเหมาะสม
2. วัตถุประสงค์ในการพัฒนา/ปรับปรุงรายวิชา เพื่อพัฒนาการเรียนการสอนและความรู้ให้ทันยุคสมัย

หมวดที่ 3 ลักษณะและการดำเนินการ

1. คำอธิบายรายวิชา (Course Description) ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน อนุพันธ์ บทประยุกต์ของอนุพันธ์ อนุพันธ์ย่อย อินทิกรัลของฟังก์ชันชนิดต่าง ๆ อินทิกรัลจำกัดเขตและไม่จำกัดเขต			
2. จำนวนชั่วโมงที่ใช้ต่อภาคการศึกษา			
บรรยาย	**สอนเสริม (ถ้ามี)**	**การฝึกปฏิบัติ/งานภาคสนาม/การฝึกงาน**	**การศึกษาด้วยตนเอง**

45 ชั่วโมงต่อภาคการศึกษา	ไม่มี	ไม่มี	36 ชั่วโมงต่อสัปดาห์

3. จำนวนชั่วโมงต่อสัปดาห์ที่อาจารย์ให้คำปรึกษาและแนะนำทางวิชาการแก่นักศึกษาเป็นรายบุคคล

1. อาจารย์ประจำรายวิชาประกาศเวลาให้คำปรึกษาที่หน้าห้องทำงานและในเว็บไซต์
2. นักศึกษาจองวันเวลาล่วงหน้าหรือมาพบตามนัด
3. อาจารย์จัดเวลาให้คำปรึกษาเป็นรายบุคคล/กลุ่มตามต้องการ โดยกำหนดไว้ 2 ชั่วโมง/สัปดาห์

หมวดที่ 4 การพัฒนาผลการเรียนรู้ของนักศึกษา

1. คุณธรรม จริยธรรม		
คุณธรรม จริยธรรมที่ต้องพัฒนา	**วิธีการสอนที่จะใช้พัฒนาการเรียนรู้**	**วิธีการประเมินผล**
1.1 มีวินัยตรงต่อเวลา ซื่อสัตย์มีความรับผิดชอบต่อตนเองและส่วนรวม	อาจารย์ประพฤติตนเป็นแบบอย่าง โดยการเข้าสอนตรงเวลา และกำหนดเวลาในการเช็คชื่อก่อนทำการสอนทุกครั้ง	ประเมินจากพฤติกรรมการเข้าเรียน
1.6 มีจิตสำนึกและตระหนักในการปฏิบัติตาจรรยาบรรณวิชาชีว	จับกลุ่มทำงานที่ได้รับมอบหมายจากอาจารย์แบบฝึกหัด	สังเกตพฤติกรรมขณะทำแบบฝึกหัด
2. ความรู้		
ความรู้ที่ต้องได้รับ	**วิธีการสอน**	**วิธีการประเมินผล**
2.1 มีความรู้ ความเข้าใจในหลักการ ทฤษฎี	1. ศึกษาเอกสารประกอบการสอน 2. บรรยาย 3. แก้โจทย์ปัญหาในชั้นเรียน 4. สนทนาซักถาม 5. ทำแบบฝึกหัดตามใบงาน	1. ประเมินผลชิ้นงาน 2. สอบเก็บคะแนน 3. สอบกลางภาค 4. สอบปลายภาค
3. ทักษะทางปัญญา		
ทักษะทางปัญญาที่ต้อง	**วิธีการสอน**	**วิธีการประเมินผล**

พัฒนา		
3.1 มีความสมารถในการวิเคราะห์สถานการที่ได้เรียนมา	1. มอบหมายงานให้ทำแล้วเสนอผลการศึกษา 2. อภิปรายภายในชั้นเรียน	1. ประเมินผลชิ้นงาน 2. สอบกลางภาค 3. สอบปลายภาค
3.2 สามารถแก้ไขปัญหาได้โดยนำหลักการต่าง ๆ มาอ้างอิงอย่างมีเหตุผล	1. มอบหมายงานให้ทำแล้วเสนอผลการศึกษา 2. อภิปรายภายในชั้นเรียน	1. ประเมินผลชิ้นงาน 2. สอบกลางภาค 3. สอบปลายภาค
4. ทักษะความสัมพันธ์ระหว่างบุคคลและความรับผิดชอบ		
ทักษะความสัมพันธ์ระหว่างบุคคลและความรับผิดชอบที่ต้องการพัฒนา	**วิธีการสอน**	**วิธีการประเมินผล**
4.1 สามารถทำงานร่วมกับคนอื่นได้เป็นอย่างดี	1. ให้นักศึกษาแบ่งกลุ่มทำงานแล้วนำเสนอ	สังเกตพฤติกรรมขณะร่วมกันทำงาน และการนำเสนองาน
4.2 มีความรับผิดชอบต่องานที่ได้รับมอบหมาย	1. จัดให้มีการแลกเปลี่ยนความรู้และข้อมูลระหว่างบุคคล 2. ทำแบบฝึกหัดตามที่ได้รับมอบหมาย	สังเกตพฤติกรรมขณะร่วมกันทำงาน คะแนนแบบฝึกหัดที่ได้
4.5 มีความรู้ความเข้าใจในบทบาทหน้าที่ของตนเองอย่างต่อเนื่อง	1. จัดให้มีการแลกเปลี่ยนความรู้และข้อมูลระหว่างบุคคล	สังเกตพฤติกรรมขณะร่วมกันทำงาน
5. ทักษะการวิเคราะห์เชิงตัวเลข การสื่อสาร และการใช้เทคโนโลยีสารสนเทศ		
ทักษะการวิเคราะห์เชิงตัวเลข การสื่อสาร และการใช้เทคโนโลยีสารสนเทศที่ต้องพัฒนา	**วิธีการสอน**	**วิธีการประเมินผล**
5.1 สามารถใช้เทคโนโลยีสารสนเทศในการเก็บข้อมูล	1. มอบหมายงานให้ทำแล้วเสนอผลการศึกษา	1. ประเมินผลชิ้นงาน 2. สอบกลางภาค

นำเสนอและสามารถเลือกรูปแบบการนำเสนอที่เหมาะสม	2. อภิปรายภายในชั้นเรียน	3. สอบปลายภาค

6. ภารกิจอื่น ๆ ที่นำมาบูรณาการเข้ากับการเรียนการสอน

6.1 ผลงานวิจัย

มีการนำความรู้และประสบการณ์จากผลงานวิจัยมาใช้ในการพัฒนาการเรียนการสอนโดยมีการดำเนินการ ดังนี้

....ไม่มี..

6.2 งานบริการวิชาการ ได้แก่ การจัดโครงการฝึกอบรม การเป็นวิทยากรทั้งภายในและภายนอกมหาวิทยาลัย การเป็นกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ การเป็นกรรมการผู้ทรงคุณวุฒิในการตรวจผลงานวิจัย การเป็นกรรมการผู้ทรงคุณวุฒิในการอ่านบทความวิชาการและอื่น ๆ

....ไม่มี..

มีการนำความรู้และประสบการณ์จากการบริการวิชาการมาใช้ในการพัฒนาการเรียนการสอนโดยมีการดำเนินการ ดังนี้

....ไม่มี..

6.3 งานทำนุบำรุงศิลปวัฒนธรรม ได้แก่ การผนวกเอาศิลปวัฒนธรรมท้องถิ่นไว้ในการเรียนการสอน เช่น การสอนโดยยกตัวอย่างสิ่งที่เกิดขึ้นในกระบวนการผลิตตามวิถีพื้นบ้าน การอ้างอิงถึงเครื่องมือพื้นบ้าน วัตถุดิบที่ใช้ในการผลิตที่มีเฉพาะในท้องถิ่น ภูมิปัญญาพื้นบ้านภาคเหนือ และอื่น ๆ

....ไม่มี..

มีการนำความรู้และประสบการณ์จากการทำนุบำรุงศิลปวัฒนธรรม มาใช้ในการพัฒนาการเรียนการสอนโดยมีการดำเนินการ ดังนี้

....ไม่มี..

6.4 ทรัพยากรหรือวิธีการใช้ในการพัฒนาทักษะภาษาอังกฤษของนักศึกษา

ตัวอย่างเช่น การใช้ text book การใช้บทความวิจัย/ บทความภาษาอังกฤษ การเข้าถึง website ที่เกี่ยวข้อง เป็นต้น

....ไม่มี..

มีการนำความรู้และประสบการณ์จากการนำทรัพยากรมาใช้ในการพัฒนาการเรียนการสอนโดยมีการดำเนินการ ดังนี้

....ไม่มี..

6.5 การบรรยายโดยมีผู้มีประสบการณ์ทางวิชาการหรือวิชาชีพจากหน่วยงานหรือชุมชนภายนอก

เรื่องที่บรรยาย/ ชื่อและสังกัดของวิทยากร/ วัน/เวลา/สถานที่บรรยาย

....ไม่มี...

6.6 การดูงานนอกสถานที่ในรายวิชา ชื่อของหน่วยงาน /วัน/เวลาดูงาน

....ไม่มี...

หมวดที่ 5 แผนการสอนและการประเมินผล

.1แผนการสอน									
สัปดาห์ที่	**หัวข้อรายละเอียด/**	**จำนวนชั่วโมง/ผู้สอน**	**กิจกรรมการเรียนการสอนสื่อที่ใช้/**	**การพัฒนาการเรียนรู้ของนักศึกษา**					
				1	2	3	4	5	6
1	ชี้แจงรายวิชา วิธีการเรียนการสอน การวัดผลและประเมินผล **บทที่ 1 ความรู้พื้นฐาน** -เซต -ระบบจำนวนจริง -การไม่เท่ากันในระบบจำนวน -อสมการ -ช่วงและการแก้อสมการ -ค่าสัมบูรณ์ -ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน	3	บรรยาย/ปฏิบัติและเรียนรู้ร่วมกัน	✓	✓				
2	**บทที่ 2 ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน** -ความหมายและบทนิยามของลิมิต -ทฤษฎีบทของลิมิต	3	บรรยาย/ปฏิบัติและเรียนรู้ร่วมกัน		✓			✓	
3	-ลิมิตที่เกี่ยวข้องกับอนันต์	3	บรรยาย/ปฏิบัติและเรียนรู้ร่วมกัน		✓	✓			
4	-ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน	3	บรรยาย/ปฏิบัติและ		✓				

	บทที่ 3 อนุพันธ์ของฟังก์ชัน - ส่วนเปลี่ยนแปลงและอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ย - อนุพันธ์ของฟังก์ชัน		เรียนรู้ร่วมกัน						
5	- การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิต - การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบ - การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ	3	บรรยาย/ปฏิบัติและเรียนรู้ร่วมกัน					✓	
6	- การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันลอกการิทึมและฟังก์ชันชี้กำลัง -การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยปริยาย - การหาอนุพันธ์อันดับสูง	3	บรรยาย/ปฏิบัติและเรียนรู้ร่วมกัน					✓	
7	**บทที่ 4 การประยุกต์อนุพันธ์** - ความเร็ว และ ความเร่ง - อัตราสัมพัทธ์ - เส้นสัมผัสและเส้นปกติ - ค่าสูงสุดค่าต่ำสุด และกราฟ	3	บรรยาย/ปฏิบัติและเรียนรู้ร่วมกัน		✓	✓			
8	**สอบกลางภาค**								
9	**บทที่ 4 การประยุกต์อนุพันธ์ขั้นสูง** - ปัญหาแนววิถีเชิงตั้งฉาก - ปัญหาทางกลศาสตร์	3	บรรยาย/ปฏิบัติและเรียนรู้ร่วมกัน		✓	✓			
10	- ปัญหาอัตราการเปลี่ยนแปลง **บทที่ 6 อนุพันธ์ย่อย** - ฟังก์ชันค่าจริงของสองตัวแปรหรือมากกว่า - ลิมิตของฟังก์ชันสองตัวแปร		บรรยาย/ปฏิบัติและเรียนรู้ร่วมกัน		✓		✓		

11	- กฎลูกโซ่ของฟังก์ชันสองตัวแปร - อนุพันธ์ย่อยอันดับสูง	3	บรรยาย/ปฏิบัติและเรียนรู้ร่วมกัน						
12	**บทที่ 7 ปริพันธ์** - ปฏิยานุพันธ์ - ปริพันธ์ของฟังก์ชันในรูปแบบต่าง ๆ	3	บรรยาย/ปฏิบัติและเรียนรู้ร่วมกัน		✓		✓		
13	- ปริพันธ์จำกัดเขต **บทที่ 8 เทคนิคการหาปริพันธ์** - กฎสำหรับการหาปฏิยานุพันธ์	3	บรรยาย/ปฏิบัติและเรียนรู้ร่วมกัน		✓			✓	
14	- การหาปริพันธ์โดยการแทนค่า หรือเปลี่ยนตัวแปร - การหาปริพันธ์โดยวิธีแยกเศษส่วนย่อย	3	บรรยาย/ปฏิบัติและเรียนรู้ร่วมกัน		✓			✓	
15	- การหาปริพันธ์ทีละส่วน - ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ	3	บรรยาย/ปฏิบัติและเรียนรู้ร่วมกัน	✓			✓		
16	**สอบปลายภาค**								

2. แผนการประเมินผลการเรียนรู้

ที่	ผลการเรียนรู้*	วิธีการประเมิน**	สัปดาห์ที่ประเมิน	สัดส่วนของการประเมิน
1	มีวินัยตรงต่อเวลา ซื่อสัตย์มีความรับผิดชอบต่อตนเองและส่วนรวม	อาจารย์ประพฤติตนเป็นแบบอย่างโดยการเข้าสอนตรงเวลา และกำหนดเวลาในการเช็คชื่อก่อนทำการสอนทุกครั้ง	ตลอดภาคการศึกษา	10%
2	มีจิตสำนึกและตระหนักในการปฏิบัติ	จับกลุ่มทำงานที่ได้รับมอบหมายจากอาจารย์แบบฝึกหัด	ตลอดภาคการศึกษา	-

	ตาจรรยาบรรณ วิชาชีพ			
3	มีความรู้ ความเข้าใจในหลักการ ทฤษฎี	1. ศึกษาเอกสารประกอบการสอนและบรรยาย 2. แก้โจทย์ปัญหาในชั้นเรียน 3. สนทนาซักถาม 4. ทำแบบฝึกหัดตามใบงาน	สัปดาห์ที่ 8	80%
4	มีความรู้ในสาขาอื่น ๆ เช่นคอมพิวเตอร์ ภาษาอังกฤษ	ให้นึกศึกษาแก้โจทย์ปัญหานอกเหนือจากที่ยกตัวอย่างในชั้นเรียน แล้วให้นึกศึกษานำเสนอผลงานในคาบถัดไป	ตลอดภาคการศึกษา	-
5	มีความสมารถในการวิเคราะห์สถานการที่ได้เรียนมา	1. มอบหมายงานให้ทำแล้วเสนอผลการศึกษา 2. อภิปรายภายในชั้นเรียน	ตลอดภาคการศึกษา	รวมอยู่ในแผนการประเมินข้อ 3 คือ80%
6	สามารถแก้ไขปัญหาได้โดยนำหลักการต่าง ๆ มาอ้างอิงอย่างมีเหตุผล	1. มอบหมายงานให้ทำแล้วเสนอผลการศึกษา 2. อภิปรายภายในชั้นเรียน	สัปดาห์ที่เรียนจบในแต่ละบท	-
7	มีทักษะภาคปฏิบัติตามที่ได้รับฝึกฝน	1. มอบหมายงานให้ทำแล้วเสนอผลการศึกษา 2. อภิปรายภายในชั้นเรียน	ตลอดภาคการศึกษา	10%
8	มีความรับผิดชอบต่องานที่ได้รับมอบหมาย	1. จัดให้มีการแลกเปลี่ยนความรู้ และข้อมูลระหว่างบุคคล 2. ทำแบบฝึกหัดตามที่ได้รับมอบหมาย	ตลอดภาคการศึกษา	สัดส่วนการประเมินรวมอยู่ในแผนการประเมินข้อ 3 คือ80%
9	มีความรู้ความเข้าใจในบทบาทหน้าที่ของตนเองอย่างต่อเนื่อง	1. จัดให้มีการแลกเปลี่ยนความรู้ และข้อมูลระหว่างบุคคล	ตลอดภาคการศึกษา	สัดส่วนการประเมินรวมอยู่ในแผนการประเมินข้อ 3 คือ80%
10	5.1 สามารถใช้เทคโนโลยีสารสนเทศ	1. มอบหมายงานให้ทำแล้วเสนอผลการศึกษา	ตลอดภาคการศึกษา	สัดส่วนการประเมินรวมอยู่ในแผนการ

	ในการเก็บข้อมูล นำเสนอและสามารถ เลือกรูปแบบการ นำเสนอที่เหมาะสม	2. อภิปรายภายในชั้นเรียน		ประเมินข้อ 3 คือ80%
เกณฑ์การประเมินผล				
81 % ขึ้นไป	ระดับคะแนน A		57 – 62 %	ระดับคะแนน C
75 – 80 %	ระดับคะแนน B+		51 – 56 %	ระดับคะแนน D+
69 – 74 %	ระดับคะแนน B		45 – 50 %	ระดับคะแนน D
63 – 68 %	ระดับคะแนน C+		ต่ำกว่า 44 %	ระดับคะแนน F

หมวดที่ 6 ทรัพยากรประกอบการเรียนการสอน

1. **ตำราและเอกสารหลัก**

กมล เอกไทยเจริญ. (2544). **แคลคูลัส 1.** กรุงเทพมหานคร : ไฮเอ็ดพับลิชชิ่ง.

คณาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยรามคำแหง. (2542). **แคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ 1.** พิมพ์ครั้งที่ 8 กรุงเทพมหานคร : มหาวิทยาลัยรามคำแหง.

คณาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น. (2539). **แคลคูลัส 2.** พิมพ์ครั้งที่ 3 ขอนแก่น : มหาวิยาลัยขอนแก่น.

จันทนีย์ กาญจนะโรจน์ และชุลี โชติกประคัลภ์. (2557). **แคลคูลัส 1.** พิมพ์ครั้งที่ 4 กรุงเทพมหานคร : คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยกรุงเทพ.

ชัยสงคราม เครือหงส์. (2544). **เอกสารประกอบการสอนรายวิชาแคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์1** สุราษฎร์ธานี : มหาวิทยาลัยราชภัฏสุราษฎร์ธานี.

ธีระศักดิ์ อุรัจนานนท์. (2548). **อินทิกรัล.** กรุงเทพมหานคร : สกายบุ๊กส์.

เฟื่องฟ้า ศรีจันทพงศ์ และคณะ. (2553). **แคลคูลัส 1.** พิมพ์ครั้งที่ 5 ขอนแก่น : ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิยาลัยขอนแก่น.

วชิรารักษ์ โอรสรัมย์. (2558). **คณิตศาสตร์สำหรับวิทยาศาสร์1** บุรีรัมย์ : ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัยราชภัฏบุรีรัมย์

สุกัญญา สนิทวงศ์ ณ อยุธยา และอนัญญา อภิชาตบุตร. (2551). **แคลคูลัส 2.** กรุงเทพมหานคร : ไฮเอ็ดพับลิชชิ่ง.

สุรวิทย์ ตันแต่งผล และอนุสรณ์ ชนวีรยุทธ. (2557). **แคลคูลัส 1.** กรุงเทพมหานคร : จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

อัจฉรา ปาจีนบูรวรรณ์. (2555). **แคลคูลัส 1.** กรุงเทพมหานคร : ภาควิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์.

อุบล กลองกระโทก. (2549). **เอกสารคำสอนคณิตศาสตร์สำหรับวิทยาศาสตร์ 2.** กรุงเทพมหานคร : คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา.

Ross, F.L. Maurice,.W.D. and Frank, G.R. (2001). **Calculus with analytic geometry.** New Yok : Addison-wesley.

2. เอกสารและข้อมูลสำคัญ

2.1 www.google.co.th

2.2 ห้องสมุดมหาวิทยาลัยราชภัฏบุรีรัมย์

2.3 ห้องสมุดสาขาวิชาคณิตศาสตร์

3. เอกสารและข้อมูลแนะนำ

ไม่มี

4. ภารกิจอื่น ๆ ที่นำมาบูรณาการเข้ากับการเรียนการสอน

ไม่มี

4.1 ผลงานวิจัย

4.2 งานบริการวิชาการ

ไม่มี

4.3 งานทำนุบำรุงศิลปวัฒนธรรม

ไม่มี

5. ทรัพยากรหรือวิธีการใช้ในการพัฒนาทักษะภาษาอังกฤษของนักศึกษา

ไม่มี

6. การบรรยายโดยผู้มีประสบการณ์ทางวิชาการหรือวิชาชีพจากหน่วยงานหรือชุมชนภายนอก

-

7. การดูงานนอกสถานที่ในรายวิชา

-

หมวดที่ 7 การประเมินและปรับปรุงการดำเนินการของรายวิชา

1. กลยุทธ์การประเมินประสิทธิผลของรายวิชาโดยนักศึกษา ใช้แบบประเมินผลการสอนของทางมหาวิทยาลัยโดยนักศึกษาเข้าไปประเมินในระบบ
2. กลยุทธ์การประเมินการสอน ใช้แบบประเมินผลการสอนของทางมหาวิทยาลัยโดยนักศึกษาเข้าไปประเมินในระบบ
3. การปรับปรุงการสอน ในการเรียนการสอนบูรณการร่วมกับ learning by doing (เรียนรู้และฝึกปฏิบัติไปด้วย) โดยให้ผู้เรียนพยายาม ค้นคว้าแบบฝึกหัดจากแหล่งอื่นเพิ่มเติม
4. การทวนสอบมาตรฐานผลสัมฤทธิ์รายวิชาของนักศึกษา มีการวัดผลคะแนนตามที่ระบุไว้ในแผนการประเมินผลการเรียนรู้ และเมื่อสิ้นสุดภาคการศึกษามีการประเมินความสอดคล้องของเนื้อหาที่สอนกับแบบทดสอบโดยนักศึกษาทุกรายวิชา
5. การดำเนินการทบทวนและการวางแผนปรับปรุงประสิทธิผลของรายวิชา นำข้อเสนอแนะของนักศึกษามาพิจารณาและคิดแนวทางในการปรับปรุงปีการศึกษาต่อไป

แผนบริหารการสอนประจำบทที่ 1

เนื้อหาประจำบท

1. เซต
2. ระบบจำนวนจริง
3. การไม่เท่ากันในระบบจำนวน
4. อสมการ
5. ช่วงและการแก้อสมการ
6. ค่าสัมบูรณ์
7. ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน

วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม

1. เขียนเซตได้ทั้งแบบแจกแจงสมาชิกและแบบบอกเงื่อนไข
2. บอกนิยามและเขียนสัญลักษณ์ของสับเซตได้
3. ดำเนินการกับเซตโดยใช้ตัวดำเนินการที่กำหนดได้
4. บอกความหมายของจำนวนต่าง ๆ ได้
5. สามารถดำเนินการต่าง ๆ ตามสมบัติทางพีชคณิตของจำนวนจริง
6. บอกความหมายของอสมการได้
7. แก้อสมการรูปแบบต่าง ๆ ได้
8. ให้ความหมายค่าสัมบูรณ์ของจำนวนจริงได้
9. แก้สมการและอสมการค่าสมบูรณ์ได้
10. ให้ความหมายของผลคูณคาร์ทีเซียน
11. สามารถสร้างความสัมพันธ์ในรูปแบบที่กำหนดให้
12. หาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ได้
13. ให้นิยามของความสัมพันธ์ผกผันได้
14. ให้นิยามของฟังก์ชันพร้อมทั้งหาโดเมนและเรจน์ของฟังก์ชันได้
15. สามารถบอกชนิดของฟังก์ชันได้
16. ดำเนินการหาฟังก์ชันก์ชันผกผันได้
17. ดำเนินการสร้างฟังก์ชันประกอบได้

วิธีการสอนและกิจกรรมการเรียนการสอนประจำบท

1. ผู้สอนบรรยายหัวข้อต่อไปนี้พร้อมเปิดโอกาสให้ซักถาม
   1.1 เซต
   1.2 ระบบจำนวนจริง
   1.3 การไม่เท่ากันในระบบจำนวน
   1.4 อสมการ
   1.5 ช่วงและการแก้อสมการ
   1.6 ค่าสัมบูรณ์
   1.7 ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน
   1.8 อสมการ
   1.9 ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนจริง
   1.10 ความสัมพันธ์ และฟังก์ชัน

2. ให้นักศึกษาทำกิจกรรมต่อไปนี้
   2.1. ศึกษาข้อมูลจาก เกี่ยวกับเรื่องลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชันเพิ่มเติม
   2.2. ทำแบบฝึกหัดที่กำหนดให้

สื่อการเรียนการสอน

1. เอกสารประกอบการสอนและตำราต่าง ๆ
2. Slide Presentation

การวัดผลและการประเมินผล

1. สังเกตความสนใจของนักศึกษาขณะสอน ความตั้งใจ การฟัง การจดบันทึก และการซักถาม
2. แบบฝึกหัด
3. แบบทดสอบ
4. การมีส่วนร่วมในกิจกรรมการเรียนการสอน

บทที่ 1

ความรู้พื้นฐาน

ในการเรียนการสอนรายวิชาคณิตศาสตร์สำหรับวิทยาศาสตร์ 1 นั้นก่อนอื่นผู้เรียนจะต้องมีความรู้พื้นฐานในเรื่องต่าง ๆ ได้แก่เรื่องเซต โดยที่เซตนั้นใช้แทนกลุ่มของสิงต่าง ๆ ที่สามารถกำหนดสมาชิกได้อย่างชัดเจน เช่นเซตของจำนวนตรรกยะ และเซตของจำนวนอตกรรยะ และเมื่อนำเซตทั้งสองเซตนี้มารวมกันจะได้เซตของจำนวนจริง และผู้เรียนจะได้ศึกษาในเรื่องระบบจำนวนจริง สำหรับการเท่ากันในระบบจำนวนนั้นทำให้เกิดสมการในรูปแบบต่าง ๆ การหาผลเฉลยของสมการ ส่วนการไม่เท่ากันในระบบจำนวนนั้นทำให้เกิดอสมการรูปแบบต่าง ๆ โดยผู้เรียนจะได้ศึกษาความหมาย ของคำว่ามากกว่า น้อยกว่า ซึ่งจะเป็นพื้นฐานในการแก้อสมการ การแก้ปัญหาค่าสัมบูรณ์ และเรื่องสุดท้ายที่ผู้เรียนจะได้ศึกษาคือเรื่องความสัมพันธ์และฟังก์ชัน โดยเนื้อหาที่กล่าวมาข้างต้นนั้นเป็นเรื่องที่นักศึกษาทุกคนได้เคยเรียนผ่านมาแล้วในระดับมัธยมศึกษา ดังนั้นรายละเอียดเนื้อหาในบทนี้จะเป็นเพียงการทบทวนความรู้ในเรื่องต่าง ๆ ที่จำเป็นใน การเรียนการสอนรายวิชาคณิตศาสตร์สำหรับวิทยาศาสตร์ 1เท่านั้น เพื่อให้ผู้เรียนได้เข้าใจได้ดียิ่งขึ้น

1.1 เซต

เซตเป็นคำหนึ่งซึ่งในทางคณิตศาสตร์กำหนดว่าเป็นคำอนิยาม จะใช้เซตเมื่อเราต้องการแบ่งว่าสิ่งต่าง ๆ เหล่านั้นอยู่รวมกันเป็นหมวดหมู่ เป็นกลุ่ม ฯลฯ เซตที่เรานำมาศึกษาจะต้องเป็นเซตที่ทราบแน่นอนว่าสิ่งใดอยู่ในกลุ่มหรือไม่อยู่ในกลุ่ม สิ่งที่อยู่ในกลุ่มเรียกว่า สมาชิกของเซต ซึ่งในแต่ละเซต จะมีสมาชิกหรือไม่มีสมาชิกก็ได้ และถ้าเซตนั้นมีสมาชิกแล้วอาจจะมีสมาชิกที่มากมายแบบนับไม่ถ้วนหรือมีจำนวนสมาชิกที่ไม่มากสามารถนับได้ ก็ได้เช่นกัน (Combe, H.J., 1971 : 31)

ตัวอย่างเซต เช่น

1. เซตของจำนวนเต็มบวกที่มากกว่า 5

เซตนี้มีสมาชิกมากมายนับไม่ถ้วนได้แก่ 6, 7, 8, 9, ...

2. เซตของจำนวนเต็มที่อยู่ระหว่าง 3 และ6

เซตนี้มีสมาชิกอยู่ 2 ตัว ได้แก่ 4, 5

3. เซตของจำนวนเต็มบวกที่น้อยกว่า 100

เซตนี้มีสามาชิกอยู่ทั้งหมด 99 ตัว ได้แก่ 1, 2, 3, 4, ... ,99

4. เซตของจำนวนเต็มลบที่มากกว่า -1

เซตนี้ไม่มีสมาชิกอยู่เลย

เพื่อความสะดวกนั้นจะแทนเซตด้วยอักษรภาษาอังกฤษตัวพิมพ์ใหญ่ $A,B,C,\ldots$ และสมาชิกของเซตแทนด้วยอักษรภาษาอังกฤษตัวพิมพ์เล็ก $a,b,c,\ldots$

ถ้า x เป็นสมาชิกของเซต A แทนด้วย $x \in A$ และถ้า x ไม่เป็นสมาชิกของเซต A แทนด้วย $x \notin A$

1.1.1 การเขียนเซต

การเขียนเซตนั้นมีวิธีการเขียน 2 แบบดังต่อไปนี้ (ดวงใจ ลิ้มอำไพ, 2544 : 2)

1) แบบแจกแจงสมาชิก คือเขียนสมาชิกทุกตัวของเซตในวงเล็บปีกกาและคั่นระหว่างสมาชิกด้วยเครื่องหมายจุลภาค

เช่น A คือเซตของจำนวนเต็มคี่ที่มีค่าตั้งแต่ 3 ถึง 6

ดังนั้น $A = \{3,5\}$

กรณีที่เขียนสมาชิกจำนวนไม่มาก ไม่สะดวกในการเขียนอาจเขียนโดยละสมาชิก ซึ่งเราต้องทราบว่าสมาชิกตัวต่อไปเป็นอะไร

เช่น B คือเซตของจำนวนเต็มบวกที่น้อยกว่า 100

ดังนั้น $B = \{1,2,3,4,\ldots,99\}$

เพราะเราทราบว่าสมาชิกตัวถัดไปที่ต่อจาก 4 คือ 5 ต่อจาก 5 คือ 6 ไปเรื่อย ๆ จนถึงตัวสุดท้ายคือ 99

เช่น C คือเซตของจำนวนเต็มบวกที่มากกว่า 5

ดังนั้น $C = \{6,7,8,9,\ldots\}$

เช่นเดียวกันกับเซต B เพราะเราทราบว่าสมาชิกตัวถัดไปที่ต่อจาก 9 คือ 10 ต่อจาก 10 คือ 11 ไปเรื่อย ๆ

2) แบบกำหนดเงื่อนไขสมาชิก เขียนโดยกำหนดตัวแปรแทนสมาชิกทุกตัวและอาศัยสมบัติที่สมาชิกของเซตทุกตัวมีร่วมกันให้อยู่ในรูป $\{x : P(x)\}$ โดยที่ x เป็นตัวแปรที่เป็นสมาชิก และมีคุณสมบัติ $P(x)$ ร่วมกันอยู่ส่วนเครื่องหมาย :ใช้แทนคำว่า **ซึ่ง** โดยการกำหนดเซตใดเซตหนึ่งขึ้นนั้นจะต้องตกลงกันว่า ในการกล่าวถึงสมาชิกของเซตใด ๆ จะไม่กล่าวถึงสิ่งอื่น ๆ นอกจากสมาชิกของเซตที่กำหนดขึ้น และเรียกว่า **เอกภพสัมพัทธ์** (ราชบัณฑิตยสถาน, 2553 : 255)

บทนิยาม 1.1

เอกภพสัมพัทธ์ คือ เซตที่กำหนดให้โดยมีข้อตกลงว่าจะไม่กล่าวถึงสิ่งใดนอกเหนือไปจากสมาชิกของเซตที่กำหนดให้

ตัวอย่างเอกภพสัมพัทธ์

เซตของจำนวนธรรมชาติ หรือจำนวนนับคือ $N = \{1,2,3,\ldots\}$

เซตของจำนวนเต็มคือ $I = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$

เซตของจำนวนเต็มศูนย์คือ $I^0 = \{0\}$

เซตของจำนวนเต็มบวกคือ $I^+ = \{1, 2, 3, ...\}$

เซตของจำนวนเต็มลบคือ $I^- = \{..., -3, -2, -1\}$

เซตของจำนวนตรรกยะแทนด้วย Q เป็นจำนวนที่เขียนได้ในรูปเศษส่วน $\frac{p}{q}$ โดยที่ p และ q เป็นจำนวนเต็มที่ $q \neq 0$

เซตของจำนวนอตรรกยะคือจำนวนที่ไม่ใช่จำนวนตรรกยะแทนด้วย Q'

เซตของจำนวนจริง คือผลผนวกของจำนวนตรรกยะ และจำนวนอตรรกยะ เขียนแทนเซตจำนวนจริงด้วย R

เมื่อเรามีเอกภพสัมพัทธ์แล้วเราสามารถนำมาเขียนแบบกำหนดเงื่อนไขสมาชิกได้ดังนี้

เช่น B คือเซตของจำนวนเต็มบวกที่น้อยกว่า 100

ดังนั้น $B = \{x : x$ เป็นจำนวนเต็มบวกที่น้อยกว่า $100\}$

หรือ $B = \{x : x \in \mathrm{I}^+$ และ $x < 10\}$

1.1.2 ชนิดของเซต

การพิจารณาสมาชิกของเซตเป็นหลักเราแบ่งเซตออกได้ดังนี้ (ประเสริฐ ภู่เงิน, 2538 : 5-6)

1) เซตจำกัด คือเซตที่สามารถบอกได้ว่าเซตนั้นมีจำนวนสมาชิกเท่าใด จำนวนสมาชิกของเซตจำกัดอาจเป็นศูนย์หรือเป็นจำนวนเต็มบวก เช่น

$A = \{3, 5, 7\}$ เซต A มีจำนวนสมาชิก 3 ตัว

$B = \{1, 2, 3, 4, \ldots, 99\}$ เซต B มีจำนวนสมาชิก 99 ตัว

$C = \{x : x \in \mathrm{I}^+$ และ $x < 10\}$ เซต C มีจำนวนสมาชิก 9 ตัว

$D = \{x : x \in \mathrm{I}^+$ และ $x < 1\}$ เซต D มีจำนวนสมาชิก 0 ตัว

2) เซตอนันต์ คือเซตที่ไม่ใช่เซตจำกัด หมายถึงเซตที่ไม่สามารถบอกได้ว่ามีสมาชิกเป็นจำนวนเท่าใด เช่น

$A = \{3, 5, 7, ...\}$

$A = \{1, 2, 3, 4, ...\}$

$C = \{x : x \in R$ และ $x < 10\}$

3) เซตว่าง คือเซตที่ไม่มีสมาชิก หรือจำนวนสมาชิกเท่ากับศูนย์ ใช้สัญลักษณ์ $\{\}$ หรือ $\varnothing$

$A = \{\}$ เซต A มีจำนวนสมาชิก 0 ตัว

$B = \left\{x : x \in \mathrm{I}^+ \text{ และ } x < 1\right\}$ เซต B มีจำนวนสมาชิก 0 ตัว

จะเห็นว่าเซตว่างนั้นจะเป็นเซตจำกัดด้วย

4) เอกภพสัมพัทธ์ คือเซตซึ่งทุก ๆ เซตที่จะศึกษาหรือพิจารณาอยู่นั้นถ้าไม่ใช่เซตว่างแล้ว สมาชิกทุกตัวต้องเป็นสมาชิกที่อยู่ในเอกภพสัมพัทธ์ทั้งหมด โดยใช้สัญลักษณ์ U แทนเอกภพสัมพัทธ์

1.1.3 ความสัมพันธ์ระหว่างเซต

ความสัมพันธ์ระหว่างเซตมีความสัมพันธ์ดังนี้ (ปิยรัตน์ จาตุรันตบุตร., 2547 : 86-88)

1) เซตย่อย

บทนิยาม 1.2

เซต A เป็น**เซตย่อย**ของเซต B ก็ต่อเมื่อสมาชิกทุกตัวของเซต A เป็นสมาชิกของเซต B เขียนแทนด้วย $A \subseteq B$

ตัวอย่าง 1.1 กำหนดให้ $A = \{2,3,5\}$

$B = \left\{1,2,3,4,5,6\right\}$

ดังนั้น $A \subseteq B$

2) เซตย่อยแท้

บทนิยาม 1.3

เซต A เป็น**เซตย่อยแท้**ของเซต B ก็ต่อเมื่อสมาชิกทุกตัวของเซต A เป็นสมาชิกของเซต B และมีสมาชิกบางตัวของเซต B ไม่เป็นสมาชิกของเซต A เขียนแทนด้วย $A \subset B$

ตัวอย่าง 1.2 กำหนดให้ $A = \left\{2,3,5\right\}$

$B = \left\{2,3,5\right\}$

$C = \left\{1,2,3,4,5,6\right\}$

ดังนั้น $A \subseteq B$, $B \subseteq A$, $A \subset C$ และ $B \subset C$

แต่ $C \not\subset A$ (หมายถึง C ไม่เป็นสับเซตแท้ของ A) และ $C \not\subset B$

3) การเท่ากันของเซต

บทนิยาม 1.4

เซต A **เท่ากับเซต** B ก็ต่อเมื่อ $A \subseteq B$ และ $B \subseteq A$ เขียนแทนด้วย $A = B$

ตัวอย่าง 1.3 กำหนดให้ $A = \{2,3,5\}$

$B = \{2,3,5\}$

$C = \{1,2,3,4,5,6\}$

เนื่องจาก $A \subseteq B, B \subseteq A$ ดังนั้น $A = B$

เนื่องจาก $C \not\subset A$ ดังนั้น $A \neq C$

4) เซตกำลัง

บทนิยาม 1.5

กำหนดให้ A เป็นเซตใด ๆ **เซตกำลัง**ของ A คือเซตที่ประกอบด้วยทุกเซตที่เป็นเซตย่อยของ A เขียนแทนด้วย $P(A)$

ตัวอย่าง 1.4 กำหนดให้ $A = \varnothing$

เซตย่อยของ A มีเพียงเซตเดียว คือ $\varnothing$ ดังนั้น $P(A) = \{\varnothing\}$

ตัวอย่าง 1.5 กำหนดให้ $A = \{1,2,3\}$

เซตย่อยของ A คือ $\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}$ และ $\{1,2,3\}$

ดังนั้น $P(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$

ข้อสังเกต 1.1

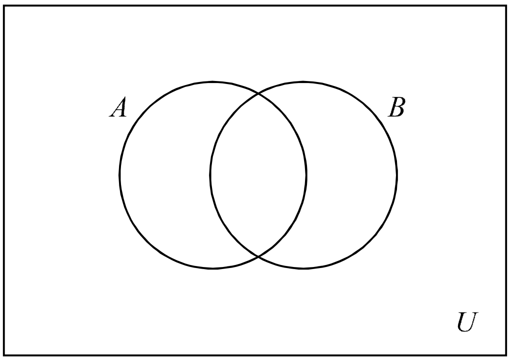
ถ้า $n(A)$ เป็นจำนวนสมาชิกของเซตจำกัด A ดังนั้นจำนวนเซตย่อยของ A เท่ากับ $2^{n(A)}$ เช่น จากตัวอย่าง 1.5 $A = \{1,2,3\}$ จำนวนสมาชิกของเซตกำลังของ A เท่ากับ $2^3 = 8$ แสดงว่า $P(A)$ มีสมาชิก 8 ตัว

1.1.4 แผนภาพเวนน์ – ออยเลอร์

แผนภาพเวนน์ – ออยเลอร์ เป็นแผนภาพที่เขียนแสดงความสัมพันธ์ระหว่างเซต ออยเลอร์ เลอนฮาร์ด (Euler Leonhard) นักคณิตศาสตร์ชาวสวิตเซอร์แลนด์เป็นผู้นำมาใช้เป็นครั้งแรก และ

ต่อมามีนักคณิตศาสตร์ชาวอังกฤษชื่อ เวนน์ จอห์น (Venn John) ได้นำมาใช้อธิบายแนวคิดต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์ (ศุภกิจ เฉลิมวิสุตม์กุล, 2553 : 63)

การเขียนแผนภาพแสดงความสัมพันธ์ระหว่างเซต จะใช้รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าแทนเอกภพสัมพัทธ์ ใช้วงกลม แทนเซตที่เรากล่าวถึงดังภาพ



ภาพประกอบ 1.1 แผนภาพแสดงความสัมพันธ์ระหว่างเซต
ที่มา : กานดา ลือสุทธิวิบูลย์ และยุพิน จิรสุขานนท์. 2549 : 13

จากภาพประกอบ 1.1 ให้ U เป็นเซตของนักศึกษาคณะวิทยาศาสตร์ A และ B เป็นเซตของนักศึกษาที่เรียนสาขาวิชาคณิตศาสตร์และสาขาวิชาฟิสิกส์ตามลำดับ จะเห็นว่าเซต A และ B ต่างเป็นเซตย่อยของ U

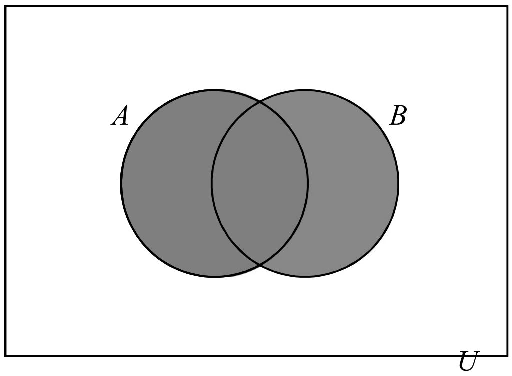
1.1.5 การดำเนินงานบนเซต

การดำเนินการของเซต มีการดำเนินการ 4 แบบ ดังนี้ (วิรุฬห์ บุญสมบัติ, 2534 : 41-45)

1) ยูเนียน

บทนิยาม 1.6

ยูเนียนของเซต A และเซต B คือเซตที่ประกอบด้วยสมาชิกที่อยู่ในเซต A หรืออยู่ในเซต B เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $A \cup B$



ภาพประกอบ 1.2 แผนภาพแสดงส่วนที่แรเงา $A \cup B$

ที่มา : กานดา ลือสุทธิวิบูลย์ และยุพิน จิรสุขานนท์. 2549 : 14

ตัวอย่าง 1.6 กำหนดให้ $A = \{2,3,5\}$

$B = \{3,5\}$

$C = \{4,5,6\}$

จะได้ $A \cup B = \{2,3,5\}$

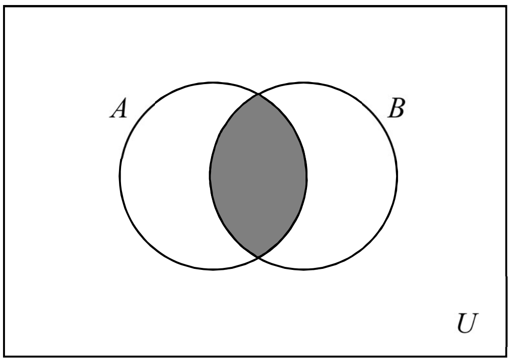
$A \cup C = \{2,3,4,5,6\}$

$B \cup C = \{3,4,5,6\}$

2) อินเตอร์เซกชัน

บทนิยาม 1.7

อินเตอร์เซกชันของเซต A และเซต B คือเซตที่ประกอบด้วยสมาชิกที่อยู่ในเซต A และอยู่ในเซต B เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $A \cap B$



ภาพประกอบ 1.3 แผนภาพแสดงส่วนที่แรเงา $A \cap B$

ที่มา : กานดา ลือสุทธิวิบูลย์ และยุพิน จิรสุขานนท์. 2549 : 14

ตัวอย่าง 1.7 กำหนดให้ $A = \{2,3,5\}$

$B = \{3,5\}$

$C = \{4,5,6\}$

จะได้ $A \cap B = \{3,5\}$

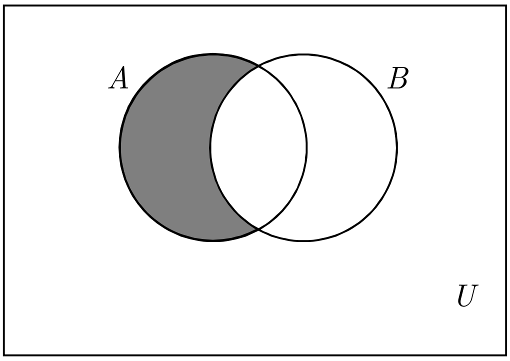
$A \cap C = \{5\}$

$B \cap C = \{5\}$

3) ผลต่าง

บทนิยาม 1.8

ผลต่างของเซต A และเซต B คือเซตที่ประกอบด้วยสมาชิกที่อยู่ในเซต A แต่ไม่อยู่ในเซต B เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $A - B$



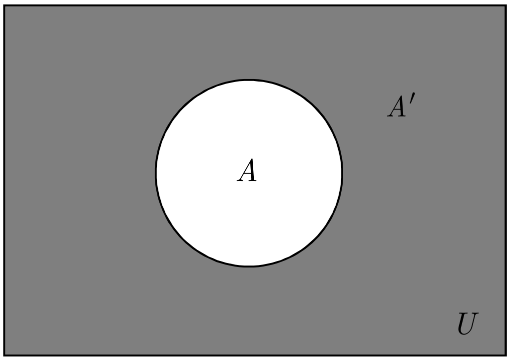
ภาพประกอบ 1.4 แผนภาพแสดงส่วนที่แรเงา $A - B$

ที่มา : กานดา ลือสุทธิวิบูลย์ และยุพิน จิรสุขานนท์. 2549 : 15

4) ส่วนเติมเต็ม

บทนิยาม 1.9

ส่วนเติมเต็มของเซต A คือเซตที่มีสมาชิกที่อยู่ใน U แต่ไม่อยู่ในเซต A เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ A'



ภาพประกอบ 1.5 แผนภาพแสดงส่วนที่แรเงา A'

ที่มา : กานดา ลือสุทธิวิบูลย์ และยุพิน จิรสุขานนท์. 2549 : 15

ตัวอย่าง 1.8 กำหนดให้ $U = \{1,2,3,4,5,6\}$

$A = \{3,5\}$

$B = \{4,5,6\}$

จะได้ $A' = \{1,2,4,6\}$

$B' = \{1,2,3\}$

1.1.6 พีชคณิตของเซต

กำหนด A, B และ C เป็นเซตใด ๆ (วิรุฬห์ บุญสมบัติ, 2534 : 50-51)

1. กฎนิจพล

$$A \cup A = A$$
$$A \cup \varnothing = A$$
$$A \cup U = U$$
$$A \cap A = A$$
$$A \cap \varnothing = \varnothing$$
$$A \cap U = A$$

2. กฎการเปลี่ยนกลุ่ม

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

3. กฎการสลับที่

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

4. กฎการกระจาย

$$A \cap \left(B \cup C\right) = \left(A \cap B\right) \cup \left(A \cap C\right)$$
$$A \cup \left(B \cap C\right) = \left(A \cup B\right) \cap \left(A \cup C\right)$$

5. กฎเอกลักษณ์

$$A \cap U = A$$

$$A \cup \varnothing = A$$

6. กฎส่วนเติมเต็ม

$$A \cup A' = U$$

$$A \cap A' = \varnothing$$

7. กฎเดอมอร์แกน

$$\left(A \cap B\right)' = A' \cup B'$$
$$\left(A \cup B\right) = A' \cap B'$$

1.2 ระบบจำนวนจริง

มนุษย์มีความคิดเกี่ยวกับจำนวนมาตั้งแต่สมัยดึกดำบรรพ์และจำนวนที่มนุษย์คิดขึ้นเป็นครั้งแรกคือจำนวนนับ ซึ่งจำนวนนับประกอบด้วย $1, 2, 3, \ldots$ ใช้ N แทนเซตของจำนวนนับ ดังนั้น

$$N = \left\{1, 2, 3, \ldots\right\}$$

ต่อมามนุษย์รู้จักจำนวนนับมาบวก ลบ และคูณกัน สำหรับการบวกและการคูณจะไม่มีปัญหาสำหรับจำนวนนับ แต่เมื่อมนุษย์ต้องการหาค่า x จากสมการ $x + 7 = 5$ ทำให้ไม่สามารถหาค่า x ได้จึงคิดจำนวนเต็มขึ้นมาและใช้ I แทนเซตของจำนวนเต็มจะได้

$$I = \left\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\right\}$$

ดังนั้น $N \subset I$ ถึงแม้ว่าจะได้มีการคิดจำนวนเต็มขึ้นมาแล้ว แต่มนุษย์ก็ไม่สามารถหาค่า x จาก $2x = 5$ ได้จึงได้คิดจำนวนตรรกยะขึ้นมา ใช้ Q แทนเซตของตำนวนตรรกยะจะได้

$Q=\left\{x : x=\dfrac{p}{q}\ \text{เมื่อ}\ p,q \in I\ \text{และ}\ q \neq 0\right\}$

จำนวนตรรกยะจึงประกอบไปด้วย

จำนวนเต็ม ได้แก่ $\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots$ ดังนั้น $I \subset Q$

จำนวนตรรกยะที่ไม่เป็นจำนวนเต็ม เช่น $\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{4},2\dfrac{7}{5}$

จำนวนที่เขียนอยู่ในรูปทศนิยมซ้ำ เช่น

$$1.75=1+0.75=1+\frac{75}{100}=\frac{100}{100}+\frac{75}{100}=\frac{175}{100}$$

$$1.3777\ldots=0.3\dot{7}=\frac{37-3}{90}=\frac{34}{90}=\frac{17}{45}$$

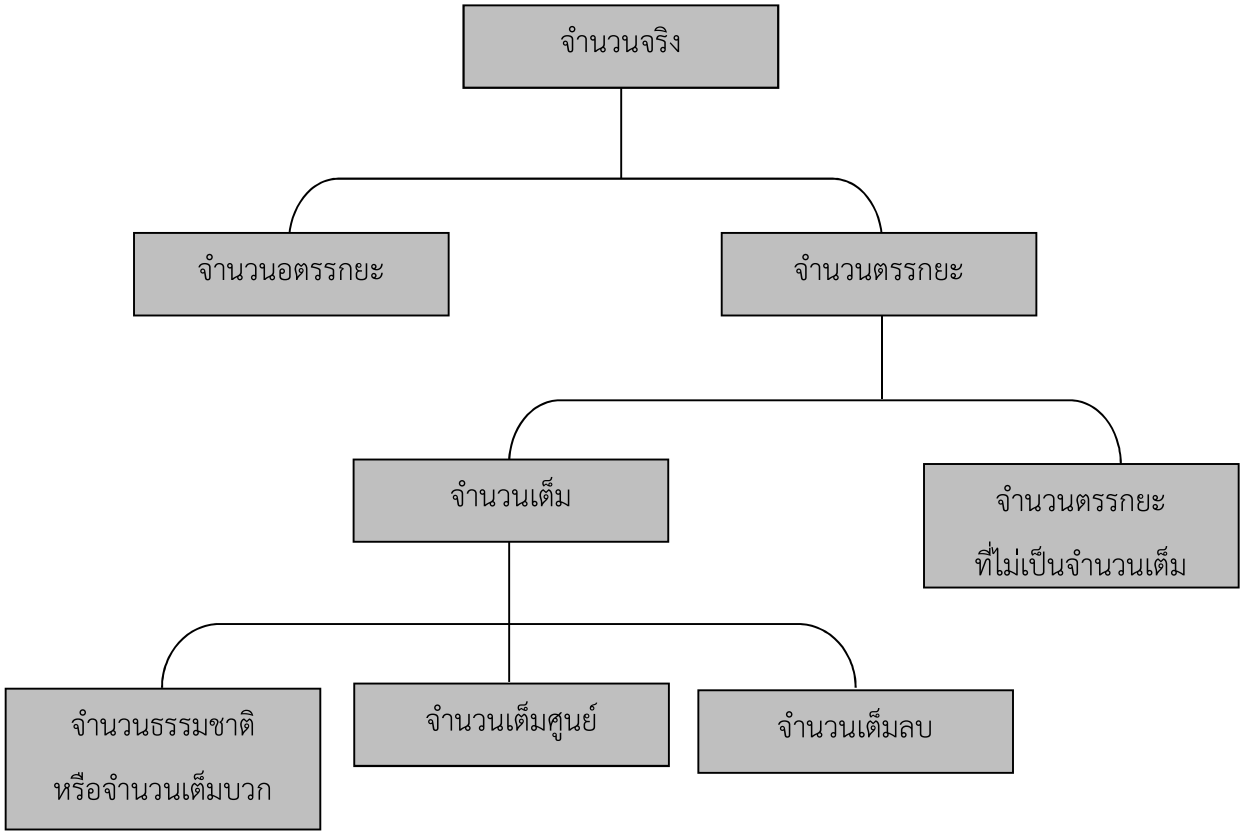
นอกจากจำนวนดังกล่าวข้างต้นแล้วมนุษย์ได้คิดจำนวนอีกชนิดหนึ่ง เพื่อจะได้สามารถหาคำตอบของ x จากสมการ $x^2=3$ คือจำนวนอตรรกยะ ต่อไปนี้เป็นตัวอย่างจำนวนอตรรกยะ $\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt[3]{5},0.1261523\ldots,1.4144414444\ldots$ เป็นต้น ใช้ Q' แทนเซตของจำนวนอตรรกยะ เมื่อนำเซตของจำนวนตรรกยะ และเซตของจำนวนอตรรกยะมายูเนียนกันจะได้เวตของจำนวนจริงนั่นคือ $Q \cup Q' = R$ (คณาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยรามคำแหง, 2542 : 15-16)

หมายเหตุ 1.1

1. จำนวนนับบางครั้งเรียกว่าจำนวนเต็มบวกใช้ I^+ แทนเซตของจำนวนเต็มบวก ดังนั้น $I^+ = N = \left\{1,2,3,\ldots\right\}$

2. เรียก $\ldots,-3,-2,-1$ ว่าจำนวนเต็มลบ ใช้ I^- แทนเซตของจำนวนเต็มลบ ดังนั้น $I^- = \left\{\ldots,-3,-2,-1\right\}$ และ $I^- \cup \left\{0\right\} \cup I^+ = I$

แผนผังแสดงความสัมพันธ์ของจำนวนชนิดต่าง ๆ



ภาพประกอบ 1.6 ภาพแสดงโครงสร้างของจำนวนจริง
ที่มา : ปิยรัตน์ จาตุรันตบุตร. 2547 : 177

1.2.1 การเท่ากันในระบบจำนวนจริง

การเท่ากันในระบบจำนวนจริงมีสมบัติดังต่อไปนี้ (เวชชัย สังข์สาย., 2536 : 103)

สมบัติการสะท้อน

สำหรับจำนวนจริง x ใด ๆ $x = x$

สมบัติการสมมาตร

สำหรับจำนวนจริง x, y ใด ๆ ถ้า $x = y$ แล้ว $y = x$

สมบัติการถ่ายทอด

สำหรับจำนวนจริง x, y, z ใด ๆ ถ้า $x = y$ และ $y = z$ แล้ว $x = z$

สมบัติการบวกด้วยจำนวนเท่ากัน

สำหรับจำนวนจริง x, y, z ใด ๆ ถ้า $x = y$ แล้ว $x + z = y + z$

สมบัติการคูณด้วยจำนวนเท่ากัน

สำหรับจำนวนจริง x, y, z ใด ๆ ถ้า $x = y$ แล้ว $xz = yz$

1.2.2 การบวกและการคูณจำนวนจริง

การบวกและการคูณจำนวนจริงนั้นจะได้กล่าวเป็นบทนิยามดังต่อไปนี้ (เวชชัย สังข์สาย, 2536 : 104-109)

1) การบวกจำนวนจริง

บทนิยาม 1.10

ในระบบจำนวนจริง เรียกจำนวนจริงที่บวกกับจำนวนใด ๆ ก็ตาม ได้ผลลัพธ์เป็นจำนวนจริงจำนวนนั้น ว่า **เอกลักษณ์การบวก**

นั่นคือถ้า z เป็นเอกลักษณ์การบวก และ a เป็นจำนวนจริงใด ๆ แล้ว $z + a = z = a + z$ ในระบบจำนวนจริงมีศูนย์เป็นเอกลักษณ์การบวก

บทนิยาม 1.11

ในระบบจำนวนจริง ตัว**ผกผันการบวก**ของจำนวนจริง a (ใช้แทนด้วยสัญลักษณ์ $-a$) หมายถึงจำนวนจริงที่บวกกับ a แล้วได้ศูนย์

นั่นคือ $a + (-a) = 0 = (-a) + a$

เช่น ตัวผกผันการบวกของ 5 คือ -5 เพราะ $5 + (-5) = 0 = (-5) + 5$

2) สมบัติของจำนวนจริงเกี่ยวกับการบวก

1. สมบัติปิดของการบวก

ถ้า x และ y เป็นจำนวนจริงแล้ว $x + y$ เป็นจำนวนจริงด้วย

2. สมบัติการเปลี่ยนหมู่ของการบวก

ถ้า x, y และ z เป็นจำนวนจริงแล้ว $\left(x + y\right) + z = x + \left(y + z\right)$

3. สมบัติการมีเอกลักษณ์การบวก

มีจำนวนจริง 0 ซึ่ง $x+0=0+x=x$ สำหรับจำนวนจริง x ทุกตัว

4. สมบัติการมีผกผันการบวก

สำหรับจำนวนจริง x แต่ละจำนวน จะมีจำนวนจริง $-x$ ซึ่ง

$x+(-x)=-x+x=0$

5. สมบัติการสลับที่ของการบวก

ถ้า x และ y เป็นจำนวนจริงแล้ว $x+y=y+x$

3) การคูณจำนวนจริง

บทนิยาม 1.12

ในระบบจำนวนจริง เรียกจำนวนจริงที่ไม่เป็นศูนย์ ซึ่งคูณกับจำนวนจริงใด ๆ ก็ตาม ได้ผลลัพธ์เป็นจำนวนจริงจำนวนนั้น ว่า **เอกลักษณ์การคูณ**

นั่นคือถ้า x เป็นเอกลักษณ์การคูณและ x ไม่เป็น 0 สำหรับจำนวนจริง a ใด ๆ แล้ว $xa=x=ax$ ในระบบจำนวนจริง 1 เป็นเอกลักษณ์การคูณ

บทนิยาม 1.13

ในระบบจำนวนจริง ตัว**ผกผันการคูณ**ของจำนวนจริง a ที่ไม่เท่ากับ 0 (ใช้แทนด้วยสัญลักษณ์ a^{-1}) หมายถึงจำนวนจริงที่คูณกับ a แล้วได้ 1

นั่นคือ $aa^{-1}=1=a^{-1}a$

เช่น ตัวผกผันการบวกของ 5 คือ $\frac{1}{5}$ เพราะ $5\left(\frac{1}{5}\right)=1=\left(\frac{1}{5}\right)5$

4) สมบัติของจำนวนจริงเกี่ยวกับการคูณ

1. สมบัติปิดของการคูณ

ถ้า x และ y เป็นจำนวนจริงแล้ว xy เป็นจำนวนจริงด้วย

2. สมบัติการเปลี่ยนหมู่ของการคูณ

ถ้า x, y และ z เป็นจำนวนจริงแล้ว $(xy)z = x(yz)$

3. สมบัติการมีเอกลักษณ์การคูณ

มีจำนวนจริง 1 ซึ่ง $1 \neq 0$ และ $1(x) = x = (x)1$ สำหรับจำนวนจริง x ทุกตัว

4. สมบัติการมีผกผันการคูณ

สำหรับจำนวนจริง x แต่ละจำนวนที่ไม่เท่ากับ 0 จะมีจำนวนจริง x^{-1} ซึ่ง $xx^{-1} = 1 = x^{-1}x$ (นิยมเขียนแทน x^{-1} ด้วย $\dfrac{1}{x}$)

5. สมบัติการสลับที่ของการคูณ

ถ้า x และ y เป็นจำนวนจริงแล้ว $xy = yx$

6. สมบัติการแจกแจงทางซ้าย

ถ้า x, y และ z เป็นจำนวนจริงแล้ว $x(y+z) = xy + xz$

นอกจากสมบัติของจำนวนจริง เกี่ยวกับการบวก และการคูณข้างต้นแล้ว ระบบจำนวนจริงยังมีระบบย่อย R^+ ซึ่ง $R^+ \subset R$ เพิ่มเติมดังต่อไปนี้

1. มีสับเซต R^+ ของเซตของจำนวนจริง R ซึ่งสำหรับสมาชิกทุกตัวของ R สมบัติต่อไปนี้จะเป็นจริงเพียงข้องเดียวเท่านั้น

1) x อยู่ใน R^+

2) x เท่ากับศูนย์

3) $-x$ อยู่ใน R^+

2. ถ้า x และ y อยู่ใน R^+ แล้ว $x + y$ อยู่ใน R^+

3. ถ้า x และ y อยู่ใน R^+ แล้ว xy อยู่ใน R^+

และจากสมบัติของจำนวนจริงเกี่ยวกับการบวกและการคูณทั้งหมดยังมีทฤษฎีบทที่สำคัญ ของจริงนวนจริงดังต่อไปนี้

5) ทฤษฎีบทของจำนวนจริงสำหรับการบวกและการคูณ

กำหนดให้ x, y, z และ a เป็นจำนวนจริง

1. ถ้า $x+z=y+z$ แล้ว $x=y$
2. ถ้า $z+x=z+y$ แล้ว $x=y$
3. ถ้า $x+a=a$ แล้ว $x=0$
4. ถ้า $a+x=a$ แล้ว $x=0$
5. ถ้า $x+a=0$ แล้ว $x=-a$
6. ถ้า $a+x=0$ แล้ว $x=-a$
7. $-\left(-x\right)=x$
8. $x0=0$ และ $0x=0$
9. ถ้า $xz=yz$ แล้ว $x=y$
10. ถ้า $zx=zy$ แล้ว $x=y$
11. ถ้า $xa=a$ โดยที่ $a \neq 0$ แล้ว $x=1$
12. ถ้า $ax=a$ โดยที่ $a \neq 0$ แล้ว $x=1$
13. ถ้า $xa=1$ แล้ว $x=a^{-1}$
14. ถ้า $ax=1$ แล้ว $x=a^{-1}$

15 ถ้า x เป็นจำนวนจริงซึ่งไม่เท่ากับศูนย์จะได้ว่า $\left(x^{-1}\right)^{-1}=x$

16. $\left(y+z\right)x=yx+zx$
17. $x\left(-y\right)=-\left(xy\right)$
18. $\left(-x\right)y=-\left(xy\right)$
19. $\left(-x\right)\left(-y\right)=xy$
20. ถ้า $xy=0$ แล้ว $x=0$ หรือ $y=0$

1.2.3 การลบและการหารจำนวนจริง

การลบและการหารจำนวนจริงนั้นจะได้กล่าวเป็นบทนิยามดังต่อไปนี้ (เวชชัย สังข์สาย, 2536 : 110)

บทนิยาม 1.14

เมื่อ x และ y เป็นจำนวนจริงใด ๆ $x-y=x+(-y)$

บทนิยาม 1.15 การหารจำนวนจริง

เมื่อ x และ y เป็นจำนวนจริงใด ๆที่ $y \neq 0\,,\dfrac{x}{y}=x(y^{-1})$

สมบัติของจำนวนจริงเกี่ยวกับการบวกและการคูณหมดที่ได้กล่าวมานั้นยังมีทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับการ ลบ และการหารจำนวนจริงดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบทของจำนวนจริงสำหรับการลบ และการหาร

กำหนดให้ w, x, y และ z เป็นจำนวนจริง

1. $w-x=y-z$ ก็ต่อเมื่อ $w+z=y+x$
2. ถ้า $x \neq 0, z \neq 0$ แล้ว $\dfrac{w}{x}=\dfrac{y}{z}$ ก็ต่อเมื่อ $wz=yx$ สำหรับ
3. ถ้า $x \neq 0, y \neq 0$ แล้ว $\left(xy\right)^{-1}=x^{-1}y^{-1}$
4. ถ้า $x \neq 0, z \neq 0$ แล้ว $\dfrac{w}{x}\cdot\dfrac{y}{z}=\dfrac{wy}{xz}$
5. ถ้า $x \neq 0, z \neq 0$ แล้ว $\dfrac{y}{x}\cdot\dfrac{z}{z}=\dfrac{y}{x}$
6. ถ้า $x \neq 0, y \neq 0$ แล้ว $\left(\dfrac{x}{y}\right)^{-1}=\dfrac{y}{x}$
7. ถ้า $x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$ แล้ว $\dfrac{\frac{w}{x}}{\frac{y}{z}}=\dfrac{wz}{xy}$
8. ถ้า $x \neq 0, z \neq 0$ แล้ว $\dfrac{w}{x}+\dfrac{y}{z}=\dfrac{wz+yx}{xz}$

1.3 การไม่เท่ากันในระบบจำนวน

สำหรับสมบัติของจำนวนจริงทั้งหมดที่กล่าวมาใช้เป็นพื้นฐานในการให้ความหมาย การบวก การลบ การคูณ การหาร เพื่อเป็นแนวทางในการแก้สมการตัวแปรเดียวนั้น สำหรับการให้ความหมาย “มากกว่า” หรือ “น้อยกว่า” ซึ่งเป็นพื้นฐานในการแก้อสมการดังนี้ (ปิยรัตน์ จาตุรันตบุตร, 2547 : 151-152)

มีระบบจำนวนจริงบวก (R^+) ซึ่ง $R^+ \subset R$ มีสมบัติเพิ่มเติมอีก 3 ประการคือ

1. $0 \notin R^+$ และถ้า $x \in R$ ที่ $x \neq 0$ แล้ว $x \in R^+$ หรือ $-x \in R^+$
2. ถ้า $x, y \in R^+$ แล้ว $x + y \in R^+$
2. ถ้า $x, y \in R^+$ แล้ว $xy \in R^+$

บทนิยาม 1.16

สมาชิกของ R^+ เรียกว่า **จำนวนบวก** และถ้า $-x \in R^+$ เรียก x ว่าจำนวนลบ

บทนิยาม 1.17

สำหรับจำนวนจริง x, y ใด ๆ

$x < y$ หมายความว่า $y - x \in R^+$

$x > y$ หมายความว่า $x - y \in R^+$

การเปรียบเทียบจำนวนจริงสองจำนวน

สมบัติไตรวิภาค ถ้า x, y เป็นจำนวนจริงแล้ว $x = y, x < y, x > y$ จะเป็นจริงเพียงอย่างใดอย่างหนึ่ง นอกจากสมบัติไตรวิภาคแล้วยังมีทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับการไม่เท่ากันในระบบจำนวนดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับการไม่เท่ากันในระบบจำนวน

กำหนดให้ x, y และ z เป็นจำนวนจริง

1. ถ้า $x > y$ และ $y > z$ แล้ว $x > z$
2. ถ้า $x > y$ และ $x + z > y + z$ เมื่อ z เป็นจำนวนใด ๆ
3. x เป็นจำนวนบวก ก็ต่อเมื่อ $x > 0$

4. x เป็นจำนวนลบ ก็ต่อเมื่อ $x < 0$

5. ถ้า $x > y$ และ $z > 0$ แล้ว $xz > yz$

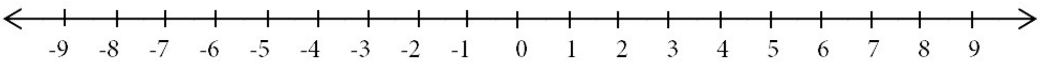
6. ถ้า $x > y$ และ $z < 0$ แล้ว $xz < yz$

7. ถ้า $xz > yz$ และ $z > 0$ แล้ว $x > y$

8. ถ้า $xz > yz$ และ $z < 0$ แล้ว $x < y$

1.4 ช่วงและการแก้อสมการ

ถ้าลากเส้นตรงเส้นหนึ่งแล้วเลือกจุดจุดหนึ่ง เรียกว่าจุด 0 ให้จุดนี้แทนจำนวนศูนย์เลือกหน่วยความยาวให้จุดทางขวาของ 0 อยู่ห่างจาก 0 เป็นระยะ $1, 2, 3, \ldots$ หน่วยแทนจำนวน $1, 2, 3, \ldots$ ตามลำดับ และให้จะดทางซ้ายของ0 อยู่ห่างจาก 0 เป็นระยะ $1, 2, 3, \ldots$ หน่วยแทนจำนวน $-1, -2, -3, \ldots$ ตามลำดับ (จำรัส อินสม และประทีป โรจนวิกาต, 2550 : 1-2)



ภาพประกอบ 1.7 แสดงเส้นจำนวนจริง
ที่มา : ปิยรัตน์ จาตุรันตบุตร. 2547 : 199

นักคณิตศาสตร์ถือว่า จำนวนจริงทุกจำนวนจะมีจุดบนเส้นตรงนี้จับคู่ด้วยเพียงจุดเดียว และในทางตรงกันข้ามทุกจุดบนเส้นตรงนี้จะจับคู่กับจำนวนจริงเพียงจำนวนเดียว และเรียกเส้นตรงในภาพประกอบ 1.7 ว่า **เส้นจำนวนจริง**

บทนิยาม 1.18

ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริงซึ่ง $a < b$ เขียนสัญลักษณ์ต่อไปนี้แทนสับเซตของ R

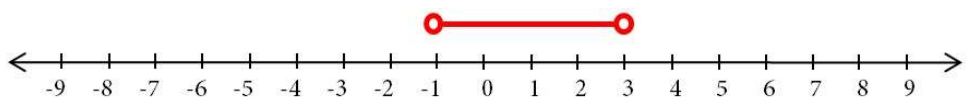
ช่วงเปิด (a,b)	หมายถึง	$\{x : a < x < b\}$
ช่วงปิด $[a,b]$	หมายถึง	$\{x : a \le x \le b\}$
ช่วงครึ่งเปิด $(a,b]$	หมายถึง	$\{x : a < x \le b\}$
ช่วงครึ่งปิด $[a,b)$	หมายถึง	$\{x : a \le x < b\}$

บทนิยาม 1.18 (ต่อ)

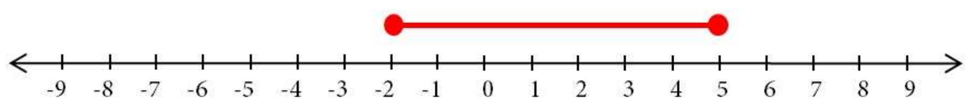
ช่วง $\left(a,\infty\right)$	หมายถึง	$\left\{x : x > a\right\}$
ช่วง $\left[a,\infty\right)$	หมายถึง	$\left\{x : x \geq a\right\}$
ช่วง $\left(-\infty,a\right)$	หมายถึง	$\left\{x : x < a\right\}$
ช่วง $\left(-\infty,a\right]$	หมายถึง	$\left\{x : x \leq a\right\}$
ช่วง $\left(-\infty,\infty\right)$	หมายถึง	เซตของจำนวนจริง

ตัวอย่างการเขียนกราฟบนเส้นจำนวนจริงแทนช่วง

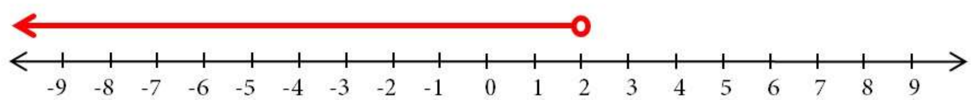
กราฟของช่วง $\left(-1,3\right)$ คือ



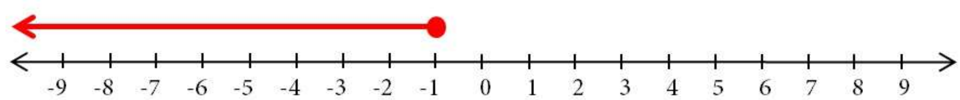
กราฟของช่วง $\left[-2,5\right]$ คือ



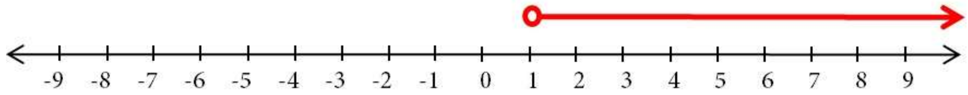
กราฟของช่วง $\left(-\infty,2\right)$ คือ



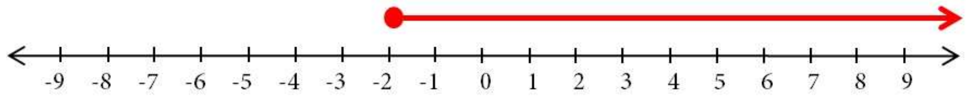
กราฟของช่วง $\left(-\infty,-1\right]$ คือ



กราฟของช่วง $\left(1,\infty\right)$ คือ

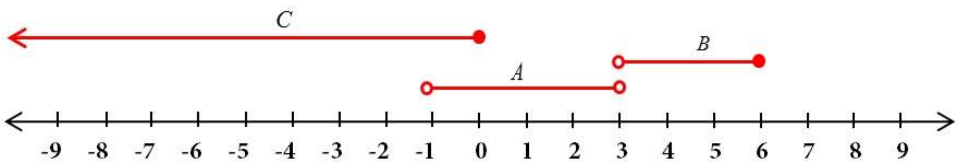


กราฟของช่วง $\left[1,\infty\right)$ คือ



ตัวอย่าง 1.9 กำหนด $A=\left(-1,3\right)$, $B=\left(3,6\right]$ และ $C=\left(-\infty,0\right]$
จงหาค่าของ $A\cap\left(B\cup C\right)$ และ $A-\left(B\cap C\right)$

วิธีทำ เส้นจำนวนจริงแสดงเซต A,B และ C ได้ดังนี้



จากรูป $A\cap\left(B\cup C\right)=\left(-1,0\right]$ และ $A-\left(B\cap C\right)=\left(-1,3\right)$

1.4.1 อสมการ

อสมการเป็นประโยคที่กล่าวถึงการไม่เท่ากันและมีตัวแปร ซึ่งอสมการเป็นจริงหรือเท็จขึ้นอยู่กับจำนวนจริงที่มาแทนตัวแปร (ปิยรัตน์ จาตุรันตบุตร, 2547 : 196-199)

เซตคำตอบของอสมการ เป็นเซตที่มีสามาชิกเป็นจำนวนจริงที่เมื่อนำจำนวนเหล่านี้มาแทนที่ตัวแปรแล้วทำให้สมการเป็นจำนวนจริง

การแก้อสมการ คือ การหาเซตคำตอบของอสมการ ซึ่งนิยมใช้สมบัติของการไม่เท่ากันในการแก้สมการ

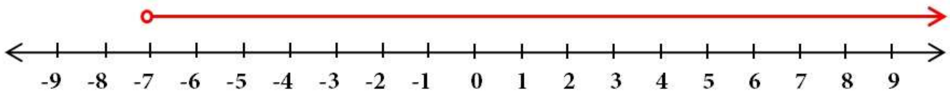
ตัวอย่าง 1.10 จงแก้อสมการ $\dfrac{x+4}{3} < 6 + x$

วิธีทำ

$$\frac{x+4}{3} < 6 + x$$
$$x + 4 < 18 + 3x$$
$$-2x < 14$$
$$2x > -14$$
$$x > -\frac{14}{2}$$
$$x > 7$$

ดังนั้น เซตของผลเฉลยคือ $\{x : x > -7\}$ หรือ $(-7, \infty)$

หรือแสดงบนเส้นจำนวนจริงได้ดังนี้



ตัวอย่าง 1.11 จงหาเซตคำตอบของอสมการ $x^2 + 4x \le 5$

วิธีทำ

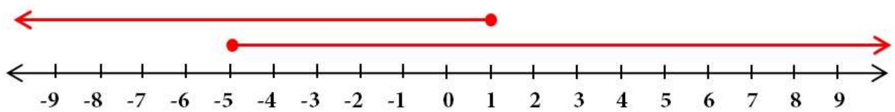
$$x^2 + 4x \le 5$$
$$x^2 + 4x \le 5$$
$$x^2 + 4x - 5 \le 0$$
$$(x+5)(x-1) \le 0$$

จาก $(x+5)(x-1) \le 0$ แสดงว่า $x + 5$ และ $x - 1$ ต้องมีเครื่องหมายตรงข้ามกัน หรือคูณกันเท่ากับ 0 จึงแยกออกเป็น 2 กรณีดังนี้

กรณีที่ 1 $x + 5 \ge 0$ และ $x - 1 \le 0$

$x \ge -5$ และ $x \le 1$

แสดงบนเส้นจำนวนได้ดังนี้

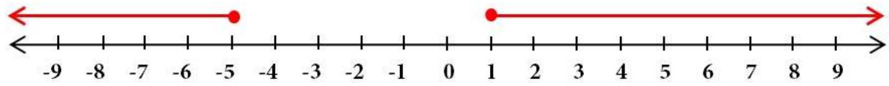


ผลเฉลยจากกรณีที่ 1 คือ $-5 \le x \le 1$

กรณีที่ 2 $x+5 \le 0$ และ $x-1 \ge 0$

$x \le -5$ และ $x \ge 1$

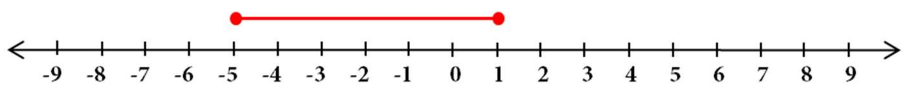
แสดงบนเส้นจำนวนได้ดังนี้



ผลเฉลยในกรณีที่ 2 คือไม่มีจำนวนจริง x ที่สอดคล้องกับอสมการ

ดังนั้น ผลเฉลยของอสมการ $x^2+4x \le 5$ คือ $-5 \le x \le 1$

หรือแสดงบนเส้นจำนวนได้ดังนี้



ตัวอย่าง 1.12 จงแก้อสมการ $x > \frac{1}{x}$

วิธีทำ จาก $x > \frac{1}{x}$

$$x - \frac{1}{x} > 0$$

$$\frac{x^2}{x} - \frac{1}{x} > 0$$

$$\frac{x^2-1}{x} > 0$$

$$\frac{x^2-1^2}{x} > 0$$

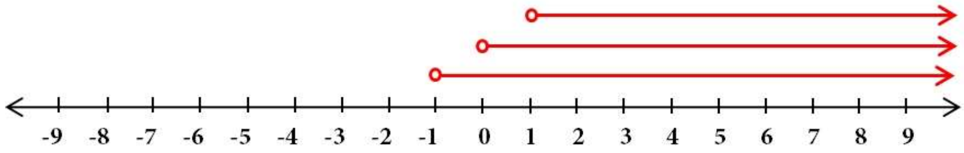
$$\frac{(x+1)(x-1)}{x} > 0$$

ดังนั้นอสมการ $\frac{(x+1)(x-1)}{x} > 0$ เป็นจริงได้จึงแยกออกเป็นกรณีทั้งหมด 4 กรณีดังนี้

กรณีที่ 1 $x+1>0$ และ $x-1>0$ และ $x>0$

จะได้ $x>-1$ และ $x>1$ และ $x>0$

แสดงบนเส้นจำนวนได้ดังนี้

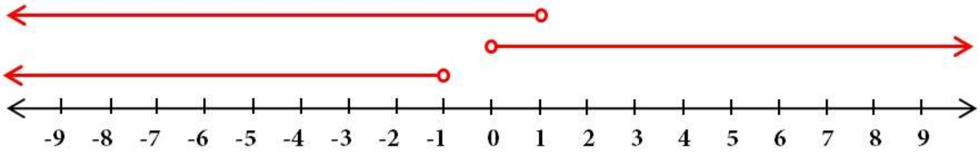


เซตของผลเฉลยจากกรณีที่ 1 คือ $\{x : x>1\}$ หรือ $(1,\infty)$

กรณีที่ 2 $x+1<0$ และ $x-1<0$ และ $x>0$

จะได้ $x<-1$ และ $x<1$ และ $x>0$

แสดงบนเส้นจำนวนได้ดังนี้

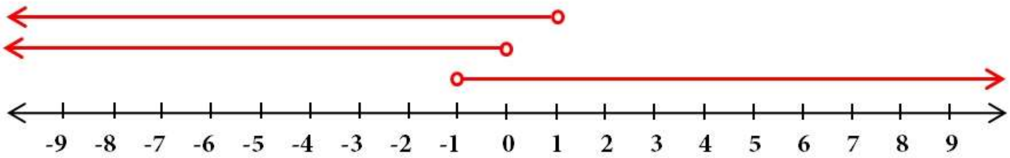


เซตของผลเฉลยในกรณีที่ 2 คือ $\{\ \}$ หมายถึงไม่มีจำนวนจริง x ที่สอดคล้องกับอสมการ

กรณีที่ 3 $x+1>0$ และ $x-1<0$ และ $x<0$

จะได้ $x>-1$ และ $x<1$ และ $x<0$

แสดงบนเส้นจำนวนได้ดังนี้

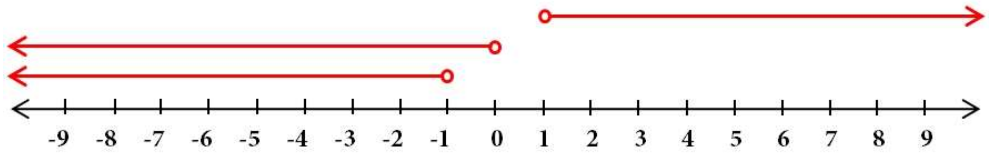


เซตของผลเฉลยจากกรณีที่ 3 คือ $\{x \mid -1<x<0\}$ หรือ $(-1,0)$

กรณีที่ 4 $x+1<0$ และ $x-1>0$ และ $x<0$

จะได้ $x < -1$ และ $x > 1$ และ $x < 0$

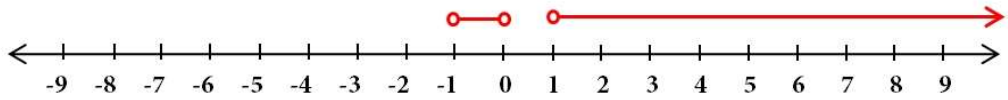
แสดงบนเส้นจำนวนได้ดังนี้



เซตของผลเฉลยในกรณีที่ 4 คือ $\{\ \}$ หมายถึงไม่มีจำนวนจริง x ที่สอดคล้องกับอสมการ

ดังนั้น จากทั้ง 4 กรณี จำนวนจริง x ที่ทำให้ $x > \dfrac{1}{x}$ เป็นจริงคือ $x > 1$ หรือ $-1 < x < 0$

แสดงบนเส้นจำนวนได้ดังนี้



1.5 ค่าสัมบูรณ์

ถ้า x เป็นจำนวนจริงใด ๆ เรียก $-x$ ว่าเป็น “จำนวนตรงข้าม” ของ x เพราะเมื่อเราพิจารณาเส้นจำนวนแล้ว จะเห็นว่าจำนวนจริงใด ๆ x และ $-x$ จะอยู่ห่างจากจุด 0 เท่ากันแต่ในทิศทางตรงข้ามเช่น 2 และ -2 ห่างจาก 0 เป็นระยะทาง 2 หน่วยเท่ากัน โดย 2 ห่างจาก 0 ไปทางขวา และ -2 ห่างจาก 0 ไปทางซ้ายถ้า $x \neq 0$ แล้ว x จะอยู่ทางซ้ายของ 0 หรือไม่ก็อยู่ทางขวาของ 0 ระยะห่างระหว่าง x กับ 0 คือค่าสัมบูรณ์ของ x ซึ่งนิยามได้ดังนี้ (Olmsted, John. M.H., 1962 : 84-88)

บทนิยาม 1.19

ถ้า x เป็นจำนวนจริงใด ๆ แล้ว**ค่าสัมบูรณ์ของ** x เขียนแทนด้วย $|x|$

ซึ่งให้นิยามค่าดังนี้ $|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

ข้อสังเกต 1.2

1. ถ้า x เป็นจำนวนจริงบวกแล้ว $-x$ จะเป็นจำนวนจริงลบ

2. ถ้า x เป็นจำนวนจริงลบแล้ว $-x$ จะเป็นจำนวนจริงบวก

3. ในกรณีที่ $x=0$ แล้ว $-x=0$ ด้วย หมายถึง 0 จะเป็นจำนวนตรงข้ามกับตัวมันเอง

ตัวอย่าง 1.13

$\left|5\right|=5$ เพราะ $5>0$

$\left|-12\right|=-\left(-12\right)=12$ เพราะ $-12<0$

$\left|0\right|=0$

จากบทนิขามจะเห็นได้ว่าค่าสัมบูรณ์ของ x มีได้ค่าเดียวซึ่งต้องมากกว่าหรือเท่ากับศูนย์เสมอ และเราสามารถใช้บทนิยามพิสูจน์ทฤษฎีบทต่อไปนี้ได้

ทฤษฎีบทเกี่ยวกับค่าสัมบูรณ์

กำหนด x,y เป็นจำนวนจริงใด ๆ และ a เป็นจำนวนจริงบวก

1. $\left|x\right|=a$ ก็ต่อเมื่อ $x=a$ หรือ $x=-a$
2. $\left|x\right|=\left|-x\right|$
3. $\left|x\right|=\left|y\right|$ ก็ต่อเมื่อ $x=y$ หรือ $x=-y$
4. $\left|x\right|=\sqrt{x^2}$
5. $\left|x\right|\geq 0$
6. $\left|x\right|\geq x$
7. $\left|xy\right|=\left|x\right|\left|y\right|$
8. $\left|\dfrac{x}{y}\right|=\dfrac{\left|x\right|}{\left|y\right|}$
9. $\left|x-y\right|=\left|y-x\right|$
10. $\left|x^2\right|=\left|x\right|^2=x^2$
11. $\left|x+y\right|=\left|x\right|+\left|y\right|$ ก็ต่อเมื่อ $xy>0$
12. $\left|x\right|\leq a$ ก็ต่อเมื่อ $-a\leq x\leq a$

13. $\left|x\right| \geq a$ ก็ต่อเมื่อ $x \geq a$ หรือ $x \leq -a$
14. $\left|x+y\right| \leq \left|x\right| + \left|y\right|$
15. $\left|x-y\right| \geq \left|x\right| - \left|y\right|$

การแก้สมการค่าสัมบูรณ์ ต้องกำจัดค่าสัมบูรณ์ออกไปก่อน ซึ่งสามารถทำได้โดยใช้บทนิยามค่าสัมบูรณ์ หรือทฤษฎีบทเกี่ยวกับค่าสัมบูรณ์ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 1.14 จงหาเซตคำตอบของสมการ $\left|2x+5\right| = 7$

วิธีทำ

$$\left|2x+5\right| = \begin{cases} 2x+5 & ;\ 2x+5 \geq 0 \\ -\left(2x+5\right) & ;\ 2x+5 < 0 \end{cases}$$

แยกพิจารณา 2 กรณีดังต่อไปนี้

กรณีที่ 1 $2x+5 \geq 0$

$$2x \geq -5$$
$$x \geq \frac{-5}{2}$$
$$x \geq -2.5$$

ดังนั้น $\left|2x+5\right| = 7$

แทนด้วย $2x+5 = 7$

$$2x = 7-5$$
$$2x = 2$$
$$x = \frac{2}{2}$$
$$x = 1$$

จาก $x \geq -2.5$ และ $x = 1$ ดังนั้น $x = 1$

กรณีที่ 2 $2x+5 < 0$

$$2x < -5$$
$$x < \frac{-5}{2}$$
$$x < -2.5$$

ดังนั้น $\left|2x+5\right| = 7$

แทนด้วย $-\left(2x+5\right) = 7$

$$-2x-5=7$$
$$-2x=12$$
$$x=\frac{12}{-2}$$
$$x=-6$$

จาก $x<-2.5$ และ $x=-6$ ดังนั้น $x=-6$

ดังนั้น จากทั้งสองกรณีเซตคำตอบของสมการนี้คือ $\left\{-6\ ,\ 1\right\}$

ตัวอย่าง 1.15 จงหาเซตคำตอบของอสมการ $\left|2x-1\right|\leq 3$

วิธีทำ $$\left|2x-1\right|=\begin{cases} 2x-1 & ;\ 2x-1\geq 0 \\ -\left(2x-1\right) & ;\ 2x-1<0 \end{cases}$$

แยกพิจารณา 2 กรณีดังต่อไปนี้

กรณีที่ 1 $2x-1\geq 0$

$$2x\geq 1$$
$$x\geq\frac{1}{2}$$
$$x\geq 0.5$$

ดังนั้น $\left|2x-1\right|\leq 3$

แทนด้วย $2x-1\leq 3$

$$2x\leq 4$$
$$x\leq\frac{4}{2}$$
$$x\leq 2$$

จาก $x\geq 0.5$ และ $x\leq 2$ ดังนั้น $0.5\leq x\leq 2$ หรือ $\left[0.5,2\right]$

กรณีที่ 2 $2x-1<0$

$$2x<1$$
$$x<\frac{1}{2}$$
$$x<0.5$$

ดังนั้น $\left|2x-1\right|\leq 3$

แทนด้วย $-\left(2x-1\right)\leq 3$

$$-2x+1 \le 3$$
$$-2x \le 2$$
$$2x \ge -2$$
$$x \ge -1$$

จาก $x < 0.5$ และ $x \ge -1$ ดังนั้น $-1 \le x < 0.5$ หรือ $\left[-1, 0.5\right)$

ดังนั้น จากทั้งสองกรณีเซตคำตอบของอสมการนี้คือ $\left[0.5, 2\right] \cup \left[-1, 0.5\right) = \left[-1\ ,\ 2\right]$

ตัวอย่าง 1.16 จงหาเซตคำตอบของอสมการ $\left|2x-1\right| \le 3$

วิธีทำ จากคุณสมบัติค่าสัมบูรณ์ข้อ 2. ถ้า $a > 0$ จะได้ $\left|x\right| \le a$ ก็ต่อเมื่อ $-a \le x \le a$

ได้ $\left|2x-1\right| \le 3$

$$\begin{array}{lcccl} -3 & \le & 2x-1 & \le 3 \\ -3+1 & \le & 2x & \le 3+1 \\ -2 & \le & 2x & \le 4 \\ \dfrac{-2}{2} & \le & x & \le \dfrac{4}{2} \\ -1 & \le & x & \le 2 \end{array}$$

ดังนั้น เซตคำตอบของอสมการนี้คือ $\left[-1\ ,\ 2\right]$

1.6 ความสัมพันธ์ และฟังก์ชัน

ก่อนที่จะกล่าวถึงความสัมพันธ์ และฟังก์ชันนั้น เราจะต้องศึกษาบทนิยามต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องเพื่อเป็นข้อตกลงในการศึกษาเนื้อหาที่จะกล่าวถึงดังนี้ (ศุภกิจ เฉลิมวิสุตม์กุล, 2553 : 84-88)

บทนิยาม 1.20

สำหรับ a และ b ซึ่งเป็นจำนวนจริงใด ๆ คู่อันดับ a, b เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\left(a, b\right)$ เรียก a ว่า**ส่วนประกอบที่หนึ่ง**และเรียก b ว่า**ส่วนประกอบที่สอง**

ตัวอย่าง 1.17 คู่อันดับ $(2,-3)$

มี 2 เป็นส่วนประกอบที่หนึ่ง

และ -3 เป็นส่วนประกอบที่สอง

บทนิยาม 1.21

สำหรับจำนวนจริง a,b,c และ d ใด ๆ เรากล่าวว่าคู่อันดับ (a,b) และ (c,d) เท่ากันซึ่งแทนด้วย $(a,b)=(c,d)$ นิยามโดย $(a,b)=(c,d)$ ก็ต่อเมื่อ $a=c$ และ $b=d$

ข้อสังเกต 1.3

สำหรับ $a,b \in R$ ถ้า $a \neq b$ แล้ว $(a,b) \neq (b,a)$

ตัวอย่าง 1.18 คู่อันดับ $(x+1,3)=(6,y-4)$

จะได้ $x+1=6$ และ $y-4=3$

$x=5$ และ $y=7$

บทนิยาม 1.22

ถ้า A และ B เป็นเซตที่ไม่เป็นเซตว่าง**ผลคูณคาร์ทีเซียน**ของ A และ B ซึ่งเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $A \times B$ หมายถึงเซตที่ประกอบด้วยคู่อันดับ (x,y) โดยที่ $x \in A$ และ $y \in B$ นั้นคือ $A \times B = \{(x,y) : x \in A \text{ และ } y \in B\}$

ตัวอย่าง 1.19 กำหนดให้ $A=\{a,b\}$ และ $B=\{1,2,3\}$

จากบทนิยาม 1.22 จะได้

$$A \times B = \{(a,1),(a,2),(a,3),(b,1),(b,2),(b,3)\}$$

$$B \times A = \{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(3,a),(3,b)\}$$

สังเกตว่า $(a,1) \in A \times B$ แต่ $(a,1) \notin B \times A$

ข้อสังเกต 1.4

จากตัวอย่าง 1.19 จะได้ว่า $A \times B \neq B \times A$ ในกรณีทั่ว ๆ ไปถ้า $A \neq B$ แล้ว $A \times B \neq B \times A$

1.6.1 ความสัมพันธ์

ประโยค ต่อไปนี้ “ $x = y$ ” “ น้อยเป็นพี่สาวของนาง” “ 3 มากกว่า 5.” เป็นตัวอย่างของความสัมพันธ์ซึ่งจะเห็นว่าความสัมพันธ์นั้นเกี่ยวข้องกับของสองสิ่ง (ซึ่งอาจจะเหมือนกัน เท่ากัน หรือต่างกัน) สมการหรืออสมการที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างจำนวน x และ y ใด ๆ ก็เป็นตัวอย่างความสัมพันธ์เช่นเดียวกัน ดังบทนิยามต่อไปนี้ (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, 2546 : 122-125)

บทนิยาม 1.23

ถ้า r เป็นเซตย่อยของ $A \times B$ เราจะเรียก r ว่าเป็น**ความสัมพันธ์จาก A ไปยัง B** ถ้า $(x, y) \in r$ เรากล่าวว่า “ x สัมพันธ์ r กับ y ”

ตัวอย่าง 1.20 กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3\}$ และ $B = \{1, 2, 3, 4\}$

1. จงหาความสัมพันธ์ **น้อยกว่า** จาก A ไปยัง B
2. จงหาความสัมพันธ์ **เท่ากับ** จาก A ไปยัง B

ให้ r_1 เป็นความสัมพันธ์ **น้อยกว่า** จาก A ไปยัง B

ดังนั้น $r_1 = \{(1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4)\}$

ให้ r_2 เป็นความสัมพันธ์ **เท่ากับ** จาก A ไปยัง B

ดังนั้น $r_2 = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$

บทนิยาม 1.24

ถ้า r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไปยัง A จะเรียก r เป็น**ความสัมพันธ์ใน A**

ตัวอย่าง 1.21 กำหนดให้ $A=\{1,2,3,4\}$

และ $r=\{(x,y):x,y\in A,x>y\}$

ดังนั้น $r=\{(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(4,3)\}$ เป็นความสัมพันธ์ใน A

บทนิยาม 1.25

กำหนดให้ r เป็นความสัมพันธ์จาก จาก A ไปยัง B

โดเมนของความสัมพันธ์ r หมายถึงเซตของส่วนประกอบที่หนึ่งของคู่อันดับที่อยู่ใน r เขียนแทนด้วย D_r

นั่นคือ $D_r=\{x:x\in A$ จะมี y บางตัวใน B ที่ทำให้ $(x,y)\in r\}$

เรนจ์ ของความสัมพันธ์ r หมายถึงเซตของส่วนประกอบที่สองของคู่อันดับที่อยู่ใน r เขียนแทนด้วย R_r

นั่นคือ $R_r=\{y:y\in B$ จะมี x บางตัวใน A ที่ทำให้ $(x,y)\in r\}$

จะเห็นว่า $D_r\subseteq A$ และ $R_r\subseteq B$

ตัวอย่าง 1.22 กำหนดให้ N เป็นเซตของจำนวนนับ

และ $r=\{(x,y):x,y\in N,x+3y=15\}$

ดังนั้น $r=\{(12,1),(9,2),(6,3),(3,4)\}$

จะได้ $D_r=\{12,9,6,3\}$

และ $R_r=\{1,2,3,4\}$

การหาโดเมนและเรนจ์จากตัวอย่างที่กล่าวมาข้างต้น เป็นการหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ที่มีจำนวนสมาชิกจำกัดจึงทำให้สามารถหาได้ง่าย แต่ในกรณีที่เป็นความสัมพันธ์ ซึ่งมีจำนวนสมาชิกไม่จำกัด เราจะไม่สามารถใช้วิธีหาโดเมนและเรนจ์ด้วยวิธีการดังที่กล่าวได้สะดวก แต่เราจะใช้วิธีการดังต่อไปนี้

วิธีหาโดเมน เขียน y ในเทอมของ x แล้วพิจารณาค่า x เป็นจำนวนจริงอะไรได้บ้างจึงจะทำให้คำนวณค่า y ได้เป็นจำนวนจริง เซตของค่าของ x ทั้งหมดคือโดเมน

วิธีหาเรนจ์ เขียน x ในเทอมของ y แล้วพิจารณาค่า y เป็นจำนวนจริงอะไรได้บ้างจึงจะทำให้คำนวณค่า x ได้เป็นจำนวนจริง เซตของค่าของ y ทั้งหมดคือเรนจ์

ตัวอย่าง 1.23 จงหาโดเมนและเรนจ์ของ $r = \left\{(x,y) : x,y \in R, y = \dfrac{1}{x-3}\right\}$

วิธีทำ พิจารณาสมการ $y = \dfrac{1}{x-3}$

จะเห็นว่า ถ้า $x = 3$ แล้วจะทำให้ $y = \dfrac{1}{0}$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

ดังนั้น จำนวนจริง 3 จึงไม่อยู่ในโดเมนของ r ส่วนจำนวนจริงอื่น ๆ จะอยู่ในโดเมนของ r

$$D_r = \{x : x \in R, x \neq 3\} = (-\infty, 3) \cup (3, \infty)$$

และจาก $y = \dfrac{1}{x-3}$

เขียน x ในเทอมของ y ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} y(x-3) &= 1 \\ yx - 3y &= 1 \\ xy &= 1 + 3y \\ x &= \frac{1+3y}{y} \end{aligned}$$

จะเห็นว่าถ้า $y = 0$ แล้วจะไม่สามารถหาค่าของ x ได้ ดังนั้น

$$R_r = \{y : y \in R, y \neq 0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$$

1.6.2 ความสัมพันธ์ผกผัน

กำหนดให้ $A = \{1,2,3\}$ และ $B = \{1,2,3,4\}$ และให้ r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไปยัง B โดยกำหนดความสัมพันธ์ r ดังนี้

$$r = \{(x,y) : x \in A, y \in B, x < y\}$$

ซึ่งจะได้ $r = \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}$

และ $D_r = \{1,2,3\}$ และ $R_r = \{2,3,4\}$

ถ้าเราสลับที่กันระหว่างส่วนประกอบที่หนึ่งและส่วนประกอบที่สองของแต่ละคู่อันดับที่อยู่ใน r จะได้ความสัมพันธ์อันใหม่ สมมติให้เป็น s นั้นคือ

$s = \left\{(2,1),(3,1),(4,1),(3,2),(4,2),(4,3)\right\}$ ซึ่งจะได้ว่า s เป็นความสัมพันธ์จาก B ไปยัง A ซึ่งสามารถเขียนความสัมพันธ์ s ได้ดังนี้

$$s = \left\{(y,x) : x \in A, y \in B, x > y\right\}$$

หรือ $$s = \left\{(x,y) : x \in B, y \in A, y < x\right\}$$

จะพบว่า $D_s = \left\{2,3,4\right\}$ และ $R_s = \left\{1,2,3\right\}$

เรียกความสัมพันธ์ s ที่เกิดขึ้นนี้ว่า ความสัมพันธ์ผกผันของความสัมพันธ์ r

บทนิยาม 1.26

ผกผันของความสัมพันธ์ r คือความสัมพันธ์ซึ่งเกิดจากการสลับที่กันระหว่างส่วนประกอบที่หนึ่งและส่วนประกอบที่สองของแต่ละคู่อันดับใน r เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ r^{-1} นั้นคือ $r^{-1} = \left\{(y,x) : (x,y) \in r\right\}$

ตัวอย่าง 1.24 กำหนด $r = \left\{(x,y) : x,y \in R \text{ และ } y = 5x-2\right\}$ จงหา r^{-1}

วิธีทำ จากบทนิยาม 1.26 จะได้ $r^{-1} = \left\{(y,x) : x,y \in R \text{ และ } y = 5x-2\right\}$

หรือ
$$r^{-1} = \left\{(x,y) : x,y \in R \text{ และ } x = 5y-2\right\}$$
$$= \left\{(x,y) : x,y \in R \text{ และ } y = \frac{x+2}{5}\right\}$$

1.6.3 ฟังก์ชัน

โดยทั่วไปเราสนใจความสัมพันธ์ที่มีลักษณะพิเศษชนิดหนึ่ง ซึ่งเรียกว่าฟังก์ชัน เราอาจทำความเข้าใจอย่างง่าย ๆ ว่า จำนวน y เป็นฟังก์ชันของจำนวน x ถ้าสำหรับแต่ละ x มีวิธีการ เพื่อหาค่าของ y ได้เพียงหนึ่งค่าเท่านั้นที่สมนัยกับค่าของ x เช่นสมการ $y = x-1$ เป็นฟังก์ชันเพราะว่าแต่ละค่าของ x จะหา y ได้เพียงหนึ่งค่าเท่านั้น ดังบทนิยามต่อไปนี้ (ปราณี เหรียญกิติวัฒน์ และลัดดาวัลย์ เพ็ญสุภา, 2530 : 21-23)

บทนิยาม 1.27

ฟังก์ชันคือความสัมพันธ์ซึ่งสองคู่อันดับใด ๆ ที่มีส่วนประกอบที่หนึ่งเหมือนกันแล้วส่วนประกอบที่สองต้องเหมือนกันด้วย นั่นคือ f เป็นฟังก์ชันก็ต่อเมื่อ f เป็นความสัมพันธ์ที่สำหรับคู่อันดับใด ๆ (x_1, y_1) และ $(x_2, y_2) \in f$ ถ้า $x_1 = x_2$ แล้ว $y_1 = y_2$

ตัวอย่าง 1.25 กำหนด $A = \{1,2,3\}$ และ $B = \{x, y, z\}$

และ $r_1 = \{(1,x),(2,y),(2,x),(3,y)\}$

$r_2 = \{(1,z),(2,y),(3,x)\}$

$r_3 = \{(1,y),(2,y),(3,y)\}$

จะได้ว่า r_1 ไม่เป็นฟังก์ชัน ส่วน r_2 และ r_3 เป็นฟังก์ชัน

ตัวอย่าง 1.26 กำหนด $f = \{(x,y) : x, y \in R$ และ $y = x^2 + 1\}$

จะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันเพราะ f เป็นความสัมพันธ์ที่สำหรับแต่ละ $(x_1, y_1),(x_2, y_2) \in f$ จะได้ ถ้า $x_1 = x_2$ แล้ว $y_1 = y_2$

เราสามารถพิสูจน์ได้ดังนี้

ให้ $x_1 = x_2$

จะได้ $x_1^2 = x_2^2$

ดังนั้น $x_1^2 + 1 = x_2^2 + 1$

จาก $(x_1, y_1),(x_2, y_2) \in f$ จะได้ว่า

$y_1 = y_2$

นั่นคือคู่อันดับ (x_1, y_1) และ (x_2, y_2) ใดๆ ที่เป็นสมาชิกของ f ถ้า $x_1 = x_2$ แล้ว $y_1 = y_2$

ตัวอย่าง 1.27 $g = \{(x,y) : x,y \in R$ และ $y^2 = x+3\}$
ไม่เป็นฟังก์ชัน เพราะ $(1,2) \in g$ และ $(1,-2) \in g$ เนื่องจาก $1 = 1$ แต่ $2 \neq -2$

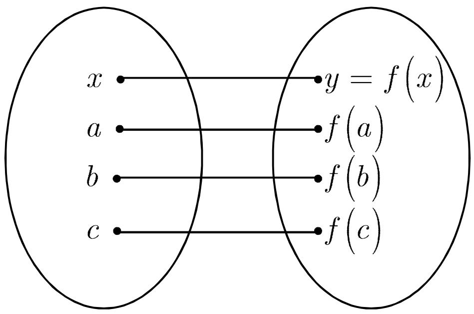
เนื่องจากฟังก์ชันเป็นความสัมพันธ์ ดังนั้น โดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันคือโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์นั่นเองและวิธีการหาโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันเช่นเดียวกับการหาโดเมน และเรนจ์ของความสัมพันธ์ถ้า f เป็นฟังก์ชันจะเขียน D_f และ R_f แทนโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชัน f ตามลำดับ

1.6.4 ชนิดของฟังก์ชัน

บทนิยาม 1.28

ถ้า f เป็นความสัมพันธ์จาก A ไปยัง B ที่เป็นฟังก์ชันและ $D_f = A$ เรียก f ว่าเป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง B เขียนแทนด้วย $f : A \to B$

ถ้า $(x,y) \in f$ เรียก y ว่าภาพของ x ภายใต้ f หรือ y เป็นค่าของฟังก์ชัน f ที่ x เขียนแทนด้วย $y = f(x)$ ดังภาพ



ภาพประกอบ 1.8 แสดงภาพฟังก์ชัน $y = f(x)$
ที่มา : ดวงใจ ลิ้มอำไพ. 2544 : 121

จากบทนิยามเซต A และเซต B อาจเป็นเซตเดียวกัน นั่นคือ $A = B$ และในที่นี้จะกล่าวถึงเฉพาะกรณีที่เซต A และเซต B เป็นเซตย่อยของ R(เซตของจำนวนจริง)

บทนิยาม 1.29

ถ้า f เป็นฟังก์ชันจากเซตย่อยของ R ไปยัง R จะเรียกว่า f เป็นฟังก์ชันค่าจริง และถ้า $f = \left\{ \left(x, y\right) : x, y \in R \text{ และ } y = f\left(x\right) \right\}$ นิยมเขียนโดยย่อว่า $y = f\left(x\right)$

ตัวอย่าง 1.28 กำหนดให้ $f\left(x\right) = 3x - 4$ และ $g\left(x\right) = 5x + 3$ ดังนั้น

1. $f\left(1\right) = 3\left(1\right) - 4 = -1$
2. $f\left(-3\right) = 3\left(-3\right) + 4 = -5$
3. $f\left(t\right) = 3\left(t\right) + 4 = 3t + 4$
4. $g\left(-2\right) = 5\left(-2\right) + 3 = -7$
5. $g\left(3\right) = 5\left(3\right) + 3 = 18$
6. $g\left(f\left(2\right)\right) = 5\left(f\left(2\right)\right) + 3 = 5\left(3\left(2\right) - 4\right) + 3 = 5\left(2\right) + 3 = 13$

บทนิยาม 1.30

ให้ $f : A \to B$ และถ้า $R_f = B$ จะเรียก f เป็นฟังก์ชันจาก A **ไปทั่วถึง** B เขียนแทนด้วย $f : A \xrightarrow{onto} B$

บทนิยาม 1.31

ให้ $f : A \to B$ จะเรียก f เป็นฟังก์ชัน**หนึ่งต่อหนึ่ง**ก็ต่อเมื่อถ้า $f\left(x_1\right) = f\left(x_2\right)$ แล้ว $x_1 = x_2$ เขียนแทนด้วย $f : A \xrightarrow{1-1} B$

บทนิยาม 1.32

f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไปทั่วถึง B จะเรียก f ว่าเป็นฟังก์ชัน **สมนัยหนึ่งต่อหนึ่ง** และเรียกเซต A กับเซต B ว่ามีการสมนัยหนึ่งต่อหนึ่ง

เขียนแทนด้วย $f : A \xrightarrow[onto]{1-1} B$

1.6.5 ฟังก์ชันผกผัน

ในหัวข้อที่ผ่านมานั้น เมื่อให้ความสัมพันธ์ใด ๆ มา เราจะสามารถหาความสัมพันธ์ผกผันของความสัมพันธ์นั้นได้เสมอ และเนื่องจากว่าถ้า f เป็นฟังก์ชันแล้ว f จะต้องเป็นความสัมพันธ์ด้วย ดังนั้น จึงสามารถหาความสัมพันธ์ผกผันของ f ได้เสมอเช่นกัน ซึ่งความสัมพันธ์ผกผันของฟังก์ชัน f อาจจะเป็นหรือไม่เป็นฟังก์ชันก็ได้ (รณชัย มาเจริญทรัพย์, 2547 : 45-46)

ตัวอย่าง 1.29 กำหนด $f = \{(1,2),(2,4),(3,6),(4,8)\}$

ดังนั้น $f^{-1} = \{(2,1),(4,2),(6,3),(8,4)\}$

ตัวอย่าง 1.30 กำหนด $f = \{(x,y) : x,y \in R$ และ $y = x-2\}$ จงหา r^{-1}

วิธีทำ จากบทนิยามจะได้

$$f^{-1} = \{(y,x) : x,y \in R \text{ และ } y = x-2\}$$
$$= \{(y,x) : x,y \in R \text{ และ } x = y+2\}$$
$$= \{(y,x) : x,y \in R \text{ และ } y = x+2\}$$

ข้อสังเกต 1.5

จะพบว่าถ้า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง f^{-1} จะเป็นฟังก์ชันและถ้า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึงแล้ว f^{-1} จะเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึงด้วย กล่าวคือ ถ้า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไปทั่วถึง B แล้ว f^{-1} เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก B ไปทั่วถึง A นั่นคือ $f : A \xrightarrow[onto]{1-1} B$ แล้วจะได้ $f^{-1} : A \xrightarrow[onto]{1-1} B$

บทนิยาม 1.33

ให้ f เป็นฟังก์ชัน ฟังก์ชันผกผันของ f คือความสัมพันธ์ผกผันของ f ที่เป็นฟังก์ชัน

ตัวอย่าง 1.31 กำหนด $f = \{(x,y) : x, y \in R$ และ $y = 2x - 6\}$

วิธีทำ จากที่กำหนดให้ $y = f(x) = 2x - 6$

จะเห็นว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึง

ดังนั้น จึงสามารถหาฟังก์ชันผกผันของ f ได้

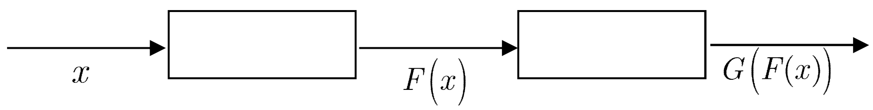
ดังนั้น $f^{-1} = \{(y,x) : x, y \in R$ และ $y = 2x - 6\}$

$= \{(x,y) : x, y \in R$ และ $x = 2y - 6\}$

$= \left\{(x,y) : x, y \in R \text{ และ } y = \dfrac{x-6}{2}\right\}$

1.6.6 ฟังก์ชันประกอบ

พิจารณาฟังก์ชัน $f(x) = (x^2 + 3x - 1)^{100}$ จะเห็นว่าในการดำเนินการหรือคำนวณเกี่ยวกับฟังก์ชันนี้โดยตรงอาจจะไม่สะดวกแต่ถ้าเราให้ $F(x) = x^2 + 3x - 1$ และ $G(x) = x^{100}$ ดังนั้นจะได้ $f(x) = (x^2 + 3x - 1)^{100} = G(F(x))$ ซึ่งเราเรียกว่า $G(F(x))$ *“เป็นฟังก์ชันประกอบระหว่างฟังก์ชัน G กับฟังก์ชัน F ”* ซึ่งทำให้การคำนวณหรือการดำเนินการในบางครั้งกระทำได้สะดวกและรวดเร็วยิ่งขึ้น กระบวนการอาจเขียนเป็นแผนผังได้ดังภาพ (ปิยรัตน์ จาตุรันตบุตร , 2547 : 116-118)

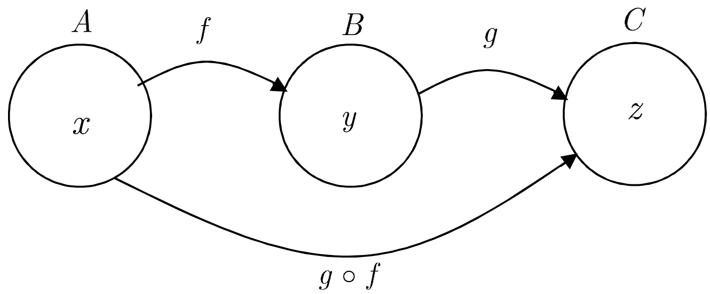


ภาพประกอบ 1.9 แสดงแผนผังการประกอบของฟังก์ชัน

ที่มา : ดวงใจ ลิ้มอำไพ. 2544 : 125

บทนิยาม 1.34

ให้ $f : A \to B$ และ $g : B \to C$ แล้ว ฟังก์ชันประกอบของ f และ g เขียนแทนด้วย $g \circ f$ (อ่านว่า g โอ f) คือฟังก์ชันจาก A ไป C นั้นคือ $g \circ f : A \to C$ โดยที่ $g \circ f(x) = g(f(x))$ สำหรับทุก $x \in A$



ภาพประกอบ 1.10 แสดงฟังก์ชันประกอบ $g \circ f$

ที่มา : ปิยรัตน์ จาตุรันตบุตร. 2547 : 162

จากภาพประกอบ 1.10 ถ้าให้ $x \in A, y \in B$ และ $z \in C$ แล้ว f เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง B โดยที่ $(x,y) \in f$ หรือ $y = f(x)$ และ g เป็นฟังก์ชันจาก B ไปยัง C โดยที่ $(y,z) \in g$ หรือ $z = g(y) = g(f(x))$ ดังนั้น $g \circ f$ เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง C โดยที่ $(x,z) \in g \circ f$ หรือ $z = g \circ f(x)$ ซึ่งจะเห็นว่า $g \circ f(x) = g(f(x)) = z$ กล่าวคือค่าของ $g \circ f$ ที่ x เท่ากับค่าของฟังก์ชัน g ที่ $f(x)$ ซึ่งมีค่าเท่ากับ z นั่นเอง

ตัวอย่าง 1.32 กำหนด $f : R \to R$ และ $g : R \to R$ เป็นฟังก์ชันที่นิยามดังนี้ $f(x) = x^2 + 3$ และ $g(x) = 2x - 1$ สำหรับ $x \in R$ จะสามารถหา $g \circ f$ และ $f \circ g$ ได้หรือไม่

วิธีทำ
$$\begin{aligned} g \circ f(x) &= g(f(x)) \\ &= g(x^2 + 3) \\ &= 2(x^2 + 3) - 1 \\ &= 2x^2 + 5 \end{aligned}$$

นั่นคือ $g \circ f = \{(x,y) : x,y \in R \text{ และ } y = 2x^2 + 5\}$

$$\begin{aligned} f \circ g(x) &= f(g(x)) \\ &= f(2x - 1) \\ &= (2x - 1)^2 + 3 \\ &= (4x^2 - 4x + 1) + 3 \\ &= 4x^2 - 4x + 4 \end{aligned}$$

นั่นคือ $f \circ g = \{(x,y) : x,y \in R \text{ และ } y = 4x^2 - 4x + 4\}$

1.7 สรุปท้ายบทที่ 1

เซตเป็นคำอนิยาม ใช้เมื่อเราต้องการแบ่งสิ่งต่าง ๆ ให้อยู่รวมกันเป็นหมวดหมู่ แล้วสมารถเขียนเซตทั้งสองรูปแบบนั้นคือแบบบอกเงื่อนไข แบบแจกแจงสมาชิก สำหรับชนิดของเซตนั้นจะพิจารณาสมาชิกของเซตเป็นหลัก และแผนภาพเวนน์ – ออยเลอร์ เป็นแผนภาพที่เขียนแสดงความสัมพันธ์ระหว่างเซต และใช้ในการดำเนินการระหว่างเซตรูปแบบต่าง ๆ อีกด้วย แล้วยังสามารถเขียนระบบจำนวนจริง ให้อยู่ในรูปของเซตได้ เช่น N แทนเซตของจำนวนนับ I แทนเซตของจำนวนเต็ม Q แทนเซตของตำนวนตรรกยะ เป็นต้น

ค่าสัมบูรณ์ของ x เขียนแทนด้วย $\left|x\right|$ หมายความว่า $\left|x\right| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$ การหาเซตคำตอบของสมการค่าสัมบูรณ์นั้นจะอยู่ในรูปของอสมการ การหาเซตคำตอบนั้นจะเป็นการแก้อสมการซึ่งใช้สมบัติของการไม่เท่ากันในการหาเซตของผลเฉลย

ความสัมพันธ์ที่มีลักษณะพิเศษชนิดหนึ่งซึ่งสองคู่อันดับใด ๆ ที่มีส่วนประกอบที่หนึ่งเหมือนกันแล้วส่วนประกอบที่สองต้องเหมือนกันด้วย เรียกว่าเป็นฟังก์ชัน

คำถามท้ายบท

1. ข้อต่อไปนี้ข้อใดถูกหรือข้อใดผิด

   1.1 $x \subseteq \left\{ x, y \right\}$

   1.2 $x \in \left\{ x, y \right\}$

   1.3 $\left\{ x, y \right\} = \left\{ x, y, z \right\}$

   1.4 $\left\{ x, y \right\} \subset \left\{ x, y, z \right\}$

   1.5 $\left\{ x, y \right\} \subset \left\{ \left\{ x, y \right\}, z, w \right\}$

2. จงเขียนเซตต่อไปนี้ในรูปแจกแจงสมาชิก

   2.1 $C = \left\{ x : x \in \mathrm{I}^+ \text{ และ } x \le 15 \right\}$

   2.2 $D = \left\{ x : x \in \mathrm{I}^+ \text{ และ } x < 1 \right\}$

   2.3 $E = \left\{ x : x \in \mathrm{I}^- \text{ และ } x \ge 1 \right\}$

3. กำหนดให้ $U = \left\{ x : x \in \mathrm{I}^+ \text{ และ } x \le 15 \right\}$

   และ $A = \left\{ 2, 3, 5, 8 \right\}$

   $B = \left\{ 3, 5 \right\}$

   $C = \left\{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \right\}$

   จงหา

   3.1 $\left(A \cap B \right) \cap C$

   3.2 $\left(A - C \right) \cup B'$

   3.3 $\left(A - C \right) \cup \left(B \cap C \right)'$

4. กำหนด $A = \{x, y, z\}$ และ $B = \{a, c\}$ จงหา $P(A)$ และ $P(B)$

5. กำหนดให้

$N =$ เซตของจำนวนธรรมชาติ

$I =$ เซตของจำนวนเต็ม

$Q =$ เซตของจำนวนตรรกยะ

$R =$ เซตของจำนวนจริง

แล้วข้อสรุปใดต่อไปนี้ถูกต้อง

5.1 $I \subset N$

5.2 $Q \subset N$

5.3 $I \subset R$

5.4 $I \cap N = \varnothing$

5.5 $Q' \subset R$

6. จงหาผลเฉลยของอสมการต่อไปนี้

6.1 $3x - 1 < 0$

6.2 $3x + 5 \geq 13$

6.3 $2x - x^2 \leq -8$

6.4 $\left(x-2\right)^2 \leq 1$

6.5 $\dfrac{x+1}{x-1} \leq 1$

7. จงหาค่า x ที่สอดคล้องกับสมการ และอสมการต่อไปนี้

7.1 $\left|2x+5\right| = 5$

7.2 $\left|x-2\right| = 8$

7.3 $\left|2x-5\right| \leq 7$

7.4 $\left|x-5\right| \geq 7$

7.5 $\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right| \leq 0$

7.6 $\left|\dfrac{x-2}{x}\right| \le 2$

8. กำหนดให้ $A=\{1,2\}$ และ $B=\{1,2,3\}$ จงหา $A\times B$ และ $B\times A$
9. กำหนดให้ $A=\{1,2,3\}$ และ $B=\{1,2,3,4\}$ จงหาความสัมพันธ์ มากกว่า จาก A ไปยัง B
10. กำหนดให้ N เป็นเซตของจำนวนนับและ $r=\left\{\left(x,y\right): x,y\in N,\ x+3y=18\right\}$ จงหา D_r และ R_r
11. จงบอกว่าความสัมพันธ์ต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันหรือไม่ พร้อมทั้งบอกโดเมน และ เรนจ์

    11.1 $f=\left\{\left(12,1\right),\left(9,2\right),\left(6,3\right),\left(3,4\right)\right\}$

    11.2 $g=\left\{\left(1,1\right),\left(1,2\right),\left(6,3\right),\left(3,4\right)\right\}$

    11.3 $h=\left\{\left(x,y\right): x,y\in R,\ y=3x-1\right\}$

    11.4 $i=\left\{\left(x,y\right): x,y\in R,\ x^2+y^2=1\right\}$

12. กำหนด $r=\left\{(x,y): x,y\in R,\ y=9x+2\right\}$ จงหา r^{-1}
13. กำหนด $s=\left\{(x,y): x,y\in R,\ x^2+y=2\right\}$ จงหา s^{-1}
14. กำหนด $f(x)=x^2+1$, $g(x)=2x-3$, และ $h(x)=x-5$ จงหา

    14.1 $f\circ g\left(x\right)$

    14.2 $h\circ g\left(x\right)$

    14.3 $g\circ h\left(x\right)$

    14.4 $h\circ f\left(x\right)$

    14.5 $f\circ g^{-1}\left(x\right)$

    14.6 $g\circ h^{-1}\left(x\right)$

เอกสารอ้างอิง

กานดา ลือสุทธิวิบูลย์ และยุพิน จิรสุขานนท์. (2549). **สรุปคณิตศาสตร์ ม.ปลาย.** กรุงเทพมหานคร : เดอะบุคส์ จำกัด

คณาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยรามคำแหง. (2542). **แคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ 1.** พิมพ์ครั้งที่ 8 กรุงเทพมหานคร : มหาวิทยาลัยรามคำแหง.

จำรัส อินสม และประทีป โรจนวิกาต. (2550). **คู่มือคณิตศาสตร์พื้นฐาน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เล่ม 2 ภาคเรียนที่ 2.** กรุงเทพมหานคร : แม็ค.

ดวงใจ ลิ้มอำไพ. (2544). **คณิตศาสตร์สำหรับคอมพิวเตอร์.** บุรีรัมย์ : คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี สถาบันราชภัฏบุรีรัมย์.

ประเสริฐ ภู่เงิน. (2538). **คณิตศาสตร์พื้นฐาน.** บุรีรัมย์ : ภาควิชาคณิตศาสตร์และสถิติ สถาบันราชภัฏบุรีรัมย์.

ปราณี เหรียญกิติวัฒน์ และลัดดาวัลย์ เพ็ญสุภา. (2530). **คณิตศาสตร์ทั่วไป.** กรุงเทพมหานคร : สำนักประกายพรึก.

ปิยรัตน์ จาตุรันตบุตร. (2547). **หลักการคณิตศาสตร์.** กรุงเทพมหานคร : ด่านสุทธาการพิมพ์.

ราชบัณฑิตยสถาน. (2553). **พจนานุกรมศัพท์คณิตศาสตร์ฉบับราชบัณฑิตยสถาน.** พิมพ์ครั้งที่ 10 กรุงเทพมหานคร นานมีบุคส์พับลิเคชั่นส์.

รณชัย มาเจริญทรัพย์. (2547). **คณิตศาสตร์เพิ่มเติมเล่ม 1.** กรุงเทพมหานคร : ภูมิบัณฑิตการพิมพ์.

วิรุฬห์ บูญสมบัติ. (2534). **คณิตศาสตร์ทั่วไป.** กรุงเทพมหานคร : จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

เวชชัย สังข์สาย. (2536). **คณิตศาสตร์พื้นฐาน.** สุรินทร์ : ภาควิชาคณิตศาสตร์และสถิติ วิทยาลัยครูสุรินทร์.

ศุภกิจ เฉลิมวิสุตม์กุล. (2553). **คณิตศาสตร์ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4.** กรุงเทพมหานคร : แม็ค.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2546). **หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 1 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ มัธยมศึกษาปีที่ 4.** กรุงเทพมหานคร : สำนักพิมพ์คุรุสภา.

Combe, H.J. (1971). **Set and Symbolic Logic.** London : Macmillan Company.

Olmsted, John. M.H. (1962). **The Real Number System.** New York : Appletion-Century Crofts.

แผนบริหารการสอนประจำบทที่ 2

เนื้อหาประจำบท

1. ความหมายและบทนิยามของลิมิต
2. ทฤษฎีบทของลิมิต
3. ลิมิตที่เกี่ยวข้องกับอนันต์
4. ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม

1. อธิบายและให้ความหมายของคำว่าลิมิตได้
2. พิสูจน์ลิมิตโดยใช้บทนิยามได้
3. หาค่าของลิมิตซ้ายและลิมิตขวาได้
4. นำทฤษฎีของลิมิตไปประยุกต์ใช้ในการหาค่าลิมิตได้
5. หาลิมิต(ค่าจริง)ที่จุดอนันต์ได้
6. หาลิมิตที่ค่าอนันต์ที่จุด $x = a$ ได้
7. หาลิมิตค่าอนันต์ที่จุดอนันต์ได้
8. ตรวจสอบความต่อเนื่องของฟังก์ชันที่จุด $x = a$ ได้

วิธีการสอนและกิจกรรมการเรียนการสอนประจำบท

1. ผู้สอนบรรยายหัวข้อต่อไปนี้พร้อมเปิดโอกาสให้ซักถาม
   1.1 ความหมายและบทนิยามของลิมิต
   1.2 ลิมิตซ้ายและลิมิตขวา
   1.3 ทฤษฎีบทของลิมิต
   1.4 ลิมิตที่เกี่ยวข้องกับอนันต์
   1.5 ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน
2. ให้นักศึกษาทำกิจกรรมต่อไปนี้
   2.1. ศึกษาข้อมูลจาก เกี่ยวกับเรื่องลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชันเพิ่มเติม
   2.2. ทำแบบฝึกหัดที่กำหนดให้

สื่อการเรียนการสอน

1. เอกสารประกอบการสอนและตำราต่าง ๆ
2. Slide Presentation

การวัดผลและการประเมินผล

1. สังเกตความสนใจของนักศึกษาขณะสอน ความตั้งใจ การฟัง การจดบันทึก และการซักถาม
2. แบบฝึกหัด
3. แบบทดสอบ
4. การมีส่วนร่วมในกิจกรรมการเรียนการสอน

บทที่ 2
ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

เนื้อหาส่วนใหญ่ในรายวิชากล่าวได้ว่า แนวคิดหลักประการหนึ่งของแคลคูลัสได้แก่ การศึกษาวิเคราะห์เกี่ยวกับการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชัน เช่น อนุพันธ์ที่ผู้เรียนจะได้ศึกษาในบทที่ 3 ซึ่งคือ อัตราการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันที่จุดใดจุดหนึ่งในขณะที่ตัวแปรต้นที่จุดนั้นเปลี่ยนไปน้อยมาก ๆ นั่นเอง นอกจากนี้ปริพันธ์จำกัดเขต ซึ่งผู้เรียนจะได้ศึกษาในบทที่ 5 จะเป็นผลรวมของค่าของฟังก์ชันในส่วนย่อย ๆ จำนวนมากมายนับไม่ถ้วน แล้วได้ผลลัพธ์เป็นผลรวมของฟังก์ชันในส่วนใหญ่ ส่วนหนึ่งจะเห็นได้ว่าทั้งอนุพันธ์และปริพันธ์จำกัดเขต ล้วนเป็นแนวคิดที่เกี่ยวข้องกับค่าของฟังก์ชันและปริมาณที่น้อยมาก ๆ หรือปริมาณที่ใหญ่มาก ๆ ดังนั้นเพื่อให้สามารถวิเคราะห์ค่าของฟังก์ชันที่เกี่ยวข้องกับปริมาณดังกล่าวได้อย่างถี่ถ้วนและชัดเจนนักคณิตศาสตร์จึงพัฒนาแนวคิดเกี่ยวกับลิมิตขึ้นมา อาจกล่าวได้ว่า หากปราศจากแนวคิดเรื่องลิมิตแล้ว วิชาแคลคูลัสคงไม่อาจเกิดขึ้นได้ดังนั้นเนื้อหาที่จะได้ศึกษาในบทนี้จะประกอบด้วยบทนิยามของลิมิตซึ่งจะแสดงให้รู้ว่าลิมิตนั้นคืออะไรพร้อมทั้งแสดงการเขียนลิมิต ลิมิตทางซ้ายและลิมิตทางขวา ตลอดจนทฤษฎีบทต่างๆ ที่เกี่ยวข้องกับลิมิต เพื่อจะได้หาค่าลิมิตได้อย่างรวดเร็วและถูกต้อง และบางครั้งการหาค่าลิมิตของฟังก์ชันนั้นก็ไม่จำเป็นต้องเป็นจำนวนจริงเสมอไปดังนั้นจึงจำเป็นที่ต้องศึกษาเรื่องลิมิตที่เกี่ยวข้องกับอนันต์ด้วย

2.1 บทนิยามของลิมิต

ลิมิต ถ้าแปลตามพจนานุกรมศัพท์คณิตศาสตร์ฉบับราชบัณฑิตยสถานศัพท์แปลว่า *ขีดจำกัด* เมื่อใช้ศัพท์เฉพาะ ในทางคณิตศาสตร์แล้วนั้นจะทำความเข้าใจยากมากพอสมควร ดังนั้นในตอนแรกนี้จะได้ให้ตัวอย่างเพื่อเป็นแนวคิดกับผู้เรียนว่า เมื่อไรจะใช้คำว่าลิมิต และจะหาค่าลิมิตนั้นโดยคร่าว ๆ ได้อย่างไร จากนั้นจึงจะนำเข้าสู่ความหมายที่แท้จริงของลิมิตต่อไป (ราชบัณฑิตยสถาน, 2553 : 351)

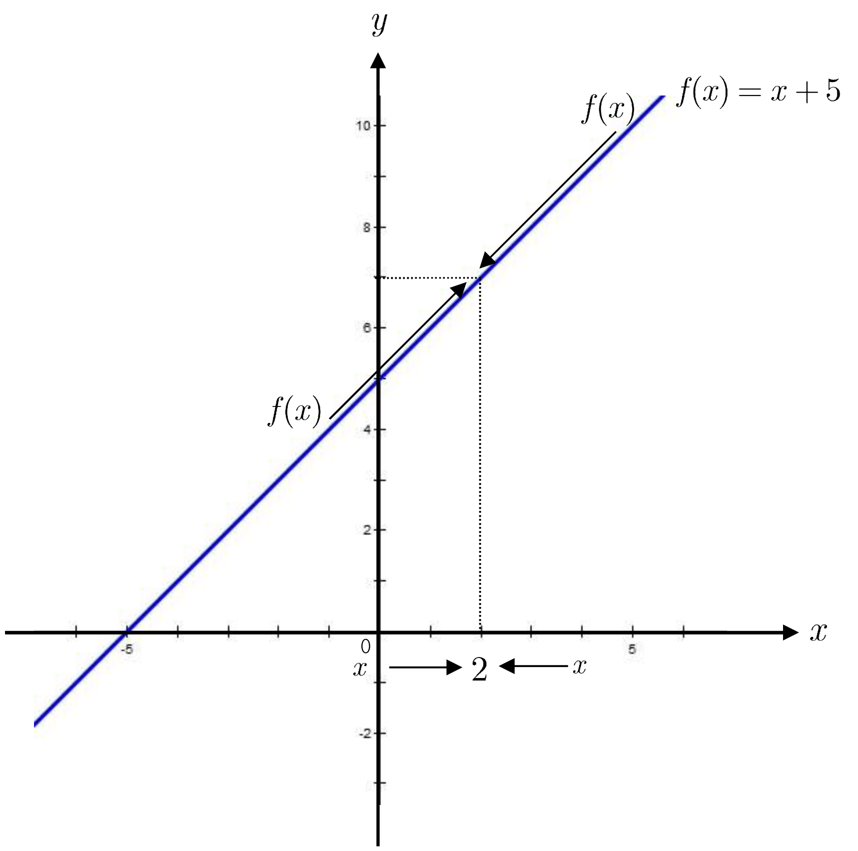
ตัวอย่างเช่น

รถยนต์คันหนึ่งวิ่งจากเมือง ก ไปยังเมือง ข ซึ่งห่างกัน 50 กิโลเมตร ใช้เวลา 30 นาที ถ้าให้ s แทนระยะทางที่รถคันนี้วิ่งได้ หลังจากเวลาผ่านไป t นาที จะเห็นว่าเมื่อเวลา t เข้าใกล้ 30 นาที (แต่ยังไม่ถึง 30 นาที) นั้นระยะทาง s ที่ได้จะเพิ่มขึ้นและมีค่าเข้าใกล้ 50 กิโลเมตร มากขึ้นลักษณะเช่นนี้

จะกล่าวได้ว่า “ลิมิตของระยะทาง (s) ” ที่รถยนต์วิ่งได้เมื่อเวลา (t) เข้าใกล้ 30 นาที เท่ากับ 50 กิโลเมตร และเขียนข้อความนี้ด้วย $\lim\limits_{t \to 30} s = 50$

ในการศึกษาเกี่ยวกับลิมิตของฟังก์ชันมีข้อสังเกตว่าค่าลิมิตของฟังก์ชันนั้นแตกต่างกับค่าของฟังก์ชันเช่นกำหนดให้ $f(x) = x + 5$ ค่าของฟังก์ชันที่ $x = 2$ คือการแทนค่า $x = 2$ ลงในสมการที่กำหนดให้หรือค่าของ $f(2)$ นั่นเองนั่นคือ $f(2) = 2 + 5 = 7$

แต่สำหรับลิมิตของฟังก์ชันหมายถึงเมื่อ x เข้าใกล้ค่า ๆ หนึ่งแล้ว $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ค่าคงตัวค่าหนึ่งค่านั่นคือลิมิตของฟังก์ชัน $f(x)$ เช่นจาก $f(x) = x + 5$ เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 2 ค่าลิมิตของฟังก์ชันเขียนแทนด้วย $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ หรือ $\lim\limits_{x \to 2}(x + 5)$ ดังรูป



ภาพประกอบ 2.1 กราฟของฟังก์ชัน $f(x) = x + 5$

การพิจารณากรณีที่ x มีค่าเข้าใกล้ 2 จะพบว่ามีได้สองกรณีคือ กรณีที่ x เข้าใกล้ 2 ทางที่มากกว่า 2 (ทางขวามือ) และกรณีที่ x เข้าใกล้ 2 ทางน้อยกว่า 2 (ทางซ้ายมือ) ซึ่งจะแสดงลักษณะการเข้าใกล้ค่าคงตัวค่าหนึ่งของ $f(x)$ ดังตารางต่อไปนี้ (พัฒนา สีมากุล, 2539 : 3)

ตาราง 2.1 แสดงกรณี x มีค่าเข้าใกล้ 2 ทางซ้าย ($x < 2$ และ x เข้าใกล้ 2)

x	$f(x) = x + 5$
1.5	6.5
1.9	6.9
1.99	6.99
1.999	6.999
1.9999	6.9999
1.99999	6.99999

ตาราง 2.2 แสดงกรณี x มีค่าเข้าใกล้ 2 ทางขวา ($x > 2$ และ x เข้าใกล้ 2)

x	$f(x) = x + 5$
2.5	7.5
2.1	7.1
2.01	7.01
2.001	7.001
2.0001	7.0001
2.00001	7.00001

ตัวอย่าง 2.1 กำหนดให้ $f(x) = x + 1$ จงหาค่าของ $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$

วิธีทำ แยกพิจารณาเป็นสองกรณีดังต่อไปนี้

กรณีที่ 1 x มีค่าเข้าใกล้ 3 ทางซ้าย

x	$f(x) = x + 1$
2.5	3.5
2.9	3.9
2.99	3.99

กรณีที่ 2 x มีค่าเข้าใกล้ 3 ทางขวา

x	$f(x) = x + 1$
3.5	4.5
3.1	4.1
3.01	4.01

2.999	3.999
2.9999	3.9999
2.9999	3.99999

3.001	4.001
3.0001	4.0001
3.00001	4.00001

จากตารางจะได้ว่า

เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 3 ทางซ้ายแล้ว $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ 4

เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 3 ทางขวาแล้ว $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ 4

ดังนั้น $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 4$

ตัวอย่าง 2.2 กำหนดกำหนดให้ $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x - 1}$ จงหาค่าของ $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

วิธีทำ สังเกตว่า $f(x)$ ไม่นิยามเมื่อ $x = 1$ พิจารณา x มีค่าเข้าใกล้ 1

แยกพิจารณาเป็นสองกรณีดังต่อไปนี้

กรณีที่ 1 x มีค่าเข้าใกล้ 1 ทางซ้าย

x	$f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x - 1}$
0.9	2.9
0.99	2.99
0.999	2.999
0.9999	2.9999
0.99999	2.99999
0.999999	2.999999

กรณีที่ 2 x มีค่าเข้าใกล้ 1 ทางขวา

x	$f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x - 1}$
1.1	3.1
1.01	3.01
1.001	3.001
1.0001	3.0001
1.00001	3.00001
1.000001	3.000001

จากตารางจะได้ว่า

เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 1 ทางซ้ายแล้ว $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ 3

เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 1 ทางขวาแล้ว $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ 3

ดังนั้น $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 3$

การหาค่าของ $\lim_{x \to a} f(x)$ เป็นการดูพฤติกรรมของ $f(x)$ เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ a แต่ $x \neq a$ ในการหาลิมิตเมื่อ x เข้าใกล้ a นั้นไม่ว่าฟังก์ชัน $f(x)$ จะมีค่าที่ $x = a$ หรือไม่ก็ตามสิ่งที่สนใจก็คือค่าของฟังก์ชัน $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ a เป็นอย่างไรเท่านั้น (กมล เอกไทยเจริญ, 2544 : 16)

ตัวอย่าง 2.3 กำหนดให้ $f\left(x\right) = \dfrac{x}{\left|x\right|}$ จงหาค่าของ $\lim_{x \to 0} f\left(x\right)$

วิธีทำ แยกพิจารณาเป็นสองกรณีดังต่อไปนี้

กรณีที่ 1 x มีค่าเข้าใกล้ 0 ทางซ้าย

x	$f\left(x\right) = \dfrac{x}{\left|x\right|}$
-0.1	-1
-0.01	-1
-0.001	-1
-0.0001	-1
-0.00001	-1
-0.000001	-1

กรณีที่2 x มีค่าเข้าใกล้ 0 ทางขวา

x	$f\left(x\right) = \dfrac{x}{\left|x\right|}$
0.1	1
0.01	1
0.001	1
0.0001	1
0.00001	1
0.000001	1

จากตารางจะได้ว่า

เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 0 ทางซ้ายแล้ว $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ -1

เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 0 ทางขวาแล้ว $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ 1

จะเห็นว่าเมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 0 (โดยที่ $x \neq 0$) แล้ว $f(x)$ จะมีค่าเข้าใกล้ค่าคงตัวสองค่า คือ 1 และ -1 ในกรณีเช่นนี้กล่าวได้ว่าฟังก์ชัน f นี้ไม่มีลิมิตที่จุด $x = 0$ หรือ $\lim_{x \to 0} f(x)$ ไม่มี

ตัวอย่าง 2.4 กำหนดให้ $f(x)=\dfrac{1}{x}$ จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

วิธีทำ แยกพิจารณาเป็นสองกรณีดังต่อไปนี้

กรณีที่ 1 x มีค่าเข้าใกล้ 0 ทางซ้าย

x	$f(x)=\dfrac{1}{x}$
-0.1	-10
-0.01	-100
-0.001	-1000
-0.0001	-10000
-0.00001	-100000
-0.000001	-1000000

กรณีที่2 x มีค่าเข้าใกล้ 0 ทางขวา

x	$f(x)=\dfrac{1}{x}$
0.1	10
0.01	100
0.001	1000
0.0001	10000
0.00001	100000
0.000001	1000000

จากตารางจะได้ว่า

เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 0 ทางซ้ายแล้ว $f(x)$ มีค่าลดลงอย่างไม่มีขอบเขต

เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 0 ทางขวาแล้ว $f(x)$ มีค่าเพิ่มขึ้นอย่างไม่มีขอบเขต

จะเห็นว่าเมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 0 (โดยที่ $x\neq 0$) แล้ว $f(x)$ ไม่เข้าใกล้ค่าคงตัวใด ๆ เลย ลักษณะนี้กล่าวว่า f นี้ไม่มีลิมิตที่จุด $x=0$ หรือ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}$ ไม่มี

จากตัวอย่างที่ได้กล่าวมาทั้งหมดนั้น จะเห็นว่าในการหาค่า $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ นั้นเราพิจารณาค่า $f(x)$ สำหรับ x ที่อยู่ใกล้ ๆ a ทั้งทางซ้าย$(x<a)$ และทางขวา$(x>a)$ ของ a แต่ถ้าพิจารณาค่า $f(x)$ เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ a ทั้งทางซ้ายและทางขวาเพียงทางเดียว แล้ว $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ค่าคงตัวเพียงค่าเดียวจะกล่าวว่าฟังก์ชัน f มีลิมิตทางซ้ายหรือทางขวาที่จุด $x=a$ ตามลำดับ กล่าวคือ

เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ a โดยที่ $x<a$ แล้ว $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ค่าคงตัว L โดยที่ L เป็นจำนวนจริงจะกล่าวได้ว่า ลิมิตของ $f(x)$ เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ a ทั้งทางซ้ายเท่ากับ L เขียนแทนด้วย $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=L$

ในทำนองเดียวกันเมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ a โดยที่ $x > a$ แล้ว $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ค่าคงตัว M โดยที่ M เป็นจำนวนจริงจะกล่าวได้ว่า ลิมิตของ $f(x)$ เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ a ทางขวาเท่ากับ M เมื่อเขียนแทนด้วย $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = R$ (อุษณีย์ ลีรวัฒน์, 2552 : 21).

ให้สังเกตว่า $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ ก็ต่อเมื่อ $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L$

ในตัวอย่าง 2.1 จะเห็นว่า $\lim\limits_{x\to 3}(x+1) = 4$ และ $\lim\limits_{x\to 3^-}(x+1) = 4 = \lim\limits_{x\to 3^+}(x+1)$

ในตัวอย่าง 2.2 จะเห็นว่า $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x-1} = 3$ และ

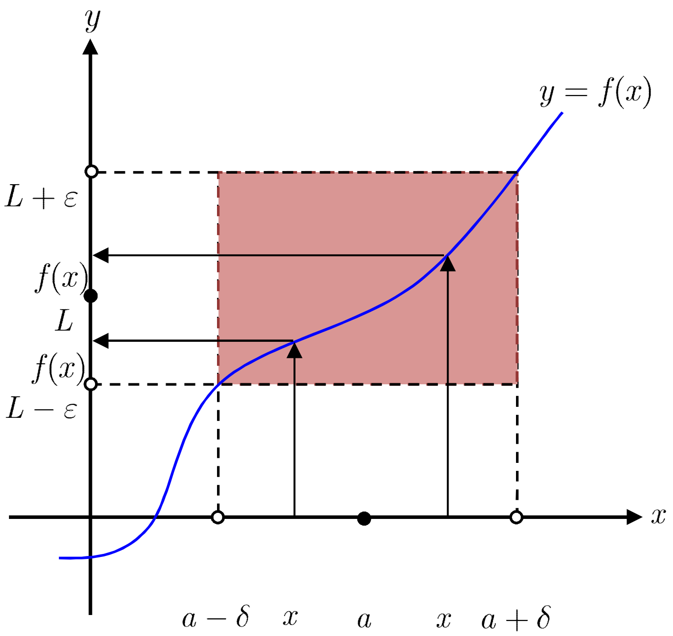
$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2+x-2}{x-1} = 3 = \lim_{x\to 1^+}\frac{x^2+x-2}{x-1}$$

ในตัวอย่าง 2.3 จะเห็นว่า $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{|x|}$ ไม่มี แต่ $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x}{|x|} = -1$ และ $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{|x|} = 1$

และในตัวอย่าง 2.4 จะเห็นว่า $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}$ ไม่มี และ $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}$ ไม่มี และ $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}$ ไม่มี

จากที่กล่าวมาทั้งหมดผู้เรียนได้ทราบความหมายของ $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ โดยที่ a และ L เป็นจำนวนจริง อย่างคร่าว ๆ แล้วว่า สำหรับ $x \in D_f$ ซึ่ง $x \neq a$ ถ้า x เข้าใกล้ a แล้ว $f(x)$ จะเข้าใกล้ L แต่คำว่าเข้าใกล้นั้นยังไม่ชัดเจนว่าเข้าใกล้อย่างไรเพียงใด ดังนั้นต่อไปนี้จะได้กำหนดความหมายของลิมิตของฟังก์ชันให้ถูกต้องชัดเจนเพื่อใช้อ้างอิงหรือนำไปพิสูจน์ลิมิตของฟังก์ชันต่อไป

จากการสังเกตตัวอย่างที่ผ่านมานั้น ถ้า $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ แล้วจะต้องมีลักษณะที่สำคัญต่อไปนี้เสมอ คือ สำหรับแต่ละช่วงเปิดบนแกน y ที่มี L เป็นจุดกึ่งกลางรัศมี $\varepsilon > 0$ และเขียนแทนด้วย $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ ที่กำหนดให้ จะต้องมีช่วงเปิดบนแกน x ที่มี a เป็นจุดกึ่งกลางรัศมี $\delta > 0$ เขียนแทนด้วย $(a-\delta, a+\delta)$ อย่างน้อยหนึ่งช่วงเปิดซึ่งมีคุณสมบัติว่า ทุก ๆ ค่า $\varepsilon > 0$ (ไม่ว่าจะมากหรือน้อยเพียงใดก็ตาม) ที่กำหนดให้ จะต้องหาค่า $\delta > 0$ ได้เสมอซึ่งมีคุณสมบิตว่าถ้า $x \in D_f$ และ $0 < |x-a| < \delta$ แล้ว $|f(x)-L| < \varepsilon$ พิจารณารูปด้านล่างประกอบ (Anton, Howard, 1995 : 81-83)



ภาพประกอบ 2.2 แสดง $\varepsilon > 0$ และ $\delta > 0$

ที่มา : สมเกียรติ พาน้อย. 2543 : 8

เพื่อให้เห็นชัดยิ่งกว่านั้นให้ผู้เรียนพิจารณาตัวอย่าง 2.1 ประกอบดังนี้จากตัวอย่าง 2.1 ได้ว่า $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = \lim\limits_{x\to 3}(x+1) = 4$ ในที่นี้ $a = 3$ และ $L = 4$

โดยลองกำหนดให้ $\varepsilon = 1$ จะหาได้ว่ามี $\delta = 1$ (หรือ $0 < \delta < 1$ ก็ได้) ซึ่งถ้า $0 < \left|x-3\right| < 1 = \delta$ แล้ว $\left|f(x) - L\right| = \left|(x+1) - 4\right| = \left|x-3\right| < 1 = \varepsilon$

ลองกำหนดให้ $\varepsilon = 0.1$ จะหาได้ว่ามี $\delta = 0.1$ (หรือ $0 < \delta < 0.1$ ก็ได้) ซึ่งถ้า $0 < \left|x-3\right| < 0.1 = \delta$ แล้ว $\left|f(x) - L\right| = \left|(x+1) - 4\right| = \left|x-3\right| < 0.1 = \varepsilon$

ดังนั้นถ้าสำหรับทุก $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta = \varepsilon$ (หรือ $0 < \delta < \varepsilon$ ก็ได้) ซึ่งถ้า $0 < \left|x-3\right| < \delta = \varepsilon$ แล้ว $\left|(x+1) - 4\right| < \delta = \varepsilon$

หรือพิจารณาจาก $\lim\limits_{x\to 2}(3x-1) = 5$ ซึ่งมี $f(x) = 2x-1, a = 2, L = 5$ จะเห็นว่า ให้ $\varepsilon = 3$ จะหาได้ว่ามี $\delta = 1$ ซึ่งถ้า $0 < \left|x-2\right| < \delta = 1$ แล้ว $\left|f(x) - L\right| = \left|(3x-1) - 5\right| = \left|3x-6\right| = 3\left|x-2\right| < 3\delta = 3(1) = 3 = \varepsilon$

ให้ $\varepsilon = \dfrac{1}{3}$ จะหาได้ว่ามี $\delta = 1$ ซึ่งถ้า $0 < \left|x-2\right| < \delta = \dfrac{1}{9}$ แล้ว $\left|f(x) - L\right| = \left|(3x-1) - 5\right| = \left|3x-6\right| = 3\left|x-2\right| < 3\delta = 3\left(\dfrac{1}{9}\right) = \dfrac{1}{3} = \varepsilon$

ให้ $\varepsilon = \dfrac{1}{100}$ จะหาได้ว่ามี $\delta = 1$ ซึ่งถ้า $0 < \left|x-2\right| < \delta = \dfrac{1}{300}$

แล้ว $\left|f(x)-L\right| = \left|(3x-1)-5\right| = \left|3x-6\right| = 3\left|x-2\right| < 3\delta = 3\left(\dfrac{1}{300}\right) = \dfrac{1}{100} = \varepsilon$

ในกรณีทั่วไป ถ้าให้ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$ ซึ่งถ้า $0 < \left|x-2\right| < \delta = \dfrac{\varepsilon}{3}$

แล้ว $\left|f(x)-L\right| = 3\left|x-2\right| < 3\delta = 3\left(\dfrac{\varepsilon}{3}\right) = \varepsilon$

จากลักษณะดังกล่าวมาข้างต้นนั้นจึงกำหนดบทนิยามของลิมิตของฟังก์ชันไว้ดังนี้ (เฟื่องฟ้า ศรีจันทพงศ์ และคณะ, 2553 : 13)

บทนิยาม 2.1

กำหนดให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันค่าจริงของตัวแปรจริง และให้ a และ L เป็นค่าคงตัวที่เป็นจำนวนจริง จะกล่าวว่า **ลิมิตของ** $f(x)$ **เมื่อ** x **มีค่าเข้าใกล้** a **เท่ากับ** L (เขียนแทนด้วย $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$) ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ ที่กำหนดให้จะต้องมี $\delta > 0$ ซึ่งมีคุณสมบัติว่า ถ้า $x \in D_f$ และ $0 < \left|x-a\right| < \delta$ แล้ว $\left|f(x)-L\right| < \varepsilon$ แล้วจะกล่าวว่า **ฟังก์ชัน** f **มีลิมิตที่จุด** $x = a$

ในทำนองเดียวกัน ถ้าพิจารณาเฉพาะเมื่อ $x < a$ หรือ $x > a$ อย่างใดอย่างหนึ่งจะได้นิยามของลิมิตทางซ้ายและลิมิตทางขวาดังนี้ (เลิศ สิทธิโกศล, 2541 : 28).

บทนิยาม 2.2

กำหนดให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันค่าจริงของตัวแปรจริง และให้ a, M และ L เป็นค่าคงตัวที่เป็นจำนวนจริงจะกล่าวว่า

ลิมิตของ $f(x)$ **เมื่อ** x **มีค่าเข้าใกล้** a **ทางซ้ายเท่ากับ** L (เขียนแทนด้วย $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L$) ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ ที่กำหนดให้ จะต้องมี $\delta > 0$ ซึ่งมีคุณสมบัติว่า ถ้า $x \in D_f$ และ $a - \delta < x < a$ แล้ว $\left|f(x)-L\right| < \varepsilon$ ในกรณีที่มี $L \in R$ ซึ่ง $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L$ เราเรียก L ว่าเป็น**ลิมิตทางซ้ายของ** f **ที่** $x = a$

บทนิยาม 2.2 (ต่อ)

ลิมิตของ $f(x)$ **เมื่อ** x **มีค่าเข้าใกล้** a **ทางขวาเท่ากับ** M (เขียนแทนด้วย $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=M$) ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละ $\varepsilon>0$ ที่กำหนดให้ จะต้องมี $\delta>0$ ซึ่งมีคุณสมบัติว่า ถ้า $x\in D_f$ และ $a<x<a+\delta$ แล้ว $\left|f(x)-L\right|<\varepsilon$ ในกรณีที่มี $M\in R$ ซึ่ง $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=M$ เราเรียก M ว่าเป็น**ลิมิตทางขวาของ** f **ที่** $x=a$

จากนิยามของลิมิต สามารถแสดงได้ว่า ทฤษฎีบท 2.1 เป็นจริง

ทฤษฎีบท 2.1

ให้ $y=f(x)$ เป็นฟังก์ชันค่าจริงของตัวแปรจริงและให้ a และ L เป็นจำนวนจริงจะได้ว่า $\lim\limits_{x\to a} f\left(x\right)=L$ ก็ต่อเมื่อ $\lim\limits_{x\to a^-} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to a^+} f\left(x\right)=L$

เพื่อความเข้าใจในบทนิยามของลิมิตของฟังก์ชันให้มากยิ่งขึ้น ให้ผู้เรียนสังเกตวิธีการหา $\delta>0$ ที่สอดคล้องกับ $\varepsilon>0$ ตามนิยามของลิมิตในตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2.5 กำหนดให้ $\lim\limits_{x\to 3}\left(4x-7\right)=5$ และให้ $\varepsilon=0.4$ จงหา $\delta>0$ ซึ่งสอดคล้องกับนิยามของลิมิตนี้

วิธีทำ ให้ $\lim\limits_{x\to 3}\left(4x-7\right)=5$ โดยนิยามของลิมิต

สำหรับทุก ๆ $\varepsilon>0$ ที่กำหนดให้ จะมี $\delta>0$ ซึ่งถ้า $0<\left|x-3\right|<\delta$

แล้ว $\left|\left(4x-7\right)-5\right|<\varepsilon$

ในที่นี้ $\varepsilon=0.4$ จะได้ว่ามี $\delta=0.1$ ซึ่งมีคุณสมบัติว่า ถ้า $0<\left|x-3\right|<\delta$ แล้วทำให้

$$\left|\left(4x-7\right)-5\right|=\left|4x-12\right|$$

$$= 4|x-3|$$
$$< 4(0.1)$$
$$= 0.4$$
$$= \varepsilon$$

ดังนั้น $\delta = 0.1$ เป็นค่าที่สอดคล้องกับนิยามของลิมิตนี้เมื่อ $\varepsilon = 0.4$

ข้อสังเกต 2.1

วิธีหาค่า $\delta = 0.1$ ในตัวอย่าง 2.5 ที่ผ่านมาอาจทำได้โดยการแยกตัวประกอบ $|x-3|$ ออกจาก $|4x-12|$ แล้วพิจารณาว่า $|x-3|$ ควรจะน้อยกว่าจำนวนจริงบวกค่าใดจึงจะทำให้ $|4x-12|$ น้อยกว่า $\varepsilon = 0.4$ ดังนี้ $|(4x-7)-5| = |4x-12| = 4|x-3|$ เนื่องจากต้องการให้ $4|x-3| < 0.4$ ดังนั้น $|x-3| < \dfrac{0.4}{4} = 0.1$ เราจึงเลือกใช้ค่า $\delta = 0.1$

ตัวอย่าง 2.6 กำหนดให้ $\lim\limits_{x \to 2}(3x+1) = 7$ และ $\varepsilon > 0$ จงหา $\delta > 0$ ซึ่งสอดคล้องกับนิยามของลิมิตนี้

วิธีทำ ให้ $\lim\limits_{x \to 2}(3x+1) = 7$ โดยนิยามของลิมิต

สำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$ ที่กำหนดให้ จะมี $\delta > 0$ ซึ่งถ้า $0 < |x-2| < \delta$

แล้ว $|(3x+1)-7| < \varepsilon$

กำหนดให้ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่งมีคุณสมบัติว่า ถ้า $0 < |x-2| < \delta$ แล้วทำให้

$$\begin{aligned}
|(3x+1)-7| &= |3x-6| \\
&= 3|x-2| \\
&< 3\delta \\
&= 3\left(\frac{\varepsilon}{3}\right) \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\delta = \dfrac{\varepsilon}{3}$ เป็นค่าที่สอดคล้องกับนิยามของลิมิตนี้เมื่อ $\varepsilon > 0$

ตัวอย่าง 2.7 จงพิสูจน์ว่า $\lim_{x\to 1}\left(4x-7\right)=-3$

วิธีทำ โดยนิยามของลิมิตเราต้องการแสดงว่า ทุก ๆ $\varepsilon>0$ จะมี $\delta>0$ สำหรับทุก ๆ ค่า x

ถ้า $0<\left|x-1\right|<\delta$ แล้ว $\left|\left(4x-7\right)-\left(-3\right)\right|<\varepsilon$

ให้ $\varepsilon>0$ เป็นจำนวนจริงบวกใด ๆ

เลือก $\delta=\dfrac{\varepsilon}{4}$

ให้ $0<\left|x-1\right|<\delta$

พิจารณา
$$\begin{aligned}\left|\left(4x-7\right)-\left(-3\right)\right| &= \left|4x-7+3\right| \\ &= \left|4x-4\right| \\ &= 4\left|x-1\right| \\ &< 4\delta \\ &= 4\frac{\varepsilon}{4} \\ &= \varepsilon\end{aligned}$$

นั่นคือ $\left|\left(4x-7\right)-\left(-3\right)\right|<\varepsilon$

ดังนั้น โดยบทนิยามของลิมิต $\lim_{x\to 1}\left(4x-7\right)=-3$ เป็นจริง

ตัวอย่าง 2.8 จงพิสูจน์ว่า $\lim_{x\to 4}\left(2x+1\right)=9$

วิธีทำ โดยนิยามของลิมิตเราต้องการแสดงว่า ทุก ๆ $\varepsilon>0$ จะมี $\delta>0$ สำหรับทุก ๆ ค่า x

ถ้า $0<\left|x-4\right|<\delta$ แล้ว $\left|\left(2x+1\right)-9\right|<\varepsilon$

ให้ $\varepsilon>0$ เป็นจำนวนจริงบวกใด ๆ

เลือก $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$

ให้ $0<\left|x-4\right|<\delta$

พิจารณา
$$\begin{aligned}\left|\left(2x+1\right)-9\right| &= \left|2x+1-9\right| \\ &= \left|2x-8\right| \\ &= 2\left|x-4\right| \\ &< 2\delta \\ &= 2\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\end{aligned}$$

นั่นคือ $\left|\left(2x+1\right)-9\right|<\varepsilon$

ดังนั้น โดยบทนิยามของลิมิต $\lim_{x\to 4}\left(2x+1\right)=9$ เป็นจริง

ตัวอย่าง 2.9 จงพิสูจน์ว่า $\lim_{x\to -2}\left(5x+3\right)=-7$

วิธีทำ โดยนิยามของลิมิตเราต้องการแสดงว่าทุก ๆ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ สำหรับทุก ๆ ค่า x ถ้า $0<\left|x-\left(-2\right)\right|<\delta$ แล้ว $\left|\left(5x+3\right)-\left(-7\right)\right|<\varepsilon$

ให้ $\varepsilon > 0$ เป็นจำนวนจริงบวกใด ๆ

เลือก $\delta = \dfrac{\varepsilon}{5}$

ให้ $0<\left|x-\left(-2\right)\right|<\delta$

พิจารณา
$$\begin{aligned}\left|\left(5x+3\right)-\left(-7\right)\right| &= \left|5x+3+7\right|\\ &= \left|5x+10\right|\\ &= 5\left|x+2\right|\\ &= 5\left|x-\left(-2\right)\right|\\ &< 5\delta\\ &= 5\frac{\varepsilon}{5}\\ &= \varepsilon\end{aligned}$$

นั่นคือ $\left|\left(5x+3\right)-\left(-7\right)\right|<\varepsilon$

ดังนั้น โดยบทนิยามของลิมิต $\lim_{x\to -2}\left(5x+3\right)=-7$ เป็นจริง

ตัวอย่าง 2.10 จงพิสูจน์ว่า $\lim_{x\to 2}x^2=4$

วิธีทำ เราต้องการแสดงว่า ทุก ๆ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ สำหรับทุก ๆ ค่า x ถ้า $0<\left|x-2\right|<\delta$ แล้ว $\left|x^2-4\right|<\varepsilon$)

ให้ $\varepsilon > 0$ เป็นจำนวนจริงบวกใด ๆ

เลือก $\delta = 1$

ให้ $0<\left|x-2\right|<\delta$

จะได้
$$\begin{aligned}0 &< \left|x-2\right|<1\\ -1 &< x-2<1\\ -1+4 &< x-2+4<1+4\\ 3 &< x+2<5\end{aligned}$$

และ $\left|x+2\right|<5$

พิจารณา $\left|x^2-4\right| = \left|(x-2)(x+2)\right|$

$= \left|(x-2)\right|\left|(x+2)\right|$

$< 5\delta$

กรณี $\varepsilon \geq 5$ จะมี $\delta = 1$ ซึ่ง $0 < \left|x-2\right| < \delta$ แล้ว $\left|x^2-4\right| < \varepsilon$

กรณี $\varepsilon < 5$ จะมี $\delta = \dfrac{\varepsilon}{5}$ ซึ่ง $0 < \left|x-2\right| < \delta$ แล้ว $\left|x^2-4\right| < 5\dfrac{\varepsilon}{5} = \varepsilon$

ดังนั้น โดยบทนิยามของลิมิต $\lim_{x\to 2} x^2 = 4$ เป็นจริง

ตัวอย่าง 2.11 จงพิสูจน์ว่า $\lim_{x\to 7} \dfrac{8}{x-3} = 2$

วิธีทำ เราต้องการแสดงว่า ทุก ๆ $\varepsilon > 0$ มี $\delta > 0$ สำหรับทุกค่า x ถ้า $0 < \left|x-7\right| < \delta$

แล้ว $\left|\dfrac{8}{x-3} - 2\right| < \varepsilon$

ให้ $\varepsilon > 0$ เป็นจำนวนจริงบวกใด ๆ

เลือก $\delta = 1$

ให้ $0 < \left|x-7\right| < \delta$

จะได้ $0 < \left|x-7\right| < 1$

$-1 < x-7 < 1$

$-1+4 < x-7+4 < 1+4$

$3 < x-3 < 5$

และ $\left|x-3\right| > 3$

พิจารณา $\left|\dfrac{8}{x-3} - 2\right| = \left|\dfrac{8}{x-3} - 2\dfrac{(x-3)}{(x-3)}\right|$

$= \left|\dfrac{8-2(x-3)}{x-3}\right|$

$= \left|\dfrac{-2x+14}{x-3}\right|$

$$= 2\left|\frac{x-7}{x-3}\right|$$

$$< \frac{2}{3}\delta$$

กรณี $\varepsilon \geq \frac{2}{3}$ จะมี $\delta = 1$ ซึ่ง $0 < \left|x-7\right| < \delta$ แล้ว $\left|\frac{8}{x-3} - 2\right| < \varepsilon$

กรณี $\varepsilon < \frac{2}{3}$ จะมี $\delta = \frac{3}{2}\varepsilon$ ซึ่ง $0 < \left|x-7\right| < \delta$ แล้ว

$$\left|\frac{8}{x-3} - 2\right| = 2\left|\frac{x-7}{x-3}\right|$$

$$< \left(\frac{2}{3}\right)\frac{3}{2}\varepsilon$$

$$= \varepsilon = 3\frac{\varepsilon}{3}$$

$$= \varepsilon$$

ดังนั้น โดยบทนิยามของลิมิต $\lim\limits_{x \to 7} \frac{8}{x-3} = 2$ เป็นจริง

2.2 ทฤษฎีบทของลิมิต

ในหัวข้อที่ผ่านมานั้นเรื่องความหมายและบทนิยามของลิมิตพร้อมทั้งได้มีการพิสูจน์ลิมิตโดยใช้บทนิยามไปแล้วนั้น สำหรับฟังก์ชันนั้นก็ไม่เหมาะที่จะหาลิมิต แบบในหัวข้อที่ผ่านมา เราจึงใช้ทฤษฎีบทของลิมิตช่วยในการหาค่าลิมิตนั้นจะทำให้การหาค่าลิมิตได้สะดวกรวดเร็วและง่ายขึ้นดังนั้นในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงทฤษฎีบทของลิมิต และการนำทฤษฎีไปใช้ในการหาค่าลิมิตต่อไป สำหรับในหัวข้อนี้นั้นฟังก์ชันที่กล่าวถึงต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันค่าจริงของตัวแปรจริง นอกจากจะระบุเป็นอย่างอื่น (คณาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยรามคำแหง, 2542 : 32-41)

ทฤษฎีบท 2.2

กำหนดให้ I เป็นช่วงเปิดที่บรรจุ a , L_1 และ L_2 เป็นจำนวนจริง f เป็นฟังก์ชันที่นิยามบน I แต่อาจไม่นิยามที่ a ถ้า $\lim\limits_{x \to a} f\left(x\right) = L_1$ และ $\lim\limits_{x \to a} f\left(x\right) = L_2$ แล้ว $L_1 = L_2$

ทฤษฎีบท 2.3

ถ้า a และ k เป็นจำนวนจริงใด ๆ $\lim_{x \to a} k = k$

ทฤษฎีบท 2.4

กำหนดให้ I เป็นช่วงเปิดที่บรรจุ a , L และ M เป็นจำนวนจริง f และ g เป็นฟังก์ชันที่นิยามบน I แต่อาจไม่นิยามที่ a ถ้า $\lim_{x \to a} f(x) = L$ และ $\lim_{x \to a} g(x) = M$ แล้ว $\lim_{x \to a}\left[f(x) + g(x)\right] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) = L + M$

ทฤษฎีบท 2.5

กำหนดให้ I เป็นช่วงเปิดที่บรรจุ a , c และ L เป็นจำนวนจริง f เป็นฟังก์ชันที่นิยามบน I แต่อาจไม่นิยามที่ a ถ้า $\lim_{x \to a} f(x) = L$ แล้ว $\lim_{x \to a} cf(x) = cL$

เราสามารถใช้ทฤษฎีบท 2.2 – ทฤษฎีบท 2.5 สามารถหาลิมิตได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2.12 จงหาค่า $\lim_{x \to 1} 145$

วิธีทำ $\lim_{x \to 1} 145 = 145$

ดังนั้น $\lim_{x \to 1} 145 = 145$

ตัวอย่าง 2.13 จงหาค่า $\lim_{x \to 2}(5x + 8)$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 2}(5x + 8) &= \lim_{x \to 2} 5x + \lim_{x \to 2} 8 \\ &= 10 + 8 \\ &= 18\end{aligned}$$

ดังนั้น $\lim_{x \to 2}(5x + 8) = 8$

ตัวอย่าง 2.14 จงหาค่า $\lim_{x\to 2}\left(3x-5\right)$

วิธีทำ $\lim_{x\to 2}\left(3x-5\right)=3\lim_{x\to 2}x-\lim_{x\to 2}5$

$$=3\lim_{x\to 2}x-\lim_{x\to 2}5$$

$$=6-5$$

$$=1$$

ดังนั้น $\lim_{x\to 2}\left(3x-5\right)=1$

ทฤษฎีบท 2.6

กำหนดให้ I เป็นช่วงเปิดที่บรรจุ a , L และ M เป็นจำนวนจริง f และ g เป็นฟังก์ชันที่นิยามบน I แต่อาจไม่นิยามที่ a ถ้า $\lim_{x\to a}f\left(x\right)=L$ และ $\lim_{x\to a}g\left(x\right)=M$ แล้ว $\lim_{x\to a}\left[f\left(x\right)g\left(x\right)\right]=\lim_{x\to a}f\left(x\right)\lim_{x\to a}g\left(x\right)=LM$

ตัวอย่าง 2.15 จงหาค่า $\lim_{x\to 1}\left(7x^2+5x-8\right)$

วิธีทำ $\lim_{x\to 1}\left(7x^2+5x-8\right)=7(1)^2+5(1)-8$

$$=7+5-8$$

$$=4$$

ดังนั้น $\lim_{x\to 1}\left(7x^2+5x-8\right)=4$

ตัวอย่าง 2.16 จงหาค่า $\lim_{x\to 0}\left(2x+5x^2+2\right)\left(x-1\right)$

วิธีทำ $\lim_{x\to 0}\left(2x+5x^2+2\right)\left(x-1\right)=\lim_{x\to 0}\left(2x+5x^2+2\right)\lim_{x\to 0}\left(x-1\right)$

$$=\left(\lim_{x\to 0}2x+\lim_{x\to 0}5x^2+\lim_{x\to 0}2\right)\left(\lim_{x\to 0}x-\lim_{x\to 0}1\right)$$

$$=\left(2\lim_{x\to 0}x+5\lim_{x\to 0}x^2+\lim_{x\to 0}2\right)\left(\lim_{x\to 0}x-\lim_{x\to 0}1\right)$$

$$=(2)(-1)$$

$$=-2$$

ดังนั้น $\lim_{x\to 0}\left(2x+5x^2+2\right)\left(x-1\right)=-2$

ทฤษฎีบท 2.7

กำหนดให้ I เป็นช่วงเปิดที่บรรจุ a , M เป็นจำนวนจริงใด ๆ ที่ $M \neq 0$ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามบน I แต่อาจไม่นิยามที่ a ถ้า $\lim\limits_{x \to a} f\left(x\right) = M$ แล้ว $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{1}{f\left(x\right)} = \dfrac{1}{M}$

ตัวอย่าง 2.17 จงหาค่า $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x-2}$

วิธีทำ

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{\lim\limits_{x \to 0}\left(x-2\right)}$$

$$= \frac{1}{-2}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

ดังนั้น $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x-2} = -\dfrac{1}{2}$

ทฤษฎีบท 2.8

กำหนดให้ I เป็นช่วงเปิดที่บรรจุ a , L และ M เป็นจำนวนจริงที่ $M \neq 0$ f และ g เป็นฟังก์ชันที่นิยามบน I แต่อาจไม่นิยามที่ a ถ้า $\lim\limits_{x \to a} f\left(x\right) = L$ และ $\lim\limits_{x \to a} g\left(x\right) = M$ แล้ว $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f\left(x\right)}{\lim\limits_{x \to a} g\left(x\right)} = \dfrac{L}{M}$

ข้อสังเกต 2.2

กำหนดให้ I เป็นช่วงเปิดที่บรรจุ a , $L_1, L_2, L_3, \ldots, L_n$ และ $k_1, k_2, k_3, \ldots, k_n$ เป็นจำนวนจริงใด ๆ $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n$ เป็นฟังก์ชันที่นิยามบน I แต่อาจไม่นิยามที่ a

1).ผลของทฤษฎีบท 2.4 สามารถขยายใช้ได้กับฟังก์ชันจำนวนจำกัดนั่นคือ

ถ้า $\lim\limits_{x \to a} f_1\left(x\right) = L_1,\ \lim\limits_{x \to a} f_2\left(x\right) = L_2,\ \lim\limits_{x \to a} f_3\left(x\right) = L_3,\ \ldots,\ \lim\limits_{x \to a} f_n\left(x\right) = L_n$

แล้ว $\lim\limits_{x \to a}\left[k_1 f_1\left(x\right) + k_2 f_2\left(x\right) + \cdots + k_n f_n\left(x\right)\right] = k_1 L_1 + k_2 L_2 + \cdots + k_n L_n$

และ $\lim_{x\to a}\left[f_1(x)\times f_2(x)\times\cdots\times f_n(x)\right]=L_1\times L_2\times\cdots\times L_n$

2). เนื่องจาก $\lim_{x\to a}x=a$ (ทฤษฎีบทบท 2.3)

ดังนั้นถ้า $P(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$ เป็นฟังก์ชันพหุนามใด ๆ แล้ว

จากทฤษฎีบท 2.4 และ ทฤษฎีบท 2.3 จะได้ว่า $\lim_{x\to a}P(x)=P(a)$

ตัวอย่าง 2.18 จงหาค่า $\lim_{x\to 0}\frac{2x+5x^2+2}{x-1}$

วิธีทำ $\lim_{x\to 0}\frac{2x+5x^2+2}{x-1}=\frac{\lim_{x\to 0}\left(2x+5x^2+2\right)}{\lim_{x\to 0}\left(x-1\right)}$

$$=\frac{2}{-1}$$

$$=-2$$

ดังนั้น $\lim_{x\to 0}\frac{2x+5x^2+2}{x-1}=-2$

บทแทรก 2.1

ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชัน ซึ่ง $f(x)=g(x)$ ทุก x ซึ่ง $0<|x-a|<r$ บางค่า $r>0$ และ $\lim_{x\to a}f(x)=L$ แล้วจะได้ว่า $\lim_{x\to a}g(x)=L$

และถ้าแทน $x\to a$ ด้วย $x\to a^+$ หรือ $x\to a^-$ แล้วบทแทรกนี้ยังคงเป็นจริง

ตัวอย่าง 2.19 จงหาค่า $\lim_{x\to 0}\frac{2x+5x^2}{x}$

วิธีทำ เพราะว่า $\lim_{x\to 0}\frac{2x+5x^2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(2+5x\right)}{x}$

$$= \lim_{x\to 0}\left(2+5x\right)$$

$$= 2+5(0)$$

$$= 2$$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x+5x^2}{x} = 2$

ตัวอย่าง 2.20 จงหาค่า $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-7x+12}{x-4}$

วิธีทำ เพราะว่า $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-7x+12}{x-4} = \lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\left(x-4\right)\left(x-3\right)}{x-4}$

$$= \lim_{x\to 4}\left(x-3\right)$$

$$= 4-3$$

$$= 1$$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-7x+12}{x-4} = 1$

ตัวอย่าง 2.21 จงหาค่า $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+8}{x+2}$

วิธีทำ เพราะว่า $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+8}{x+2} = \lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+2^3}{x+2}$

$$= \lim_{x\to -2}\frac{\left(x+2\right)\left(x^2-2x+4\right)}{x+2}$$

$$= \lim_{x\to -2}\left(x^2-2x+4\right)$$

$$= (-2)^2-2(-2)+4$$

$$= 12$$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+8}{x+2} = 12$

ตัวอย่าง 2.22 จงหาค่า $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^3-8}$

วิธีทำ พิจารณา $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^3-8}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-2^2}{x^3-2^3}$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x^2+2x+4)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)}{(x^2+2x+4)}$$

$$=\frac{2+2}{2^2+2(2)+4}$$

$$=\frac{1}{3}$$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^3-8}=\dfrac{1}{3}$

ตัวอย่าง 2.23 จงหาค่า $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$ เมื่อกำหนด $f(x)=\begin{cases}2x^2, & x<2\\ 3-x, & x\geq 2\end{cases}$

วิธีทำ หาค่า $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$ ต้องแยกพิจารณาหาลิมิตซ้าย และลิมิตขวา

พิจารณา $\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}2x^2$

$$=2(2)^2$$

$$=8$$

ได้ $\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=8$

พิจารณา $\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(3-x)$

$$=3-2$$

$$=1$$

ได้ $\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=1$

เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$ ไม่มีลิมิต

ตัวอย่าง 2.24 จงหาค่า $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ เมื่อกำหนด $f(x)=\begin{cases} 2x^2\,, & x<2 \\ 3-x\,, & x\ge 2 \end{cases}$

วิธีทำ หาค่า $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ แยกพิจารณาหาลิมิตซ้าย และลิมิตขวา

พิจารณา $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} 2x^2$

$$=2(1)^2$$

$$=2$$

ได้ $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=2$

พิจารณา $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} 2x^2$

$$=2(1)^2$$

$$=2$$

ได้ $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=2$

เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 1} f\left(x\right)=2$

ตัวอย่าง 2.25 จงหาค่า $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left|x\right|\left(x^3+5\right)}{x}$

วิธีทำ พิจารณา $\left|x\right|=\begin{cases} x\,, & x\ge 0 \\ -x\,, & x<0 \end{cases}$

ดังนั้น การหาค่าลิมิตต้องแยกพิจารณาหาลิมิตซ้าย และลิมิตขวา

พิจารณา $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\left|x\right|\left(x^3+5\right)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-x\left(x^3+5\right)}{x}$

$$=\lim_{x\to 0^-}-\left(x^3+5\right)$$

$$=-(0^3+5)$$

$$=-5$$

ได้ $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{|x|\left(x^3+5\right)}{x}=-5$

พิจารณา $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{|x|\left(x^3+5\right)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x\left(x^3+5\right)}{x}$

$$=\lim_{x\to 0^-}\left(x^3+5\right)$$

$$=\left(0^3+5\right)$$

$$=5$$

ได้ $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{|x|\left(x^3+5\right)}{x}=5$

เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{|x|\left(x^3+5\right)}{x}\neq\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{|x|\left(x^3+5\right)}{x}$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|\left(x^3+5\right)}{x}$ ไม่มีลิมิต

ตัวอย่าง 2.26 จงหาค่า $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{|x-2|\left(x^2-3x+4\right)}{x-2}$

วิธีทำ พิจารณา $|x-2|=\begin{cases}(x-2), & x\geq 2\\ -(x-2), & x<2\end{cases}$

การหาค่าลิมิตต้องแยกพิจารณาหาลิมิตซ้ายและลิมิตขาว

พิจารณา $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{|x-2|\left(x^2-3x+4\right)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{-\left(x-2\right)\left(x^2-3x+4\right)}{x-2}$

$$=\lim_{x\to 2^-}-\left(x^2-3x+4\right)$$

$$=-\left(-2^2-3(2)+4\right)$$

$$=-2$$

ได้ $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{\left|x-2\right|\left(x^2-3x+4\right)}{x-2} = -2$

พิจารณา $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{\left|x-2\right|\left(x^2-3x+4\right)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{\left(x-2\right)\left(x^2-3x+4\right)}{x-2}$

$$= \lim_{x\to 2^+} \left(x^2-3x+4\right)$$

$$= \left(-2^2-3(2)+4\right)$$

$$= 2$$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{\left|x-2\right|\left(x^2-3x+4\right)}{x-2} = 2$

เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{\left|x-2\right|\left(x^2-3x+4\right)}{x-2} \neq \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{\left|x-2\right|\left(x^2-3x+4\right)}{x-2}$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\left|x-2\right|\left(x^2-3x+4\right)}{x-2}$ ไม่มีลิมิต

ตัวอย่าง 2.27 จงหาค่า $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\left|x-1\right|\left(x^2-3x+4\right)}{x^2-3x+2}$

วิธีทำ พิจารณา $\left|x-1\right| = \begin{cases} (x-1), & x \geq 1 \\ -(x-1), & x < 1 \end{cases}$

ดังนั้นการหาค่าลิมิตต้องแยกพิจารณาหาลิมิตซ้ายและลิมิตขวา

พิจารณา $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{\left|x-1\right|\left(x^2-3x+4\right)}{x^2-3x+2} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{-\left(x-1\right)\left(x^2-3x+4\right)}{x^2-3x+2}$

$$= \lim_{x\to 1^-} \frac{-\left(x-1\right)\left(x^2-3x+4\right)}{(x-2)(x-1)}$$

$$= \lim_{x\to 1^-} \frac{-\left(x^2-3x+4\right)}{x-2}$$

$$= 2$$

ได้ $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{|x-1|\left(x^2-3x+4\right)}{x^2-3x+2}=2$

พิจารณา
$$\begin{aligned}\lim_{x\to1^+}\frac{|x-1|\left(x^2-3x+4\right)}{x^2-3x+2}&=\lim_{x\to1^+}\frac{(x-1)\left(x^2-3x+4\right)}{x^2-3x+2}\\&=\lim_{x\to1^+}\frac{(x-1)\left(x^2-3x+4\right)}{(x-2)(x-1)}\\&=\lim_{x\to1^+}\frac{\left(x^2-3x+4\right)}{x-2}\\&=-2\end{aligned}$$

ได้ $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{|x-1|\left(x^2-3x+4\right)}{x^2-3x+2}=-2$

เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{|x-1|\left(x^2-3x+4\right)}{x^2-3x+2}\neq\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{|x-1|\left(x^2-3x+4\right)}{x^2-3x+2}$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{|x-1|\left(x^2-3x+4\right)}{x^2-3x+2}$ ไม่มีลิมิต

ตัวอย่าง 2.28 จงหาค่า $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\left|(x-1)(2x)\right|}{x^2-3x+2}$

วิธีทำ พิจารณา $|x-1|=\begin{cases}x-1, & x\geq1\\-(x-1), & x<1\end{cases}$

และ $|2x|=\begin{cases}2x, & x\geq0\\-2x, & x<0\end{cases}$

การหาค่าลิมิตต้องแยกพิจารณาหาลิมิตซ้ายและลิมิตขวา

พิจารณา $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{\left|(x-1)(2x)\right|}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{|x-1||2x|}{x^2-3x+2}$

$$= \lim_{x \to 1^-} \frac{-\left(x-1\right)(2x)}{(x-2)(x-1)}$$

$$= \lim_{x \to 1^-} \frac{-(2x)}{x-2}$$

$$= 2$$

ได้ $\lim_{x \to 1^-} \frac{\left|\left(x-1\right)\left(2x\right)\right|}{x^2-3x+2} = 2$

พิจารณา $$\lim_{x \to 1^+} \frac{\left|\left(x-1\right)\left(2x\right)\right|}{x^2-3x+2} = \lim_{x \to 1^+} \frac{\left|x-1\right|\left|2x\right|}{x^2-3x+2}$$

$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{-\left(x-1\right)(2x)}{(x-2)(x-1)}$$

$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{-2x}{x-2}$$

$$= 2$$

ได้ $\lim_{x \to 1^+} \frac{\left|\left(x-1\right)\left(2x\right)\right|}{x^2-3x+2} = -2$

เนื่องจาก $\lim_{x \to 1^-} \frac{\left|\left(x-1\right)\left(2x\right)\right|}{x^2-3x+2} \neq \lim_{x \to 1^+} \frac{\left|\left(x-1\right)\left(2x\right)\right|}{x^2-3x+2}$

ดังนั้น $\lim_{x \to 1} \frac{\left|\left(x-1\right)\left(2x\right)\right|}{x^2-3x+2}$ ไม่มีลิมิต

2.3 ลิมิตที่เกี่ยวข้องกับอนันต์

ก่อนที่จะศึกษาลิมิตที่เกี่ยวข้องกับอนันค์นั้นก่อนอื่นต้องรู้จักความหมายของคำว่า **อนันต์** เสียก่อน อนันต์ แทนด้วยสัญลักษณ์ ∞ ไม่ใช่จำนวนจริง แต่ใช้แทนจำนวนที่มีค่ามากกว่าทุกจำนวนจริง กล่าวคือสำหรับทุก ๆ $r \in R$

$$\left|r\right| < \infty$$

และในทางตรงกันข้าม **ลบอนันต์** แทนด้วยสัญลักษณ์ $-\infty$ ก็จะใช้แทนจำนวนที่น้อยกว่าทุก ๆ จำนวนจริง กล่าวคือทุก ๆ $r \in R$

$$-\infty < r$$

ดังบทนิยามต่อไปนี้ (สุรวิทย์ ตันแต่งผล และอนุสรณ์ ชนวีรยุทธ, 2537 : 20-21).

บทนิยาม 2.3

จะกล่าวว่าจำนวนจริง x **เข้าสู่อนันต์** (เขียนแทนด้วย $x \to \infty$) ถ้า $x > M$ ทุก ๆ จำนวนจิง $M > 0$ (กล่าวคือ x มีค่าเพิ่มขึ้นอย่างไม่มีขอบเขต)

จะกล่าวว่าจำนวนจริง x **เข้าสู่ลบอนันต์** (เขียนแทนด้วย $x \to -\infty$) ถ้า $x < M$ ทุก ๆ จำนวนจิง $M < 0$ (กล่าวคือ x มีค่าลดลงอย่างไม่มีขอบเขต)

ในที่นี้จะแบ่งการกล่าวถึงลิมิตที่เกี่ยวข้องกับอนันต์เป็น 3 ประเภทดังต่อไปนี้

1. ลิมิต (ค่าจริง) ที่จุดอนันต์

ฟังก์ชัน f มีลิมิตที่ ∞ และค่าลิมิตเป็นจำนวนจริงมี 2 ลักษณะคือ

$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ และ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$ โดยที่ L เป็นจำนวนจริง

2. ลิมิตค่าอนันต์ที่จุด $x = a$ (a เป็นจำนวนจริง)

ให้ a เป็นจำนวนจริงฟังก์ชัน f ไม่มีลิมิตที่จุด $x = a$ โดยที่ถ้า x เข้าใกล้ a แล้วค่า $f(x)$ เพิ่มขึ้นหรือลดลงอย่างไม่จำกัด (นั่นคือ $f(x) \to \infty$ หรือ $f(x) \to -\infty$) มี 6 ลักษณะคือ

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty, \qquad \lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \infty, \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty, \qquad \lim_{x\to a} f(x) = -\infty$$

3. ลิมิตค่าอนันต์ที่จุดอนันต์

ฟังก์ชัน f ไม่มีลิมิตที่จุดอนันต์โดยที่เมื่อ $x \to \infty$ หรือ $x \to -\infty$ แล้ว $f(x) \to \infty$ หรือ $f(x) \to -\infty$) มี 4 ลักษณะคือ

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

ก่อนที่จะศึกษาลิมิตที่เกี่ยวข้องกับอนันต์ทั้ง 3 ประเภทอย่างละเอียดนั้นจะขอกล่าวถึงนิยามที่สำคัญและจำเป็นต้องทราบก่อนดังนี้ (ทัศนีย์ อารยะตระกูลลิขิต และคณะ, 2539 : 25)

บทนิยาม 2.4

ฟังก์ชัน $f(x)$ เป็นฟังก์ชันซึ่งเมื่อ x เข้าใกล้ a แล้ว $f(x)$ อยู่ในรูปแบบใดรูปแบบหนึ่งดังต่อไปนี้ คือ $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty, 0^0, \infty^0$ หรือ 1^∞ แล้วจะได้ว่า $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ มี **รูปแบบที่ไม่กำหนด** ที่ $x = a$

2.3.1 ลิมิต (ค่าจริง) ที่จุดอนันต์

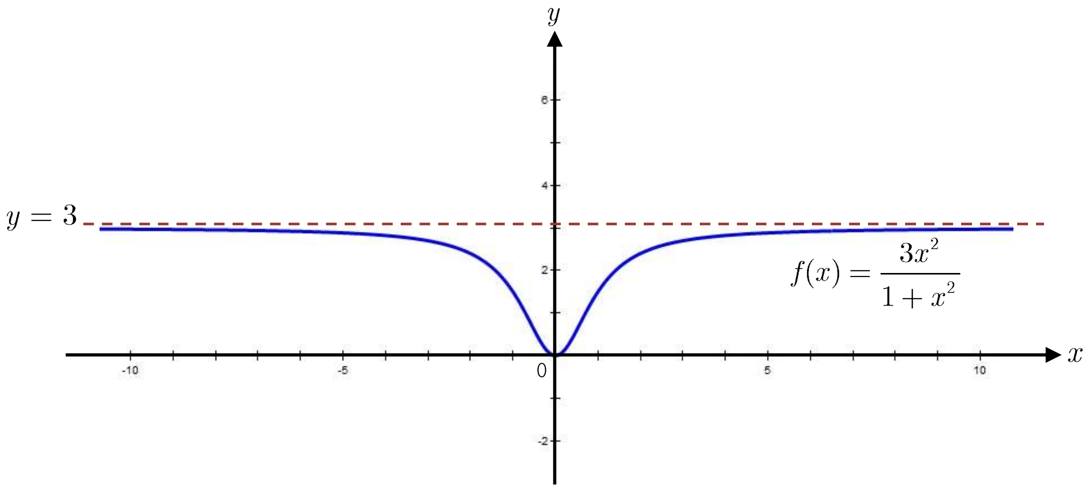
พิจารณาฟังก์ชัน $f(x) = \dfrac{3x^2}{1+x^2}$ ได้ตารางดังต่อไปนี้

ตาราง 2.3 ค่าของ $f(x) = \dfrac{3x^2}{1+x^2}$ เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ ∞ และ $-\infty$

x	$f(x) = \dfrac{3x^2}{1+x^2}$
1	$\dfrac{3}{2}$
10	$\dfrac{300}{101}$
100	$\dfrac{30000}{10001}$
1000	$\dfrac{3000000}{1000001}$
...	...

x	$f(x) = \dfrac{3x^2}{1+x^2}$
-1	$\dfrac{3}{2}$
-10	$\dfrac{300}{101}$
-100	$\dfrac{30000}{10001}$
-1000	$\dfrac{3000000}{1000001}$
...	...

พิจารณากราฟฟังก์ชัน $f(x)=\dfrac{3x^2}{1+x^2}$ ดังต่อไปนี้



ภาพประกอบ 2.3 กราฟของฟังก์ชัน $f(x)=\dfrac{3x^2}{1+x^2}$

จากตารางหรือจากกราฟของฟังก์ชัน $f(x)=\dfrac{3x^2}{1+x^2}$ จะเห็นว่า เมื่อ $x\to\infty$ แล้ว ค่าของฟังก์ชัน $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ 3 นั่นคือ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2}{1+x^2}=3$ และในทำนองเดียวกัน เมื่อ $x\to-\infty$ แล้ว ค่าของฟังก์ชัน $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ 3 จะได้ $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^2}{1+x^2}=3$

ในกรณีทั่วไป $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=L$ หมายความว่า เมื่อ x มีค่าเพิ่มขึ้นอย่างไม่จำกัดแล้วค่า $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้จำนวนจริง L และในทำนองเดียวกัน $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=L$ หมายความว่า เมื่อ x มีค่าลดลงอย่างไม่จำกัดแล้วค่า $f(x)$ เข้าใกล้จำนวนจริง L เขียนเป็นบทนิยามได้ดังนี้ (เฟื่องฟ้า ศรีจันทพงศ์ และคณะ, 2553 : 26-27)

บทนิยาม 2.5

ให้ f เป็นฟังก์ชันค่าจริงที่นิยามบนบางช่วงเปิด (a,∞) กำหนดให้ L เป็นจำนวนจริง $\lim_{x\to\infty} f\left(x\right) = L$ (อ่านว่า ลิมิตของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าสู่ ∞ เท่ากับ L) ก็ต่อเมื่อ ทุก ๆ จำนวนจริง $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนจริง $M > 0$ ซึ่ง $\left|f\left(x\right) - L\right| < \varepsilon$ ทุก ๆ $x > M$ ให้ f เป็นฟังก์ชันค่าจริงที่นิยามบนบางช่วงเปิด $(-\infty,b)$

$\lim_{x\to-\infty} f\left(x\right) = L$ (อ่านว่า ลิมิตของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าสู่ $-\infty$ เท่ากับ L) ก็ต่อเมื่อ ทุก ๆ จำนวนจริง $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนจริง $M < 0$ ซึ่ง $\left|f\left(x\right) - L\right| < \varepsilon$ ทุก ๆ $x < M$

ทฤษฎีบทต่าง ๆ เกี่ยวกับการมีค่าเดียวของลิมิต ลิมิตของฟังก์ชันคงตัว ลิมิต ผลบวก ผลคูณ และผลหาร ของฟังก์ชันยังคงเป็นจริงในกรณีที่ x มีค่าเข้าใกล้อนันต์ด้วย นอกจากนี้ยังพบความจริงที่ว่าถ้าให้ c เป็นจำนวนจริง แล้ว $\lim_{x\to\infty} \frac{c}{x} = 0$ และ $\lim_{x\to-\infty} \frac{c}{x} = 0$ จากบทนิยามดังกล่าวสามารถหาค่าลิมิตที่อนันต์ได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2.29 จงหาค่า $\lim_{x\to\infty} \frac{3x-2}{5x-4}$

วิธีทำ
$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x-2}{5x-4} = \lim_{x\to\infty} \frac{x\left(3-\frac{2}{x}\right)}{x\left(5-\frac{4}{x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(3-\frac{2}{x}\right)}{\left(5-\frac{4}{x}\right)}$$

$$= \frac{\lim_{x\to\infty}\left(3-\frac{2}{x}\right)}{\lim_{x\to\infty}\left(5-\frac{4}{x}\right)}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty} 3 - \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2}{x}}{\lim\limits_{x\to\infty} 5 - \lim\limits_{x\to\infty} \frac{4}{x}}$$

$$= \frac{3-0}{5-0}$$

$$= \frac{3}{5}$$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x-2}{5x-4} = \frac{3}{5}$

ตัวอย่าง 2.30 จงหาค่า $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x^2+7x+5}{5x^3+2x-1}$

วิธีทำ $$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2+7x+5}{5x^3+2x-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3\left(\frac{2}{x}+\frac{7}{x^2}+\frac{5}{x^3}\right)}{x^3\left(5+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3\left(\frac{2}{x}+\frac{7}{x^2}+\frac{5}{x^3}\right)}{x^3\left(5+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{2}{x}+\frac{7}{x^2}+\frac{5}{x^3}}{5+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2}{x} + \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{7}{x^2} + \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{5}{x^3}}{\lim\limits_{x\to-\infty} 5 + \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2}{x^2} - \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^3}}$$

$$= \frac{0+0+0}{5+0-1}$$

$$= \frac{0}{5}$$

$$= 0$$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x^2+7x+5}{5x^3+2x-1} = 0$

ตัวอย่าง 2.31 จงหาค่า $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{3x^6+6x^2-1}}{2x^3+x}$

วิธีทำ $$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{3x^6+6x^2-1}}{2x^3+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^6\left(3+\frac{6}{x^4}-\frac{1}{x^6}\right)}}{x^3\left(2+\frac{1}{x^2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left|x^3\right|\sqrt{\left(3+\frac{6}{x^4}-\frac{1}{x^6}\right)}}{x^3\left(2+\frac{1}{x^2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\sqrt{\left(3+\frac{6}{x^4}-\frac{1}{x^6}\right)}}{x^3\left(2+\frac{1}{x^2}\right)}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{\left(3+\frac{6}{x^4}-\frac{1}{x^6}\right)}}{\lim\limits_{x\to\infty}2+\frac{1}{x^2}}$$

$$=\frac{\sqrt{\lim\limits_{x\to\infty}3+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6}{x^4}-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^6}}}{\lim\limits_{x\to\infty}2+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}}$$

$$=\frac{\sqrt{3+0-0}}{2+0}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ดังนั้น $$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{3x^4+6x^2-1}}{2x^2+x}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ตัวอย่าง 2.32 จงหาค่า $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{3x^6+6x^2-1}}{2x^3+x}$

วิธีทำ $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{3x^6+6x^2-1}}{2x^3+x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^6\left(3+\dfrac{6}{x^4}-\dfrac{1}{x^6}\right)}}{x^3\left(2+\dfrac{1}{x^2}\right)}$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left|x^3\right|\sqrt{\left(3+\dfrac{6}{x^4}-\dfrac{1}{x^6}\right)}}{x^3\left(2+\dfrac{1}{x^2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^3\sqrt{\left(3+\dfrac{6}{x^4}-\dfrac{1}{x^6}\right)}}{x^3\left(2+\dfrac{1}{x^2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{\left(3+\dfrac{6}{x^4}-\dfrac{1}{x^6}\right)}}{2+\dfrac{1}{x^2}}$$

$$=\frac{-\sqrt{\lim\limits_{x\to-\infty}3+\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{6}{x^4}-\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^6}}}{\lim\limits_{x\to-\infty}2+\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^2}}$$

$$=\frac{-\sqrt{3+0-0}}{2+0}$$

$$=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{3x^4+6x^2-1}}{2x^2+x}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

ตัวอย่าง 2.33 จงหาค่า $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{5x^5+2x^3+7}}{2x^3-1}$

วิธีทำ $$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{5x^5+2x^3+7}}{2x^3-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^6\left(\frac{5}{x}+\frac{2}{x^3}+\frac{7}{x^6}\right)}}{x^3\left(2-\frac{1}{x^3}\right)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^6\left(\frac{5}{x}+\frac{2}{x^3}+\frac{7}{x^6}\right)}}{x^3\left(2-\frac{1}{x^3}\right)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\left|x^3\right|\sqrt{\left(\frac{5}{x}+\frac{2}{x^3}+\frac{7}{x^6}\right)}}{x^3\left(2-\frac{1}{x^3}\right)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{\left(\frac{5}{x}+\frac{2}{x^3}+\frac{7}{x^6}\right)}}{2-\frac{1}{x^3}}$$

$$= \frac{\sqrt{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x^3}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7}{x^6}}}{\lim\limits_{x\to\infty}2-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^3}}$$

$$= \frac{\sqrt{0+0+0}}{2-0}$$

$$= \frac{0}{2}$$

$$= 0$$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{5x^5+2x^3+7}}{2x^3-1} = 0$

ข้อสังเกต 2.3

จากตัวอย่างที่ผ่านมาจะสังเกตได้ว่าถ้า $P(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ และ $Q(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m$ เป็นฟังก์ชันพหุนามโดยที่ $a_n\neq 0$ และ $b_m\neq 0$ แล้ว

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\begin{cases}\dfrac{a_n}{b_m}, & n=m\\ 0, & n<m\end{cases} \quad \text{และ} \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\begin{cases}\dfrac{a_n}{b_m}, & n=m\\ 0, & n<m\end{cases}$$

2.3.2 ลิมิตค่าอนันต์ที่จุด $x=a$

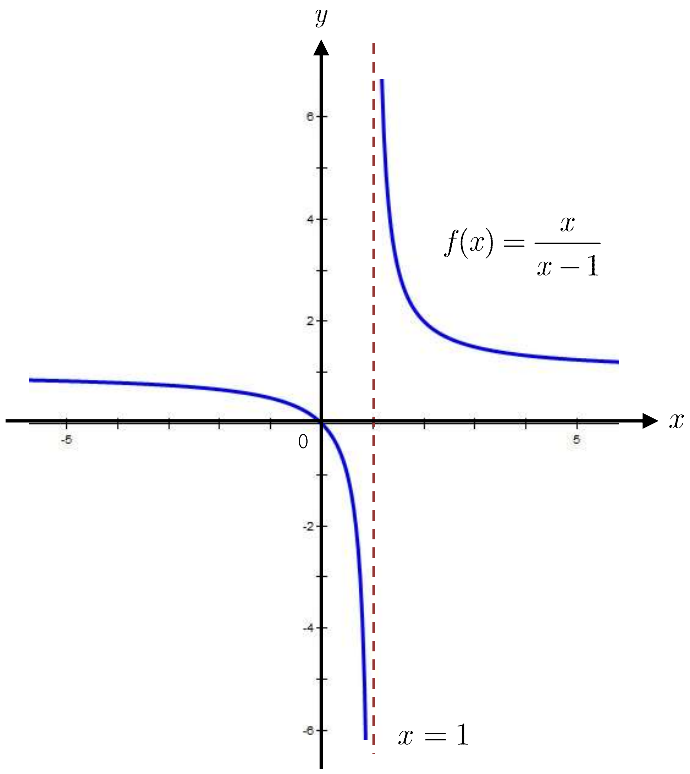
พิจารณาฟังก์ชัน $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ ได้ตารางดังต่อไปนี้

ตาราง 2.4 ค่าของ $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 1

x	$f(x)=\dfrac{x}{x-1}$
0.5	-1
0.9	-9
0.99	-99
0.999	-999
0.9999	-9999
...	...

x	$f(x)=\dfrac{x}{x-1}$
1.5	3
1.1	11
1.01	101
1.001	1001
1.0001	10001
...	...

พิจารณากราฟฟังก์ชัน $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ ดังต่อไปนี้



ภาพประกอบ 2.4 กราฟของฟังก์ชัน $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$

จากตารางหรือจากกราฟของฟังก์ชัน $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ จะเห็นว่า เมื่อ x เข้าใกล้ 1 ทางขวา $(x>1)$ นั้น ค่าของ $f(x)$ เข้าสู่ อนันต์(∞) และเมื่อ x เข้าใกล้ 1 ทางซ้าย$(x<1)$ นั้นค่าของ $f(x)$ เข้าสู่ ลบอนันต์$(-\infty)$ ในกรณีเช่นนี้เราได้ว่า

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x}{x-1}=\infty \qquad \text{และ} \qquad \lim_{x\to 1^-}\frac{x}{x-1}=-\infty$$

ในทำนองเดียวกันจะได้ว่า

$$\lim_{x\to 1^+}\left(-\frac{x}{x-1}\right)=-\infty \text{ และ } \lim_{x\to 1^-}\left(-\frac{x}{x-1}\right)=\infty$$

และ

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{x}{x-1}\right)^2=\infty \qquad \text{และ} \qquad \lim_{x\to 1^-}\left(\frac{x}{x-1}\right)^2=\infty$$

ในกรณีทั่ว ๆ ไปถ้า $\lim_{x\to a^+} f\left(x\right) = \infty$ (หรือ $-\infty$) และ $\lim_{x\to a^-} f\left(x\right) = \infty$ (หรือ $-\infty$) มีความหมายดังบทนิยามต่อไปนี้ (สมเกียรติ พาน้อย และคณะ, 2543 : 31-33)

บทนิยาม 2.6

$\lim_{x\to a^+} f\left(x\right) = \infty$ (อ่านว่าลิมิตของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ a ทางขวาเท่ากับ ∞) ก็ต่อเมื่อ ทุก ๆ จำนวน $M > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่งถ้า $a < x < a + \delta$ แล้ว $f(x) > M$

$\lim_{x\to a^+} f\left(x\right) = -\infty$ (อ่านว่าลิมิตของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ a ทางขวาเท่ากับ $-\infty$) ก็ต่อเมื่อ ทุก ๆ จำนวน $M < 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่งถ้า $a < x < a + \delta$ แล้ว $f(x) < M$

$\lim_{x\to a^-} f\left(x\right) = \infty$ (อ่านว่าลิมิตของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ a ทางซ้ายเท่ากับ ∞) ก็ต่อเมื่อ ทุก ๆ จำนวน $M > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่งถ้า $a - \delta < x < a$ แล้ว $f(x) > M$

$\lim_{x\to a^-} f\left(x\right) = -\infty$ (อ่านว่าลิมิตของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ a ทางซ้ายเท่ากับ $-\infty$) ก็ต่อเมื่อ ทุก ๆ จำนวน $M < 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่งถ้า $a - \delta < x < a$ แล้ว $f(x) < M$

$\lim_{x\to a} f\left(x\right) = \infty$ ก็ต่อเมื่อ $\lim_{x\to a^+} f\left(x\right) = \lim_{x\to a^-} f\left(x\right) = \infty$ หรือ ทุก ๆ จำนวน $M > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่งถ้า $0 < \left|x - a\right| < \delta$ แล้ว $f(x) > M$

$\lim_{x\to a} f\left(x\right) = -\infty$ ก็ต่อเมื่อ $\lim_{x\to a^+} f\left(x\right) = \lim_{x\to a^-} f\left(x\right) = -\infty$ หรือ ทุก ๆ จำนวน $M < 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่งถ้า $0 < \left|x - a\right| < \delta$ แล้ว $f(x) < M$

ทฤษฎีบท 2.9

1. $\lim_{x\to a^+} \frac{1}{\left(x-a\right)^n} = \infty$
2. $\lim_{x\to a^-} \frac{1}{\left(x-a\right)^n} = \begin{cases} \infty, & n \text{ เป็นเลขคู่} \\ -\infty, & n \text{ เป็นเลขคี่} \end{cases}$

ตัวอย่าง 2.34 จงหาค่า $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{(x-3)^2}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{1}{(x-3)^2}=\infty$

และ $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{1}{(x-3)^2}=\infty$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{(x-3)^2}=\infty$

ตัวอย่าง 2.35 จงหาค่า $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{(x-2)^3}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{1}{(x-2)^3}=-\infty$

และ $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{1}{(x-2)^3}=\infty$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{(x-2)^3}$ ไม่มีลิมิต

ตัวอย่าง 2.36 จงหาค่า $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty$

และ $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=\infty$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}$ ไม่มีลิมิต

ทฤษฎีบท 2.10

ให้ $\lim\limits_{x\to a}f(x)=L$ และ $\lim\limits_{x\to a}g(x)=I$ เมื่อ $L\in R$ และ $I=\infty$ หรือ $-\infty$ จะได้ว่า

1. $\lim\limits_{x\to a}\left[g(x)\pm f(x)\right]=I$

ทฤษฎีบท 2.10(ต่อ)

2. $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\times g(x)\right]=\begin{cases} I, & L>0 \\ \infty, & L<0 \text{ และ } I=-\infty \\ -\infty, & L<0 \text{ และ } I=\infty \end{cases}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=0 \quad \text{เมื่อ } L\neq 0$$

3. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$

4. $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[n]{g(x)}=\begin{cases} I, & n \text{ เป็นเลขคี่} \\ \infty, & n \text{ เป็นเลขคู่ และ } I=\infty \end{cases}$

5. $\lim\limits_{x\to a} g^n(x)=\begin{cases} I, & n \text{ เป็นเลขคี่} \\ \infty, & n \text{ เป็นเลขคู่} \end{cases}$

ข้อสังเกต 2.4

1. ทฤษฎีบท 2.10 ยังคงเป็นจริงสำหรับกรณีลิมิตทางซ้าย และลิมิตทางขวาของ f และ g

2. ถ้า $L=0$ แล้ว $\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot g(x)$ อยู่ในรูปแบบไม่กำหนด แล้วลิมิตนี้อาจจะหาค่าได้หรือหาค่าไม่ได้ ตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2.37 จงหาค่า $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\cdot g(x)$ เมื่อกำหนด $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ และ $g(x)=x$

วิธีทำ พิจารณา $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x^2}=\infty$

และ $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} x=0$

จะได้ว่า $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\cdot g(x)$ อยู่ในรูปแบบไม่กำหนด ($\infty\cdot 0$)

แต่ $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)\cdot g(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{x}{x^2}$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x}$$

$$= \infty$$

ดังนั้น $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) \cdot g(x) = \infty$

ตัวอย่าง 2.38 จงหาค่า $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) \cdot g(x)$ เมื่อกำหนด $f(x) = \dfrac{1}{x}$ และ $g(x) = x$

วิธีทำ พิจารณา $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = \infty$

และ $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} x = 0$

จะได้ว่า $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) \cdot g(x)$ อยู่ในรูปแบบไม่กำหนด ($\infty \cdot 0$)

แต่ $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) \cdot g(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{x}{x}$

$$= \lim_{x \to 0^+} 1$$

$$= 1$$

ดังนั้น $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) \cdot g(x) = 1$

ตัวอย่าง 2.39 จงหาค่า $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) \cdot g(x)$ เมื่อกำหนด $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$ และ $g(x) = (x-3)^2$

วิธีทำ พิจารณา $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{1}{x-3} - \infty$

และ $\lim\limits_{x \to 3^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} (x-3)^2 = 0$

จะได้ว่า $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) \cdot g(x)$ อยู่ในรูปแบบไม่กำหนด ($-\infty \cdot 0$)

แต่ $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) \cdot g(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{(x-3)^2}{x-3}$

$$= \lim_{x \to 3^-} (x-3)$$

$$= 0$$

ดังนั้น $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) \cdot g(x) = 0$

ดังนั้นการหาค่าลิมิตนั้นไม่มีหลักเกณฑ์ตายตัวทั้งนี้ต้องอาศัย นิยาม ทฤษฎีบทต่าง ๆ รวมทั้งข้อสังเกตุเพื่อจะตรวจสอบว่าลิมิตนั้นหาค่าได้หรือหาค่าไม่ได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้ (Ross, F.L. Maurice,.W.D. and Frank, G.R., 2001 : 46)

ตัวอย่าง 2.40 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to 2^+}\left[\dfrac{1}{(x-2)^3}+5\right]$

วิธีทำ จาก $\lim\limits_{x\to 2^+}\left[\dfrac{1}{(x-2)^3}+5\right]=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{1}{(x-2)^3}+\lim\limits_{x\to 2^+}5$

และ $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{1}{(x-2)^3}=\infty\,,\qquad \lim\limits_{x\to 2^+}5=5$

โดยทฤษฎีบท 2.10 ข้อ 1

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 2^+}\left[\dfrac{1}{(x-2)^3}+5\right]=\infty$

ตัวอย่าง 2.41 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{x^2-1}$

วิธีทำ จาก

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{x^2-1}&=\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{(x-1)(x+1)}\\&=\lim_{x\to 1^-}\left[\frac{1}{(x-1)}\times\frac{1}{(x+1)}\right]\\&=\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{(x-1)}\times\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{(x+1)}\end{aligned}$$

และ $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{(x-1)}=-\infty\,,\qquad \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{(x+1)}=\dfrac{1}{2}$

โดยทฤษฎีบท 2.10 ข้อ 2

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{x^2-1}=-\infty$

ตัวอย่าง 2.42 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{5}{x^2-3x}$

วิธีทำ จาก $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{5}{x^2-3x} = \lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{5}{x(x-3)}$

$$= \lim_{x\to 3^+} \left[\frac{5}{x} \times \frac{1}{x-3}\right]$$

$$= \lim_{x\to 3^+} \frac{5}{x} \times \lim_{x\to 3^+} \frac{1}{x-3}$$

และ $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{5}{x} = \dfrac{5}{3}$, $\qquad \lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{1}{x-3} = \infty$

โดยทฤษฎีบท 2.10 ข้อ 2

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{5}{x^2-3x} = \infty$

ตัวอย่าง 2.43 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to -2} 5(x+2)^2$

วิธีทำ จาก $\lim\limits_{x\to -2} 5(x+2)^2 = \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{5}{\left[\dfrac{1}{(x+2)^2}\right]}$

$$= \lim_{x\to -2} \frac{5}{\left[\dfrac{1}{(x+2)^2}\right]}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to -2} 5}{\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{1}{(x+2)^2}}$$

และ $\lim\limits_{x\to -2} 5 = 5$, $\qquad \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{1}{(x+2)^2} = \infty$

โดยทฤษฎีบท 2.10 ข้อ 3

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to -2} 5(x+2)^2 = 0$

ตัวอย่าง 2.44 จงหาค่า $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{1}{x^2-7x+12}$

วิธีทำ จาก $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{1}{x^2-7x+12}=\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{1}{(x-3)(x-4)}$

$$=\lim_{x\to 3^-}\left[\frac{1}{(x-3)}\times\frac{1}{(x-4)}\right]$$

$$=\lim_{x\to 3^-}\frac{1}{(x-3)}\times\lim_{x\to 3^-}\frac{1}{(x-4)}$$

และ $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{1}{(x-3)}=-\infty\,,\qquad \lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{1}{(x-4)}=-1$

โดยทฤษฎีบท 2.10 ข้อ 2

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{1}{x^2-7x+12}=\infty$

ตัวอย่าง 2.45 จงหาค่า $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+1}{x-2}$

วิธีทำ พิจารณา $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x+1}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\left[\dfrac{\frac{1}{x-2}}{\frac{1}{x+1}}\right]$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{1}{x-2}}{\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{1}{x+1}}$$

และ $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{1}{x-2}=-\infty\,,\qquad \lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{3}$

โดยทฤษฎีบท 2.10 ข้อ 2

ได้ $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x+1}{x-2}=-\infty$

พิจารณา $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x+1}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\left[\dfrac{\frac{1}{x-2}}{\frac{1}{x+1}}\right]$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{1}{x-2}}{\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{1}{x+1}}$$

และ $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{1}{x-2} = \infty\,,\ \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{1}{3}$

โดยทฤษฎีบท 2.10 ข้อ 2

ได้ $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x+1}{x-2} = \infty$

เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x+1}{x-2} \neq \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x+1}{x-2}$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x+1}{x-2}$ ไม่มีลิมิต

2.3.3 ลิมิตค่าอนันต์ที่จุดอนันต์

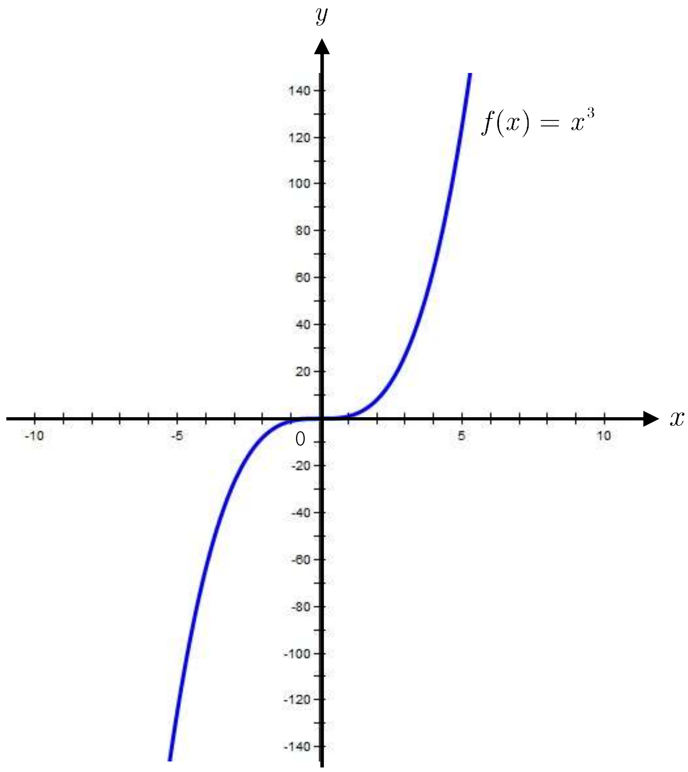
พิจารณาฟังก์ชัน $f(x) = x^3$ ได้ตารางดังต่อไปนี้

ตาราง 2.5 ค่าของ $f(x) = x^3$

x	$f(x) = x^3$
1	1
2	8
3	27
4	64
5	125
10	1000
...	...

x	$f(x) = x^3$
-1	-1
-2	-8
-3	-27
-4	-64
-5	-125
-10	-1000
...	...

พิจารณากราฟฟังก์ชัน $f(x) = x^3$ ดังต่อไปนี้



ภาพประกอบ 2.5 กราฟของฟังก์ชัน $f(x) = x^3$

จากตารางและรูปภาพจะเห็นว่าเมื่อ $x \to \infty$ จะทำให้ $f(x) = x^3 \to \infty$ นั้นหมายความว่า $\lim_{x \to \infty} x^3 = \infty$ ในทำนองเดียวกัน $x \to -\infty$ จะทำให้ $f(x) = x^3 \to -\infty$ ก็หมายความว่า $\lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$ ในกรณีทั่ว ๆ ไป ลิมิตค่าอนันต์ที่จุดอนันต์ นั้นมีความหมายดังบทนิยามต่อไปนี้ (เฟื่องฟ้า ศรีจันทพงศ์ และคณะ, 2553 : 35-40)

บทนิยาม 2.7

1. $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ ก็ต่อเมื่อ ทุก ๆ ค่า $M > 0$ จะมีค่า $N > 0$ ซึ่งถ้า $x > N$ แล้ว $f(x) > M$

2. $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$ ก็ต่อเมื่อ ทุก ๆ ค่า $M < 0$ จะมีค่า $N > 0$ ซึ่งถ้า $x > N$ แล้ว $f(x) < M$

บทนิยาม 2.7(ต่อ)

3. $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty$ ก็ต่อเมื่อ ทุก ๆ ค่า $M>0$ จะมีค่า $N<0$ ซึ่งถ้า $x<N$ แล้ว $f(x)>M$

4. $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ ก็ต่อเมื่อ ทุก ๆ ค่า $M<0$ จะมีค่า $N<0$ ซึ่งถ้า $x<N$ แล้ว $f(x)<M$

ทฤษฎีบท 2.11

ให้ $n\in N$ จะได้ว่า

1. $\lim_{x\to\infty} x^n=\infty$
2. $\lim_{x\to-\infty} x^n=\begin{cases}-\infty, & n \text{ เป็นเลขคี่} \\ \infty, & n \text{ เป็นเลขคู่}\end{cases}$

ตัวอย่าง 2.46

$\lim_{x\to-\infty} x=-\infty$

$\lim_{x\to\infty} x=\infty$

$\lim_{x\to-\infty} x^2=\infty$

$\lim_{x\to\infty} x^5=\infty$

$\lim_{x\to\infty} x^4=\infty$

ทฤษฎีบท 2.12

ให้ $\lim_{x\to\infty} f(x)=L$ และ $\lim_{x\to\infty} g(x)=I$ โดยที่ $L\in R$ และ $I=\infty$(หรือ$-\infty$)

1. $\lim_{x\to\infty}\left[g(x)\pm f(x)\right]=I$

ทฤษฎีบท 2.12(ต่อ)

2. ถ้า $L \neq 0$ แล้ว

2.1 $\lim_{x\to\infty}\left[f(x)\times g(x)\right] = \lim_{x\to\infty}\dfrac{g(x)}{f(x)} = \begin{cases} I, & L>0 \\ -I, & L<0 \end{cases}$

2.2 $\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$

3. $\lim_{x\to\infty}\sqrt{g(x)} = \begin{cases} I, & n \text{ เป็นเลขคี่} \\ \infty, & n \text{ เป็นเลขคู่ และ } I=\infty \end{cases}$

4. $\lim_{x\to\infty} g^n(x) = \begin{cases} I, & n \text{ เป็นเลขคี่} \\ \infty, & n \text{ เป็นเลขคู่} \end{cases}$

ทฤษฎีบท 2.13

ให้ $\lim_{x\to\infty} f(x) = I$ และ $\lim_{x\to\infty} g(x) = J$ โดยที่ $I=\infty$ (หรือ $-\infty$) และ $J=\infty$ (หรือ $-\infty$) จะได้ว่า

1. $\lim_{x\to\infty}\left[f(x)+g(x)\right] = \begin{cases} \infty, & I=J=\infty \\ -\infty, & I=J=-\infty \end{cases}$

2. $\lim_{x\to\infty}\left[f(x)\times g(x)\right] = \begin{cases} \infty, & I \text{ และ } J \text{ มีเครื่องหมายเหมือนกัน} \\ -\infty, & I \text{ และ } J \text{ มีเครื่องหมายต่างกัน} \end{cases}$

ทฤษฎีบท 2.14

ให้ $P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ และ $Q(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m$ เป็นฟังก์ชันพหุนามระดับขั้น n และ m ตามลำดับ ถ้า $n > m$ แล้วจะได้ว่า

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{a_n}{b_m}\right]x^{n-m}$$

หมายเหตุ

1. เมื่อเราแทน $x \to \infty$ ด้วย $x \to -\infty$ ในทฤษฎีบท 2.12, 2.13 และ 2.14 จะได้ว่าทฤษฎียังคงเป็นจริง

2. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ (x\to-\infty)}} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ จะเรียกว่าอยู่ในรูปแบบไม่กำหนด $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$ และ $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ (x\to-\infty)}} \left[f(x)+g(x)\right]$ ซึ่งถ้า $I \neq J$ ก็อยู่ในรูปแบบไม่กำหนด $\infty-\infty, -\infty+\infty$ และในทฤษฎีบท 2.12 เมื่อ $L=0$ $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ (x\to-\infty)}} \left[f(x)\times g(x)\right]$ อยู่ในรูปแบบไม่กำหนด $0\times\infty, 0\times(-\infty)$

เมื่อเราทราบทฤษฎีบทต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับลิมิตที่จุดอนันต์ที่กล่าวมาแล้วเราสามารถหาค่าลิมิตได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2.47 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to\infty}(x^3+2)$

วิธีทำ จาก $\lim\limits_{x\to\infty}(x^3+2) = \lim\limits_{x\to\infty} x^3 + \lim\limits_{x\to\infty} 2$

และ $\lim\limits_{x\to\infty} x^3 = \infty$, $\quad \lim\limits_{x\to\infty} 2 = 2$

โดยทฤษฎีบท 2.12 ข้อ 1

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to\infty}(x^3+2) = \infty$

ตัวอย่าง 2.48 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3-5)$

วิธีทำ จาก $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3-5) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 - \lim\limits_{x\to-\infty} 5$

และ $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} 5 = 5$

โดยทฤษฎีบท 2.12 ข้อ 1

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3-5) = -\infty$

ตัวอย่าง 2.49 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to-\infty}(3-4x^2)$

วิธีทำ จาก $\lim\limits_{x\to-\infty}(3-4x^2)=\lim\limits_{x\to-\infty}3+\lim\limits_{x\to-\infty}(-4x^2)$

จากทฤฎีบท 2.12 ข้อ 2.1 ได้ $\lim\limits_{x\to-\infty}(-4x^2)=-\infty$

เพราะ $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=\infty$ และ $\lim\limits_{x\to-\infty}-4=-4$

และ $\lim\limits_{x\to-\infty}3=3$,

โดยทฤษฎีบท 2.12 ข้อ 1

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to-\infty}(3-4x^2)=-\infty$

ตัวอย่าง 2.50 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{x^3}$

วิธีทำ จาก $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{x^3}=\dfrac{\lim\limits_{x\to-\infty}2}{\lim\limits_{x\to-\infty}x^3}$

และ $\lim\limits_{x\to-\infty}2=2$, $\quad\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty$

โดยทฤษฎีบท 2.12 ข้อ 2.2

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{x^3}=0$

ตัวอย่าง 2.51 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to\infty}(3x^2+x+1)$

วิธีทำ จาก $\lim\limits_{x\to\infty}(3x^2+x+1)=\lim\limits_{x\to\infty}3x^2+\lim\limits_{x\to\infty}x+\lim\limits_{x\to\infty}1$

และ $\lim\limits_{x\to\infty}3x^2=\infty$, $\quad\lim\limits_{x\to\infty}x=\infty$, $\quad\lim\limits_{x\to\infty}1=1$

โดยทฤษฎีบท 2.13 ข้อ 1 และ 2.12 ข้อ 1

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to\infty}(3x^2+x+1)=\infty$

ตัวอย่าง 2.52 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3+x)$

วิธีทำ จาก $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3+x)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3+\lim\limits_{x\to-\infty}x$

และ $\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty\,,\ \ \lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$

โดยทฤษฎีบท 2.13 ข้อ 1

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3+x)=-\infty$

ตัวอย่าง 2.53 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2-x)$

วิธีทำ เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2-x)$ อยู่ในรูปแบบไม่กำหนด ทำได้ดังต่อไปนี้

$$\lim_{x\to\infty}(x^2-x)=\lim_{x\to\infty}x(x-1)=\lim_{x\to\infty}x\times\lim_{x\to\infty}(x+1)$$

และ $\lim\limits_{x\to\infty}x=\infty\,,\qquad \lim\limits_{x\to\infty}(x+1)=\infty$

โดยทฤษฎีบท 2.13 ข้อ 2

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2-x)=\infty$

ตัวอย่าง 2.54 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to-\infty}x^3(1+x^2)$

วิธีทำ จาก $\lim\limits_{x\to-\infty}x^3(1+x^2)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3\times\lim\limits_{x\to-\infty}(1+x^2)$

และ $\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty\,,\ \ \lim\limits_{x\to-\infty}(1+x^2)=\infty$

โดยทฤษฎีบท 2.13 ข้อ 2

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to-\infty}x^3(1+x^2)=-\infty$

ตัวอย่าง 2.55 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-3x^2+x+1}{2x+1}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-3x^2+x+1}{2x+1}$ อยู่ในรูปแบบไม่กำหนด ทำได้ดังต่อไปนี้

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-3x^2+x+1}{2x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(-3+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)}{x\left(2+\dfrac{1}{x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(-3+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)}{2+\dfrac{1}{x}}$$

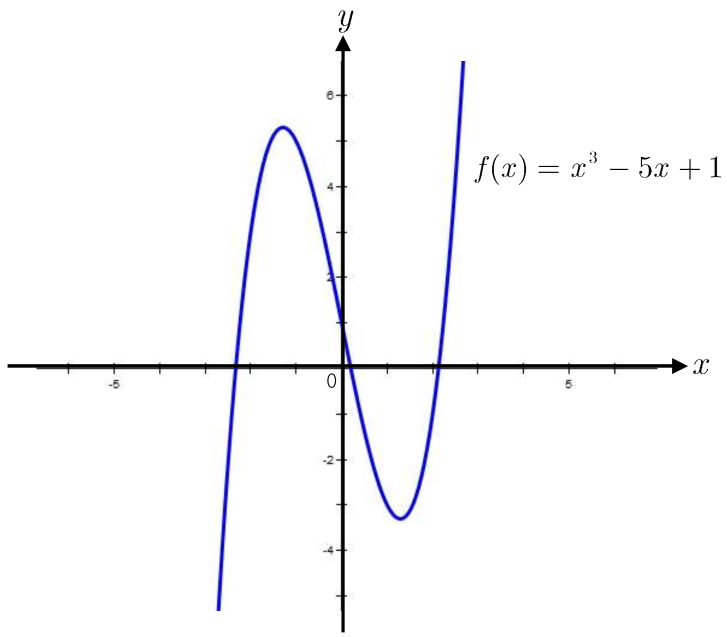
$$=\lim_{x\to\infty}x\times\lim_{x\to\infty}\frac{-3+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{2+\dfrac{1}{x}}$$

และ $\lim_{x\to\infty}x=\infty$, $\quad\lim_{x\to\infty}\dfrac{-3+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{2+\dfrac{1}{x}}=-\dfrac{3}{2}$ โดยทฤษฎีบท 2.12 ข้อ 2

ดังนั้น $\lim_{x\to\infty}\dfrac{-3x^2+x+1}{2x+1}=-\infty$

2.4 ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

พิจารณากราฟฟังก์ชัน $f(x)=x^3-5x+1$



ภาพประกอบ 2.6 กราฟของฟังก์ชัน $f(x)=x^3-5x+1$

จากภาพประกอบ 2.6 กราฟของฟังก์ชัน $f(x) = x^3 - 5x + 1$ นั้นไม่มีการขาดตอน แต่ถ้าหากเราพิจารณาที่จุดหนึ่ง ๆ เช่นพิจารณากรณีที่ $x = 2$ ก็จะเห็นว่า กราฟของฟังก์ชันนั้นก็ไม่ขาดตอนที่จุดดังกล่าว ดังนั้นจึงกล่าวได้ว่าฟังก์ชัน $f(x)$ ต่อเนื่องที่จุด $x = 2$ นั่นเอง แต่ถ้าหากเราต้องการตรวจสอบว่า $f(x)$ นั้นต่อเนื่องที่จุด $x = 100$ หรือไม่ ก็เป็นการยากที่เราจะสามารถเขียนกราฟของฟังก์ชันเพื่อที่จะตรวจสอบจุดที่ต้องการได้ทุกจุด ดังนั้นการจะตรวจสอบว่าฟังก์ชันต่อเนื่องหรือไม่ต่อเนื่องตรวจสอบเพื่อความง่ายสะดวกและรวดเร็วจะใช้นิยามต่อไปนี้ในการตรวจสอบ (ชัย สงคราม เครือหงส์, 2544 : 41-42)

บทนิยาม 2.8

กำหนดให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันค่าจริงของตัวแปรจริง และ $a \in R$

จะกล่าวว่า f ต่อเนื่องที่จุด $x = a$ ก็ต่อเมื่อ

1. $f(a)$ หาค่าได้
2. $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ หาค่าได้
3. $f(a) = \lim\limits_{x \to a} f(x)$

ถ้า f ไม่สอดคล้องกับเงื่อนไขข้อใดข้อหนึ่งข้างบนนี้ ก็แสดงว่า f ไม่ต่ออเนื่องที่จุด $x = a$

จากบทนิยาม 2.8 นั้นเราสามารถตรวจสอบฟังก์ชันว่าต่อเนื่องหรือไม่ต่อเนื่องนั้นเป็นการง่ายโดยเราไม่ต้องวาดกราฟของฟังก์ชันให้เสียเวลา ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2.56 จงพิจารณาว่าฟังก์ชัน $f(x) = x^3 - 5x + 1$ ต่อเนื่องที่ $x = 2$ หรือไม่

วิธีทำ เนื่องจาก $f(2) = 2^3 - 5(2) + 1 = -1$ หาค่าได้

และ $\lim\limits_{x \to 2} (x^3 - 5x + 1) = -1$

ได้ $\lim\limits_{x \to 2} (x^3 - 5x + 1) = f(2)$

ดังนั้น ฟังก์ชัน $f(2) = x^3 - 5x + 1$ ต่อเนื่องที่ $x = 2$

ตัวอย่าง 2.57 กำหนดให้

$$f(x)=\begin{cases} x^2+4, & x<2 \\ x^3, & x\ge 2 \end{cases}$$

จงตรวจสอบว่า $f(x)$ ต่อเนื่องที่ $x=2$ หรือไม่

วิธีทำ 1. $f(2)=2^3=8$ หาค่าได้

2. $\lim_{x\to 2} f(x)=8$ เพราะว่า

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-} x^3+4=8$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+} x^3=8$$

3. เนื่องจาก $\lim_{x\to 2} f(x)=f(2)$

ดังนั้น ฟังก์ชัน $f(x)$ ต่อเนื่องที่ $x=2$

ตัวอย่าง 2.58 กำหนดให้

$$f(x)=\begin{cases} x^2+4, & x<2 \\ 5, & x=2 \\ x^3, & x>2 \end{cases}$$

จงตรวจสอบว่า $f(x)$ ต่อเนื่องที่ $x=2$ หรือไม่

วิธีทำ 1. $f(2)=5$ หาค่าได้

2. $\lim_{x\to 2} f(x)=8$ เพราะว่า

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-} x^2+4=8$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+} x^3=8$$

3. เนื่องจาก $\lim_{x\to 2} f(x)=f(2)$

ดังนั้น ฟังก์ชัน $f(x)$ ต่อเนื่องที่ $x=2$

ตัวอย่าง 2.59 กำหนดให้

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 20}{x + 5}$$

จงตรวจสอบว่า $f(x)$ ต่อเนื่องที่ $x = -5$ หรือไม่

วิธีทำ เนื่องจาก $f\left(-5\right) = \dfrac{(-5)^2 + (-5) - 20}{(-5+5)} = \dfrac{0}{0}$ หาค่าไม่ได้

จึงไม่ต้องพิจารณาข้อที่ 2 และ 3 ต่อ

ดังนั้น ฟังก์ชัน $f(x)$ ไม่ต่อเนื่องที่ $x = -5$

ตัวอย่าง 2.60 กำหนดให้

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3, & x \geq 3 \\ 2x - 1, & x < 3 \end{cases}$$

จงตรวจสอบว่า $f(x)$ ต่อเนื่องที่ $x = 3$ หรือไม่

วิธีทำ 1. $f(3) = 3^2 + 3 = 12$

2. $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ ไม่มีลิมิตเพราะว่า

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} 2x - 1 = 2(3) - 1 = 5$$

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} x^2 + 3 = (3)^2 + 3 = 12$$

ไม่ต้องพิจารณาข้อ 3 ต่อ

ดังนั้น ฟังก์ชัน $f(x)$ ไม่ต่อเนื่องที่ $x = 3$

2.5 สรุปท้ายบทที่ 2

ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชันนั้นเป็นพื้นฐานที่สำคัญอย่างยิ่งในการศึกษาเนื้อหาต่าง ๆ ในบทถัดไป จากการที่ได้ศึกษาเรื่องลิมิตนั้นทำให้เห็นถึงความหมายของลิมิตได้อย่างชัดเจนมากยิ่งขึ้น ดังนั้นเมื่อเราได้รู้ความหมายของลิมิตแล้วนั้นเราก็จะสามารถพิสูจน์ลิมิตโดยใช้บทนิยามของลิมิตได้ ซึ่งจะแสดงให้เห็นได้อย่างชัดเจนว่าลิมิตนั้นคืออะไร และทำให้สามารถแสดงการเขียนลิมิต พร้อมทั้ง

ตรวจสอบว่าแต่ละฟังก์ชันนั้นมีหรือไม่มีลิมิตก็ได้โดยใช้ทฤษฎีต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้อง โดยหลักที่สำคัญต้องพิจารณาการหาค่าลิมิตนั้นก็คือต้องพิจารณาลิมิตทางซ้ายและลิมิตทางขวาก่อนเสมอ ยกเว้นกรณีลิมิต (ค่าจริง) ที่จุดอนันต์ และลิมิตค่าอนันต์ที่จุดอนันต์ ส่วนการพิจารณาว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้นั้นต่อเนื่องหรือไม่ต่อเนื่อง ณ จุดใด $x = a$ หรือไม่นั้น ก็ตรวจสอบแค่ว่า $f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$ หรือไม่ถ้าเป็นจริงแสดงว่าฟังก์ชัน $f(x)$ ต่อเนื่องที่จุด $x = a$

คำถามท้ายบท

1. จงหาค่าลิมิตที่กำหนดให้ต่อไปนี้ (ถ้าลิมิตหาค่าได้)

   1.1 $\lim_{x\to 2}\left(x+3\right)$

   1.2 $\lim_{x\to 5}\left(x^2-5\right)$

   1.3 $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$

   1.4 $\lim_{x\to 2}\frac{\left(x-2\right)x}{\left|x-2\right|}$

   1.5 $\lim_{x\to 0}\frac{\left(x-2\right)\left|x\right|}{x}$

2. จงใช้บทนิยามพิสูจน์ลิมิตที่กำหนดให้ต่อไปนี้

   2.1 $\lim_{x\to 2}\left(x+1\right)=3$

   2.2 $\lim_{x\to 3}\left(x-8\right)=-5$

   2.3 $\lim_{x\to 3}x^2=9$

   2.4 $\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{3}$

3. จงหาค่าลิมิตที่กำหนดให้ต่อไปนี้ (ถ้าลิมิตหาค่าได้)

   3.1 $\lim_{x\to 2^-}\left(x+3\right)$

   3.2 $\lim_{x\to 2^+}\left(x+3\right)$

   3.3 $\lim_{x\to 5^-}\left(x^2-5\right)$

   3.4 $\lim_{x\to 5^+}\left(x^2-5\right)$

   3.5 $\lim_{x\to 1^-}\frac{2}{x+1}$

   3.6 $\lim_{x\to 1^+}\frac{2}{x+1}$

   3.7 $\lim_{x\to 2^-}\frac{x\left(x-2\right)}{x^2}$

   3.8 $\lim_{x\to 2^+}\frac{x\left(x-2\right)}{x^2}$

   3.9 $\lim_{x\to 0^-}\frac{\left(x^2-2x\right)}{x}$

   3.10 $\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(x^2-2x\right)}{x}$

4. จงหาค่าลิมิตที่กำหนดให้ต่อไปนี้ (ถ้าลิมิตหาค่าได้)

   4.1 $\lim_{x\to 5}\left(x+6\right)$

   4.2 $\lim_{x\to 3}\left(x^2+3\right)$

   4.3 $\lim_{x\to 1}\frac{x\left(x-2\right)}{x^2}$

   4.4 $\lim_{x\to 2}\frac{x\left(x-2\right)}{x}$

4.5 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x\sqrt{x-2}}{x}$

4.6 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x^2-2x+3)}{x^2-1}$

4.7 $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{x-3}$

4.8 $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x\sqrt{x-3}}{x-1}$

4.9 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|x-1|(x^2-2x+3)}{x^2-1}$

4.10 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{|x-2|}{x+2}$

4.11 $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{|x+2||x+5|}{x+2}$

4.12 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|x+2|(x^2-1)}{|x-1|}$

4.13 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+3x+2}{|x+1|}$

4.14 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{|x^2+3x+2|}{|x+1|}$

5. กำหนดให้ $f(x)=\begin{cases}-2, & x>0\\ 3, & x=0\\ 1, & x<0\end{cases}$ จงหาค่าลิมิตที่กำหนดให้ต่อไปนี้ (ถ้าลิมิตหาค่าได้)

1. $\lim\limits_{x\to -1}f(x)$
2. $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$
3. $\lim\limits_{x\to 3}f(x)$

6. กำหนดให้ $f(x)=\begin{cases}x^2-3, & x>4\\ 3x+1, & x\le 4\end{cases}$ จงหาค่าลิมิตที่กำหนดให้ต่อไปนี้ (ถ้าลิมิตหาค่าได้)

1 $\lim\limits_{x\to 3}f(x)$

2 $\lim\limits_{x\to 4}f(x)$

3 $\lim\limits_{x\to 5}f(x)$

7. กำหนดให้ $f(x)=\begin{cases}2x-3, & x>3\\ x^2+1, & x=3\\ 3x+2, & x<3\end{cases}$ จงหาค่าลิมิตที่กำหนดให้ต่อไปนี้ (ถ้าลิมิตหาค่าได้)

1 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

2 $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$

3 $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$

8. จงหาค่าลิมิตที่กำหนดให้ต่อไปนี้ (ถ้าลิมิตหาค่าได้)

8.1 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{x-3}$

8.2 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x}{(x-2)^2}$

8.3 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{(x-3)^2}$

8.4 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x}{x^2-3x}$

8.5 $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{1}{x^2-5x-14}$

8.6 $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x}{x^2-5x-14}$

8.7 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+6x-7}{(x-1)^2}$

8.8 $\lim\limits_{x\to -7}\dfrac{x^2+6x-7}{x+7}$

9. จงหาค่า $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ เมื่อกำหนดให้ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}, & x>1\\ \dfrac{2}{(x-1)^2}, & x>1\end{cases}$ (ถ้าลิมิตหาค่าได้)

10. จงหาค่า $\lim\limits_{x\to 7} f(x)$ เมื่อกำหนดให้ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2-5x-14}, & x>7\\ \dfrac{x+2}{x^2-5x-14}, & x\le 7\end{cases}$ (ถ้าลิมิตหาค่าได้)

11. จงหาค่าลิมิตที่กำหนดให้ต่อไปนี้ (ถ้าลิมิตหาค่าได้)

11.1 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3}{x^5}$

11.2 $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{7x-3}{x+2}$

11.3 $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^4+3x^2-3}{x^4+2x-1}$

11.4 $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3+2x^2-8}{3x^4-x+5}$

11.5 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^4+2x^2-7}{3x^5-x+5}$

11.6 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x-8}{\sqrt{x^2+x+3}}$

11.7 $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2+x+3}}$

11.8 $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x^2-1}{\sqrt{x^4+x^2+3}}$

11.9 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2-1}{\sqrt{x^4+x^2+3}}$

11.10 $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^4+x^2+3}$

12. จงพิจารณาว่าฟังก์ชันแต่ละข้อต่อไปนี้ต่อเนื่องที่จุดที่กำหนดหรือไม่

12.1 $f(x) = x+3$ ที่ $x=1$

12.2 $f(x) = \begin{cases} x^2-3, & x>4 \\ 3x+1, & x\le 4 \end{cases}$ ที่ $x=4$

12.3 $f(x) = \begin{cases} -2, & x>0 \\ 3, & x=0 \\ 1, & x<0 \end{cases}$ ที่ $x=0$

12.4 $f(x) = \begin{cases} 2x-3, & x>3 \\ x^2+1, & x=3 \\ 3x+2, & x<3 \end{cases}$ ที่ $x=3$

12.5 $f(x) = \begin{cases} x^2-4, & x<2 \\ 5\,, & x=2 \\ x+2, & x>2 \end{cases}$ ที่ $x=2$

12.6 $f(x)=\begin{cases} x^2-4, & x<-3 \\ 5\,, & x=-3 \\ x+2, & x>-3 \end{cases}$ ที่ $x=-3$

12.7 $f(x)=\begin{cases} 2x^2-2, & x<4 \\ x, & x=4 \\ x+5, & x>4 \end{cases}$ ที่ $x=4$

13. กำหนด $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x\le 1 \\ 2x-1, & 1<x\le 3 \\ x+2, & x>3 \end{cases}$

จงพิจารณาว่าฟังก์ชัน $f\left(x\right)$ ต่อเนื่องที่จุดที่กำหนดให้หรือไม่

1 $x=0$

2 $x=1$

3 $x=2$

4 $x=3$

5 $x=4$

เอกสารอ้างอิง

กมล เอกไทยเจริญ. (2544). **แคลคูลัส 1.** กรุงเทพมหานคร : ไฮเอ็ดพับลิชชิ่ง.

คณาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยรามคำแหง. (2542). **แคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ 1.** พิมพ์ครั้งที่ 8 กรุงเทพมหานคร : มหาวิทยาลัยรามคำแหง.

ชัยสงคราม เครือหงส์. (2544). **เอกสารประกอบการสอนรายวิชาแคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์1.** สุราษฎร์ธานี : มหาวิทยาลัยราชภัฏสุราษฎร์ธานี.

ทัศนีย์ อารยะตระกูลลิขิต. (2539). **แคลคูลัส 1.** ขอนแก่น : ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น.

พัฒนา สีมากุล. (2539). **แคลคูลัส 1.** กรุงเทพมหานคร : เจเนอรัลบุ๊คส์.

เฟื่องฟ้า ศรีจันทพงศ์ และคณะ. (2553). **แคลคูลัส 1.** พิมพ์ครั้งที่ 5 ขอนแก่น : ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น.

เลิศ สิทธิโกศล. (2541). **แคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ 1.** กรุงเทพมหานคร : สกายบุคส์.

สุรวิทย์ ตันแต่งผล และอนุสรณ์ ชนวีรยุทธ. (2537). **แคลคูลัส 1.** กรุงเทพมหานคร : จุฬาลงกรณมหาวิทยาลัย.

สมเกียรติ พาน้อย. (2543). **แคลคูลัส 1.** ขอนแก่น : ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น.

อุษณีย์ ลีรวัฒน์. (2552). **เอกสารประกอบการสอนรายวิชาคณิตศาสตร์ขั้นสูง I.** กรุงเทพมหานคร : มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์.

Anton, Howard. (1995). **Calculus with analytic geometry.** New York : John Wiley & son.

Ross, F.L. Maurice,.W.D. and Frank, G.R. (2001). **Calculus with analytic geometry.** New Yok : Addison-wesley.

แผนบริหารการสอนประจำบทที่ 3

เนื้อหาประจำบท

1. ส่วนเปลี่ยนแปลงและอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ย
2. อนุพันธ์ของฟังก์ชัน
3. การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิต
4. การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบ
5. การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ
6. การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันลอการิทึมและฟังก์ชันเลขชี้กำลัง
7. การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยปริยาย
8. อนุพันธ์อันดับสูง

วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม

1. อธิบายและให้ความหมายของส่วนเปลี่ยนแปลงและอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยได้
2. สามารถหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันได้
3. สามารถหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิตได้
4. สามารถหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบได้
5. สามารถหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติได้
6. สามารถหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันลอการิทึมและฟังก์ชันเลขชี้กำลังได้
7. สามารถหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยปริยายได้
8. สามารถหาอนุพันธ์อันดับสูงได้

วิธีการสอนและกิจกรรมการเรียนการสอนประจำบท

1. ผู้สอนบรรยายหัวข้อต่อไปนี้พร้อมเปิดโอกาสให้ซักถาม

   1.1 ส่วนเปลี่ยนแปลงและอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ย

   1.2 อนุพันธ์ของฟังก์ชัน

   1.3 การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิต

1.4 การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบ

1.5 การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

1.6 การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันลอการิทึมและฟังก์ชันเลขชี้กำลัง

1.7 การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยปริยาย

1.8 อนุพันธ์อันดับสูง

2. ให้นักศึกษาทำกิจกรรมต่อไปนี้

   2.1 ศึกษาข้อมูลเพิ่มเติม เกี่ยวกับเรื่องอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

   2.2 ทำแบบฝึกหัดที่กำหนดให้

สื่อการเรียนการสอน

1. เอกสารประกอบการสอนและตำราต่าง ๆ
2. Slide Presentation

สื่อการเรียนการสอน

1. เอกสารประกอบการสอนและตำราต่าง ๆ
2. Slide Presentation

การวัดผลและการประเมินผล

1. สังเกตความสนใจของนักศึกษาขณะสอน ความตั้งใจ การฟัง การจดบันทึก และการซักถาม
2. แบบฝึกหัด
3. แบบทดสอบ
4. การมีส่วนร่วมในกิจกรรมการเรียนการสอน

บทที่ 3

อนุพันธ์ของฟังก์ชัน

คณิตศาสตร์สำหรับวิทยาศาสตร์ 1 นั้นเป็นส่วนหนึ่งของวิชาที่เรียกว่า แคลคูลัส ซึ่งแคลคูลัสนั้นเป็นคณิตศาสตร์แขนงหนึ่งที่มี ไอแซก นิวตัน นักคณิตศาสตร์ชาวอังกฤษ และ กอตต์ฟรีด วิลเฮล์ม ไลบ์นิตซ์ นักคณิตศาสตร์ชาวเยอรมัน เป็นผู้ให้กำเนิด ซึ่งมีประโยชน์ต่อวิทยาการในสาขาต่าง ๆ มากมาย เช่น ฟิสิกส์ เคมี ชีววิทยา วิศวกรรมศาสตร์ ดาราศาสตร์ เศรษฐศาสตร์ สังคมวิทยา และพฤติกรรมทางจิตวิทยา ตลอดจนเป็นพื้นฐานของการศึกษาคณิตศาสตร์สาขาอื่น ๆ แทบทุกสาขา ดังนั้นสำหรับเรื่องอนุพันธ์ของฟังก์ชัน ก็เป็นส่วนหนึ่งของรายวิชาคณิตศาสตร์สำหรับวิทยาศาสตร์ 1 เช่นกัน โดยกล่าวถึงอัตราการแปรค่า อัตราการแปรค่าชั่วขณะ ส่วนเปลี่ยนแปลงและอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ย ซึ่งมีประโยชน์อย่างกว้างขวางในการแก้ปัญหาต่าง ๆ ซึ่งจะกล่าวในบทที่ 4 เรื่องการประยุกต์อนุพันธ์ และจากบทที่ 2 เรื่องลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชันที่ผู้เรียนได้ศึกษาผ่านมานั้นเป็นการหาเฉพาะลิมิตของฟังก์ชันพีชคณิตเท่านั้น ส่วนในบทนี้จะแบ่งการหาอนุพันธ์ออกเป็น 2 ประเภท คืออนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิต และอนุพันธ์ของฟังก์ชันอดิศัย ก่อนที่จะศึกษาอนุพันธ์ของฟังก์ชันนั้น เราจะศึกษาส่วนเปลี่ยนแปลงและอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของฟังก์ชันเพื่อนให้ผู้เรียนได้ศึกษาเรื่องอนุพันธ์ได้เข้าใจดียิ่งขึ้นน

3.1 ส่วนเปลี่ยนแปลงและอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ย

โดยทั่ว ๆ ไปสำหรับ $y = f(x)$ จะได้ว่าเมื่อ x มีค่าเปลี่ยนไปค่าของฟังก์ชัน $f(x)$ ก็เปลี่ยนไปด้วยคือเมื่อ x เปลี่ยนจาก x ไปเป็น $x + \Delta x$ ค่าของฟังก์ชันจะเปลี่ยนจาก $f(x)$ ไปเป็น $f(x+\Delta x)$ ดังนั้น**ปริมาณการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชัน**นี้คือ $f(x+\Delta x) - f(x)$ ในขณะที่ปริมาณเปลี่ยนแปลงของ x คือ Δx และเรียกอัตราส่วน $\dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ ว่า **อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ย** (เฟื่องฟ้า ศรีจันทพงศ์ และคณะ, 2553 : 53)

พิจารณา $f(x) = x^2 + 1$ ถ้า x เปลี่ยนจาก 2 ไปเป็น 5 ค่า $\Delta x = 3$ จะได้อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยเท่ากับ 21 ถ้า x เปลี่ยนจาก 2 ไปเป็น 3 ค่า $\Delta x = 1$ อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยมีค่าเท่ากับ 5 ถ้า x เปลี่ยนจาก 2 ไปเป็น 2.1 ค่า $\Delta x = 0.1$ อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยมี

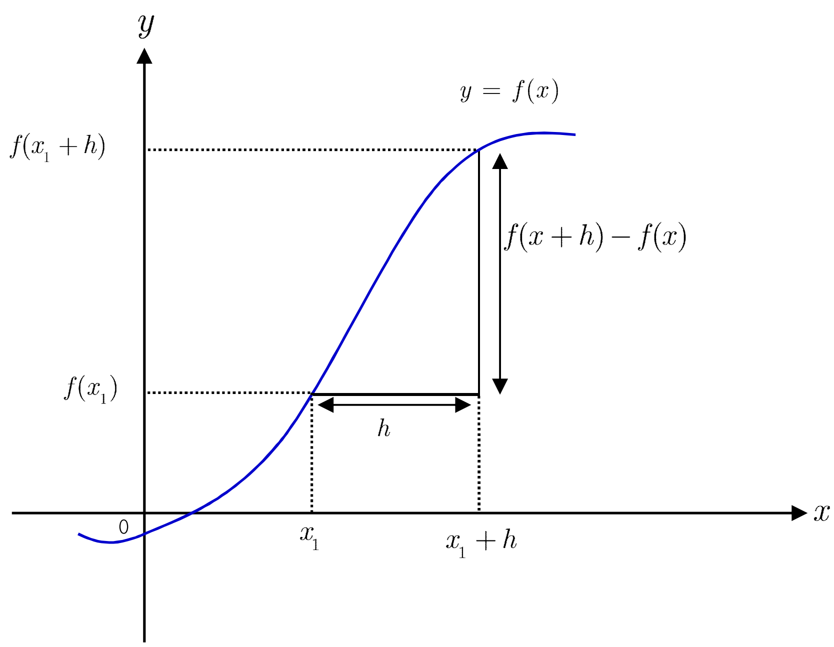
ค่าเท่ากับ 4.1 และถ้า x เปลี่ยนจาก 2 ไปเป็น 2.01 ค่า $\Delta x = 0.01$ จะได้อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยเท่ากับ 4.01 ต่อไปเรื่อย ๆ

จะเห็นได้ว่าอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ $y = f(x)$ ขึ้นอยู่กับ Δx ถ้าให้ Δx มีค่าเข้าใกล้ 6 แล้วอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยมีค่าเข้าใกล้ค่าคงตัวค่าหนึ่ง เราเรียกอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยเมื่อ Δx เข้าใกล้ศูนย์นี้ว่า**อัตราการเปลี่ยนแปลงชั่วขณะ** ของ $y = f(x)$ ในทางคณิตศาสตร์เราเรียกอัตราการเปลี่ยนแปลงของ $y = f(x)$ ที่ x ใด ๆ ว่า **อนุพันธ์** ของ $y = f(x)$

3.2 อนุพันธ์ของฟังก์ชัน

เลิศ สิทธิโกศล (2541 : 32-33) ได้ให้รายละเอียดไว้ดังต่อไปนี้

กำหนดให้ $y = f(x)$ ซึ่งหมายถึง y เป็นฟังก์ชันที่ขึ้นอยู่กับตัวแปร x



ภาพประกอบ 3.1. กราฟแสดงอัตราการเปลี่ยนแปลงความชันของฟังก์ชัน $f(x)$

ที่มา : เลิศ สิทธิโกศล. 2541 : 32

ถ้า $f(x)$ มีความต่อเนื่องทุก ๆ ค่าของ x อัตราการเปลี่ยนแปลงของ $f(x)$ ในช่วง x_1 ถึง $f(x_1+h)$ คือ $\dfrac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h}$ อัตราการเปลี่ยนแปลงนี้เรียกว่าความชัน กรณีที่กราฟเป็นเส้นตรงหรือ $f(x)$ มีการเปลี่ยนแปลงเป็นเชิงเส้นกับค่า x ความชันจะคงที่ แต่ถ้า $f(x)$ ไม่เป็นเชิงเส้นกับ x หรือกราฟเป็นเส้นโค้งดังรูปอัตราการเปลี่ยนแปลงของ y หรือ $f(x)$ ในช่วง x_1 ถึง x_1+h เป็นอัตราการเปลี่ยนแปลงโดยเฉลี่ย

แต่ถ้าให้ช่วงจาก x_1 ถึง x_1+h แคบเข้านั่นคือให้ h เข้าใกล้ 0 อัตราการเปลี่ยนแปลงดังกล่าวก็จะเข้าใกล้อัตราการเปลี่ยนแปลง ณ ตำแหน่ง $x=x_1$ นั่นคือ $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h}$ อัตราการเปลี่ยนแปลงของ y หรือ $f(x)$ ณ $x=x_1$ กรณีทั่วไป $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ คือ อัตราการเปลี่ยนแปลงของ y หรือ $f(x)$ ณ ค่า x ใด ๆ ซึ่งหมายถึงความชันของกราฟหรือความชันของฟังก์ชันที่จุด x ใด ๆ นั่นเอง

บทนิยาม 3.1

กำหนดให้ $y=f(x)$ เป็น**ฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่** $x=a$

ถ้า $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(a+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ หาค่าได้

และเขียนแทนค่าที่ได้นี้ว่า $f'(a)$ และเรียกว่า อนุพันธ์ของ f ที่ a นั่นคือ

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \text{ เมื่อกำหนด } \Delta x=h$$

หมายเหตุ 3.1

1. ถ้า $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ หาค่าไม่ได้เราจะกล่าวว่าฟังก์ชัน f **ไม่สามารถหาอนุพันธ์ได้ที่** $x=a$

2. สัญลักษณ์ที่ใช้แทนอนุพันธ์ของ f ที่ x ใด ๆ คือ $f'(x)$ ซึ่งจะเท่ากับ $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ และจะเขียนเทนด้วย $\dfrac{dy}{dx},\dfrac{d}{dx}f(x)$ หรือ y'

จากบทนิยาม 3.1

$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ หาค่าได้ก็ต่อเมื่อ $\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ และจากบทที่ผ่านมานั้นเราเรียก $\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ ว่าเป็นลิมิตทางขวาของฟังก์ชัน $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ และในทำนองเดียวกันก็เรียก $\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ ว่าเป็นลิมิตทางซ้ายของฟังก์ชัน $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ ต่อไปนี้เราจะนิยาม $\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ และ $\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ ในรูปของอนุพันธ์ดังต่อไปนี้

บทนิยาม 3.2

ฟังก์ชัน $y=f(x)$ **เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ด้านขวาได้ที่** $x=a$ ถ้า $\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ หาค่าได้ และจะเรียกลิมิตนี้ว่า **อนุพันธ์ด้านขวา** ของ f ที่ a เขียนแทนด้วย $f'(a^+)$

บทนิยาม 3.3

ฟังก์ชัน $y=f(x)$ **เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ด้านซ้ายได้ที่** $x=a$ ถ้า $\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ หาค่าได้ และจะเรียกลิมิตนี้ว่า **อนุพันธ์ด้านซ้าย** ของ f ที่ a เขียนแทนด้วย $f'(a^-)$

หมายเหตุ 3.2

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

$$\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

ตัวอย่าง 3.1 จงหาอนุพันธ์ของ $f(x)=x^2-2x$

1) ที่จุด x ใด ๆ
2) ที่จุด $x=1$
3) ที่จุด $x=-2$

วิธีทำ 1) อนุพันธ์ของ $f(x)=x^2-2x$ ที่จุด x ใด ๆ คือ

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\left[(x+h)^2-2(x+h)\right]-\left[x^2-2x\right]}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\left[x^2+2xh+h^2-2x-2h\right]-\left[x^2-2x\right]}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{x^2+2xh+h^2-2x-2h-x^2+2x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2-2h}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(2x+h-2)h}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}(2x+h-2)$$

$$=2x+0-2$$

$$=2x-2$$

ดังนั้น อนุพันธ์ของ $f(x)=x^2-2x$ ที่จุด x ใด ๆ คือ $2x-2$

วิธีทำ 2) อนุพันธ์ของ $f(x)=x^2-2x$ ที่จุด $x=1$

จาก $f'(x)=2x-2$

จะได้ว่า $f'(1)=2(1)-2=0$

ดังนั้น อนุพันธ์ของ $f(x)=x^2-2x$ ที่จุด $x=1$ คือ 0

วิธีทำ 3) อนุพันธ์ของ $f(x)=x^2-2x$ ที่จุด $x=-2$

จาก $f'(x)=2x-2$

จะได้ว่า $f'(-2)=2(-2)-2=-6$

ดังนั้น อนุพันธ์ของ $f(x)=x^2-2x$ ที่จุด $x=-2$ คือ -6

ตัวอย่าง 3.2 จงหาอนุพันธ์ของ $f(x)=x^3-2x$ ที่จุด x ใด ๆ

วิธีทำ อนุพันธ์ของ $f(x)=x^3-2x$ ที่จุด x ใด ๆ

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\left[(x+h)^3-2(x+h)\right]-\left[x^3-2x\right]}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\left[(x^3+3x^2h+3xh^2+h^3)-(2x+2h)\right]-\left[x^3-2x\right]}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\left[x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-2x-2h\right]-\left[x^3-2x\right]}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-2x-2h-x^3+2x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{3x^2h+3xh^2+h^3-2h}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(3x^2+3xh+h^2-2)h}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}(3x^2+3xh+h^2-2) \\
&= 3x^2-2
\end{aligned}$$

ดังนั้น อนุพันธ์ของ $f(x)=x^3-2x$ ที่จุด x ใด ๆ คือ $3x^2-2$

ตัวอย่าง 3.3 กำหนด $f(x)=\left|x\right|$ จงหาค่าต่อไปนี้ ถ้าหาค่าได้

1) อนุพันธ์ด้านซ้ายของ f ที่ 0
2) อนุพันธ์ด้านขวาของ f ที่ 0
3) อนุพันธ์ของ f ที่ 0

วิธีทำ 1) อนุพันธ์ด้านซ้ายของ f ที่ 0 คือ

$$\begin{aligned}
f'(0^-) &= \lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \\
&= \lim_{x\to 0^-}\frac{\left|x\right|-\left|0\right|}{x} \\
&= \lim_{x\to 0^-}\frac{\left|x\right|}{x} \\
&= -1
\end{aligned}$$

วิธีทำ 2) อนุพันธ์ด้านขวาของ f ที่ 0 คือ

$$
\begin{aligned}
f'(0^+) &= \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \\
&= \lim_{x\to 0^+}\frac{\left|x\right|-\left|0\right|}{x} \\
&= \lim_{x\to 0^+}\frac{\left|x\right|}{x} \\
&= \lim_{x\to 0^-}\frac{x}{x} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} \neq \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ จะได้ว่า $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ หาค่าไม่ได้

ดังนั้น อนุพันธ์ของ f ที่ 0 หาค่าไม่ได้

ตัวอย่าง 3.4 กำหนด $f(x)=\begin{cases} 3x-1, & x\le 1 \\ x^3+1, & x>1 \end{cases}$ จงหาค่า $f'(x)$

วิธีทำ เราจะแยกพิจารณาเป็น 3 กรณีดังต่อไปนี้

กรณีที่ 1 $x<1$

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\left[3(x+h)-1\right]-\left[3x-1\right]}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\left[3x+3h-1\right]-\left[3x-1\right]}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{3x+3h-1-3x+1}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{3h}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} 3 \\
&= 3
\end{aligned}
$$

กรณีที่ 2 $x > 1$

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\left[(x+h)^3+1\right]-\left[x^3+1\right]}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\left[x^3+3x^2h+3xh^2+h^3+1\right]-\left[x^3+1\right]}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3+1-x^3-1}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(3x^2+3xh+h^2)h}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}3x^2+3xh+h^2 \\
&= 3x^2
\end{aligned}
$$

กรณีที่ 3 $x = 1$ เนื่องจาก $x = 1$ ค่าทางซ้ายและทางขวาของฟังก์ชันต่างกันดังนั้นเราจึงต้องพิจารณาอนุพันธ์ด้านซ้ายและอนุพันธ์ด้านขวาดังต่อไปนี้

$$
\begin{aligned}
f'(1^+) &= \lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} \\
&= \lim_{x\to 1^+}\frac{\left[x^3+1\right]-\left[3(1)-1\right]}{x-1} \\
&= \lim_{x\to 1^+}\frac{x^3+1-2}{x-1} \\
&= \lim_{x\to 1^+}\frac{x^3-1}{x-1} \\
&= \lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} \\
&= \lim_{x\to 1^+}(x^2+x+1) \\
&= 3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f'(1^-) &= \lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \\
&= \lim_{x\to 1^+} \frac{\left[3x-1\right]-\left[3(1)-1\right]}{x-1} \\
&= \lim_{x\to 1^+} \frac{3x-1-2}{x-1} \\
&= \lim_{x\to 1^+} \frac{3x-3}{x-1} \\
&= \lim_{x\to 1^+} \frac{3(x-1)}{x-1} \\
&= \lim_{x\to 1^+} 3 \\
&= 3
\end{aligned}
$$

ดังนั้น จากทั้งสามกรณีสรุปได้ว่า $f'(x) = \begin{cases} 3, & x \le 1 \\ 3x^2, & x > 1 \end{cases}$

3.3 การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิต

จะเห็นว่าการใช้นิยามเพื่อหาค่าอนุพันธ์นั้น จะมีความยุ่งยากและสับสนเพราะต้องอาศัยเรื่องลิมิตในการหาค่าซึ่งเสียเวลามากในการคำนวณ โดยการหาอนุพันธ์นั้นจะสะดวกและรวดเร็วยิ่งขึ้นนั้นจึงมีการสร้างสูตรสำหรับการหาอนุพันธ์ขึ้นมาโดยจะได้กล่าวเป็นทฤษฎีบทต่อ ๆ ไปนี้ (สุรวิทย์ ตันแต่งผล และอนุสรณ์ ชนวีรยุทธ, 2557 : 41)

หมายเหตุ 3.3

การเขียนอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $y = f(x)$ สามารถแทนด้วย $f'(x)$, y' , $\dfrac{dy}{dx}$ หรือ $\dfrac{d}{dx}f(x)$

ทฤษฎีบท 3.1

ถ้า $y = f(x) = c$ เมื่อ c คือค่าคงตัว แล้ว $\dfrac{d}{dx}f(x) = 0$

ตัวอย่าง 3.5 กำหนด $y = 3$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

วิธีทำ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}(3)$

$= 0$

ดังนั้น $\dfrac{dy}{dx} = 0$

> **ทฤษฎีบท 3.2**
>
> ถ้า $y = f(x) = x^n$ แล้ว $\dfrac{d}{dx}f(x) = \dfrac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$
>
> เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก

ตัวอย่าง 3.6 กำหนด $y = x^3$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

วิธีทำ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}\left(x^3\right)$

$= 3x^2$

ดังนั้น $\dfrac{dy}{dx} = 3x^2$

ตัวอย่าง 3.7 กำหนด $f(x) = x^{100}$ จงหา $\dfrac{d}{dx}f'(x)$

วิธีทำ $\dfrac{d}{dx}f(x) = \dfrac{d}{dx}\left(x^{100}\right)$

$= 100x^{99}$

ดังนั้น $\dfrac{dy}{dx} = 100x^{99}$

> **ทฤษฎีบท 3.3**
>
> กำหนดให้ c เป็นค่าคงตัวถ้า $y = f(x) = cu(x)$ เมื่อ $u(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ที่ x แล้ว $\dfrac{d}{dx}f(x) = \dfrac{d}{dx}c\,u(x) = c\dfrac{d}{dx}u(x)$

ทฤษฎีบท 3.4

ถ้า $u(x),\, v(x)$ เป็นฟังก์ชันของตัวแปร x และ $u(x),\, v(x)$ มีอนุพันธ์ที่ x

แล้ว $\frac{d}{dx}\left[u(x)+v(x)\right]=\frac{d}{dx}u(x)+\frac{d}{dx}v(x)$

สำหรับทฤษฎีบท 3.1 – 3.4 กล่าวถึงการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพหุนามโดยใช้สูตรอย่างง่าย $\frac{d}{dx}cx^{n}=cnx^{n-1}$ และสูตรเกี่ยวกับการหาอนุพันธ์ของผลบวกของฟังก์ชัน ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 3.8 กำหนด $y=x^{3}+4x-5$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=\frac{d}{dx}\left(x^{3}+4x-5\right)\\&=\frac{d}{dx}x^{3}+\frac{d}{dx}4x-\frac{d}{dx}5\\&=3x^{2}+4\frac{dx}{dx}-0\\&=3x^{2}+4\end{aligned}$$

ดังนั้น $\frac{dy}{dx}=3x^{2}+4$

ตัวอย่าง 3.9 กำหนด $y=x^{10}-2x+1$ จงหา $f'(x)$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{d}{dx}\left(x^{10}-2x+1\right)\\&=\frac{d}{dx}x^{10}-\frac{d}{dx}2x+\frac{d}{dx}1\\&=10x^{9}-2+0\\&=10x^{9}-2\end{aligned}$$

ดังนั้น $f'(x)=10x^{9}-2$

ต่อไปจะกล่าวถึงการหาอนุพันธ์ของผลคูณ ผลหารและตัวยกกำลังดังทฤษฎีบทต่อไปนี้ (ไมตรี ปชาเดชสุวัฒน์, 2532 : 31-33)

ทฤษฎีบท 3.5

ถ้า $u(x)$, $v(x)$ เป็นฟังก์ชันของตัวแปร x และ $u(x)$, $v(x)$ มีอนุพันธ์ที่ x แล้ว $\frac{d}{dx}\left[u(x)\cdot v(x)\right] = u(x)\frac{d}{dx}v(x) + v(x)\frac{d}{dx}u(x)$

ตัวอย่าง 3.10 กำหนด $f(x) = (x^3+4)(6x^2-5x)$ จงหา $f'(x)$

วิธีทำ
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}\left(x^3+4\right)\left(6x^2-5x\right) \\ &= \left(x^3+4\right)\frac{d}{dx}\left(6x^2-5x\right) + \left(6x^2-5x\right)\frac{d}{dx}\left(x^3+4\right) \\ &= \left(x^3+4\right)\left(12x-5\right) + \left(6x^2-5x\right)\left(3x^2\right) \\ &= 12x^4-5x^3+48x-20+18x^4-15x^3 \\ &= 30x^4-20x^3+48x-20 \end{aligned}$$

ดังนั้น $f'(x) = 30x^4-20x^3+48x-20$

ตัวอย่าง 3.11 กำหนด $f(x) = (x-1)(x^{20}+5x)$ จงหา $f'(x)$

วิธีทำ
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}(x-1)(x^{20}+5x) \\ &= (x-1)\frac{d}{dx}(x^{20}+5x) + (x^{20}+5x)\frac{d}{dx}(x-1) \\ &= \left(x-1\right)\left(20x^{19}+5\right) + \left(x^{20}+5x\right)(1) \\ &= \left(x-1\right)\left(20x^{19}+5\right) + \left(x^{20}+5x\right) \\ &= 20x^{20}-20x^{19}+10x-5 \end{aligned}$$

ดังนั้น $f'(x) = 20x^{20}-20x^{19}+10x-5$

ตัวอย่าง 3.12 กำหนด $f(x)=(x^3+1)(3x+5)$ จงหา $f'(x)$

วิธีทำ $f'(x)=\frac{d}{dx}(x^3+1)(3x+5)$

$$=(x^3+1)\frac{d}{dx}(3x+5)+(3x+5)\frac{d}{dx}(x^3+1)$$

$$=\left(x^3+1\right)(3)+\left(3x+5\right)\left(3x^2\right)$$

$$=\left(3x^3+3\right)+\left(9x^3+15x^2\right)$$

$$=12x^3+15x^2+3$$

ดังนั้น $f'(x)=12x^3+15x^2+3$

> **ทฤษฎีบท 3.6**
>
> ถ้า $u(x)$, $v(x)$ เป็นฟังก์ชันของตัวแปร x และ $u(x)$, $v(x)$ มีอนุพันธ์ที่ x และ $v(x)\neq 0$ แล้ว $\frac{d}{dx}\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]=\frac{v(x)\frac{d}{dx}u(x)-u(x)\frac{d}{dx}v(x)}{\left[v(x)\right]^2}$

ตัวอย่าง 3.13 กำหนด $y=\frac{x^3+4}{6x^2-5x}$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ $\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{x^3+4}{6x^2-5x}\right)$

$$=\frac{\left(6x^2-5x\right)\frac{d}{dx}\left(x^3+4\right)-\left(x^3+4\right)\frac{d}{dx}\left(6x^2-5x\right)}{\left(6x^2-5x\right)^2}$$

$$=\frac{\left(6x^2-5x\right)\left(3x^2\right)-\left(x^3+4\right)\left(12x-5\right)}{\left(6x^2-5x\right)^2}$$

$$=\frac{6x^4-10x^3+48x-20}{\left(6x^2-5x\right)^2}$$

ดังนั้น $\frac{dy}{dx}=\frac{6x^4-10x^3+48x-20}{\left(6x^2-5x\right)^2}$

ตัวอย่าง 3.14 กำหนด $y = \dfrac{x-1}{x-3x^5}$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

วิธีทำ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x-1}{x-3x^5}\right)$

$$= \frac{\left(x-3x^5\right)\frac{d}{dx}\left(x-1\right)-\left(x-1\right)\frac{d}{dx}\left(x-3x^5\right)}{\left(x-3x^5\right)^2}$$

$$= \frac{\left(x-3x^5\right)\left(1\right)-\left(x-1\right)\left(1-15x^4\right)}{\left(x-3x^5\right)^2}$$

$$= \frac{12x^5-15x^4+1}{\left(x-3x^5\right)^2}$$

ดังนั้น $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{12x^5-15x^4+1}{\left(x-3x^5\right)^2}$

> **ทฤษฎีบท 3.7**
>
> ถ้า $u(x)$ เป็นฟังก์ชันของตัวแปร x และ $u(x)$ มีอนุพันธ์ที่ x
> แล้ว $\dfrac{d}{dx}[u(x)]^n = n[u(x)]^{n-1}\dfrac{d}{dx}u(x)$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม

ตัวอย่าง 3.15 กำหนด $f(x) = (x^5+4x)^{10}$ จงหา $f'(x)$

วิธีทำ $f'(x) = \dfrac{d}{dx}(x^5+4x)^{10}$

$$= 10(x^5+4x)^9\frac{d}{dx}(x^5+4x)$$

$$= 10(x^5+4x)^9(5x^4-4)$$

ดังนั้น $f'(x) = 10(x^5+4x)^9(5x^4-4)$

ตัวอย่าง 3.16 กำหนด $f(x)=(x^6-3x+1)^{101}$ จงหา $f'(x)$

วิธีทำ $f'(x)=\frac{d}{dx}\left(x^6-3x+1\right)^{101}$

$$=101(x^6-3x+1)^{100}\frac{d}{dx}(x^6-3x+1)$$

$$=101(x^6-3x+1)^{100}(6x^5-3)$$

ดังนั้น $f'(x)=101(x^6-3x+1)^{100}(6x^5-3)$

ตัวอย่าง 3.17 กำหนด $f\left(x\right)=\dfrac{1}{\left(x^6-3x+1\right)^{11}}$ จงหา $f'\left(x\right)$

วิธีทำ $f'\left(x\right)=\frac{d}{dx}\left(x^6-3x+1\right)^{-11}$

$$=-11\left(x^6-3x+1\right)^{-12}\frac{d}{dx}\left(x^6-3x+1\right)$$

$$=-11(x^6-3x+1)^{-12}(6x^5-3)$$

ดังนั้น $f'(x)=-11\left(x^6-3x+1\right)^{-12}\left(6x^5-3\right)$

ทฤษฎีบท 3.8

สำหรับจำนวนเต็มบวก n ใด ๆ และ $u(x)>0$ มีอนุพันธ์ที่ x

แล้ว $\frac{d}{dx}\left[u(x)\right]^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{n}\left[u(x)\right]^{\frac{1}{n}-1}\frac{d}{dx}u(x)$

ทฤษฎีบท 3.9

สำหรับจำนวนตรรกยะ r ใด ๆ และ $u\left(x\right)>0$ มีอนุพันธ์ที่ x

แล้ว $\frac{d}{dx}[u(x)]^r=r[u(x)]^{r-1}\frac{d}{dx}u(x)$

ตัวอย่าง 3.18 กำหนด $f(x)=(x^5+4x)^{2/3}$ จงหา $f'(x)$

วิธีทำ $$f'(x)=\frac{d}{dx}(x^5+4x)^{2/3}$$
$$=\frac{2}{3}\left(x^5+4x\right)^{-1/3}\frac{d}{dx}\left(x^5+4x\right)$$
$$=\frac{2}{3}(x^5+4x)^{-1/3}(5x^4+4)$$

ดังนั้น $f'(x)=\dfrac{2}{3}(x^5+4x)^{-1/3}(5x^4+4)$

ตัวอย่าง 3.19 กำหนดให้ $y=\sqrt{3x^5-2x+8}$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

วิธีทำ $$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\sqrt{3x^5-2x+8}$$
$$=\frac{d}{dx}(3x^5-2x+8)^{1/2}$$
$$=\frac{1}{2}(3x^5-2x+8)^{-1/2}\frac{d}{dx}(3x^5-2x+8)$$
$$=\frac{1}{2}(3x^5-2x+8)^{-1/2}(15x^4-2)$$
$$=\frac{15x^4-2}{2(3x^5-2x+8)^{1/2}}$$

ดังนั้น $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{15x^4-2}{2(3x^5-2x+8)^{1/2}}$

ตัวอย่าง 3.20 กำหนดให้ $y=\left(\dfrac{4x^2-x}{5x^3-2}\right)^{12}$ จงหา y'

วิธีทำ $$y'=\frac{d}{dx}\left(\frac{4x^2-x}{5x^3-2}\right)^{12}$$
$$=12\left(\frac{4x^2-x}{5x^3-2}\right)^{11}\frac{d}{dx}\left(\frac{4x^2-x}{5x^3-2}\right)$$

$$= 12\left(\frac{4x^2 - x}{5x^3 - 2}\right)^{11} \frac{\left[(5x^3 - 2)\dfrac{d}{dx}(4x^2 - x) - (4x^2 - x)\dfrac{d}{dx}(5x^3 - 2)\right]}{(5x^3 - 2)^2}$$

$$= 12\left(\frac{4x^2 - x}{5x^3 - 2}\right)^{11} \frac{(2 - 16x + 10x^3 - 20x^4)}{(5x^3 - 2)^2}$$

ดังนั้น $y' = 12\left(\dfrac{4x^2 - x}{5x^3 - 2}\right)^{11} \dfrac{(2 - 16x + 10x^3 - 20x^4)}{(5x^3 - 2)^2}$

ตัวอย่าง 3.21 กำหนดให้ $y = (2x^3 - x)\sqrt{3x^5 - 2x + 8}$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

วิธีทำ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}(2x^3 - x)\sqrt{3x^5 - 2x + 8}$

$$= \frac{d}{dx}(2x^3 - x)(3x^5 - 2x + 8)^{1/2}$$

$$= \left[(2x^3 - x)\frac{d}{dx}(3x^5 - 2x + 8)^{1/2}\right] + \left[(3x^5 - 2x + 8)^{1/2}\frac{d}{dx}(2x^3 - x)\right]$$

$$= \left[(2x^3 - x)\frac{1}{2}(3x^5 - 2x + 8)^{-1/2}\frac{d}{dx}(3x^5 - 2x + 8)\right] + \left[(3x^5 - 2x + 8)^{1/2}\frac{d}{dx}(2x^3 - x)\right]$$

$$= \left[(2x^3 - x)\frac{1}{2}(3x^5 - 2x + 8)^{-1/2}(15x^4 - 2)\right] + \left[(3x^5 - 2x + 8)^{1/2}(6x^2 - 1)\right]$$

$$= \frac{1}{2}(3x^5 - 2x + 8)^{-1/2}\left[(2x^3 - x)(15x^4 - 2) + 2(3x^5 - 2x + 8)(6x^2 - 1)\right]$$

$$= (3x^5 - 2x + 8)^{-1/2}(66x^7 - 21x^5 - 28x^3 + 96x^2 - 16)$$

ดังนั้น $\dfrac{dy}{dx} = (3x^5 - 2x + 8)^{-1/2}(66x^7 - 21x^5 - 28x^3 + 96x^2 - 16)$

ตัวอย่าง 3.22 กำหนดให้ $f\left(x\right)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{\left(2x^2+x\right)^2}}$ และ $x\neq 0$ จงหาค่าของ $f'\left(x\right)$

วิธีทำ

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\sqrt[3]{\left(2x^2+x\right)^2}}\right] \\
&= \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{(2x^2+x)^{2/3}}\right] \\
&= \frac{d}{dx}(2x^2+x)^{-2/3} \\
&= -\frac{2}{3}(2x^2+x)^{-5/3}\frac{d}{dx}(2x^2+x) \\
&= -\frac{2}{3}\left(2x^2+x\right)^{-5/3}\left(4x+1\right)
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $f'(x)=-\dfrac{2}{3}\left(2x^2+x\right)^{-5/3}\left(4x+1\right)$

3.4 การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบ

ในหัวข้อที่ผ่านมานั้นเราได้สูตรในการหาอนุพันธ์ของ ผลบวก ผลคูณ และผลหารของฟังก์ชันแล้ว แต่การกระทำของฟังก์ชัน 2 ฟังก์ชันที่สำคัญอีกอย่างก็คือ การนำมาประกอบซึ่งจะได้เป็นฟังก์ชันขึ้นใหม่ เรียกว่า ฟังก์ชันประกอบ ซึ่งในที่นี้เราจะหาสูตรอนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบซึ่งจะมีประโยชน์มากในการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่สลับซับซ้อน (Wright,D.F. and New, B.D., 1992 : 85-86)

บทนิยาม 3.4

ให้ $f:A\to B$ และ $g:B\to C$ เป็นฟังก์ชันแล้ว **ฟังก์ชันประกอบ** ของ f และ g เขียนแทนด้วย $g\circ f$ และ $g\circ f=\left\{(x,z)\in A\times C:\right.$ มี $y\in B$ ซึ่ง $(x,y)\in f$ และ $\left.(y,z)\in g\right\}$ หรือ $g\circ f(x)=g\left(f(x)\right)$

กำหนด u เป็นฟังของ x นิยามโดย $u=f(x)$ และ y เป็นฟังก์ชันของ u นิยามโดย $y=g(u)$ แล้ว y จะเป็นฟังก์ชันของ x นิยามโดย $y=g\big(f(x)\big)$ นั่นคือ y เป็นฟังก์ชันประกอบของ f และ g ดังบทนิยาม 3.4

ทฤษฎีบท 3.10

f เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ที่ u และให้ g เป็นฟังก์ชันนิยามโดย

$$g\big(h\big)=\begin{cases}\dfrac{f(u+h)-f(u)}{h}-f'(u), & h\neq 0\\ 0, & h=0\end{cases}$$

แล้ว g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $h=0$ และ $f(u+h)-f(u)=\big[f'(u)+g(h)\big]h$

ทฤษฎีบท 3.11 กฎลูกโซ่

ถ้า $y=g(u)$ และเป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ที่ u และ $u=f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ที่ x แล้ว $y=g\big(f(x)\big)$ จะเป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ที่ x และ

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

หรือ $$\frac{dy}{dx}=g'(u)\cdot f'(x)$$

ทฤษฎีบท 3.12

ให้ $y=f(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และมีฟังก์ชันผกผันซึ่งต่อเนื่องบนโดเมน $\big[a,b\big]$ โดย $x=f^{-1}(y)=g(y)$ แล้ว $g'(y)=\dfrac{1}{f'(u)}$ หรือ $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{\dfrac{dy}{dx}}$ เมื่อ $f'(x)$ หาค่าได้ และ $f'(x)\neq 0$

ตัวอย่าง 3.23 กำหนดให้ $y = u^3$ และ $u = x^2 - 2x + 5$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

วิธีที่ 1 ใช้กฎลูกโซ่

จาก $y = u^3$ จะได้ $\dfrac{dy}{du} = 3u^2$

และ $u = x^2 - 2x + 5$ จะได้ $\dfrac{du}{dx} = 2x - 2$

เนื่องจาก $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}$

จะได้ $\dfrac{dy}{dx} = 3u^2 \cdot (2x - 2)$

$$\frac{dy}{dx} = 3(x^2 - 2x + 5)^2 (2x - 2)$$

ดังนั้น $\dfrac{dy}{dx} = 3\left(x^2 - 2x + 5\right)^2 \left(2x - 2\right)$

วิธีที่ 2 วิธีการแทนค่า

จาก $y = u^3$

และ $u = x^2 - 2x + 5$

จะได้ $y = (x^2 - 2x + 5)^3$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(x^2 - 2x + 5)^3 \\ &= 3\,(x^2 - 2x + 5)^2 \frac{d}{dx}(x^2 - 2x + 5) \\ &= 3\,(x^2 - 2x + 5)^2 (2x - 2) \end{aligned}$$

ดังนั้น $\dfrac{dy}{dx} = 3\left(x^2 - 2x + 5\right)^2 \left(2x - 2\right)$

ตัวอย่าง 3.24 กำหนดให้ $y = (2t - 3)^5$ และ $t = x^2 - 2x + 5$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

วิธีที่ 1 ใช้กฎลูกโซ่

จาก $y = \left(2t - 3\right)^5$ จะได้ $\dfrac{dy}{dt} = 10\left(2t - 3\right)^4$

และ $t = x^2 - 2x + 5$ จะได้ $\dfrac{dt}{dx} = 2x - 2$

เนื่องจาก $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$

จะได้ $\frac{dy}{dx} = 10(2t-3)^4(2x-2)$

$$= 10\left[2\left(x^2 - 2x + 5\right) - 3\right]^4 (2x-2)$$

$$= 10\left(2x^2 - 4x + 10 - 3\right)^4 (2x-2)$$

$$= 10\left(2x^2 - 4x + 7\right)^4 (2x-2)$$

$$= 10\left(2x^2 - 4x + 7\right)^4 2(x-1)$$

$$= 20\left(2x^2 - 4x + 7\right)^4 (x-1)$$

ดังนั้น $\frac{dy}{dx} = 20\left(2x^2 - 4x + 7\right)^4 (x-1)$

วิธีที่ 2 วิธีการแทนค่า

จาก $y = 2t - 3$

และ $t = x^2 - 2x + 5$

จะได้ $y = \left[2\left(x^2 - 2x + 5\right) - 3\right]^5$

$$= \left(2x^2 - 4x + 10 - 3\right)^5$$

$$= \left(2x^2 - 4x + 7\right)^5$$

และ $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(2x^2 - 4x + 7\right)^5$

$$= 5\left(2x^2 - 4x + 7\right)^4 \frac{d}{dx}\left(2x^2 - 4x + 7\right)$$

$$= 5\left(2x^2 - 4x + 7\right)^4 (4x-4)$$

$$= 20\left(2x^2 - 4x + 4\right)^4 (x-1)$$

ดังนั้น $\frac{dy}{dx} = 20\left(2x^2 - 4x + 4\right)^4 (x-1)$

ตัวอย่าง 3.25 กำหนดให้ $y = x^5 - 2x^3 + x$ จงหา $\dfrac{dx}{dy}$

วิธีทำ จาก $y = x^5 - 2x^3 + x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^5 - 2x^3 + x)$$

$$\frac{dy}{dx} = 5x^4 - 6x^2 + 1$$

จาก $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{\dfrac{dy}{dx}}$

$$= \frac{1}{5x^4 - 6x^2 + 1}$$

ดังนั้น $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{5x^4 - 6x^2 + 1}$

ตัวอย่าง 3.26 กำหนดให้ $y = \dfrac{1}{\left(2x^5 - x^3 + 5x\right)^{10}}$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

วิธีทำ ให้ $y = \dfrac{1}{u^{10}}$ โดยที่ $u = 2x^5 - x^3 + 5x$

ดังนั้น $\dfrac{dy}{du} = \dfrac{d}{du}\left(\dfrac{1}{u^{10}}\right)$

$$= \frac{d}{du}u^{-10}$$
$$= -10u^{-11}$$

และ $\dfrac{du}{dx} = \dfrac{d}{dx}\left(2x^5 - x^3 + 5x\right)$

$$= 10x^4 - 3x^2 + 5$$

จาก $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}$

$$= -10u^{-11}\left(10x^4 - 3x^2 + 5\right)$$

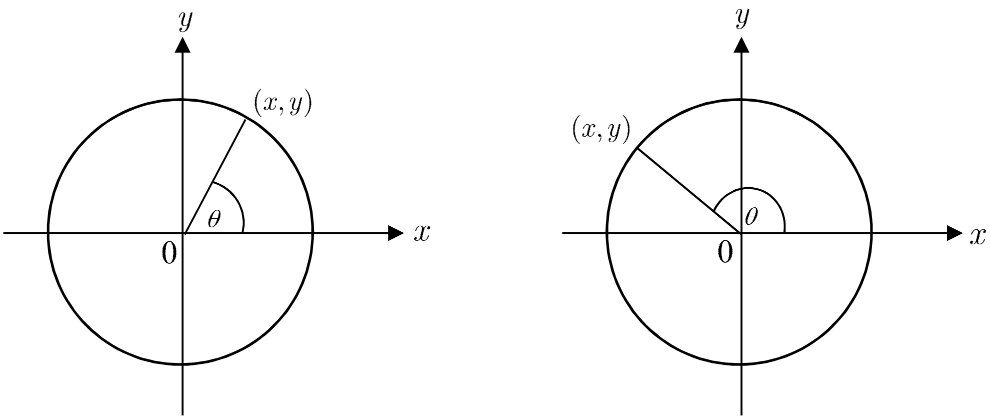
$$= -10\left(2x^5 - x^3 + 5x\right)^{-11}\left(10x^4 - 3x^2 + 5\right)$$

ดังนั้น $\dfrac{dy}{dx} = -10\left(2x^5 - x^3 + 5x\right)^{-11}\left(10x^4 - 3x^2 + 5\right)$

3.5 การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ในหัวข้อที่ผ่านมา ได้กล่าวถึงการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิตแต่ในหัวข้อนี้จะศึกษาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่ไม่ใช่ฟังก์ชันพีชคณิต โดยจะเรียกว่าฟังก์ชันอดิศัย ซึ่งในฟังก์ชันอดิศัยนี้ก็จะประกอบด้วยหลาย ๆ ฟังก์ชันได้แก่ ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ฟังก์ชันตีโกณมิติผกผัน ฟังก์ชันลอการิทึม ฟังก์ชันชี้กำลัง ฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิก และฟังก์ชันในรูป a^u และ u^v ซึ่งในหัวข้อนี้จะได้กล่าวถึงฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ก่อนจะศึกษาการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณ เพื่อเป็นการทบทวนจะกล่าวถึงนิยามพื้นฐานและเอกลักษณ์ตรีโกณมิติที่นักศึกษาต้องทราบก่อนดังต่อไปนี้ กำหนดวงกลมรัศมี r จุดศูนย์กลางที่จุดกำเนิดในระบบพิกัดฉาก θ เป็นมุมตรงจุดศูนย์กลางวัดจากแกน x ด้านบวกในทิศทวนเข็มนาฬิกา (x, y) เป็นจุดตัดของด้านประกอบมุม θ นี้กับวงกลม ดังรูป (คณาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยรามคำแหง, 2542 : 61)



ภาพประกอบ 3.2 วิธีการวัดมุม θ

ที่มา : รณชัย มาเจริญทรัพย์. 2551 : 163

บทนิยาม 3.5

ฟังก์ชันไซน์ และโคไซน์ ของมุม θ นิยามดังนี้ $\sin\theta = \dfrac{y}{r}$ และ $\cos\theta = \dfrac{x}{r}$

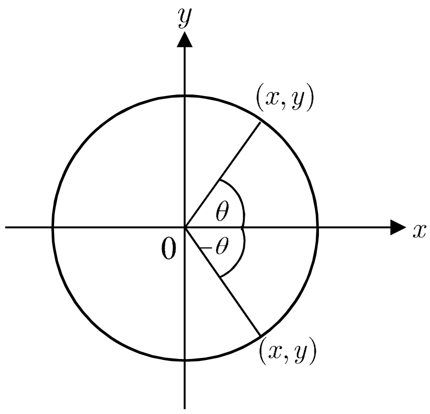
เมื่อ $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

นิยามของ $\sin\theta$ และ $\cos\theta$ นั้นจะไม่ขึ้นอยู่กับขนาดของวงกลมหรือ รัศมีของวงกลม แต่ขึ้นอยู่กับมุม θ เท่านั้นและหน่วยที่ใช้วัดมุมทั่วไปคือ องศา ซึ่งมีมุมรอบศูนย์กลางของวงกลมเท่ากับ 360 องศา แต่ในนิยามของฟังก์ชันตรีโกณมิตินั้นเป็นฟังก์ชันของจำนวนจริง ดังนั้นจึงใช้หน่วยวัดเป็นมุมเรเดียน ฉะนั้นจึงได้ความสัมพันธ์ดังนี้

360 องศา = 2π เรเดียน

หรือ 180 องศา = π เรเดียน

มุมลบคือมุมที่วัดจากแกน x ด้านบวกในทิศตามเข็มนาฬิกาดังรูป



ภาพประกอบ 3.3 มุม θ และมุม $-\theta$

ที่มา : รณชัย มาเจริญทรัพย์. 2551 : 164

ดังนั้นโดยนิยามของไซน์ และโคไซน์ได้ $\sin(-\theta) = -\sin\theta$ และ $\cos(-\theta) = \cos\theta$

บทนิยาม 3.6

ฟังก์ชันแทนเจนต์ มีบทนิยามดังนี้

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{เมื่อ } \cos x \neq 0$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \quad \text{เมื่อ } \sin x \neq 0$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} \quad \text{เมื่อ } \cos x \neq 0$$

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x} \quad \text{เมื่อ } \sin x \neq 0$$

เอกลักษณ์ที่สำคัญทางตรีโกณมิติมีดังต่อไปนี้

1. $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$

2. $1 + \tan^2 A = \sec^2 A$

3. $1 + \cot^2 A = \cos ec^2 A$

4. $\sin\left(A + B\right) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$

5. $\sin\left(A - B\right) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$

6. $\cos\left(A + B\right) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$

7. $\cos\left(A - B\right) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$

8. $\tan\left(A + B\right) = \dfrac{t\,\mathrm{an}\, A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$

9. $\tan\left(A - B\right) = \dfrac{t\,\mathrm{an}\, A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$

10. $\sin 2A = 2 \sin A \cos A$

11. $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$

$$= 2\cos^2 A - 1$$
$$= 1 - 2\sin^2 A$$

10. $\tan 2A = \dfrac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}$

11. $\sin A + \sin B = 2\sin\left(\dfrac{A+B}{2}\right)\cos\left(\dfrac{A-B}{2}\right)$

14. $\sin A - \sin B = 2\cos\left(\dfrac{A+B}{2}\right)\sin\left(\dfrac{A-B}{2}\right)$

15. $\cos A + \cos B = 2\cos\left(\dfrac{A+B}{2}\right)\cos\left(\dfrac{A-B}{2}\right)$

16. $\cos A - \cos B = -2\sin\left(\dfrac{A+B}{2}\right)\sin\left(\dfrac{A-B}{2}\right)$

3.5.1 ทฤษฎีบทของอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ให้ $u = u(x)$ เป็นฟังก์ชันของตัวแปร x และ $u(x)$ มีอนุพันธ์ที่ x สำหรับการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิตินั้นอาศัยทฤษฎีบทต่าง ๆ แต่จะเว้นการพิสูจน์ทฤษฎีบท ดังต่อไปนี้ (จันทนีย์ กาญจนะโรจน์ และชุลี โชติกประคัลภ์, 2557 : 52-54)

ทฤษฎีบท 3.13

ถ้า $y = \sin x$ แล้ว $y' = \cos x$ หรือ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}\sin x = \cos x$

ข้อสังเกต 3.1

ถ้า u เป็นฟังก์ชันของ x ซึ่งหาอนุพันธ์ได้แล้วโดยกฎลูกโซ่จะได้ $\dfrac{d}{dx}\sin u = \cos u\dfrac{du}{dx}$

ทฤษฎีบท 3.14

ถ้า $y = \cos x$ แล้ว $y' = -\sin x$ หรือ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}\cos x = -\sin x$

ข้อสังเกต 3.2

ถ้า u เป็นฟังก์ชันของ x ซึ่งหาอนุพันธ์ได้แล้วโดยกฎลูกโซ่จะได้ $\dfrac{d}{dx}\cos u = -\sin u\dfrac{du}{dx}$

ตัวอย่าง 3.27 กำหนด $y = \sin(2x)$ จงหา y'

วิธีทำ $y = \sin(2x)$

$$y' = \frac{d}{dx}\sin(2x)$$

$$= \left[\cos(2x)\right]\left[\frac{d}{dx}(2x)\right]$$

$$= \left[\cos(2x)\right]\left[2\right]$$

$$= 2\cos 2x$$

ดังนั้น $y' = 2\cos 2x$

ตัวอย่าง 3.28 กำหนด $y = \sin\left(x^5 - 5x^3 + 3\right)$ จงหา y'

วิธีทำ $y = \sin\left(x^5 - 5x^3 + 3\right)$

$$y' = \frac{d}{dx}\sin\left(x^5 - 5x^3 + 3\right)$$

$$= \cos\left(x^5 - 5x^3 + 3\right)\left[\frac{d}{dx}\left(x^5 - 5x^3 + 3\right)\right]$$

$$= \left[\cos\left(x^5 - 5x^3 + 3\right)\right]\left[5x^4 - 15x^2\right]$$

ดังนั้น $y' = \left(5x^4 - 15x^2\right)\cos\left(x^5 - 5x^3 + 3\right)$

ตัวอย่าง 3.29 กำหนด $y = \tan 3x$ จงหา y'

วิธีทำ $y = \tan 3x$

$$y' = \frac{d}{dx}\tan 3x$$

$$= \frac{d}{dx}\frac{\sin 3x}{\cos 3x}$$

$$= \frac{\cos 3x\frac{d}{dx}\sin 3x - \sin 3x\frac{d}{dx}\cos 3x}{\cos^2 3x}$$

$$= \frac{\left(\cos 3x\cos 3x\right)\frac{d}{dx}\left(3x\right) + \left(\sin 3x\sin 3x\right)\frac{d}{dx}\left(3x\right)}{\cos^2 3x}$$

$$= \frac{\left(\cos 3x\cos 3x\right)\left(3\right) + \left(\sin 3x\sin 3x\right)\left(3\right)}{\cos^2 3x}$$

$$= \frac{3\left(\cos^2 3x + \sin^2 3x\right)}{\cos^2 3x}$$

$$= \frac{3}{\cos^2 3x}$$

$$= 3\sec^2 3x$$

ดังนั้น $y' = 3\sec^2 3x$

ตัวอย่าง 3.30 กำหนด $y = \cos^5\left(x^3 + 1\right)$ จงหา y'

วิธีทำ $y = \cos^5\left(x^3 + 1\right)$

$$y' = \frac{d}{dx}\cos^5\left(x^3 + 1\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\left[\cos\left(x^3+1\right)\right]^5$$

$$= 5\left[\cos\left(x^3+1\right)\right]^4 \frac{d}{dx}\cos\left(x^3+1\right)$$

$$= 5\left[\cos\left(x^3+1\right)\right]^4\left[-\sin\left(x^3+1\right)\right]\frac{d}{dx}\left(x^3+1\right)$$

$$= 5\left[\cos(x^3+1)\right]^4\left[-\sin(x^3+1)\right]\left(3x^2\right)$$

$$= -15x^2\sin(x^3+1)\cos^4(x^3+1)$$

ดังนั้น $y' = -15x^2\sin(x^3+1)\cos^4(x^3+1)$

3.5.2 อนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ

สูตรอนุพันธ์ของ $\tan x$, $\cot x$, $\sec x$ และ $\operatorname{cosec} x$ หาได้โดยเขียนฟังก์ชันตรีโกณเหล่านี้ในรูปของ $\sin x$ และ $\cos x$ ดังแสดงในตัวอย่างจะได้

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\tan x &= \sec^2 x \\
\frac{d}{dx}\sec x &= \sec x\tan x \\
\frac{d}{dx}\cot x &= -\operatorname{cosec}^2 x \\
\frac{d}{dx}\operatorname{cosec} x &= -\operatorname{cosec} x\cot x
\end{aligned}$$

สรุปสูตรอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกนมิติได้ดังนี้ กำหนดให้ $u = u(x)$ เป็นฟังก์ชันของ x ซึ่งหาอนุพันธ์ได้ (ชัยสงคราม เครือหงส์, 2544 : 39)

1. $\frac{d}{dx}\sin u = \cos u\ \frac{du}{dx}$
2. $\frac{d}{dx}\cos u = -\sin u\ \frac{du}{dx}$
3. $\frac{d}{dx}\tan u = \sec^2 u\ \frac{du}{dx}$
4. $\frac{d}{dx}\sec u = \sec u\tan u\ \frac{du}{dx}$
5. $\frac{d}{dx}\cot u = -\operatorname{cosec}^2 u\ \frac{du}{dx}$
6. $\frac{d}{dx}\operatorname{cosec} u = -\operatorname{cosec} u\ \cot u\ \frac{du}{dx}$

เมื่อมีสูตรอนุพันธ์และของฟังก์ชันตรีโกนมิติทั้ง 6 สูตรแล้วเราก็จะสามารถหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติได้ง่ายขึ้นดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 3.31 กำหนด $y=\tan(x^2-2x)^{21}$ จงหา y'

วิธีทำ $y=\tan(x^2-2x)^{21}$

$$
\begin{aligned}
y' &= \frac{d}{dx}\tan(x^2-2x)^{21} \\
&= \left[\sec^2(x^2-2x)^{21}\right]\frac{d}{dx}(x^2-2x)^{21} \\
&= \left[\sec^2(x^2-2x)^{21}\right]21(x^2-2x)^{20}\frac{d}{dx}(x^2-2x) \\
&= \left[\sec^2(x^2-2x)^{21}\right]21(x^2-2x)^{20}(2x-2) \\
&= 42\left[\sec^2(x^2-2x)^{21}\right](x^2-2x)^{20}(x-1) \\
&= 42(x-1)(x^2-2x)^{20}\sec^2(x^2-2x)^{21}
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $y'=42(x-1)(x^2-2x)^{20}\sec^2(x^2-2x)^{21}$

ตัวอย่าง 3.32 กำหนด $y=\cot(x^3-5)$ จงหา y'

วิธีทำ $y=\cot(x^3-5)$

$$
\begin{aligned}
y' &= \frac{d}{dx}\cot(x^3-5) \\
&= \left[-\operatorname{cosec}^2(x^3-5)\right]\frac{d}{dx}(x^3-5) \\
&= \left[-\operatorname{cosec}^2(x^3-5)\right](3x^2) \\
&= -(3x^2)\operatorname{cosec}^2(x^3-5)
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $y'=-(3x^2)\operatorname{cosec}^2(x^3-5)$

ตัวอย่าง 3.33 กำหนด $y=\sec^2\left(3x^3-5\right)$ จงหา y'

วิธีทำ $y=\sec^2\left(3x^3-5\right)$

$$y'=\frac{d}{dx}\sec^2\left(3x^3-5\right)$$
$$=\frac{d}{dx}\left[\sec\left(3x^3-5\right)\right]^2$$
$$=2\sec\left(3x^3-5\right)\frac{d}{dx}\sec\left(3x^3-5\right)$$
$$=2\sec\left(3x^3-5\right)\sec\left(3x^3-5\right)\tan\left(3x^3-5\right)\frac{d}{dx}\left(3x^3-5\right)$$
$$=2\left(9x^2\right)\sec^2\left(3x^3-5\right)\tan\left(3x^3-5\right)$$

$$=18x^2\sec^2\left(3x^3-5\right)\tan\left(3x^3-5\right)$$

ดังนั้น $y'=18x^2\sec^2\left(3x^3-5\right)\tan\left(3x^3-5\right)$

ตัวอย่าง 3.34 กำหนด $y=\operatorname{cosec}\left(x-3\right)$ จงหา y'

วิธีทำ $y=\operatorname{cosec}\left(x-3\right)$

$$y'=\frac{d}{dx}\operatorname{cosec}\left(3-x\right)$$
$$=-\operatorname{cosec}\left(3-x\right)\cot\left(3-x\right)\frac{d}{dx}\left(3-x\right)$$
$$=\left[-\operatorname{cosec}\left(3-x\right)\cot\left(3-x\right)\right]\left(-1\right)$$
$$=\operatorname{cosec}\left(3-x\right)\cot\left(3-x\right)$$

ดังนั้น $y'=\left[\operatorname{cosec}\left(3-x\right)\right]\left[\cot\left(3-x\right)\right]$

ตัวอย่าง 3.35 กำหนด $y=\cot(6x-5)\cos(x^2-3)$ จงหา y'

วิธีทำ $y=\cot(6x-5)\cos(x^2-3)$

$$y'=\frac{d}{dx}[\cot(6x-5)\cos(x^2-3)]$$

$$=[\cot(6x-5)]\frac{d}{dx}\cos(x^2-3)+\cos(x^2-3)\frac{d}{dx}\cot(6x-5)$$

$$=\cot(6x-5)[-\sin(x^2-3)]\frac{d}{dx}(x^2-3)$$

$$+\cos(x^2-3)[-\operatorname{cosec}^2(6x-5)]\frac{d}{dx}(6x-5)$$

$$=\cot(6x-5)[-\sin(x^2-3)](2x)$$

$$+\cos(x^2-3)[-\operatorname{cosec}^2(6x-5)](6)$$

$$=-2x\cot(6x-5)\sin(x^2-3)-6\cos(x^2-3)\operatorname{cosec}^2(6x-5)$$

ดังนั้น $y'=-2x\cot(6x-5)\sin(x^2-3)-6\cos(x^2-3)\operatorname{cosec}^2(6x-5)$

ตัวอย่าง 3.36 กำหนด $y=\dfrac{\sin(x^3+7)}{(x-3)^5}$ จงหา y'

วิธีทำ $y=\dfrac{\sin(x^3+7)}{(x-3)^5}$

$$y'=\frac{d}{dx}\frac{\sin(x^3+7)}{(x-3)^5}$$

$$=\frac{(x-3)^5\frac{d}{dx}\sin(x^3+7)-\sin(x^3+7)\frac{d}{dx}(x-3)^5}{(x-3)^{10}}$$

$$=\frac{[(x-3)^5\cos(x^3+7)]\frac{d}{dx}(x^3+7)-[\sin(x^3+7)][5(x-3)^4]\frac{d}{dx}(x-3)}{(x-3)^{10}}$$

$$= \frac{\left[(x-3)^5\cos(x^3+7)\right](3x^2)-\left[\sin(x^3+7)\right]\left[5(x-3)^4\right](1)}{(x-3)^{10}}$$

$$= \frac{3x^2(x-3)^5\cos(x^3+7)-5(x-3)^4\sin(x^3+7)}{(x-3)^{10}}$$

ดังนั้น $y' = \dfrac{3x^2(x-3)^5\cos(x^3+7)-5(x-3)^4\sin(x^3+7)}{(x-3)^{10}}$

ตัวอย่าง 3.37 กำหนด $y = \operatorname{cosec} x + \sin\left(3x^2-1\right) + x - 3$ จงหา y'

วิธีทำ $y = \operatorname{cosec} x + \sin\left(3x^2-1\right) + x - 3$

$$y' = \frac{d}{dx}\left[\operatorname{cosec} x + \sin(3x^2-1) + x - 3\right]$$

$$= \frac{d}{dx}\operatorname{cosec} x + \frac{d}{dx}\sin(3x^2-1) + \frac{d}{dx}x - \frac{d}{dx}3$$

$$= -\operatorname{cosec} x\cot x + \cos(3x^2-1)\frac{d}{dx}(3x^2-1) + 1 - 0$$

$$= -\operatorname{cosec} x\cot x + \left[\cos(3x^2-1)\right](6x) + 1$$

$$= -\operatorname{cosec} x\cot x + 6x\cos(3x^2-1) + 1$$

ดังนั้น $y' = -\operatorname{cosec} x\cot x + 6x\cos(3x^2-1) + 1$

3.6 การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันลอการิทึมและฟังก์ชันเลขชี้กำลัง

กำหนดให้ a เป็นจำนวนจริงที่ $a > 0$ และ $a \neq 1$ ฟังก์ชัน $f = \left\{(x,y) : y = a^x\right\}$ เรียกว่าฟังก์ชันเลขชี้กำลังส่วนอินเวอร์สฟังก์ชันเลขชี้กำลังคือ $f^{-1} = \left\{(x,y) : x = a^y\right\}$ เรียกว่าฟังก์ชันลอการิทึม ดังนั้นจะมีสมการเป็น $x = a^y$ หรือ $y = \log_a x$ โดยที่ $a > 0, a \neq 1$ การหาอนุพันธ์นี้อาจเริ่มจากฟังก์ชันใดฟังก์ชันใดก่อนก็ได้แต่เพื่อความสะดวกจะเริ่มจากฟังก์ชันลอการิทึมฐาน e คือ $y = \log_e x = \ln x$ หรือ $x = e^y$ โดยที่ e มีนิยามดังนี้ (สุกัญญา สนิทวงศ์ ณ อยุธยา และคณะ, 2556 : 61)

บทนิยาม 3.7.

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \text{ หรือ } e = \lim_{x\to 0}\left(1+s\right)^{\frac{1}{s}},\ s = \frac{1}{n}$$

หมายเหตุ 3.4

e เป็นค่าคงตัวที่เป็นจำนวนอตรรกยะมีค่าประมาณ 2.71828

เพื่อง่ายในการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันลอการิทึมจึงกล่าวถึงคุณสมบัติที่สำคัญของลอการิทึมดังต่อไปนี้ เมื่อ $a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ b \neq 1,\ M > 0,\ N > 0$ และ M^n เป็นจำนวนจริง

1. $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$
2. $\log_a \dfrac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$
3. $\log_a M^n = n\log_a M$
4. $\log_a a = 1$
5. $\log_a 1 = 0$
6. $a^{\log_a M} = M$
7. $\log_{a^n} M = \dfrac{1}{n}\log_a M$ เมื่อ $n \neq 0$
8. $\log_a M = \dfrac{\log_b M}{\log_b a}$
9. $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$

3.6.1 ทฤษฎีบทของอนุพันธ์ฟังก์ชันลอการิทึมและฟังก์ชันเลขชี้กำลัง

ให้ $u = u(x)$ เป็นฟังก์ชันของตัวแปร x และ $u(x)$ มีอนุพันธ์ที่ x และ a เป็นค่าคงตัวใด ๆ ที่ $a > 0,\ a \neq 1$ สำหรับการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันลอการิทึมและฟังก์ชันเลขชี้กำลังนั้นอาศัยทฤษฎีบทดังต่อไปนี้ (พัฒนา สีมากุล, 2539 : 40-42)

ทฤษฎีบท 3.15

ถ้า $y = \log_a u$ เมื่อ $u = u(x)$ เป็นฟังก์ชันของ x โดยที่ $u(x) > 0$ และ a เป็นจำนวนจริงที่ $a > 0$, $a \neq 1$ แล้ว $y' = \frac{1}{u \ln a}\frac{du}{dx}$ นั่นคือ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\log_a u = \frac{1}{u \ln a}\frac{du}{dx}$$

ทฤษฎีบท 3.16

ถ้า $y = \ln u$ เมื่อ $u = u(x)$ เป็นฟังก์ชันของ x โดยที่ $u(x) > 0$ แล้ว $y' = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$ นั่นคือ $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\ln u = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$

ตัวอย่าง 3.38 กำหนดให้ $y = \log_2(x^3 - 1)$ จงหา y'

วิธีทำ $y = \log_2(x^3 - 1)$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{d}{dx}\log_2\left(x^3 - 1\right) \\ &= \frac{1}{\left(x^3 - 1\right)\ln 2}\frac{d}{dx}\left(x^3 - 1\right) \\ &= \frac{1}{\left(x^3 - 1\right)\ln 2}\left(3x^2\right) \\ &= \frac{3x^2}{\left(x^3 - 1\right)\ln 2} \end{aligned}$$

ดังนั้น $y' = \frac{3x^2}{\left(x^3 - 1\right)\ln 2}$

ตัวอย่าง 3.39 กำหนดให้ $y = \ln x^2$ จงหา y'

วิธีทำ $y = \ln x^2$

$$y' = \frac{d}{dx}\left(\ln x^2\right)$$
$$= \frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}x^2 \text{ สำหรับ } x \neq 0$$
$$= \frac{1}{x^2}\left(2x\right)$$
$$= \frac{2}{x}$$

ดังนั้น $y' = \dfrac{2}{x}$ สำหรับ $x \neq 0$

จากตัวอย่างที่ผ่านมาเป็นการใช้ทฤษฎีบท 3.16 ในการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยตรงและสำหรับทฤษฎีดังกล่าวนั้นมีประโยชน์อย่างมากในการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่อยู่ในรูปผลคูณ ผลหาร และฟังก์ชันที่มีเลขชี้กำลังเป็นฟังก์ชันพีชคณิตดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 3.40 กำหนดให้ $y = \left(x^3 - 2x\right)^{25}$ จงหา y'

วิธีทำ

$$y = \left(x^3 - 2x\right)^{25}$$
$$\left|y\right| = \left|\left(x^3 - 2x\right)^{25}\right|$$
$$\ln\left|y\right| = \ln\left|\left(x^3 - 2x\right)^{25}\right|$$
$$\frac{d}{dx}\left[\ln\left|y\right|\right] = \frac{d}{dx}\left[\ln\left|\left(x^3 - 2x\right)^{25}\right|\right]$$
$$\frac{d}{dx}\left[\ln\left|y\right|\right] = \frac{d}{dx}25\left[\ln\left|\left(x^3 - 2x\right)\right|\right]$$
$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{25}{x^3 - 2x}\frac{d}{dx}\left(x^3 - 2x\right)$$
$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{25}{x^3 - 2x}\left(3x^2 - 2\right)$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{25}{x^3 - 2x}\left(3x^2 - 2\right)y$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{25}{x^3 - 2x}\left(3x^2 - 2\right)\left(x^3 - 2x\right)^{25}$$
$$\frac{dy}{dx} = 25\left(x^3 - 2x\right)^{24}\left(3x^2 - 2\right)$$

ดังนั้น $y' = 25\left(x^3 - 2x\right)^{24}\left(3x^2 - 2\right)$

ตัวอย่าง 3.41 กำหนดให้ $y=\left(x^3-1\right)^2\left(x^3+2x^2+x-1\right)^5$ จงหา y'

วิธีทำ

$$y=\left(x^3-1\right)^2\left(x^3+2x^2+x-1\right)^5$$

$$\left|y\right|=\left|(x^3-1)^2(x^3+2x^2+x-1)^5\right|$$

$$\ln\left|y\right|=\ln\left|(x^3-1)^2(x^3+2x^2+x-1)^5\right|$$

$$\ln\left|y\right|=\ln\left|(x^3-1)^2\right|+\ln\left|(x^3+2x^2+x-1)^5\right|$$

$$\ln\left|y\right|=2\ln\left|x^3-1\right|+5\ln\left|x^3+2x^2+x-1\right|$$

$$\frac{d}{dx}\ln\left|y\right|=\frac{d}{dx}\left[2\ln\left|x^3-1\right|+5\ln\left|x^3+2x^2+x-1\right|\right]$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=2\frac{d}{dx}\ln\left|x^3-1\right|+5\frac{d}{dx}\ln\left|x^3+2x^2+x-1\right|$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=2\frac{1}{x^3-1}\frac{d}{dx}\left(x^3-1+5\frac{1}{x^3+2x^2+x-1}\frac{d}{dx}\left(x^3+2x^2+x-1\right)\right.$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=2\frac{1}{x^3-1}(3x^2)+5\frac{1}{x^3+2x^2+x-1}\left(3x^2+4x+1\right)$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{6x^2}{x^3-1}+\frac{5\left(3x^2+4x+1\right)}{x^3+2x^2+x-1}$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{6x^2}{x^3-1}+\frac{5\left(3x^2+4x+1\right)}{x^3+2x^2+x-1}$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{6x^2}{x^3-1}+\frac{15x^2+20x+5}{x^3+2x^2+x-1}$$

$$\frac{dy}{dx}=y\left[\frac{6x^2}{x^3-1}+\frac{15x^2+20x+5}{x^3+2x^2+x-1}\right]$$

$$\frac{dy}{dx}=\left(x^3-1\right)^2\left(x^3+2x^2+x-1\right)^5\left[\frac{21x^5+22x^4+11x^3-21x^2-20x-5}{(x^3-1)(x^3+2x^2+x-1)}\right]$$

$$y'=\left(x^3-1\right)\left(21x^5+22x^4+11x^3-21x^2-20x-5\right)\left(x^3+2x^2+x-1\right)^4$$

ดังนั้น $y'=\left(x^3-1\right)\left(21x^5+22x^4+11x^3-21x^2-20x-5\right)\left(x^3+2x^2+x-1\right)^4$

ตัวอย่าง 3.42 กำหนดให้ $y = x^{x^2+5}$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

วิธีทำ ให้

$$y = x^{x^2+5}$$

$$|y| = \left|x^{x^2+5}\right|$$

$$\ln|y| = \ln\left|x^{x^2+5}\right|$$

$$\ln|y| = \left(x^2+5\right)\ln|x|$$

$$\frac{d}{dx}\ln|y| = \frac{d}{dx}\left(x^2+5\right)\ln|x|$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \left(x^2+5\right)\frac{d}{dx}\ln|x| + \ln|x|\frac{d}{dx}\left(x^2+5\right)$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+5}{x} + 2x\ln|x|$$

$$\frac{dy}{dx} = y\left[\frac{x^2+5}{x} + 2x\ln|x|\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = x^{x^2+5}\left[\frac{x^2+5}{x} + 2x\ln|x|\right]$$

ดังนั้น $\dfrac{dy}{dx} = x^{x^2+5}\left[\dfrac{x^2+5}{x} + 2x\ln|x|\right]$

ทฤษฎีบท 3.17

กำหนดให้ $u = u(x)$ ฟังก์ชันของ x ถ้า $y = e^u$ แล้ว $y' = e^u\dfrac{du}{dx}$

นั่นคือ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}e^u = e^u\dfrac{du}{dx}$

ทฤษฎีบท 3.18

กำหนดให้ $u = u(x)$ ฟังก์ชันของ x ถ้า $y = a^u$; $a > 0$ แล้ว

$y' = a^u \ln a\dfrac{du}{dx}$ นั่นคือ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}a^u = a^u\ln a\dfrac{du}{dx}$

สรุปสูตรอนุพันธ์ของฟังก์ชันลอการิทึมและฟังก์ชันเลขชี้กำลังได้ดังนี้ กำหนดให้ $u = u(x)$ เป็นฟังก์ชันของ x ซึ่งหาอนุพันธ์ได้ (สุกัญญา สนิทวงศ์ ณ อยุธยา และคณะ, 2556 : 68)

1. $\dfrac{d}{dx}\ln u = \dfrac{1}{x}\dfrac{du}{dx}$

2. $\dfrac{d}{dx}\log_a u = \dfrac{1}{u\ln a}\dfrac{du}{dx}$

3. $\dfrac{d}{dx}e^u = e^u\dfrac{du}{dx}$

4. $\dfrac{d}{dx}a^u = a^u\ln a\dfrac{du}{dx}$

ตัวอย่าง 3.43 กำหนดให้ $y = 2e^{3x} - 5\ln x^2$ จงหา y'

วิธีทำ $y = 2e^{3x} - 5\ln x^2$

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{d}{dx}\left(2e^{3x} - 5\ln x^2\right) \\
&= 2\frac{d}{dx}e^{3x} - 5\frac{d}{dx}\ln x^2 \\
&= 2e^{3x}\frac{d}{dx}3x - \frac{5}{x^2}\frac{d}{dx}x^2 \\
&= 2e^{3x}(3) - \frac{5}{x^2}(2x)
\end{aligned}$$

ดังนั้น $y' = 6e^{3x} - \dfrac{10}{x}$

ตัวอย่าง 3.44 กำหนดให้ $y = e^{-5x}\log_2 x$ จงหา y'

วิธีทำ $y = e^{-5x}\log_2 x$

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{d}{dx}\left[e^{-5x}\log_2 x\right] \\
&= e^{-5x}\frac{d}{dx}\log_2 x + \log_2 x\frac{d}{dx}e^{-5x} \\
&= e^{-5x}\frac{1}{x\ln 2} + \log_2 x\left[e^{-5x}\frac{d}{dx}\left(-5x\right)\right] \\
&= e^{-5x}\frac{1}{x\ln 2} + \log_2 x\left[e^{-5x}\left(-5\right)\right] \\
&= e^{-5x}\frac{1}{x\ln 2} - 5e^{-5x}\log_2 x
\end{aligned}$$

ดังนั้น $y' = e^{-5x}\dfrac{1}{x\ln 2} - 5e^{-5x}\log_2 x$

ตัวอย่าง 3.45 กำหนดให้ $f(x)=\dfrac{10^x}{\ln x^6}$ จงหา $f'(x)$

วิธีทำ $f(x)=\dfrac{10^x}{\ln x^6}$

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\frac{10^x}{\ln x^6}$$

$$=\frac{\ln x^6\,\dfrac{d}{dx}10^x-10^x\,\dfrac{d}{dx}\ln x^6}{\ln^2 x^6}$$

$$=\frac{(\ln x^6)(10^x\ln 10)-10^x\,\dfrac{1}{x^6}\dfrac{d}{dx}x^6}{\ln^2 x^6}$$

$$=\frac{10^x\ln x^6\ln 10-\dfrac{10^x 6x^5}{x^6}}{\ln^2 x^6}$$

$$=\frac{x\,10^x\ln 10\ln x^6-6(10)^x}{x\ln^2 x^2}$$

ดังนั้น $f'(x)=\dfrac{x\,10^x\ln 10\ln x^6-6(10)^x}{x\ln^2 x^2}$

ตัวอย่าง 3.46 กำหนดให้ $f(x)=\sin x^3\ln^{10}x$ จงหา $f'(x)$

วิธีทำ $f(x)=\sin x^3\ln^{10}x$

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\sin x^3\ln^{10}x$$

$$=\sin x^3\,\frac{d}{dx}\ln^{10}x+\ln^{10}x\,\frac{d}{dx}\sin x^3$$

$$=\sin x^3\left[10\ln^9 x\,\frac{d}{dx}\ln x\right]+\ln^{10}x\left[\cos x^3\,\frac{d}{dx}x^3\right]$$

$$=\sin x^3\,10\ln^9 x\,(\ln x)^9\left(\frac{1}{x}\right)+(\ln x)^{10}\ (\cos x^3)\ 3x^2$$

$$=\frac{10}{x}\ln^9 x\ \sin x^3+3x^2\ln^{10}x\ \cos x^3$$

ดังนั้น $f'(x)=\dfrac{10}{x}\ln^9 x\ \sin x^3+3x^2\ln^{10}x\ \cos x^3$

ตัวอย่าง 3.47 กำหนดให้ $f\left(x\right)=e^{\sin 3x-\ln x}$ จงหา $f'\left(x\right)$

วิธีทำ $f(x)=e^{\sin 3x-\ln x}$

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{d}{dx}e^{\sin 3x-\ln x} \\
&= \left(e^{\sin 3x-\ln x}\right)\frac{d}{dx}\left(\sin 3x-\ln x\right) \\
&= \left(e^{\sin 3x-\ln x}\right)\left[\frac{d}{dx}\sin 3x-\frac{d}{dx}\ln x\right] \\
&= \left(e^{\sin 3x-\ln x}\right)\left[\left(\cos 3x\right)\frac{d}{dx}\left(3x\right)-\frac{1}{x}\right] \\
&= \left(e^{\sin 3x-\ln x}\right)\left[\left(\cos 3x\right)\left(3\right)-\frac{1}{x}\right] \\
&= \left(e^{\sin 3x-\ln x}\right)\left[3\cos 3x-\frac{1}{x}\right]
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $f'(x)=\left(e^{\sin 3x-\ln x}\right)\left[3\cos 3x-\frac{1}{x}\right]$

3.7 การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยปริยาย

สำหรับฟังก์ชันที่กำหนดโดยสมการที่แสดงถึงความสัมพันธ์ระหว่าง x กับ y นั้นพบว่าบางฟังก์ชันสามารถเขียนแสดงค่า y ในพจน์ x เช่น $y=x+3$ หรือ $y=\dfrac{x^2+1}{3x-1}$ เป็นต้น ซึ่งฟังก์ชันที่สามารถเขียนให้อยู่ในรูป $y=f(x)$ ดังกล่าวข้างต้นนั้นเรียกว่าเป็น**ฟังก์ชันชัดแจ้ง** ฟังก์ชันชนิดนี้สามารถหาอนุพันธ์ได้ทันที โดยอาศัยสูตรอนุพันธ์หรือทฤษฎีของอนุพันธ์ต่าง ๆ ที่ได้กล่าวมาแล้วในหัวข้อที่ผ่านมา แต่สำหรับบางฟังก์ชันที่กำหนดโดยสมการที่แสดงถึงความสัมพันธ์ระหว่างนั้นพบว่าบางฟังก์ชันสามารถเขียนในรูป $f(x,y)=c$ เช่น $x^2y+xy^2=9$ เรียกว่า **ฟังก์ชันโดยปริยาย** วิธีการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยปริยายทำตามขั้นตอนโดยสรุปดังต่อไปนี้ (ธีระศักดิ์ อุรัจนานนท์, 2546 : 87-88)

1. หาอนุพันธ์เทียบตัวแปร x ทั้งสองข้างของสมการฟังก์ชันโดยปริยาย
2. หาอนุพันธ์แต่ละพจน์
3. แก้สมการหา $\dfrac{dy}{dx}$

ตัวอย่าง 3.48 ให้ y เป็นฟังก์ชันของ x ซึ่งสอดคล้องกับสมการ $x^2+y^2=9$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ
$$
\begin{aligned}
x^2+y^2 &= 9 \\
\frac{d}{dx}\left(x^2+y^2\right) &= \frac{d}{dx}9 \\
\frac{d}{dx}x^2+\frac{d}{dx}y^2 &= 0 \\
2x+2y\frac{dy}{dx} &= 0 \\
2y\frac{dy}{dx} &= -2x \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{-2x}{2y} \\
\frac{dy}{dx} &= -\frac{x}{y}
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$

ตัวอย่าง 3.49 ให้ y เป็นฟังก์ชันของ x ซึ่งสอดคล้องกับสมการ $x^3y+y^5=x^6-3$ จงหา y'

วิธีทำ
$$
\begin{aligned}
x^3y+y^5 &= x^6-3 \\
x^3y+y^5-x^6 &= -3 \\
\frac{d}{dx}\left(x^3y+y^5-x^6\right) &= \frac{d}{dx}(-3) \\
\frac{d}{dx}\left(x^3y\right)+\frac{d}{dx}y^5-\frac{d}{dx}x^6 &= 0 \\
\left(x^3\frac{d}{dx}y+y\frac{d}{dx}x^3\right)-5y^4\frac{dy}{dx}-6x^5 &= 0 \\
x^3\frac{dy}{dx}+y\left(3x^2\right)-5y^4\frac{dy}{dx}-6x^5 &= 0 \\
x^3\frac{dy}{dx}-5y^4\frac{dy}{dx} &= 6x^5-3x^2y \\
\left(x^3-5y^4\right)\frac{dy}{dx} &= 6x^5-3x^2y \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{6x^5-3x^2y}{x^3-5y^4}
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $y' = \dfrac{6x^5 - 3x^2y}{x^3 - 5y^4}$

ตัวอย่าง 3.50 ให้ y เป็นฟังก์ชันของ x ซึ่งสอดคล้องกลับสมการ $x^4 + \sin y^3 - x = 0$ จงหา y'

วิธีทำ

$$x^4 + \sin y^3 - x = 0$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^4 + \sin y^3 - x\right) = \frac{d}{dx}0$$

$$\frac{d}{dx}x^4 + \frac{d}{dx}\sin y^3 - \frac{d}{dx}x = \frac{d}{dx}0$$

$$4x^3 + \cos y^3 \frac{dy^3}{dx} - 1 = 0$$

$$4x^3 + \left(\cos y^3\right)3y^2 \frac{dy}{dx} - 1 = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - 4x^3}{3y^2 \cos y^3}$$

ดังนั้น $y' = \dfrac{1 - 4x^3}{3y^2 \cos y^3}$

3.8 อนุพันธ์อันดับสูง

อนุพันธ์ของฟังก์ชันที่กล่าวมาแล้วในข้างต้น อาจเรียกว่าอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งของฟังก์ชันเขียนแทนด้วย $f'(x)$, y', $\dfrac{dy}{dx}$ หรือ $\dfrac{d}{dx}f(x)$ (Ross, F.L. Maurice,.W.D. and Frank, G.R., 2001 : 98)

บทนิยาม 3.8

ให้ $f'(x)$ เป็นอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x)$ แล้วถ้า $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f'\left(x+h\right) - f'\left(x\right)}{h}$ หาค่าได้ เรียกค่าของลิมิตนี้ว่า**อนุพันธ์อันดับที่สอง**ของ $f(x)$ เทียบกับ x อนุพันธ์อันดับที่สองของฟังก์ชันเขียนแทนด้วย $f''(x)$, y'', $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ หรือ $\dfrac{d^2}{dx^2}f(x)$ ในทำนองเดียวกันถ้า $f''(x)$ มีอนุพันธ์เทียบกับ x เรียกอนุพันธ์นี้ว่า**อนุพันธ์อันดับที่สาม**

บทนิยาม 3.8 (ต่อ)

ของ $f(x)$ เทียบกับ x และเขียนแทนด้วย $f'''(x)$, y''', $\dfrac{d^3y}{dx^3}$ หรือ $\dfrac{d^3}{dx^3}f(x)$ และถ้า $f'''(x)$ มีอนุพันธ์เทียบกับ x เรียกอนุพันธ์นี้ว่า**อนุพันธ์อันดับที่สี่**ของ $f(x)$ เทียบกับ x และเขียนแทนด้วย $f^{(4)}(x)$, $y^{(4)}$, $\dfrac{d^4y}{dx^4}$ หรือ $\dfrac{d^4}{dx^4}f(x)$ ในทำนองเดียวกันผลลัพธ์จากการหาอนุพันธ์ n ครั้งติดต่อกันไปเมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกก็จะเรียกว่า**อนุพันธ์อันดับที่** n ของ $f(x)$ ซึ่งเขียนแทนด้วย $f^{(n)}(x)$, $y^{(n)}$, $\dfrac{d^ny}{dx^n}$ หรือ $\dfrac{d^n}{dx^n}f\left(x\right)$ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 3.51 กำหนดให้ $f\left(x\right)=3x^5-2x+3$ จงหา $f''\left(x\right)$

วิธีทำ $f(x)=3x^5-2x+3$

$$f'(x)=\frac{d}{dx}(3x^5-2x+3)$$

$$=15x^4-2$$

$$f''(x)=\frac{d}{dx}(15x^4-2)$$

$$=60x^3$$

ดังนั้น $f''(x)=60x^3$

ตัวอย่าง 3.52 กำหนดให้ $f(x)=\sin 2x^5$ จงหา $f''(x)$

วิธีทำ $f(x)=\sin 2x^5$

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\sin 2x^5$$

$$=\cos 2x^5\,\frac{d}{dx}2x^5$$

$$=\left(\cos 2x^5\right)\left(10x^4\right)$$

$$f''(x) = \frac{d}{dx}(\cos 2x^5)(10x^4)$$
$$= (\cos 2x^5)\frac{d}{dx}(10x^4) + (10x^4)\frac{d}{dx}(\cos 2x^5)$$
$$= (\cos 2x^5)(40x^3) + (10x^4)(-\sin 2x^5)\frac{d}{dx}2x^5$$
$$= (\cos 2x^5)(40x^3) + (10x^4)(-\sin 2x^5)(10x^4)$$
$$= 40x^3(\cos 2x^5) - 100x^8(\sin 2x^5)$$

ดังนั้น $f''(x) = 40x^3(\cos 2x^5) - 100x^8(\sin 2x^5)$

ตัวอย่าง 3.53 ให้ $f(x) = x^4 - 5x + 2$ จงหาค่า n ที่มีค่าน้อยที่สุดที่ทำให้ $f^{(n)}(x) = 0$

วิธีทำ $f(x) = x^4 - 5x + 2$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}x^4 - 5x + 2$$
$$= 4x^3 - 5$$
$$f''(x) = \frac{d}{dx}(4x^3 - 5)$$
$$= 12x^2$$
$$f'''(x) = \frac{d}{dx}12x^2$$
$$= 24x$$
$$f^{(4)}(x) = \frac{d}{dx}24x$$
$$= 24$$
$$f^{(5)}(x) = \frac{d}{dx}24$$
$$= 0$$

เนื่องจาก $f^{(5)}(x) = 0$ และ $f^{(4)}(x) \neq 0$ ดังนั้น $n = 5$

3.9 สรุปท้ายบทที่ 3

ก่อนที่เราจะหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันนั้น ก่อนอื่นเราต้องตรวจสอบก่อนเสมอว่าฟังก์ชันที่เราจะหาอนุพันธ์นั้นมีอนุพันธ์หรือไม่ ซึ่งถ้าหากฟังก์ชันนั้นมีอนุพันธ์แล้วเราสามารถหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันได้เลยอาจจะหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันแบบใช้นิยามก็ได้ แต่ถ้าบางฟังก์ชันไม่เหมาะกับการหาโดยใช้นิยามเราสามารถแบ่งฟังก์ชันที่เราจะหาอนุพันธ์ในรูปแบบต่าง ๆ ที่ได้กล่าวมา เช่นการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิต การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบ การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันลอการิทึมและฟังก์ชันเลขชี้กำลัง การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยปริยาย และการหาอนุพันธ์อันดับสูง ซึ่งเราได้รู้ความหมายของอนุพันธ์ไปแล้วนั้นแล้วเราก็จะสามารถนำอนุพันธ์นั้นไปแก้ปัญหาต่าง ๆ ได้อย่างถูกต้องและเหมาะสมต่อไป

คำถามท้ายบท

1. จงหาอนุพันธ์ของ $f(x) = x^2 + 5x$

   1.1 ที่จุด x ใด ๆ

   1.2 ที่จุด $x = 1$

   1.3 ที่จุด $x = 0$

2. จงหาอนุพันธ์ของ $f(x) = 3x^2 + x - 5$

   2.1 ที่จุด x ใด ๆ

   2.2 ที่จุด $x = 3$

   2.3 ที่จุด $x = 2$

3. จงหาอนุพันธ์ของ $f(x) = (3x^2 - 5)^2$

   3.1 ที่จุด x ใด ๆ

   3.2 ที่จุด $x = 0$

   3.3 ที่จุด $x = 2$

4. จงหาอนุพันธ์ของ $f(x) = (x - 3)^2 + x$

   4.1 ที่จุด x ใด ๆ

   4.2 ที่จุด $x = -1$

   4.3 ที่จุด $x = 0$

5. จงหาอนุพันธ์ของ $f(x) = x - (x - 2)^3$

   5.1 ที่จุด x ใด ๆ

   5.2 ที่จุด $x = 1$

   5.3 ที่จุด $x = 10$

6. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

6.1 $y = x^3 - 6x + 1$

6.2 $y = \sqrt{x} - 6x^{10} + 12$

6.3 $f(x) = \left(5x^3 - x + 1\right)^{12}$

6.4 $y = \sqrt[3]{\left(2x^{10} - 3x + 5\right)^2}$

6.5 $f(x) = \left(x^6 - 3x\right)\left(x + 5\right)$

6.6 $y = \left(2x^6 - x\right)\left(3x^2 + 4x\right)$

6.7 $f(x) = \left(x^6 - 3x\right)^{20}\left(x + 5\right)$

6.8 $y = \dfrac{\left(2x^6 - x\right)^5}{\sqrt{3x^2 + 4x}}$

6.9 $y = \dfrac{\left(2x^6 - x\right)^{12}}{3x^2 + 4x}$

6.10 $f(x) = \dfrac{\left(x^6 - 3x\right)^{20}}{x + 5}$

6.11 $y = \dfrac{\left(2x^6 - x\right)^5}{\sqrt{3x^2 + 4x}}$

6.12 $y = \dfrac{\left(2x^6 - x\right)^{12}\sqrt{3x^2 + 4x}}{3x^2 + 4x}$

7. จงหา $\dfrac{dy}{dx}$ เมื่อกำหนดให้

7.1. $y = 3u$ และ $u = x^2 - 5x + 1$

7.2. $y = u^{10}$ และ $u = 3x - 5$

7.3. $y = 2u^4$ และ $u = x^5 + 3x^2 - 11$

8. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้และตรวจสอบว่าอนุพันธ์เท่ากันหรือไม่

8.1. $y = \sin^3\left(x^2 - 5\right)$ และ $y = \sin\left(x^2 - 5\right)^3$

8.2. $y = \dfrac{\sin\left(x + 2\right)}{\cos\left(x + 2\right)}$ และ $y = \tan\left(x + 2\right)$

8.3. $y = \sin\left(2x - 1\right)$ และ $y = \dfrac{1}{\operatorname{cosec}\left(2x - 1\right)}$

9. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

9.1 $y = \sin\left(x^{10} - 6x - 12\right)$

9.2 $y = \cos\left(3x^5 - x\right)$

9.3 $y = \tan\left(x^{10} - 1\right)$

9.4 $y = \cot\left(3x^{20} - 4\right)$

9.5 $y=\operatorname{cosex}\left(x^{5}-3x^{2}\right)$

9.6 $y=\sec\left(x^{10}-21\right)$

9.7 $y=\cos\left(3x^{5}-x\right)\tan\left(x-3\right)$

9.8 $y=\tan^{19}\left(x^{5}-1\right)$

9.9 $y=\dfrac{\cot\left(3x^{20}-4\right)}{x^{3}-5x}$

9.10 $y=\cos^{12}\left(x^{5}-3\right)\tan^{10}\left(3x-4\right)$

9.11 $y=\cos x-\left(\tan x^{2}\right)\left(3x^{2}-9x\right)$

10. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

10.1 $y=\ln\left(x^{10}-6x-12\right)$

10.2 $y=\log_{2}\left(3x^{5}-x\right)$

10.3 $y=e^{x^{10}-1}$

10.4 $y=12^{5x^{3}-7x}$

10.5 $y=\ln x^{3}+3x-\log_{5}x$

10.6 $y=\ln x^{3}+e^{\sin x}$

10.7 $y=\ln\left(\cos^{3}x\right)$

10.8 $y=\left[\ln\left(x^{5}-1\right)\right]^{20}$

10.9 $y=\dfrac{\ln\left(3x^{20}-4\right)}{x^{3}-5x}$

10.10 $y=\left(\ln x^{5}\right)e^{\cot 5x}$

11. ให้ y เป็นฟังก์ชันของ x ซึ่งสอดคล้องกลับสมการดังต่อไปนี้ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

11.1 $xy-x^{2}=5$

11.2 $y^{5}x-3=x^{2}$

11.3 $3yx^{5}-x=2$

11.4 $y^{5}x^{6}-3x=x^{2}$

11.5 $y^{5}\sin x-y=1$

11.6 $e^{y-3}-x^{2}=5$

11.7 $y^{5}\sin x^{6}-x=y^{2}$

11.8 $y^{2}x-y^{10}=2x$

11.9 $e^{y}-\sin x=y-2$

11.10 $y\tan x^{6}-3=x-y^{2}$

12. กำหนด $f\left(x\right)=x^{3}-6x^{2}-4$ จงหาค่า $f''\left(x\right)$

13. กำหนด $f\left(x\right)=3x^{10}-x^{2}+4x-1$ จงหาค่า $f^{(4)}\left(x\right)$

14. กำหนด $y=\cot 5x$ จงหาค่า y''

15. กำหนด $y=e^{3x-2}$ จงหาค่า y''

16. ให้ $f\left(x\right)=2x^3-5x^2$ จงหาค่า n ที่น้อยที่สุดที่ทำให้ $f^{\left(n\right)}\left(x\right)=0$

17. ให้ $f\left(x\right)=x^5-x^3+1$ จงหาค่า n ที่น้อยที่สุดที่ทำให้ $f^{\left(n\right)}\left(x\right)=0$

เอกสารอ้างอิง

คณาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยรามคำแหง. (2542). **แคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ 1.** พิมพ์ครั้งที่ 8 กรุงเทพมหานคร : มหาวิทยาลัยรามคำแหง.

จันทนีย์ กาญจนะโรจน์ และชุลี โชติกประคัลภ์. (2557). **แคลคูลัส 1.** พิมพ์ครั้งที่ 4 กรุงเทพมหานคร : คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยกรุงเทพ.

ชัยสงคราม เครือหงส์. (2544). **เอกสารประกอบการสอนรายวิชาแคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์1.** สุราษฎร์ธานี : มหาวิทยาลัยราชภัฏสุราษฎร์ธานี.

ธีระศักดิ์ อุรัจนานนท์. (2546). **แคลคูลัส 1.** กรุงเทพมหานคร : สกายบุ๊กส์.

พัฒนา สีมากุล. (2539). **แคลคูลัส 1.** กรุงเทพมหานคร : เจเนอรัลบุ๊คส์.

เฟื่องฟ้า ศรีจันทพงศ์ และคณะ. (2553). **แคลคูลัส 1.** พิมพ์ครั้งที่ 5 ขอนแก่น : ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น.

ไมตรี ปชาเดชสุวัฒน์. (2532). **แคลคูลัสเบื้องต้น.** กรุงเทพมหานคร : ประกอบเมไตร.

รณชัย มาเจริญทรัพย์. (2551). **คณิตศาสตร์เพิ่มเติมเล่ม 3.** กรุงเทพมหานคร : ภูมิบัณฑิตการพิมพ์.

เลิศ สิทธิโกศล. (2541). **แคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ 1.** กรุงเทพมหานคร : สกายบุคส์.

สุกัญญา สนิทวงศ์ ณ อยุธยา และคณะ. (2556). **แคลคูลัส 1.** กรุงเทพมหานคร : วิทยพัฒน์.

สุรวิทย์ ตันแต่งผล และอนุสรณ์ ชนวีรยุทธ. (2557). **แคลคูลัส 1.** กรุงเทพมหานคร : จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

Anton, Howard. (1995). **Calculus with analytic geometry.** New York : John Wiley & son.

Ross, F.L. Maurice,.W.D. and Frank, G.R. (2001). **Calculus with analytic geometry.** New Yok : Addison-wesley.

Wright,D.F. and New, B.D. (1992). **Calulus with Applications.** Massachusetts : D.C Heath.

แผนบริหารการสอนประจำบทที่ 4

เนื้อหาประจำบท

1. ความเร็ว และ ความเร่ง
2. อัตราสัมพัทธ์
3. สมการเส้นสัมผัสและเส้นปกติ
4. ค่าสูงสุดค่าต่ำสุด และกราฟ
5. หลักเกณฑ์โลปิตาล

วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม

1. สามารถนำเรื่องอนุพันธ์มาประยุกต์ เพื่อหาความเร็ว และความเร่ง ได้
2. สามารถนำเรื่องอนุพันธ์มาประยุกต์ เพื่อแก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับอัตราสัมพัทธ์ได้
3. สามารถนำเรื่องอนุพันธ์มาประยุกต์ เพื่อหาสมการเส้นสัมผัสและเส้นปกติได้
4. ให้ความหมายของฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลดได้
5. สามารถนำเรื่องอนุพันธ์มาประยุกต์การตรวจสอบฟังก์ชันเพิ่มฟังก์ชันลดได้
6. สามารถนำเรื่องอนุพันธ์มาประยุกต์การตรวจสอบจุดวิกฤตได้
7. ให้ความหมายของค่าสูงสุดสัมพัทธ์ ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ได้
8. ใช้อนุพันธ์เพื่อตรวจสอบหาค่าสูงสุดสัมพัทธ์ ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ได้
9. บอกความหมายของกราฟเว้าคว่ำ เว้าหงาย และจุดเปลี่ยนเว้าได้
10. ใช้อนุพันธ์ตรวจสอบจุดเปลี่ยนเว้า เว้าคว่ำและ เว้าหงาย ได้
11. เมื่อตรวจสอบฟังก์ชันเพิ่ม ฟังก์ชันลด ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ จุดวิกฤต จุดเปลี่ยนเว้า การเว้าของกราฟแล้ว สามารถนำไปช่วยในการเขียนกราฟของฟังก์ชันได้
12. สามารถใช้หลักเกณฑ์โลปิตาลหาค่าลิมิตได้

วิธีการสอนและกิจกรรมการเรียนการสอนประจำบท

1. ผู้สอนบรรยายหัวข้อต่อไปนี้พร้อมเปิดโอกาสให้ซักถาม

1.1 ความเร็ว และความเร่ง

1.2 อัตราสัมพัทธ์

1.3 สมการเส้นสัมผัสและเส้นปกติ

1.4 ค่าสูงสุดค่าต่ำสุด และกราฟ

1.5 หลักเกณฑ์โลปิตาล

2. ให้นักศึกษาทำกิจกรรมต่อไปนี้

   2.1. ศึกษาข้อมูลจากสื่ออิเล็กทรอนิกส์ เกี่ยวกับเรื่องการประยุกต์อนุพันธ์

   2.2. ทำแบบฝึกหัดที่กำหนดให้

สื่อการเรียนการสอน

1. เอกสารประกอบการสอนและตำราต่าง ๆ
2. Slide Presentation

สื่อการเรียนการสอน

1. เอกสารประกอบการสอนและตำราต่าง ๆ
2. Slide Presentation

การวัดผลและการประเมินผล

1. สังเกตความสนใจของนักศึกษาขณะสอน ความตั้งใจ การฟัง การจดบันทึกและการซักถาม
2. แบบฝึกหัด
3. แบบทดสอบ
4. การมีส่วนร่วมในกิจกรรมการเรียนการสอน

บทที่ 4
การประยุกต์อนุพันธ์

สำหรับในบทที่ 3 ที่ผ่านมานั้นเราได้ศึกษาเรื่อง ส่วนเปลี่ยนแปลงและอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ย ซึ่งเป็นพื้นฐานที่มีโยชน์ต่อวิทยาการในสาขาต่าง ๆ มากมาย เช่น ฟิสิกส์ เคมี ชีววิทยา วิศวกรรมศาสตร์ ดาราศาสตร์ เศรษฐศาสตร์ สังคมวิทยา และพฤติกรรมทางจิตวิทยา ตลอดจนเป็นพื้นฐานของการศึกษาคณิตศาสตร์สาขาอื่น ๆ แทบทุกสาขา ซึ่งมีประโยชน์อย่างกว้างขวางในการแก้ปัญหาต่าง ๆ ดังนั้นในบทนี้จะกล่าวถึงการนำอนุพันธ์ไปประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหา ต่าง ๆ เช่น ปัญหาเกี่ยวการเคลื่อนที่ของวัตถุ ซึ่งเมื่อวัตถุเคลื่อนที่นั้นจะเกิดสมการการเคลื่อนที่ขึ้น มีความเร็วและความเร่ง ในการเคลื่อนที่ การประยุกต์ส่วนเปลี่ยนแปลงและอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยนั้นเกี่ยวกับเรื่องอัตราการเปลี่ยนแปลงของสิ่งต่าง ๆ ในชีวิตประจำวัน หรือเรียกว่าอัตราสัมพัทธ์ และการประยุกต์ทางเรขาคณิตเช่นการหาสมการเส้นสัมผัสและสมการเส้นปกติของสมการเส้นโค้งที่กำหนดให้และใช้ในการตรวจสอบช่วงของฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลด ค่าสูงสุดสัมและค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ จุดเปลี่ยนเว้า ลักษณะกราฟเว้าลงและเว้าขึ้น แล้วนำข้อมูลที่ได้ทั้งหมดไปใช้ในการวาดกราฟ และสุดท้ายจะนำอนุพันธ์ของฟังก์ชันไปช่วยหาค่าลิมิตได้โดยใช้กฎของโลปิตาล

4.1 ความเร็ว และความเร่ง

การเคลื่อนที่ของวัตถุมีการเคลื่อนที่ได้หลายวิธีมีทั้งการเคลื่อนที่ในแนวเส้นตรงและไม่ใช่เส้นตรงแต่สำหรับในบทนี้จะศึกษาถึงการเคลื่อนที่ของวัตถุในแนวเส้นตรงเท่านั้นโดยจะกล่าวถึงเฉพาะความเร็วและความเร่งของวัตถุที่เคลื่อนที่ในแนวเส้นตรงเท่านั้น วัตถุเคลื่อนที่ในแนวเส้นตรงมีสมการการเคลื่อนที่ในรูปความสัมพันธ์ของระยะทางและเวลา ให้วัตถุเคลื่อนที่ได้ทาง s หน่วยระยะทางโดยใช้เวลาในการเคลื่อนที่ t หน่วยเวลา ดังนั้น $s = f(t)$ แทนสมการการเคลื่อนที่

ความเร็วโดยทั่วไปเราได้จากอัตราส่วนระหว่างปริมาณการเปลี่ยนแปลงของ s(ระยะทาง) กับปริมาการเปลี่ยนแปลงของ t (เวลา) แต่ถ้าต้องการความเร็วชั่วขณะหรือความเร็วที่เวลา t ใด ๆ คือ $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ ซึ่งแทนด้วย $\dfrac{ds}{dt}$ ดังนั้นความเร็วของวัตถุเมื่อเวลา t ใด ๆ คือ $v = \dfrac{ds}{dt}$
(ชัยสงคราม เครือหงส์, 2544 : 47)

ข้อสังเกต 4.1

1. ถ้า $v > 0$ วัตถุจะเคลื่อนที่ในทิศทางที่ได้ระยะทางเพิ่มขึ้น
2. ถ้า $v < 0$ วัตถุจะเคลื่อนที่ในทิศทางที่ได้ระยะทางลดลง
3. ถ้า $v = 0$ แสดงว่าวัตถุหยุดนิ่ง

เช่นเดียวกันกับความเร่งของวัตถุเมื่อเวลา t ใด ๆ เราหาได้จากอัตราส่วนระหว่างปริมาณการเปลี่ยนแปลงของ v กับปริมาณการเปลี่ยนแปลงของ t โดยหาค่า $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta v}{\Delta t}$ ซึ่งแทนด้วยสัญลักษณ์ $\dfrac{dv}{dt}$ นั่นคือความเร่งของวัตถุเมื่อเวลา t ใด ๆ คือ $a = \dfrac{dv}{dt}$ แต่ $v = \dfrac{ds}{dt}$ ดังนั้น
$a = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{ds}{dt}\right) = \dfrac{d^2s}{dt^2}$ (มาริสา มัยยะ และวันเพ็ญ จันทรังษี, 2550 : 85)

ข้อสังเกต 4.2

1. ถ้า $a > 0$ ความเร็วจะเพิ่มขึ้น
2. ถ้า $a < 0$ ความเร็วจะลดลง

ตัวอย่าง 4.1 วัตถุชิ้นหนึ่งเคลื่อนที่ในแนวเส้นตรงมีสมการการเคลื่อนที่ $s = \dfrac{1}{3}t^3 - t + 1$ เมตร จงหาความเร็ว ความเร่งที่เวลา t ใด ๆ และหาความเร็ว ความเร่งของวัตถุเมื่อเวลาผ่านไป 3 วินาที

วิธีทำ จาก $v = \dfrac{ds}{dt}$

$$v = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{3}t^3 - t + 1\right)$$

$$= t^2 - 1$$

จะได้ $v = t^2 - 1$

ณ $t = 3$ ได้ $v = 3^2 - 1 = 8$

ดังนั้น ความเร็วของวัตถุเมื่อเวลาผ่านไป 3 วินาทีเป็น 8 เมตร/วินาที

จาก $\quad a = \dfrac{dv}{dt}$

$$a = \frac{d}{dt}(t^2 - 1)$$

$$= 2t$$

ได้ $\quad a = 2t$

ณ $t = 3$ ได้ $a = 2(3) = 6$

ดังนั้น ความเร่งของวัตถุเมื่อเวลาผ่านไป 3 วินาทีเป็น 6 เมตร/(วินาที)^2

ตัวอย่าง 4.2 ระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่ได้เมื่อเวลา t ใด ๆ แทนด้วย $s = t^3 - 6t^2 + 9t + 4$ เมื่อ s มีหน่วยเป็นเมตรและ t มีหน่วยเป็นวินาที

1. จงหา s (ระยะทาง) และ a (ความเร่ง) เมื่อ $v = 0$
2. จงหา s (ระยะทาง) และ v (ความเร็ว) เมื่อ $a = 0$
3. เมื่อใดที่ s (ระยะทาง) เพิ่มขึ้น
4. เมื่อใดที่ v (ความเร็ว) เพิ่มขึ้น

วิธีทำ $\quad v = \dfrac{ds}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(t^3 - 6t^2 + 9t + 4\right) = 3t^2 - 12t + 9$

$$= 3\left(t-1\right)\left(t-3\right)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(3t^2 - 12t + 9\right) = 6t - 12$$

$$= 6\left(t-2\right)$$

1. เมื่อ $v = 0$ ดังนั้น $t = 1,\ 3$

เมื่อ $\quad t = 1$

$$s = 1^3 - 6(1)^2 + 9(1) + 4 = 8$$

$$a = 6(1-2) = -6$$

เมื่อ $\quad t = 3$

$$s = 3^3 - 6(3)^2 + 9(3) + 4 = 4$$

$$a = 6(3-2) = 6$$

2. เมื่อ $a = 0$ ดังนั้น $t = 2$

เมื่อ $t = 2$

$$s = 2^3 - 6(2)^2 + 9(2) + 4 = 6$$

$$v = 3(2-1)(2-3) = -3$$

3. s(ระยะทาง) เพิ่มขึ้นเมื่อ $v > 0$

$v = 3\left(t-1\right)\left(t-3\right) > 0$

จะได้ $t < 1$ หรือ $t > 3$

ดังนั้น s(ระยะทาง) เพิ่มขึ้นเมื่อ $t < 1$ หรือ $t > 3$

4. v (ความเร็ว) เพิ่มขึ้น เมื่อ $a > 0$

$a = 6(t-2) > 0$

จะได้ $t > 2$

ดังนั้น v (ความเร็ว) เพิ่มขึ้น เมื่อ $t > 2$

ตัวอย่าง 4.3 กำหนดให้ $s = t^3 - 4t^2 - 3t + 2$ จงหาความเร่งขณะที่ความเร็วเท่ากับศูนย์

วิธีทำ $v = \dfrac{ds}{dt}$

$$v = \frac{d}{dt}\left(t^3 - 4t^2 - 3t + 2\right)$$

$$= 3t^2 - 8t - 3$$

$$a = \frac{dv}{dt}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(3t^2 - 8t - 3\right)$$

$$= 6t - 8$$

เมื่อ $v = 0$ จะได้ $3t^2 - 8t - 3 = 0$

$$\left(3t+1\right)\left(t-3\right) = 0$$

$$t = -\frac{1}{3}, 3$$

$t = -\dfrac{1}{3}$ ใช้ไม่ได้เพราะ $t \geq 0$

ให้ $t = 3$ จะได้ $a = 6(3) - 8 = 10$

ดังนั้น ขณะที่ความเร็วเป็น 0 ความเร่งมีค่าเป็น 10 หน่วยระยะทาง/(หน่วยเวลา) ^{2}

ตัวอย่าง 4.4 ลูกบอลลูกหนึ่งถูกปล่อยให้ตกลงมาจากระดับความสูง 320 ฟุต และความสูงของลูกบอลลูกนี้ เมื่อขณะเวลา t วินาทีใด ๆ กำหนดระยะ $s = 320 - 16t^2$

1. จงหาความเร็วของลูกบอลเมื่อเวลา $t = 2$ วินาที
2. จงหาความเร็วของลูกบอลขณะที่ลูกบอลตกกระทบพื้น

วิธีทำ 1. ความเร็วของลูกบอลขณะเวลา t ใด ๆ คือ

$$
\begin{aligned}
v &= \frac{ds}{dt} \\
&= \frac{d}{dt}(320 - 16t^2) \\
&= -32t
\end{aligned}
$$

ความเร็วของลูกบอลเมื่อเวลา $t = 2$ วินาทีคือ $v = -32(2) = -64$ ฟุตต่อวินาที

2. ความเร็วของลูกบอลขณะที่ลูกบอลตกกระทบพื้นแสดงว่า $s = 0$

$$
\begin{aligned}
0 &= 320 - 16t^2 \\
16t^2 &= 320 \\
t^2 &= \frac{320}{16} \\
t^2 &= 20 \\
t &= \pm\sqrt{20}
\end{aligned}
$$

แต่ $t = -\sqrt{20}$ ใช้ไม่ได้เพราะ $t \geq 0$ ได้ $t = \sqrt{20}$

ขณะที่ $t = \sqrt{20}$ ได้ $v = -32\sqrt{20}$ ฟุตต่อวินาที

4.2 อัตราสัมพัทธ์

อัตราสัมพัทธ์ หมายถึงอัตราการเปลี่ยนแปลงของตัวแปร 2 ตัวหรือมากกว่า 2 ซึ่งมีปัญหาอีกจำนวนมากที่เกี่ยวข้องกับตัวแปรหลายตัว และแต่ละตัวแปรเหล่านั้นก็เป็นฟังก์ชันของเวลาถ้าเราทราบค่าตัวแปร และอัตราการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรบางตัวเทียบกับเวลาแล้วจะสามารถหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรที่ต้องการเทียบกับเวลาได้วิธีการนี้เรียกว่า อัตราสัมพัทธ์ (พัฒนา สีมากุล, 2537 : 31)

ในการแก้ปัญหามีขั้นตอนดังนี้

ขั้นที่ 1 เขียนแผนภาพประกอบปัญหา

ขั้นที่ 2 กำหนดตัวแปรแทนปริมาณต่าง ๆ ที่เปลี่ยนแปลงตามเวลา

ขั้นที่ 3 สร้างสมการแสดงความสัมพันธ์ของตัวแปรต่าง ๆ ซึ่งเป็นจริง ณ เวลาใด ๆ ในช่วงเวลาของปัญหา

ขั้นที่ 4 หาอนุพันธ์เทียบกับเวลา จากสมการที่สร้างขึ้นในข้อ 3

ขั้นที่ 5 แทนค่าอัตราการเปลี่ยนแปลงเทียบกับเวลาและตัวแปรที่ทราบ แล้วคำนวณสิ่งที่ต้องการทราบ

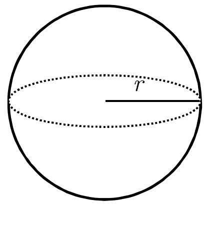
ตัวอย่าง 4.5 บอลลูน (ทรงกลม) ลูกหนึ่งจะมีการขยายตัวเมื่อได้รับความร้อน ถ้ารัศมีบอลลูนเพิ่มขึ้นในอัตรา 4 นิ้ว/นาที แล้วปริมาตรของบอลลูนจะเพิ่มขึ้นในอัตราเท่าไรขณะที่บอลลูนมีรัศมี 50 นิ้ว

วิธีทำ กำหนด v แทนปริมาตรของบอลลูนขณะเวลา t นาที

กำหนด r แทนรัศมีของบอลลูนขณะเวลา t นาที

สูตรปริมาตรของทรงกลม $v = \dfrac{4}{3}\pi r^3$

วาดรูปทรงกลมได้ดังนี้



จาก $v = \dfrac{4}{3}\pi r^3$

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{4}{3}\pi r^{3}\right)\\ &= \frac{4}{3}\pi\frac{d}{dt}\left(r^{3}\right)\\ &= \frac{4}{3}\pi 3r^{2}\frac{dr}{dt}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dt} &= \frac{4}{3}\pi 3r^{2}\frac{dr}{dt}\\ &= \frac{4}{3}\pi 3\left(50\right)^{2}\left(4\right)\\ &= 40000\pi\end{aligned}$$

ดังนั้น ปริมาตรบอลลูนเพิ่มขึ้นในอัตรา 40000π ลูกบาศก์นิ้ว/นาที

ตัวอย่าง 4.6 เส้นผ่านศูนย์กลางและส่วนสูงของทรงกระบอก ณ เวลาหนึ่งเป็น 10 ฟุต และ 40 ฟุต ตามลำดับถ้ารัศมีเพิ่มขึ้นด้วยอัตรา 1 ฟุต/ชั่วโมง แล้วส่วนสูงจะมีอัตราการเปลี่ยนแปลงอย่างไรจึงจะทำให้ปริมาตรคงเดิม

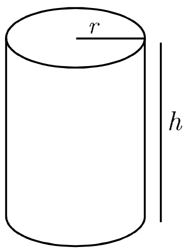
วิธีทำ กำหนด v แทนปริมาตรของทรงกระบอกขณะเวลา t

กำหนด r แทนรัศมีของทรงกระบอกขณะเวลา t

กำหนด h แทนส่วนสูงของทรงกระบอกขณะเวลา t

สูตรปริมาตรของทรงกระบอก $v = \pi r^2 h$

วาดรูปทรงกระบอกได้ดังนี้



จาก $v = \pi r^2 h$

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(\pi r^{2}h\right)\\ &= \pi\frac{d}{dt}\left(r^{2}h\right)\end{aligned}$$

$$= \pi\left(r^2 \frac{d}{dt}h + h\frac{d}{dt}r^2\right)$$

$$= \pi\left(r^2 \frac{dh}{dt} + 2hr\frac{dr}{dt}\right)$$

ได้ $$\frac{dv}{dt} = \pi\left(r^2 \frac{dh}{dt} + 2hr\frac{dr}{dt}\right)$$

$$0 = \pi\left(5^2 \frac{dh}{dt} + (2)(40)(5)\frac{dr}{dt}\right)$$

$$0 = \pi\left(5^2 \frac{dh}{dt} + (2)(40)(5)(1)\right)$$

$$-400 = 25\frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dh}{dt} = -16$$

ดังนั้น ส่วนสูงของทรงกระบอกลดลงในอัตรา 24 ฟุต/ชั่วโมง

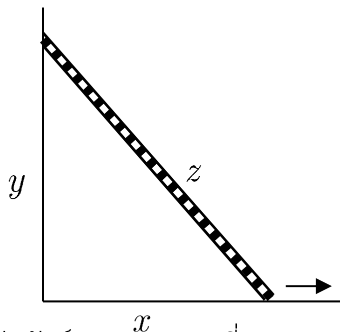
ตัวอย่าง 4.7 บันไดยาว 50 เมตร วางพิงไว้กับผนังซึ่งตั้งฉากกับพื้นราบ ถ้าปลายล่างของบันไดเลื่อนออกห่างจากผนังด้วยอัตรา 4 เมตร/วินาที จงหาว่าปลายบนของบันไดจะเคลื่อนที่อย่างไร ในขณะที่ปลายล่างของบันไดอยู่ห่างจากผนัง 30 เมตร

วิธีทำ กำหนด x แทนระยะห่างระหว่างผนังถึงปลายล่างของบันได ขณะเวลา t

กำหนด y แทนระยะห่างระหว่างพื้นถึงปลายบนของบันได เวลา t

กำหนด z แทนความยาวของบันได

วาดรูปความสัมพันธ์ได้ดังนี้



ได้ความสัมพันธ์ของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก $x^2 + y^2 = z^2$

$$(30)^2 + y^2 = (50)^2$$

$$y^2 = 2500 - 900$$

$$y^2 = 1600$$

$$y = \pm\sqrt{1600}$$

$$= \pm 40$$

เพราะว่า $y \geq 0$ เพราะฉะนั้น $y = 40$

จาก $$x^2 + y^2 = z^2$$

$$\frac{d}{dt}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dt}(z^2)$$

$$\frac{d}{dt}x^2 + \frac{d}{dt}y^2 = \frac{d}{dt}z^2$$

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 2z\frac{dz}{dt}$$

$$2(30)4 + 2(40)\frac{dy}{dt} = 0$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{-240}{80}$$

$$= -3$$

ดังนั้น ปลายบนของบันไดเคลื่อนที่ลงด้วยอัตรา 3 เมตร/วินาที

ตัวอย่าง 4.8 ถังน้ำรูปกรวยกลมสูง 10 ฟุต เส้นผ่านศูนย์กลางของปากกรวยยาว 10 ฟุต มีน้ำไหลเข้าสู่ถังด้วยอัตรา 2 ลูกบาศก์ฟุต/นาที จงหาว่าขณะที่น้ำในถังสูง 6 ฟุต ระดับน้ำจะสูงขึ้นด้วยอัตราเท่าใด

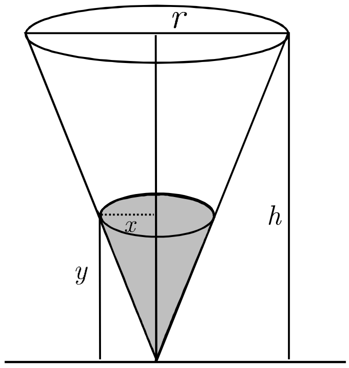
วิธีทำ กำหนด v เป็นปริมาตรของน้ำในถังขณะเวลา t

กำหนด x เป็นรัศมีของผิวน้ำในถังรูปขณะเวลา t

กำหนด y เป็นความสูงของน้ำในถังขณะเวลา t

ปริมาตรทรงกระบอก $v = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ โดยที่ h เป็นความสูงของทรงกระบอก

วาดรูปความสัมพันธ์ได้ดังนี้



จากความสัมพันธ์จะได้ $\frac{x}{y}=\frac{r}{h}$

$$\frac{x}{y}=\frac{5}{10}$$

$$x=\frac{1}{2}y$$

พิจารณาปริมาตรของน้ำ $v=\frac{1}{3}\pi x^2 y$

$$=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{1}{2}y\right)^2 y$$

$$=\frac{1}{12}\pi y^3$$

จาก $v=\frac{1}{12}\pi y^3$

จะได้ $\frac{dv}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{12}\pi y^3\right)$

$$\frac{dv}{dt}=\frac{1}{12}\pi 3y^2\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt}=\frac{1}{4}\pi y^2\frac{dy}{dt}$$

$$2=\frac{1}{4}\pi(6)^2\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{2}{9}\pi=\frac{dy}{dt}$$

ดังนั้น ระดับน้ำจะสูงขึ้นด้วยอัตรา $\frac{2}{9}\pi$ ฟุต/นาที

4.3 สมการเส้นสัมผัส และเส้นปกติ

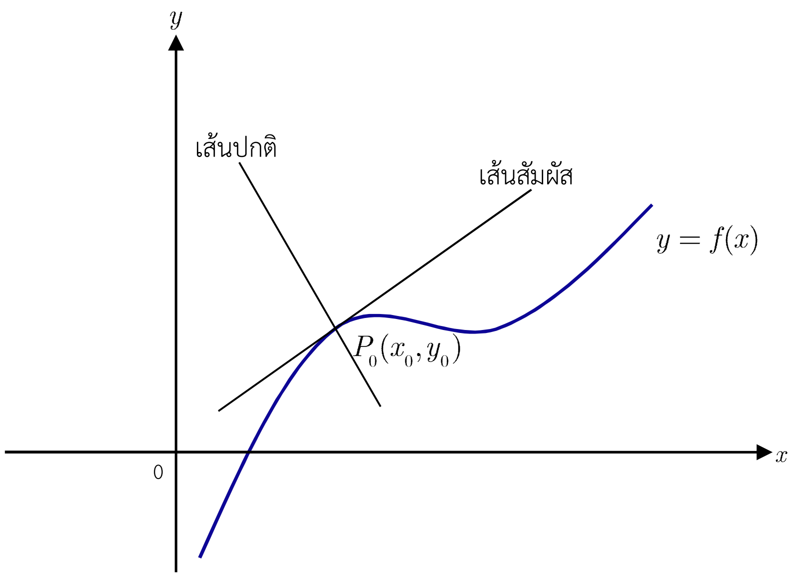
สมการเส้นตรงที่ผ่านจุด (x_0, y_0) มีความชันเท่ากับ m คือสมการ $y - y_0 = m(x - x_0)$ กำหนดให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ $x = x_0$ จะได้ว่า $\frac{dy}{dx}$ ที่จุด $x = x_0$ คือความชันของเส้นโค้ง $y = f(x)$ ที่ $x = x_0$ หรือกล่าวได้อีกอย่างหนึ่งก็คือสมการของเส้นสัมผัสที่สัมผัสเส้นโค้ง $y = f(x)$ ที่ $x = x_0$ คือ $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ (เลิศ สิทธิโกศล, 2541 : 44-46)

ข้อสังเกต 4.3

ถ้า $f'(x_0) \neq 0$ แล้วสมการเส้นสัมผัสคือคือ $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ แต่ถ้า $f'(x_0) = 0$ เส้นโค้ง $y = f(x)$ จะมีเส้นสัมผัสเป็นเส้นขนานกับแกน x

บทนิยาม 4.1

กำหนดให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่จุด $P_0(x_0, y_0)$ เส้นตรงที่ผ่านจุด $P_0(x_0, y_0)$ และตั้งฉากกับเส้นสัมผัสที่จุดสัมผัส $P_0(x_0, y_0)$ เรียกว่า**เส้นปกติ** สมการเส้นปกติที่ผ่านจุด $P_0(x_0, y_0)$ คือ $x = x_0$ ถ้าเส้นสัมผัสอยู่ในแนวระดับ สำหรับกรณีอื่นสมการคือ $y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$ ถ้า $f'(x_0) \neq 0$



ภาพประกอบ 4.1 แสดงเส้นปกติ และเส้นสัมผัส

ที่มา : คณาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยรามคำแหง. 2542 : 164

ข้อสังเกต 4.4

ถ้า $m \neq 0$ แทนความชันของเส้นสัมผัสจะได้ $-\dfrac{1}{m}$ แทนความชันของเส้นปกติ เพราะเส้นปกติกับเส้นสัมผัสตั้งฉากกันความชันคูณกันจึงมีค่าเท่ากับ -1

ตัวอย่าง 4.9 จงหาสมการเส้นสัมผัส และเส้นปกติของเส้นโค้ง $y = x^3 - 2x^2 + 4$ ที่จุด $(2,4)$

วิธีทำ จากโจทย์กำหนดให้ $f(x) = y = x^3 - 2x^2 + 4$

จะได้ $f'(x) = 3x^2 - 4x$

ความชันของเส้นตรงที่สัมผัสเส้นโค้งที่จุด $(2,4)$

คือ
$$\begin{aligned} f'(2) &= 3(2)^2 - 4(2) \\ &= 12 - 8 \\ &= 4 \end{aligned}$$

สมการเส้นตรงที่สัมผัสจุด $(2,4)$ และมีความชันเท่ากับ 4

คือ
$$\begin{aligned} y - 4 &= 4\left(x - 2\right) \\ y &= 4\left(x - 2\right) + 4 \\ &= 4x - 4 \end{aligned}$$

เนื่องจากความชันของเส้นสัมผัสมีค่าเท่ากับ 4 ดังนั้นความชันของเส้นปกติมีค่าเท่ากับ $-\dfrac{1}{4}$

ดังนั้น สมาการเส้นปกติที่ผ่านจุด $(2,4)$ และความชันมีค่าเท่ากับ $-\dfrac{1}{4}$

คือ
$$\begin{aligned} y - 4 &= -\frac{1}{4}\left(x - 2\right) \\ y &= -\frac{1}{4}\left(x - 2\right) + 4 \\ &= -\frac{1}{4}x + \frac{2}{4} + 4 \\ &= -\frac{1}{4}x + \frac{9}{2} \end{aligned}$$

ดังนั้น สมการเส้นสัมผัสคือ $y = 4x - 4$ และสมการเส้นปกติคือ $y = -\dfrac{1}{4}x + \dfrac{9}{2}$

ตัวอย่าง 4.10 จงหาสมการเส้นสัมผัส และเส้นปกติของเส้นโค้ง $x^2+3xy+y^2=5$ ที่จุด $(1,1)$

วิธีทำ จากโจทย์กำหนดสมการเส้นโค้ง $x^2+3xy+y^2=5$

จะได้
$$\frac{d}{dx}\left(x^2+3xy+y^2\right)=\frac{d}{dx}\left(5\right)$$
$$\frac{d}{dx}x^2+\frac{d}{dx}3xy+\frac{d}{dx}y^2=0$$
$$2x+3\frac{d}{dx}\left(xy\right)+2y\frac{dy}{dx}=0$$
$$2x+3\left[x\frac{dy}{dx}+y\frac{dx}{dx}\right]+2y\frac{dy}{dx}=0$$
$$2x+3\left[x\frac{dy}{dx}+y\right]+2y\frac{dy}{dx}=0$$
$$2x+3x\frac{dy}{dx}+3y+2y\frac{dy}{dx}=0$$
$$3x\frac{dy}{dx}+2y\frac{dy}{dx}=-2x-3y$$
$$\left(3x+2y\right)\frac{dy}{dx}=-2x-3y$$
$$\frac{dy}{dx}=\frac{-\left(2x+3y\right)}{3x+2y}$$

ความชันของเส้นตรงที่สัมผัสเส้นโค้งที่จุด $(1,1)$

คือ
$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(1,1)}=\frac{-\left[2(1)+3(1\right]}{3(1)+2(1)}$$
$$=-1$$

สมการส้นตรงที่สัมผัสจุด $\left(1,1\right)$ และมีความชันเท่ากับ -1

คือ
$$y-1=-1\left(x-1\right)$$
$$y-1=-x+1$$
$$y=-x+2$$
$$y+x=2$$

เนื่องจากความชันของเส้นสัมผัสมีค่าเท่ากับ -1 ดังนั้นความชันของเส้นปกติมีค่าเท่ากับ 1

ดังนั้น สมการเส้นปกติที่จุด $(1,1)$ และความชันมีค่าเท่ากับ 1

คือ
$$y-1=1\left(x-1\right)$$
$$y-1=x-1$$
$$y-x=0$$

ดังนั้น สมการเส้นสัมผัสคือ $y+x=2$ และสมการเส้นปกติคือ $x-y=0$

ตัวอย่าง 4.11 กำหนดให้ a เป็นจำนวนจริงที่ไม่เท่ากับศูนย์จงแสดงว่าเส้นปกติของเส้นโค้ง $x^2+y^2=a^2$ ที่จุด (x_0,y_0) ใด ๆ บนเส้นโค้งนี้ เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุดกำเนิด

วิธีทำ จากโจทย์กำหนดสมการเส้นโค้ง $x^2+y^2=a^2$

จะได้
$$\frac{d}{dx}\left(x^2+y^2\right)=\frac{d}{dx}\left(a^2\right)$$
$$\frac{d}{dx}x^2+\frac{d}{dx}y^2=0$$
$$2x+2y\frac{dy}{dx}=0$$
$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$$

เพราะฉะนั้นความชันของเส้นสัมผัสที่จุด (x_0,y_0) เท่ากับ $-\dfrac{x_0}{y_0}$

ดังนั้น ความชันของเส้นปกติที่จุด (x_0,y_0) คือ $-\dfrac{1}{-\dfrac{x_0}{y_0}}=\dfrac{y_0}{x_0}$

สมการเส้นปกติของเส้นโค้งที่ผ่านจุด (x_0,y_0) คือ

$$y-y_0=\frac{y_0}{x_0}\left(x-x_0\right)$$
$$y-y_0=\frac{y_0}{x_0}x-\frac{y_0}{x_0}x_0$$
$$y-y_0=\frac{y_0}{x_0}x-y_0$$
$$y=\frac{y_0}{x_0}x$$

เนื่องจากสมการ $y=\dfrac{y_0}{x_0}x$ เป็นสมการเส้นตรงซึ่งผ่านจุดกำเนิดเสมอ

ดังนั้น เส้นปกติของเส้นโค้ง $x^2+y^2=a^2$ ที่จุด (x_0,y_0) ใด ๆ เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุดกำเนิด

ตัวอย่าง 4.12 จงหาสมการเส้นตรงทั้งหมดที่ลากจากจุด $P(-1,2)$ มาสัมผัสกับเส้นโค้ง $4xy=1$

วิธีทำ ความชันของเส้นโค้ง $4xy=1$ ที่จุด (x,y) ใด ๆ คือ $\dfrac{dy}{dx}$

จาก $\quad 4xy = 1$

ได้
$$\frac{d}{dx}\big(4xy\big) = \frac{d}{dx}\big(1\big)$$
$$4\frac{d}{dx}\big(xy\big) = \frac{d}{dx}\big(1\big)$$
$$4\left(x\frac{dy}{dx} + y\frac{dx}{dx}\right) = 0$$
$$4x\frac{dy}{dx} + 4y = 0$$
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \qquad (1)$$

ความชันที่ผ่านจุด $(-1,2)$ และ (x,y) ใด ๆ มีความชันเท่ากับ
$$m = \frac{y-2}{x+1} \qquad (2)$$

แต่ $(1) = (2)$

ได้
$$\frac{y-2}{x+1} = -\frac{y}{x}$$
$$x\big(y-2\big) = -y\big(x+1\big)$$
$$xy - 2x = -xy - y$$
$$2xy - 2x + y = 0$$
$$4xy - 4x + 2y = 0$$

แต่เนื่องจาก $\quad 4xy = 1$

ได้ $\quad 1 - 4x + 2y = 0$

และ $\quad 4x = \dfrac{1}{y}$

ได้ $\quad 1 - \dfrac{1}{y} + 2y = 0$

$$y-1+2y^2=0$$

$$2y^2+y-1=0$$

$$(2y-1)(y+1)=0$$

$$y=\frac{1}{2},-1$$

แทนค่า y จะได้ค่า $x=\frac{1}{2},-\frac{1}{4}$

เพราะฉะนั้นเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด $\left(-\frac{1}{4},-1\right)$ และ $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

โดยมีความชันของเส้นสัมผัสที่จุด $\left(-\frac{1}{4},-1\right)$ คือ $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}=-4$

สมการเส้นสัมผัสที่ผ่านจุด $(-1,2)$ และมีความชันเท่ากับ -4 คือ

$$y-2=-4(x+1)$$

$$y-2=-4x-4$$

$$y+4x+2=0$$

ส่วนความชันของเส้นสัมผัสที่จุด $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ คือ $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}=-1$

สมการเส้นสัมผัสที่ผ่านจุด $(-1,2)$ และมีความชันเท่ากับ -1 คือ

$$y-2=-1(x+1)$$

$$y-2=-x-1$$

$$y+x-1=0$$

4.4 ค่าสูงสุดค่าต่ำสุด และกราฟ

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการหาค่าสูงสุด ค่าต่ำสุดของ ฟังก์ชันเพิ่ม ฟังก์ชันลด จุดวิกฤต จุดสูงสุดสัมพัทธ์ จุดต่ำสุดสัมพัทธ์ จุดเปลี่ยนเว้า ค่าวิกฤต ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ และนำความรู้ทั้งหมดไปช่วยในการเขียนกราฟของฟังก์ชันต่าง ๆ (กมล เอกไทยเจริญ, 2544 : 51)

4.4.1 ฟังก์ชันเพิ่ม ฟังก์ชันลด

ฟังก์ชันเพิ่ม คือฟังก์ชันที่ค่า $y = f(x)$ มีค่าเพิ่มขึ้นในขณะที่ x มีค่าเพิ่มขึ้น ส่วนฟังก์ชันลด คือฟังก์ชันที่ค่า $y = f(x)$ มีค่าลดลงในขณะที่ x มีค่าเพิ่มขึ้น และฟังก์ชันคงตัว คือฟังก์ชันที่ค่า $y = f(x)$ มีค่าคงตัวไม่ว่า x จะมีค่าเพิ่มขึ้น หรือลดลงก็ตาม ดังบทนิยาม (คณาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยรามคำแหง, 2542 : 66)

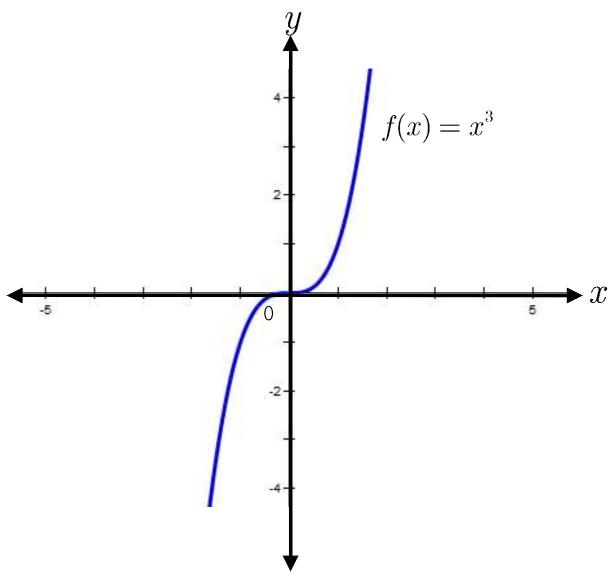
บทนิยาม 4.2

กำหนดให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง I

1. ถ้า $f(x_1) < f(x_2)$ สำหรับทุกค่า $x_1 < x_2$ บนช่วง I
   เรียก $f(x)$ ว่าเป็น**ฟังก์ชันเพิ่ม** บนช่วง I
2. ถ้า $f(x_1) > f(x_2)$ สำหรับทุกค่า $x_1 < x_2$ บนช่วง I
   เรียก $f(x)$ ว่าเป็น**ฟังก์ชันลด**บนช่วง I
3. ถ้า $f'(x) = 0$ ในช่วง (a,b) แล้ว $f(x)$ เป็นฟังก์ชันคงตัวบนช่วง (a,b)

ตัวอย่าง 4.13 จงพิจารณาว่าฟังก์ชัน $f(x) = x^3$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มหรือลดบนช่วงใด

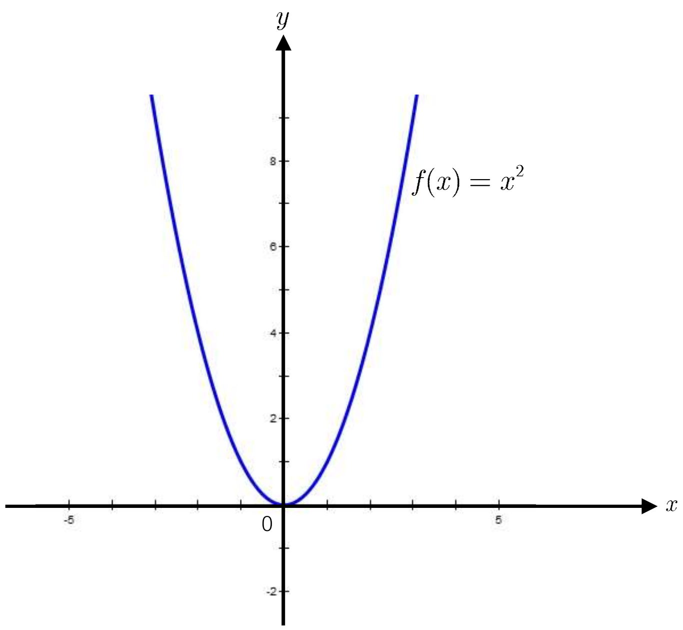
วิธีทำ กราฟของฟังก์ชัน $f(x) = x^3$ เป็นดังนี้



จากกราฟจะเห็นว่าฟังก์ชัน $f(x) = x^3$ นั้น $f(x)$ มีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อ x มีค่าเพิ่มขึ้นบนช่วง$(-\infty, \infty)$ ดังนั้น $f(x) = x^3$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $(-\infty, \infty)$

ตัวอย่าง 4.14 จงพิจารณาว่าฟังก์ชัน $f(x) = x^2$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มหรือลดบนช่วงใด

วิธีทำ กราฟของฟังก์ชัน $f(x) = x^2$ เป็นดังนี้



จากกราฟจะเห็นว่า ฟังก์ชัน $f(x) = x^2$ นั้น $f(x)$ มีค่าลดลงเมื่อ x มีค่าเพิ่มขึ้นบนช่วง $(-\infty, 0)$ และ $f(x)$ มีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อ x มีค่าเพิ่มขึ้นบนช่วง$(0, \infty)$ ดังนั้น $f(x) = x^2$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $(0, \infty)$ และเป็นฟังก์ชันลดบนช่วง$(-\infty, 0)$

จากตัวอย่างที่ผ่านมานั้นการพิจารณาฟังก์ชันเพิ่มหรือฟังก์ชันลดพิจารณาจากกราฟนั้นจะค่อนข้างยากและเสียเวลาในการวาดกราฟ ดังนั้นเราสามารถพิจารณาโดยใช้อนุพันธ์ดันดับที่ 1 มาช่วยในการพิจารณาโดยใช้ทฤษฎีบทต่อไปนี้ (Stein, S.K.& Barcellos, A., 1992 : 131)

ทฤษฎีบท 4.1

กำหนดให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $\left[a,b\right]$ โดยที่ $a,b \in R$

1. ถ้า $f'(x) > 0$ ทุก ๆ $x \in (a,b)$ แล้ว $f(x)$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มขึ้นบนช่วง $\left[a,b\right]$
2. ถ้า $f'(x) < 0$ ทุก ๆ $x \in (a,b)$ แล้ว $f(x)$ เป็นฟังก์ชันลดลงบนช่วง $\left[a,b\right]$

ตัวอย่าง 4.15 จงพิจารณาว่าฟังก์ชัน $f(x) = x^3$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มหรือลดบนช่วงใดโดยใช้อนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง

วิธีทำ ให้ $f(x) = x^3$

ได้ $f'(x) = 3x^2$

เนื่องจาก $x^2 \geq 0$ เสมอ

จะได้ $3x^2 \geq 0$

นั้นคือ $f'(x) > 0$ ทุก ๆ ค่า $x \neq 0$

ดังนั้น $f(x) = x^3$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $(-\infty,\infty)$

ตัวอย่าง 4.16 จงพิจารณาว่าฟังก์ชัน $f(x) = x^2$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มหรือลดบนช่วงใดโดยใช้อนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง

วิธีทำ ให้ $f(x) = x^2$

ดังนั้น $f'(x) = 2x$

เนื่องจาก $x > 0$ แล้ว $2x > 0$ และถ้า $x < 0$ แล้ว $2x < 0$

นั้นคือถ้า $x > 0$ แล้ว $f'(x) > 0$ และถ้า $x < 0$ แล้ว $f'(x) < 0$

ดังนั้น $f(x) = x^2$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $\left[0,\infty\right)$ และเป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $\left(-\infty,0\right]$

ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน อุษณีย์

อุษณีย์ ลีรวัฒน์ (2552 : 47) ได้ให้รายระเอียดไว้ดังบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 4.3

กำหนดให้ a และ b เป็นค่าคงตัวใด ๆ และ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $\left[a,b\right]$ และ $x_0 \in \left[a,b\right]$

1. ถ้า $f(x_0) \geq f(x)$ ทุก ๆ ค่า x อยู่ในบางช่วงเปิดที่บรรจุ x_0 แล้วจะเรียก $f(x)$ ว่ามีค่า**สูงสุดสัมพัทธ์** หรือ **มีค่าสูงสุดเฉพาะที่** ที่จุด x_0
2. ถ้า $f(x_0) \leq f(x)$ ทุก ๆ ค่า x อยู่ในบางช่วงเปิดที่บรรจุ x_0 แล้วจะเรียก $f(x)$ ว่ามีค่า**ต่ำสุดสัมพัทธ์** หรือ **มีค่าต่ำสุดเฉพาะที่** ที่จุด x_0
3. ถ้า $f(x_0) \geq f(x)$ สำหรับทุก ๆ $x \in \left[a,b\right]$ แล้ว $f(x)$ มีค่า **สูงสุดสัมบูรณ์** ที่จุด x_0
4. ถ้า $f(x_0) \leq f(x)$ สำหรับทุก ๆ $x \in \left[a,b\right]$ แล้ว $f(x)$ มีค่า **ต่ำสุดสัมบูรณ์** ที่จุด x_0

บทนิยาม 4.4

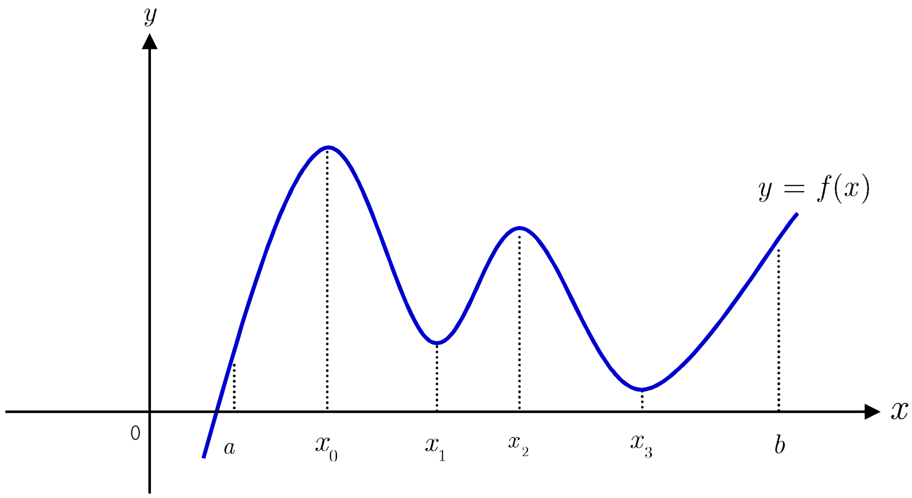
จุดวิกฤต คือจุด $x_0 \in D_f$ ซึ่ง $f'(x_0) = 0$ หรือ $f'(x_0)$ หาค่าไม่ได้

จากบทนิยาม 4.3 และบทนิยาม 4.4 ค่าสูงสุดสัมพัทธ์คือค่าสูงสุดของฟังก์ชันเมื่อเทียบกับค่าใกล้เคียง ส่วนค่าต่ำสุดสัมพัทธ์คือค่าต่ำสุดของฟังก์ชันเมื่อเทียบกับค่าใกล้เคียง โดยจุดต่ำสุดสัมพัทธ์และสูงสุดสัมพัทธ์นั้นจะอยู่ที่จุดวิกฤต ซึ่งจุดวิกฤตคือจุด x_0 ที่ $f'(x_0) = 0$ หรือ $f'(x_0)$ หาค่าไม่ได้ (Ross, F.L. Maurice,.W.D. and Frank, G.R, 2001 : 113)

ทฤษฎีบท 4.2

กำหนดให้ a และ b เป็นค่าคงตัวใด ๆ ฟังก์ชัน $f(x)$ มีอนุพันธ์บน $\left[a,b\right]$ และ $f(x)$ มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ หรือต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x = x_0$ เมื่อ $a < x_0 < b$ แล้ว $f'(x_0) = 0$

ตัวอย่าง 4.17 กำหนดกราฟของฟังก์ชัน $y = f(x)$ ดังต่อไปนี้



ฟังก์ชัน $f(x)$ มีอนุพันธ์บนช่วง $\left[a, b\right]$ จะได้ว่า

$f'\left(x_0\right) = 0$ หรือหาค่าไม่ได้ $\qquad f'\left(x_1\right) = 0$ หรือหาค่าไม่ได้

$f'\left(x_2\right) = 0$ หรือหาค่าไม่ได้ $\qquad f'\left(x_3\right) = 0$ หรือหาค่าไม่ได้

การทดสอบค่าสูงสุดหรือต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน ณ จุดวิกฤต

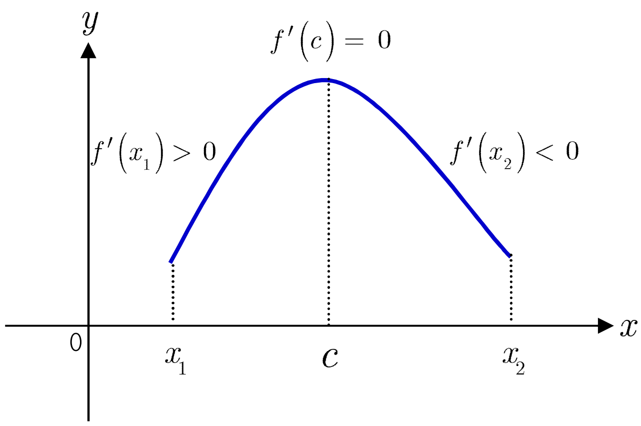
พลอนันต์ แสงประสิทธิ์ (2554 : 93) ได้ให้รายละเอียดไว้ดังนี้

ให้ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ ถ้า c เป็นจุดวิกฤต และ $f'(c) = 0$

1. ถ้า $f'(x) > 0$ เมื่อ $x_1 < x < c$ และ $f'(x) < 0$ เมื่อ $c < x < x_2$ แล้ว $f(x)$ มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x = c$

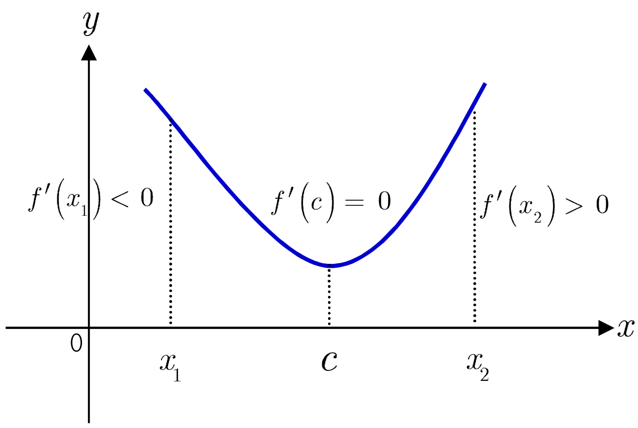
2. ถ้า $f'(x) < 0$ เมื่อ $x_1 < x < c$ และ $f'(x) > 0$ เมื่อ $c < x < x_2$ แล้ว $f(x)$ มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x = c$

3. ถ้า $f'(x) \neq 0$ บนช่วง (x_1, x_2) และเครื่องหมาย $f'(x)$ ไม่เปลี่ยนแปลงบนช่วง (x_1, x_2) แล้ว $f(x)$ จะไม่มีค่าสูงสุดหรือต่ำสุดในช่วงดังกล่าว แสดงได้จากกราฟต่อไปนี้



ภาพประกอบ 4.2 แสดงจุดสูงสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันบนช่วง (x_1, x_2)

ที่มา : พลอนันต์ แสงประสิทธิ์. 2554 : 93



ภาพประกอบ 4.3 แสดงจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันบนช่วง (x_1, x_2)

ที่มา : พลอนันต์ แสงประสิทธิ์. 2554 : 93

ตัวอย่าง 4.18 กำหนด $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 5$ จงหาจุดสูงสุดและจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน

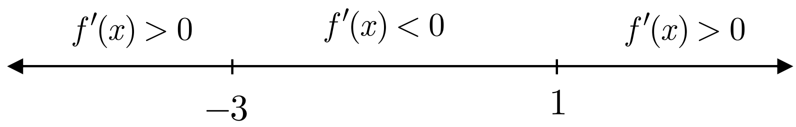
วิธีทำ $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 5$

$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9$

หาจุดวิกฤตให้ $f'(x) = 0$

$$
\begin{aligned}
3x^2+6x-9&=0\\
3\left(x^2+2x-3\right)&=0\\
3\left(x+3\right)\left(x-1\right)&=0\\
x&=-3,1
\end{aligned}
$$

แสดงได้ดังรูปดังนี้



ดังนั้น $f(x)$ มี $x=-3$ เป็นจุดสูงสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันและ มี $x=1$ เป็นจุดต่ำสุดสัมพัทธ์

ตัวอย่าง 4.19 กำหนด $f(x)=x^3-3x^2+3x$ จงหาจุดสูงสุดและจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน

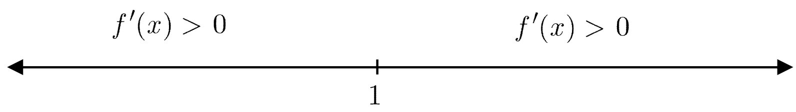
วิธีทำ $f(x)=x^3-3x^2+3x$

$f'(x)=3x^2-6x+3$

หาจุดวิกฤตให้ $f'(x)=0$

$$
\begin{aligned}
3x^2-6x+3&=0\\
3\left(x^2-2x+1\right)&=0\\
3\left(x-1\right)\left(x-1\right)&=0\\
x&=1
\end{aligned}
$$

แสดงได้ดังรูป

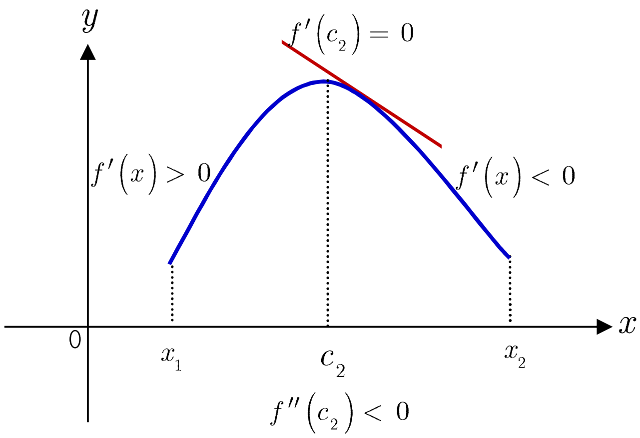


ดังนั้น $f(x)$ ไม่มีจุดสูงสุดและจุดต่ำสุดสัมพัทธ์

การทดสอบจุดวิกฤตโดยใช้อนุพันธ์อันดับสอง

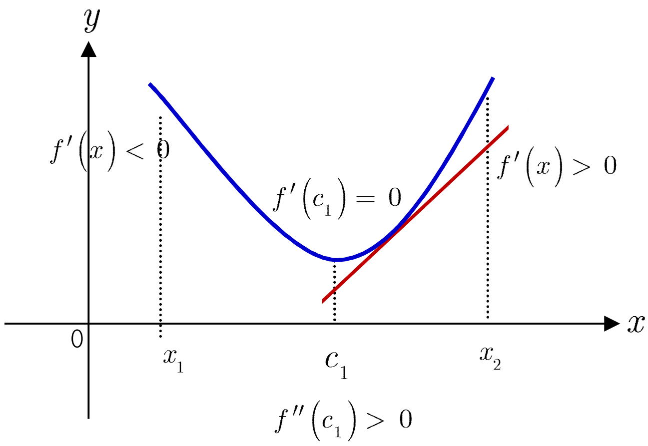
ถ้า $x=c_1$ เป็นจุดวิกฤตที่ $f'(c_1)=0$ โดยที่ $c_1\in(x_1,x_2)$ สมมุติว่ากราฟของฟังก์ชันมีลักษณะ **โค้งเว้าขึ้น** (กราฟหงาย) หรืออยู่ในลักษณะเส้นโค้งอยู่เหนือเส้นสัมผัสบนช่วง (x_1,x_2) จะ

เห็นว่าเมื่อ x เพิ่มขึ้นเส้นสัมผัสมีค่าความชันเพิ่มขึ้นแสดงว่า $f'(x)$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มขึ้นบนช่วง (x_1, x_2) ดังนั้น $f''(x) > 0$ บนช่วง (x_1, x_2) และที่จุด $x = c_2$ โดยที่ $c_2 \in (x_1, x_2)$ ฟังก์ชันมีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ ในทางกลับกันถ้ากราฟมีลักษณะ **โค้งเว้าลง** (กราฟคว่ำ) หรืออยู่ในลักษณะเส้นสัมผัสอยู่เหนือเส้นโค้งบนช่วง (x_1, x_2) จะเห็นว่าเมื่อ x เพิ่มขึ้นค่าแต่ค่าของ $f'(x)$ ลดลงแสดงว่า $f'(x)$ เป็นฟังก์ชันลดลงบนช่วง (x_1, x_2) ดังนั้น $f''(x) < 0$ บนช่วง (x_1, x_2) และที่จุด $x = c_2$ ฟังก์ชันมีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ (เฟื่องฟ้า ศรีจันทพงศ์ และคณะ, 2553 : 87)



ภาพประกอบ 4.4 แสดงจุดสูงสุดสัมพัทธ์โดยใช้อนุพันธ์อันดับที่สองบนช่วง (x_1, x_2)

ที่มา : อุษณีย์ ลีรวัฒน์. 2552 : 51



ภาพประกอบ 4.5 แสดงจุดต่ำสุดสัมพัทธ์โดยใช้อนุพันธ์อันดับที่สองบนช่วง (x_1, x_2)

ที่มา : อุษณีย์ ลีรวัฒน์. 2552 : 51

ทฤษฎีบท 4.3

กำหนดให้ a,b และ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ ถ้า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องถึงอนุพันธ์อันดับสองบนช่วง (a,b) ที่มี c อยู่และ $x=c$ เป็นจุดวิกฤตซึ่ง $f'(c)=0$ และ $f'(x),f''(x)$ หาค่าได้ทุกค่า x ในช่วงเปิด (a,b)

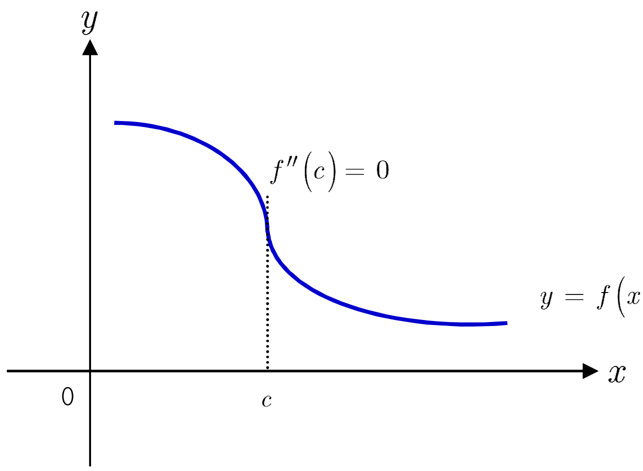
1. ถ้า $f''(c)<0$ แล้ว $f(x)$ มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x=c$
2. ถ้า $f''(c)>0$ แล้ว $f(x)$ มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x=c$

หมายเหตุ กรณี $f''(c)=0$ สรุปไม่ได้ต้องใช้อนุพันธ์อันดับหนึ่ง

บทนิยาม 4.5

จุดเปลี่ยนเว้าคือจุดที่เชื่อมระหว่างเส้นโค้งเว้าขึ้นกับเว้าลง หรือระหว่างเส้นโค้งเว้าลงกับเว้าขึ้น

กราฟจะมีจุดเปลี่ยนเว้าที่ $x=c$ ถ้า $f''(x)$ เปลี่ยนเครื่องหมายเมื่อ x เปลี่ยนค่าผ่านจุด $x=c$ จากน้อยไปมาก และจุดเปลี่ยนเว้าอาจจะเกิดขึ้นที่ $x=c$ เมื่อ $f''(c)=0$ ดังรูป (Anton, Howard, 1995 : 132)



ภาพประกอบ 4.6 แสดงจุดเปลี่ยนเว้าของฟังก์ชัน $y=f(x)$

ที่มา : Anton, Howard. 1995 : 132

ทฤษฎีบท 4.4

ให้ $f''(x)$ หาค่าได้บนช่วงเปิด (a,b)

ถ้า $f''(x) > 0$ สำหรับทุก $x \in (a,b)$ แล้วกราฟจะ **เว้าขึ้น** บนช่วงเปิด (a,b)

ถ้า $f''(x) < 0$ สำหรับทุก $x \in (a,b)$ แล้วกราฟจะ **เว้าลง** บนช่วงเปิด (a,b)

ทฤษฎีบท 4.5

ถ้า f มีจุดเปลี่ยนเว้าที่ $x = a$ แล้ว $f''(x) = 0$

บทกลับของทฤษฎีบท 4.5 ไม่จำเป็นต้องเป็นจริง ต้องทดสอบโดยใช้ทฤษฎีบท 4.4

หมายเหตุ

กรณี $f''(c)$ หาค่าไม่ได้และ $f''(x)$ เปลี่ยนเครื่องหมายเมื่อ x เปลี่ยนแปลงผ่าน c จากน้อยไปหามากจะได้ว่า $x = c$ เป็นจุดเปลี่ยนเว้าเช่นเดียวกัน

ตัวอย่าง 4.20 กำหนด $f(x) = x^4 - 2x^3$ จงหาจุดเปลี่ยนเว้า

วิธีทำ $f(x) = x^4 - 2x^3$

$f'(x) = 4x^3 - 6x^2$

$f''(x) = 12x^2 - 12x$

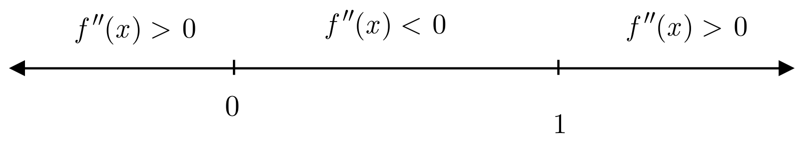
หาจุดเปลี่ยนเว้าให้ $f''(x) = 0$

$$12x^2 - 12x = 0$$

$$12x(x-1) = 0$$

$$x = 0,1$$

สามารถตรวจสอบโดยอนุพันธ์อันดับสอง ดังรูป



ดังนั้น $f(x)=x^4-2x^3$ อาจมีจุดเปลี่ยนเว้าที่ $x=0,1$

ตัวอย่าง 4.21 กำหนด $f(x)=x^3+3x^2-9x+5$ จงหา

1. จุดสูงสุดสัมพัทธ์ จุดต่ำสุดสัมพัทธ์
2. เป็นฟังก์ชันเพิ่มขึ้นบนช่วงใด และเป็นฟังก์ชันลดลงบนช่วงใด
3. จุดเปลี่ยนเว้า
4. ช่วงใดที่ลักษณะของกราฟโค้งเว้าขึ้น และโค้งเว้าลงบนช่วงใด

วิธีทำ $f(x)=x^3+3x^2-9x+5$

$$f'(x)=3x^2+6x-9$$

$$f''(x)=6x+6$$

หาจุดวิกฤตให้ $f'(x)=0$

$$3x^2+6x-9=0$$

$$3\left(x^2+2x-3\right)=0$$

$$3\left(x+3\right)\left(x-1\right)=0$$

$$x=-3,1$$

1. จุดสูงสุดสัมพัทธ์ จุดต่ำสุดสัมพัทธ์

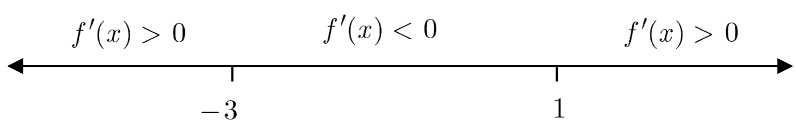
$f''(-3)=6(-3)+6=-12<0$ ดังนั้น $x=-3$ เป็นจุดสูงสุดสัมพัทธ์

$f''(1)=6(1)+6=12>0$ ดังนั้น $x=1$ เป็นจุดต่ำสุดสัมพัทธ์

2. เป็นฟังก์ชันเพิ่มขึ้นบนช่วงใด และเป็นฟังก์ชันลดลงบนช่วงใด

$f(x)$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มขึ้นบนช่วง $f'(x)>0$ และ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันลดลงบนช่วง $f'(x)<0$

แสดงได้ดังรูป



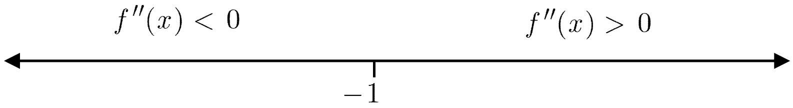
ดังนั้น $f(x)$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มขึ้นบนช่วง $\left(-\infty,-3\right)\cup\left(1,\infty\right)$

$f(x)$ เป็นฟังก์ชันลดลงบนช่วง $x\in\left(-3,1\right)$

3. หาจุดเปลี่ยนเว้าให้ $f''(x)=0$

$$\begin{aligned} 6x+6&=0 \\ 6x&=-6 \\ x&=-1 \end{aligned}$$

สามารถตรวจสอบโดยอนุพันธ์อันดับสอง ดังรูป

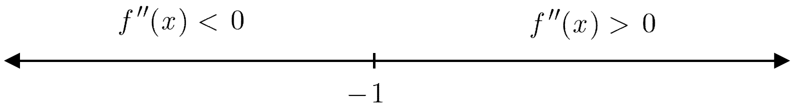


ดังนั้น $f(x)$ อาจมีจุดเปลี่ยนเว้าที่ $x=-1$

4. ช่วงใดที่ลักษณะของกราฟโค้งเว้าขึ้น และโค้งเว้าลงบนช่วงใด

กราฟของ $f(x)$ จะโค้งเว้าขึ้นบนช่วง $f''(x)>0$ และโค้งเว้าลงบนช่วงใดบนช่วง $f''(x)<0$

แสดงได้ดังรูป



ดังนั้น กราฟ $f(x)$ จะโค้งเว้าลงบนช่วง $\left(-\infty,-1\right)$

กราฟ $f(x)$ จะโค้งเว้าขึ้นบนช่วง $\left(-1,\infty\right)$

สรุปหลักการเขียนกราฟ

1. หา $f'(x)$ และ $f''(x)$

2. หาจุดวิกฤตจาก $f'(x)=0$ หรือหาค่าไม่ได้ เพื่อตรวจสอบช่วงที่ฟังก์ชันมีค่าเพิ่มขึ้นหรือลดลงค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

3. หาค่า x ที่ทำให้ $f''(x)=0$ หรือหาค่าไม่ได้เพื่อตรวจสอบลักษณะการโค้งของเส้นกราฟ และจุดเปลี่ยนเว้า

4. เขียนกราฟของฟังก์ชันโดยใช้ข้อมูลที่ได้จากขั้นตอนที่ 1-3

ตัวอย่าง 4.22 จงวาดกราฟของฟังก์ชัน $f(x) = x^4 - 2x^3$

วิธีทำ $f(x) = x^4 - 2x^3$

$f'(x) = 4x^3 - 6x^2$

$f''(x) = 12x^2 - 12x$

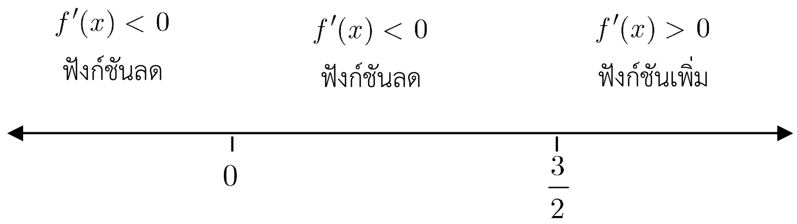
หาจุดวิกฤตให้ $f'(x) = 0$

$$4x^3 - 6x^2 = 0$$

$$x^2(4x - 6) = 0$$

$$x = 0, \frac{3}{2}$$

แสดงได้ดังรูป



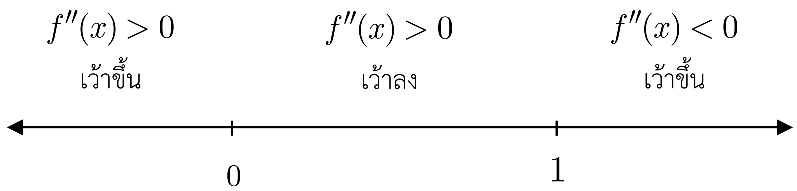
หาจุดเปลี่ยนเว้าให้ $f''(x) = 0$

$$12x^2 - 12x = 0$$

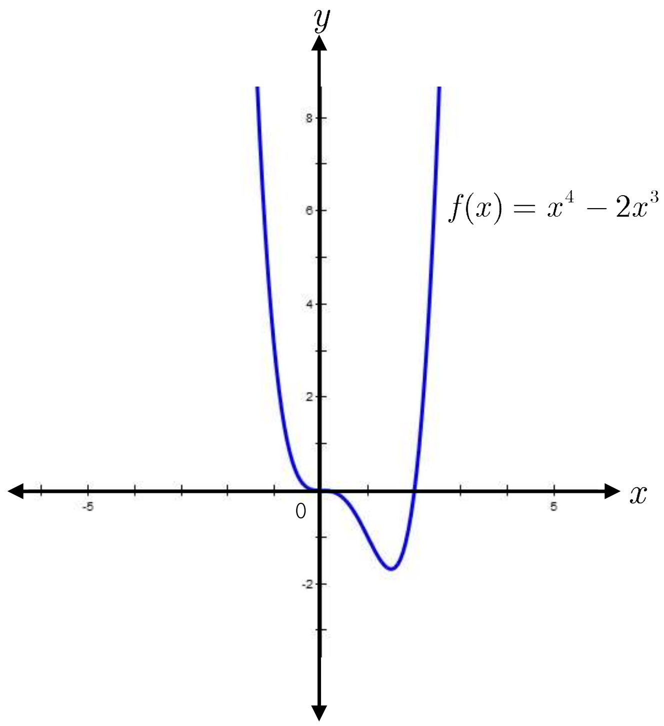
$$12x(x - 1) = 0$$

$$x = 0, 1$$

แสดงได้ดังรูป



จากข้อมูลทั้งหมดนำมาเขียนกราฟได้ดังนี้



ตัวอย่าง 4.23 เขียนกราฟของฟังก์ชัน $f(x) = 12 - 12x + x^3$

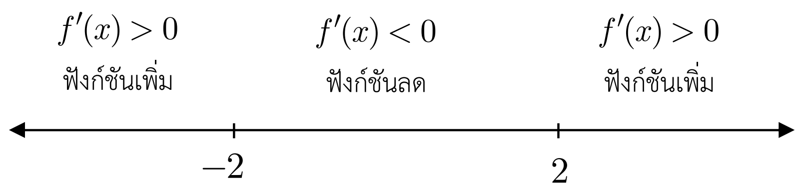
วิธีทำ $f(x) = 12 - 12x + x^3$

$$f'(x) = -12 + 3x^2$$
$$f''(x) = 6x$$

หาจุดวิกฤตให้ $f'(x) = 0$

$$-12 + 3x^2 = 0$$
$$3(x^2 - 4) = 0$$
$$3(x-2)(x+2) = 0$$
$$x = -2, 2$$

แสดงได้ดังรูป

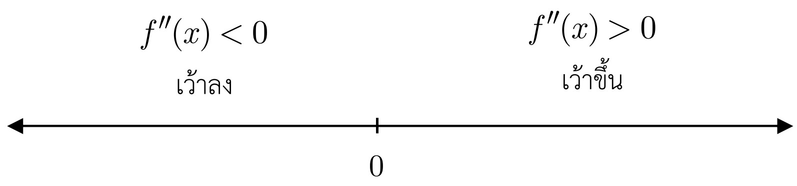


หาจุดเปลี่ยนเว้าให้ $f''(x) = 0$

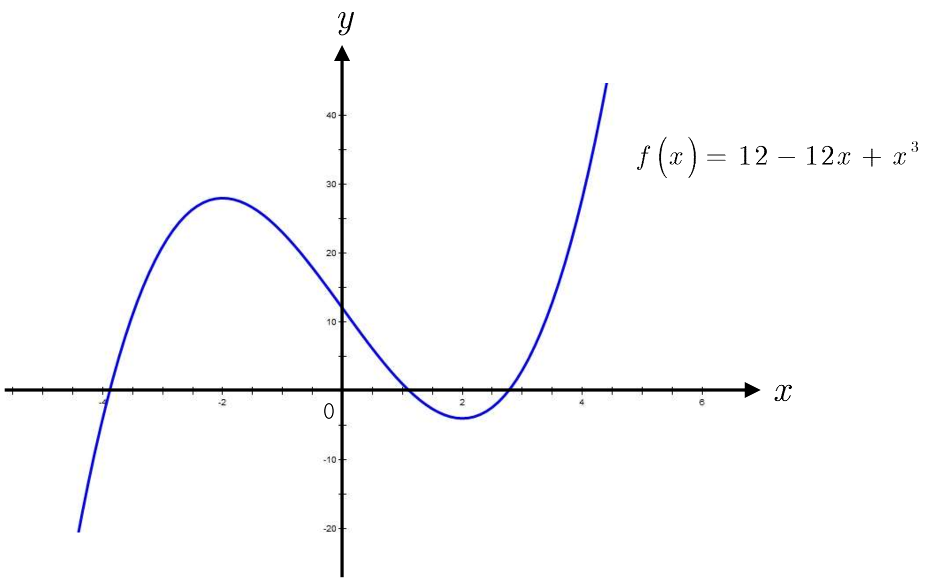
$$6x = 0$$

$$x = 0$$

แสดงได้ดังรูป



จากข้อมูลทั้งหมดนำมาเขียนกราฟได้ดังนี้



4.5 หลักเกณฑ์โลปิตาล

หลักเกณฑ์นี้เป็นการประยุกต์ของอนุพันธ์อีกทางหนึ่ง ซึ่งเป็นการนำอนุพันธ์มาช่วยในหาหาค่าลิมิตของฟังก์ชัน โดยการหาค่าลิมิตของฟังก์ชันนั้นได้กล่าวแล้วในบทที่ 1 แต่การจะใช้หลักเกณฑ์โลปิตาลนั้นต้องผ่านการเรียนเรื่องอนุพันธ์ของฟังก์ชันมาก่อนด้วย จึงจะสามารถหาลิมิตโดยใช้

หลักเกณฑ์โลปิตาลได้ และการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันนั้นได้กล่าวถึงในบทที่ 2 ไปแล้ว การหาลิมิตของฟังก์ชันโดยใช้กฎของโลปิตาลนั้น ลิมิตต้องอยู่ในรูปแบบที่ไม่กำหนดตามบทนิยามต่อไปนี้ (อุษณีย์ ลีรวัฒน์, 2552 : 61)

บทนิยาม 4.6

ฟังก์ชัน $f(x)$ เป็นฟังก์ชันซึ่งเมื่อ x เข้าใกล้ a แล้ว $f(x)$ อยู่ในรูปแบบใดรูปแบบหนึ่งดังต่อไปนี้ คือ $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty, 0^0, \infty^0$ หรือ 1^∞ แล้วจะได้ว่า $\lim_{x \to a} f(x)$ มี**รูปแบบที่ไม่กำหนด** ที่ $x = a$

หลักเกณฑ์โลปิตาลจะช่วยให้สามารถคำนวณลิมิตในรูปแบบ $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ ในกรณีรูปแบบที่ไม่กำหนดเมื่อตัวเศษ $f(x)$ และตัวส่วน $g(x)$ เข้าใกล้ 0 ทั้งคู่หรือเข้าใกล้ $\pm\infty$ ทั้งคู่ ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้ (อัจฉรา ปาจีนบูรวรรณ์, 2555 : 71)

ทฤษฎีบท 4.6

กำหนดให้ I เป็นช่วงเปิดที่บรรจุ a , L เป็นจำนวนจริง f และ g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บนช่วงเปิด I โดยที่ $g(x) \neq 0$ ทุกค่าของ x ในช่วงเปิด I ยกเว้นที่ $x = a$ ถ้า $\lim_{x \to a} f(x) = 0$, $\lim_{x \to a} g(x) = 0$ และ $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ แล้ว $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$

ทฤษฎีบท 4.7

กำหนดให้ I เป็นช่วงเปิดที่บรรจุ a , L เป็นจำนวนจริง f และ g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บนช่วงเปิด I ถ้า $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ (หรือ $-\infty$), $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ (หรือ $-\infty$) และ $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ แล้ว $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$

จากทฤษฎีบท 1.8 และ 1.9 จะช่วยให้สามารถคำนวณลิมิตในรูปแบบ $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ ในกรณีรูปแบบที่ไม่กำหนดได้ง่ายยิ่งขึ้น นั่นหมายถึงว่าถ้าตัวเศษ $f(x)$ และตัวส่วน $g(x)$ เข้าใกล้ 0 ทั้งคู่หรือเข้าใกล้ $\pm\infty$ ทั้งคู่แล้วเราสามารถหา $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ โดยการหา $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ แทนดังตัวอย่างต่อไปนี้ (สุรวิทย์ ตันแต่งผล และอนุสรณ์ ชนวีรยุทธ, 2557 : 44)

ตัวอย่าง 4.24 จงหาค่า $\lim_{x \to 0} \frac{2x + 5x^2}{x}$

วิธีทำ พิจารณา $\lim_{x \to 0}(2x + 5x^2) = 0$

และ $\lim_{x \to 0} x = 0$

ดังนั้น $\lim_{x \to 0} \frac{2x + 5x^2}{x}$ อยู่ในรูปแบบที่ไม่กำหนด

ให้ $f\left(x\right) = 2x + 5x^2$ ได้ $f'\left(x\right) = 2 + 10x$

และ $g\left(x\right) = x$ ได้ $g'\left(x\right) = 1$

จากหลักเกณฑ์โลปิตาล $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

จะได้ $\lim_{x \to 0} \frac{2x + 5x^2}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{2 + 10x}{1} = 2$

ดังนั้น $\lim_{x \to 0} \frac{2x + 5x^2}{x} = 2$

ตัวอย่าง 4.25 จงหาค่า $\lim_{x \to 4} \frac{x^2 - 7x + 12}{x - 4}$

วิธีทำ พิจารณา $\lim_{x \to 4}(x^2 - 7x + 12) = 0$

และ $\lim_{x \to 4}(x - 4) = 0$

ดังนั้น $\lim_{x \to 4} \frac{x^2 - 7x + 12}{x - 4}$ อยู่ในรูปแบบที่ไม่กำหนด

ให้ $f(x) = x^2 - 7x + 12$ ได้ $f'(x) = 2x - 7$

และ $g(x) = x - 4$ ได้ $g'(x) = 1$

จากหลักเกณฑ์โลปิตาล $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

จะได้ $\lim_{x \to 4} \dfrac{x^2 - 7x + 12}{x - 4} = \lim_{x \to 4} \dfrac{2x - 7}{1} = 1$

ดังนั้น $\lim_{x \to 4} \dfrac{x^2 - 7x + 12}{x - 4} = 1$

ตัวอย่าง 4.26 จงหาค่า $\lim_{x \to -2} \dfrac{x^3 + 8}{x + 2}$

วิธีทำ พิจารณา $\lim_{x \to -2} (x^3 + 8) = 0$

และ $\lim_{x \to -2} (x + 2) = 0$

ดังนั้น $\lim_{x \to -2} \dfrac{x^3 + 8}{x + 2}$ อยู่ในรูปแบบที่ไม่กำหนด

ให้ $f(x) = x^3 + 8$ ได้ $f'(x) = 3x^2$

และ $g(x) = x + 2$ ได้ $g'(x) = 1$

จากหลักเกณฑ์โลปิตาล $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

จะได้ $\lim_{x \to -2} \dfrac{x^3 + 8}{x + 2} = \lim_{x \to -2} \dfrac{3x^2}{1} = 12$

ดังนั้น $\lim_{x \to -2} \dfrac{x^3 + 8}{x + 2} = 12$

ตัวอย่าง 4.27 จงหาค่า $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x^3 - 8}$

วิธีทำ พิจารณา $\lim_{x \to 2} (x^2 - 4) = 0$

และ $\lim_{x \to 2} (x^3 - 8) = 0$

ดังนั้น $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x^3 - 8}$ อยู่ในรูปแบบที่ไม่กำหนด

ให้ $f(x) = x^2 - 4$ ได้ $f'(x) = 3x^2$

และ $g(x) = x^3 - 8$ ได้ $g'(x) = 1$

จากหลักเกณฑ์โลปิตาล $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

จะได้ $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x^3 - 8} = \lim_{x \to 2} \frac{2x}{3x^2} = \frac{1}{3}$

ดังนั้น $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x^3 - 8} = \frac{1}{3}$

ตัวอย่าง 4.28 จงหาค่า $\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{4x^3 - x - 3}$

วิธีทำ พิจารณา $\lim_{x \to 1}(x^3 - 1) = 0$

และ $\lim_{x \to 1}(4x^3 - x - 3) = 0$

ดังนั้น $\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{4x^3 - x - 3}$ อยู่ในรูปแบบที่ไม่กำหนด

ให้ $f(x) = x^3 - 1$ ได้ $f'(x) = 3x^2$

และ $g(x) = 4x^3 - x - 3$ ได้ $g'(x) = 12x^2 - 1$

จากหลักเกณฑ์โลปิตาล $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

จะได้ $\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{4x^3 - x - 3} = \lim_{x \to 1} \frac{3x^2}{12x^2 - 1} = \frac{3}{11}$

ดังนั้น $\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{4x^3 - x - 3} = \frac{3}{11}$

4.6 สรุปท้ายบทที่ 4

จะเห็นวว่าอนุพันธ์นั้นสามารถนำไปประยุกต์ใช้ได้ในทางวิทยาศาสตร์ได้หลากหลายสาขา เช่น การเคลื่อนที่ของวัตถุ เราสมารถหาความเร็วและความเร่งของการเคลื่อนที่จาก $s = f(t)$ ซึ่งแทนสมการการเคลื่อนที่ ส่วนความเร็วโดยทั่วไปเราได้จากอัตราส่วนระหว่างปริมาณการเปลี่ยนแปลงของ s(ระยะทาง) กับปริมารการเปลี่ยนแปลงของ t (เวลา) แต่ถ้าต้องการความเร็วชั่วขณะหรือความเร็วที่เวลา t ใด ๆ คือ $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$ ซึ่งแทนด้วย $\frac{ds}{dt}$ ดังนั้นความเร็วของวัตถุเมื่อเวลา t ใด ๆ คือ $v = \frac{ds}{dt}$ และความเร่งของวัตถุเมื่อเวลา t ใด ๆ คือ $a = \frac{dv}{dt}$ สำหรับอัตราสัมพัทธ์เป็นการเปลี่ยนแปลงของตัวแปร 2 ตัวหรือมากกว่า 2 ซึ่งมีปัญหาอีกจำนวนมากที่เกี่ยวข้องกับตัวแปรหลายตัว และแต่ละตัว

แปรเหล่านั้นก็เป็นฟังก์ชันของเวลาถ้าเราทราบค่าตัวแปร และอัตราการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรบางตัวเทียบกับเวลาแล้วจะสามารถหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรที่ต้องการเทียบกับเวลาได้ สมการเส้นสัมผัสและเส้นปกติ ฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลด จุดสูงสุดและจุดต่ำสุดเราสามารถหาได้จากอนุพันธ์อันดับที่ 1 และอันดับที่ 2 แล้วเราสามารถนำข้อมูลที่ได้ไปเขียนกราฟของฟังก์ชัน และอนุพันธ์นี้ยังนำไปช่วยหาลิมิตของฟังก์ชันได้อีกด้วยโดยใช้หลักเกณฑ์ของโลปิตาล ถ้าหากเราศึกษาการประยุกต์ในระดับที่สูงขึ้นไปจะเห็นได้ชัดเจนว่า ารถนำไปประยุกต์กับวิทยาศาสตร์ชั้นสูงได้อย่างมากมาย

คำถามท้ายบท

1. จงหาความเร็ว(v) ความเร่ง(a) เมื่อกำหนด $s = f(t)$ ณ เวลา t ใดๆ

   1.1 $s = 3t^2 - t + 1$

   1.2 $s = t^5 - 4t^2 + 8t$

   1.3 $s = (2t^6 - 5t)^3$

   1.4 $s = (3t^3 - t)(t + 1)$

2. จงหาความเร็ว(v) ความเร่ง(a) เมื่อ $t = 2$ ของ $s = f(t)$ ในข้อที่ 1.

3. วัตถุเคลื่อนที่ในแนวราบมีสมการการเคลื่อนที่ $s = t^3 - 9t^2 + 24t$ จงหา

   3.1. จงหา s(ระยะทาง) และ a(ความเร่ง) เมื่อ $v = 0$

   3.2. จงหา s(ระยะทาง) และ v(ความเร็ว) เมื่อ $a = 0$

   3.3. เมื่อใดที่ s(ระยะทาง) เพิ่มขึ้น

   3.4. เมื่อใดที่ v(ความเร็ว) เพิ่มขึ้น

4. จงใช้แสดงวิธีทำเพื่อหาคำตอบ

   4.1 บอลลูนลอยสูง 60 เมตร และกำลังลอยขึ้นในแนวดิ่งด้วยอัตราเร็วคงตัว 4.5 เมตรต่อวินาที รถยนต์คันหนึ่งแล่นในแนวเส้นตรงผ่านใต้บอลลูนด้วยอัตราเร็ว 20 เมตร/วินาที ถามว่าระยะทางระหว่างบอลลูนกับรถยนต์เป็นไปอย่างไร เมื่อเวลาผ่านไป 1 วินาที

   4.2 พิงบันไดยาว 26 ฟุต ไว้กับผนังซึ่งตั้งฉากกับพื้นดิน ถ้าปลายล่างของบันไดเลื่อนลงด้วยอัตรา 4 ฟุต/วินาที จงหาว่าปลายล่างของบันไดจะเคลื่อนที่อย่างไร ในขณะที่ปลายบนของบันไดอยู่ห่างจากพื้น 10 ฟุต

   4.3 บอลลูนรูปทรงกลม ชายคนหนึ่งปล่อยแก๊สเข้าไปในบอลลูนด้วยอัตราเร็ว 1000 ลูกบาศก์ฟุต/วินาที อยากทราบว่ารัศมีของบอลลูนจะเพิ่มขึ้นเท่าไร เมื่อรัศมีบอลลูนเป็น 5 ฟุต

4.4 วัตถุทรงกระบอกสูง 20 เมตรได้มีการขยายตัว ถ้ารัศมีของทรงกระบอกเพิ่มขึ้นด้วยอัตรา 3 เมตร/นาที ปริมาตรของทรงกระบอกจะเปลี่ยนแปลงอย่างไรในขณะที่รัศมี 10 เมตร และความสูงคงที่

4.5 ดวงไฟแขวนอยู่เหนือทางเท้า 10 ฟุต และห่างจากผนังตึกซึ่งตั้งฉากกับทางเท้า 20 ฟุต ชายผู้หนึ่งสูง 6 ฟุต เดินบนทางเท้าเข้าหาผนังตึกด้วยอัตราเร็ว 2 ฟุต/วินาที จงหาว่าในขณะที่เขาอยู่ห่างจากผนังตึก 4 ฟุต เงาศรีษะของเขาจะเคลื่อนไปบนผนังด้วยอัตราเท่าไร

4.6 ขณะที่เล่นว่าวอยู่ที่ระดับสูง 300 เมตรจากพื้นดิน ลมได้พัดพาว่าวลอยไปในแนวระดับด้วยอัตรา 25 เมตร/วินาที คนเล่นว่าวจะต้องผ่อนสายป่านด้วยอัตราความเร็วเท่าใดเมื่อว่าวอยู่ห่างจากตัวเขา 500 เมตร

5. กำหนดให้ $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x - 3$ เป็นสมการเส้นโค้งและ L_1 เป็นเส้นตรงที่สัมผัสเส้นโค้งที่จุด $x = 2$ จงหาเส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นตรง L_1 ที่จุด ซึ่ง L_1 สัมผัสเส้นโค้ง

6. กำหนดให้ $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 3$ จงหาสมการเส้นสัมผัสและเส้นปกติของเส้นโค้งที่จุด $x = 1$

7. เส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นโค้ง $y = x^{\frac{3}{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} - 2$ ที่จุด $(1, 0)$ ตัดกับเส้นตรง $y = -1$ ที่จุดใด

8. กำหนด $y = f(x)$ ดังต่อไปนี้

8.1 $f(x) = x^2 - 2x + 3$

8.2 $f(x) = x^3 - 27x + 36$

8.3 $f(x) = 2x^3 - 3x + 3$

8.4 $f(x) = (x-3)^3$

8.5 $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 2$

8.6 $f(x) = x - 3x^3$

จงหา

1 จุดสูงสุดสัมพัทธ์ จุดต่ำสุดสัมพัทธ์

2 เป็นฟังก์ชันเพิ่ม และเป็นฟังก์ชันลด บนช่วงใด

3 จุดเปลี่ยนเว้า

4 ช่วงใดที่ลักษณะของกราฟโค้งเว้าขึ้น และโค้งเว้าลง

5 เขียนกราฟ

9. จงหาค่าลิมิตที่กำหนดให้ต่อไปนี้โดยใช้หลักเกณฑ์โลปิตาล

9.1 $\lim_{x\to 2}\frac{(x+1)(x-2)}{x-2}$

9.2 $\lim_{x\to -1}\frac{(x^2-1)}{x+1}$

9.3 $\lim_{x\to 0}\frac{x^3-2x}{x}$

9.4 $\lim_{x\to 2}\frac{x^3-4x}{x^2-4}$

9.5 $\lim_{x\to 0}\frac{x^3-3x^2-2x}{x}$

9.6 $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x-1}$

เอกสารอ้างอิง

กมล เอกไทยเจริญ. (2544). **แคลคูลัส 1.** กรุงเทพมหานคร : ไฮเอ็ดพับลิชชิ่ง.

คณาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยรามคำแหง. (2542). **แคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ 1.** พิมพ์ครั้งที่ 8 กรุงเทพมหานคร : มหาวิทยาลัยรามคำแหง.

ชัยสงคราม เครือหงส์. (2544). **เอกสารประกอบการสอนรายวิชาแคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์1.** สุราษฎร์ธานี : มหาวิทยาลัยราชภัฏสุราษฎร์ธานี.

พลอนันต์ แสงประสิทธิ์. (2554). **แนวข้อสอบคณิตศาสตร์ ม. ปลาย.** กรุงเทพมหานคร : เดอะบุคส์.

พัฒนา สีมากุล. (2537). **แคลคูลัส 1.** กรุงเทพมหานคร : เจเนอรัลบุ๊คส์.

เฟื่องฟ้า ศรีจันทพงศ์ และคณะ. (2553). **แคลคูลัส 1.** พิมพ์ครั้งที่ 5 ขอนแก่น : ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น.

มาริสา มัยยะ และวันเพ็ญ จันทรังษี. (2550). **แคลคูลัส 1.** กรุงเทพมหานคร : ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์.

เลิศ สิทธิโกศล. (2541). **แคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ 1.** กรุงเทพมหานคร : สกายบุคส์.

สุรวิทย์ ตันแต่งผล และอนุสรณ์ ชนวีรยุทธ. (2557). **แคลคูลัส 1.** กรุงเทพมหานคร : จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

อัจฉรา ปาจีนบูรวรรณ์. (2555). **แคลคูลัส 1.** กรุงเทพมหานคร : ภาควิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์.

อุษณีย์ ลีรวัฒน์. (2552). **เอกสารประกาอบการสอนรายวิชาคณิตศาสตร์ขั้นสูง I.** กรุงเทพมหานคร : มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์.

Anton, Howard. (1995). **Calculus with analytic geometry.** New York : John Wiley & son.

Ross, F.L. Maurice,.W.D. and Frank, G.R. (2001). **Calculus with analytic geometry.** New Yok : Addison-wesley.

Stein, S.K.& Barcellos, A. (1992). **Calculus and analytic Geometry.** McGraw-Hill.

แผนบริหารการสอนประจำบทที่ 5

เนื้อหาประจำบท

1. ปัญหาแนววิถีเชิงตั้งฉาก
2. ปัญหาทางกลศาสตร์
3. ปัญหาอัตราการเปลี่ยนแปลง

วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม

1. สามารถนำเรื่องอนุพันธ์มาประยุกต์เพื่อแก้ปัญหาแนววิถีเชิงตั้งฉากได้
2. สามารถนำเรื่องอนุพันธ์มาประยุกต์เพื่อแก้ปัญหาทางกลศาสตร์ได้
3. สามารถนำเรื่องอนุพันธ์มาประยุกต์เพื่อแก้ปัญหาอัตราการเปลี่ยนแปลงได้

วิธีการสอนและกิจกรรมการเรียนการสอนประจำบท

1. ผู้สอนบรรยายหัวข้อต่อไปนี้พร้อมเปิดโอกาสให้ซักถาม
   1.1 ปัญหาแนววิถีเชิงตั้งฉาก
   1.2 ปัญหาทางกลศาสตร์
   1.3 ปัญหาอัตราการเปลี่ยนแปลง
2. ให้นักศึกษาทำกิจกรรมต่อไปนี้
   2.1. ศึกษาข้อมูลจาก เกี่ยวกับการประยุกต์อนุพันธ์ขั้นสูง
   2.2. ทำแบบฝึกหัดที่กำหนดให้

สื่อการเรียนการสอน

1. เอกสารประกอบการสอนและตำราต่าง ๆ
2. Slide Presentation

การวัดผลและการประเมินผล

1. สังเกตความสนใจของนักศึกษาขณะสอน ความตั้งใจ การฟัง การจดบันทึก และการซักถาม
2. แบบฝึกหัด
3. แบบทดสอบ
4. การมีส่วนร่วมในกิจกรรมการเรียนการสอน

บทที่ 5
การประยุกต์อนุพันธ์ขั้นสูง

ในบทที่ผ่านมานั้นเราได้ศึกการประยุกต์อนุพันธ์เบื้องต้นไปแล้ว ไปแล้ว สำหรับในบทนี้ จะกล่าวถึงกับการประยุกต์ของอนุพันธ์ขั้นสูงสำหรับการแก้ปัญหาบางปัญหา เช่น ปัญหาแนววิธีเชิงตั้งฉาก ปัญหาทางกลศาสตร์ ปัญหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาณที่สนใจ ซึ่งปัญหาต่างๆ ข้างต้นสามารถนำมาสร้างความสัมพันธ์ของตัวแปรต่างๆ ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ และเมื่อเราสามารถแก้สมการเชิงอนุพันธ์ซึ่งเป็นตัวแบบทางคณิตศาสตร์ของปัญหาได้อย่างถูกต้องและคำตอบนั้นสามารถนำไปใช้ในการอธิบายตัวแปรหรือปริมาณที่เราสนใจได้อย่างถูกต้อง

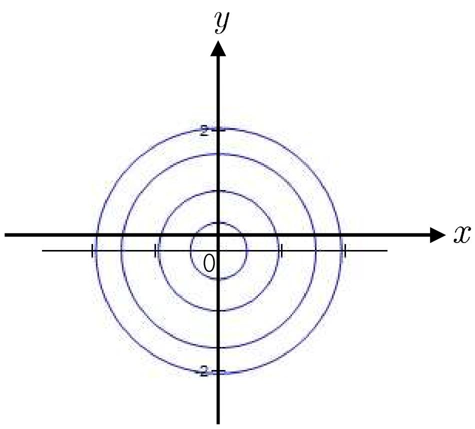
5.1 ปัญหาแนววิถีเชิงตั้งฉาก

เป็นที่ทราบกันแล้วว่าสมการหนึ่งสมการของสองตัวแปรที่มีพารามิเตอร์จะแทนเส้นโค้งหลาย ๆ เส้นซึ่งเส้นโค้งเส้นหนึ่งจะเกิดจากการกำหนดค่าหนึ่งให้กับพารามิเตอร์ เราเรียกเส้นโค้งเหล่านี้ว่า วงศ์เส้นโค้ง (วีระศักดิ์ วาจาบัณฑิตย์, 2541 : 85)

กำหนดสมการ

(1) $$x^2 + y^2 = c^2$$

เป็นสมการของกลุ่มวงกลมซึ่งวงกลมแต่ละวงนี้มีจุดศูนย์กลางที่จุด $(0,0)$



ภาพประกอบ 5.1 วงศ์เส้นโค้งของสมการ $x^2 + y^2 = c^2$

ที่มา : วีระศักดิ์ วาจาบัณฑิตย์. 2541 : 85

บทนิยาม 5.1

แต่ละเส้นโค้งของวงศ์เส้นโค้งหนึ่ง ตัดกับแต่ละเส้นโค้งของวงศ์เส้นโค้งอีกชุดหนึ่งเป็นมุมฉากแล้วเรากล่าวว่า วงศ์เส้นโค้งทั้งสองเป็น**แนววิถีเชิงตั้งฉาก**ซึ่งกันและกัน

ให้

(2) $$F(x,y,c)=0$$

เป็นวงศ์เส้นโค้งพารามิเตอร์หนึ่งตัว ในระนาบ xy โดนที่ c เป็นพารามิเตอร์ เรากล่าวว่าชุดเส้นโค้งพารามิเตอร์หนึ่งตัว

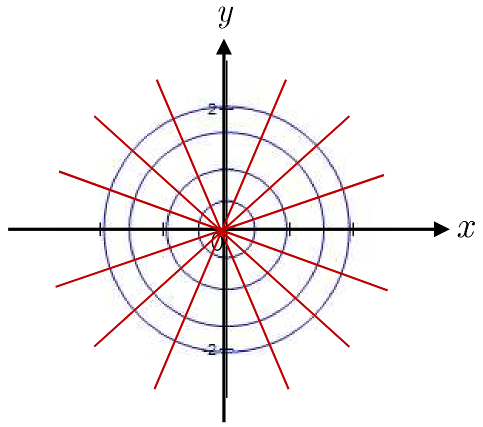
(3) $$G(x,y,k)=0$$

โดยที่ k เป็นพารามิเตอร์ แนววิถีเชิงตั้งฉากกับวงศ์เส้นโค้ง (2) ถ้าแต่ละเส้นโค้งของวงศ์เส้นโค้ง (3) ตัดกับทุกเส้นของวงศ์เส้น (2) เป็นมุมฉาก และจะกล่าวว่าวงศ์เส้นโค้งพารามิเตอร์หนึ่งตัว (3) เป็น แนววิธีเฉียง กับวงศ์เส้นโค้ง (2) ถ้าแต่ละเส้นโค้งของวงศ์เส้นโค้ง (3) ตัดกับทุกเส้นโค้งของชุดเส้นโค้ง (2) เป็นมุม α โดย $\alpha \neq 90^\circ$

ตัวอย่าง เช่นวงศ์เส้นโค้ง (1) ซึ่งเป็นวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิดและรัศมีเท่ากับ c เห็นได้ว่าแต่ละเส้นตรงที่ผ่านจุดกำเนิดซึ่งกำหนดโดยสมการ

(4) $$y=kx$$

จะเป็นแนววิถีเชิงตั้งฉากของวงศ์เส้นโค้ง (1) และกลับกันแต่ละวงกลมของวงศ์เส้นโค้ง (1) ก็เป็นแนววิถีเชิงตั้งฉากของวงศ์เส้นโค้ง (4) นั่นคือวงศ์เส้นโค้ง (1) และ วงศ์เส้นโค้ง (4) ต่างก็เป็นแนววิถีเชิงตั้งฉาก ซึ่งกันและกัน ดังภาพประกอบ 5.2



ภาพประกอบ 5.2 วงศ์เส้นโค้ง $y = kx$ เป็นแนววิถีเชิงตั้งฉากกันและกันกับวงศ์เส้นโค้ง $x^2 + y^2 = c^2$

ในทางฟิสิกส์นั้นมีปรากฏการณ์เป็นแนววิถีเชิงตั้งฉาก เช่น ชุดเส้นแรงของสนามแม่เหล็ก และชุดเส้นโค้งศักย์เท่ากัน ในสนามแม่เหล็กเป็นแนววิถีเชิงตั้งฉากซึ่งกันและกัน หรือชุดเส้นแรงไฟฟ้าและชุดเส้นโค้งศักย์เท่ากันในสนามไฟฟ้า เป็นแนววิถีเชิงตั้งฉากซึ่งกันและกัน หรือในเรื่องความร้อนชุดเส้นโค้งอุณหภูมิเท่ากัน กับชุดเส้นทางการไหลความร้อนเป็นแนววิถีเชิงตั้งฉากซึ่งกันและกัน

เรากล่าวว่าชุดเส้นโค้งเป็นแนววิธีเชิงตั้งฉากในตัวถ้าแนววิถีเชิงตั้งฉากของวงศ์เส้นโค้งเป็นวงศ์เดียวกันเช่นวงศ์เส้นโค้ง $y^2 = 2cx + c^2$ ต่อไปนี้จะศึกษาการหาแนววิถีเชิงตั้งฉากของวงศ์เส้นโค้งพาราามิเตอร์หนึ่งตัวดังวิธีการต่อไปนี้ (ดำรง ทิพย์โยธา, 2541 : 73-77)

การหาแนววิถีเชิงตั้งฉากของวงศ์เส้นโค้งพารามิเตอร์หนึ่งตัว

กำหนดวงศ์เส้นโค้งพารามิเตอร์หนึ่งตัว (2)

$$F(x,y,c) = 0$$

เริ่มต้นหาสมการเชิงอนุพันธ์ของวงศ์เส้นโค้งโดยการหาอนุพันธ์สมการ (2) เทียบกับ x แล้วกำจัดพารามิเตอร์ c ให้หมดไปจะได้ สมการเชิงอนุพันธ์ของวงศ์เส้นโค้ง (2) คือ

(5) $$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

นั่นคือ เส้นโค้งแต่ละเส้นของวงศ์เส้นโค้ง (2) ที่จุด (x,y) ใด ๆ มีความชันเท่ากับ $f(x,y)$ และเนื่องจากแนววิถีเชิงตั้งฉากของวงศ์เส้นโค้ง (2) ตัดกับแต่ละเส้นโค้งของวงศ์เส้นโค้ง (2) เป็นมุมฉากดังนั้นความชันของแนววิถีเชิงตั้งฉาก ที่จุด (x,y) ใด ๆ เท่ากับ $-\dfrac{1}{f(x,y)}$

จะได้ว่า สมการเชิงอนุพันธ์ของวงศ์เส้นโค้งแนววิถีเชิงตั้งฉากคือ

(6) $$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{f(x,y)}$$

ทำการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ (6) จะได้วงศ์เส้นโค้งพารามิเตอร์หนึ่งตัว $G(x,y,k)=0$

ตัวอย่าง 5.1 จงหาแนววิถีเชิงตั้งฉากของวงศ์เส้นโค้ง $y = cx^2$ โดยที่ c เป็นค่าคงที่ใด ๆ

วิธีทำ ทำการหาสมการเชิงอนุพันธ์ของวงศ์เส้นโค้ง

(7) $$y = cx^2$$

โดยการหาอนุพันธ์เทียบกับ x ทั้งสองข้างของสมการ (7) ได้

(8) $$\frac{dy}{dx} = 2cx$$

จากสมการ (7) และ (8) จะได้

(9) $$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}$$

ดังนั้นสมการเชิงอนุพันธ์สำหรับแนววิถีเชิงตั้งฉากคือ

(10) $$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{2y}$$

จัดสมการ (10) ให้อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์แบบแยกกันได้

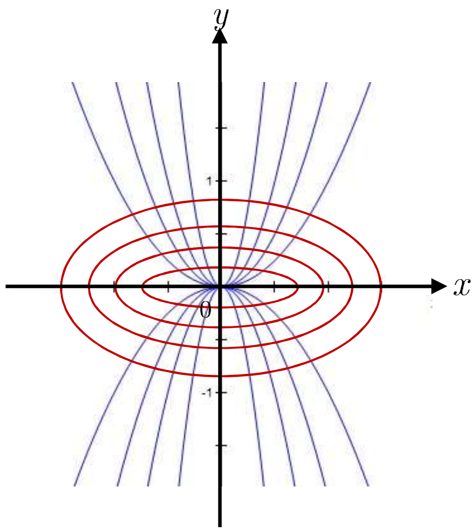
$$2ydy = -xdx$$

หาปริพันธ์ตลอดสมการนี้จะได้ชุดเส้นโค้ง

$$y^2 = -\frac{x^2}{2} + k$$ เมื่อ k เป็นตัวคง

หรือ

$$2y^2 + x^2 = k$$



ดังนั้น แนววิถีเชิงตั้งฉากของวงศ์เส้นโค้ง $y = cx^2$ คือ $2y^2 + x^2 = k$

ตัวอย่าง 5.2 จงหาแนววิถีเชิงตั้งฉากของวงศ์เส้นโค้ง $y = ce^x$ โดยที่ c เป็นค่าคงที่ใด ๆ

วิธีทำ ทำการหาสมการเชิงอนุพันธ์ของวงศ์เส้นโค้ง

(11) $$y = ce^x$$

โดยการหาอนุพันธ์เทียบกับ x ทั้งสองข้างของสมการ (11) ได้

(12) $$\frac{dy}{dx} = ce^x$$

จากสมการ (11) และ (12) จะได้

(13) $$\frac{dy}{dx} = y$$

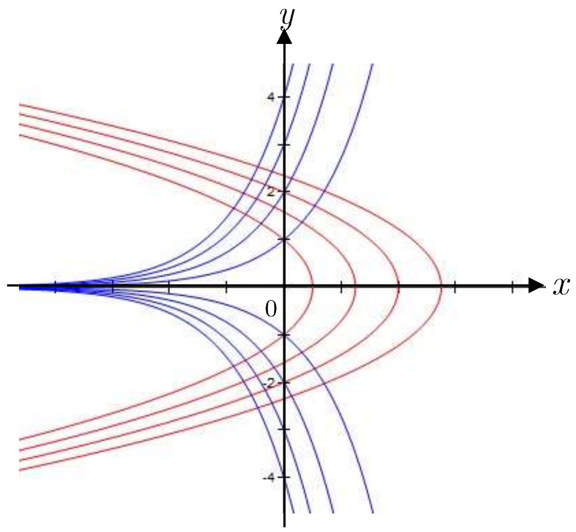
ดังนั้นสมการเชิงอนุพันธ์สำหรับแนววิถีเชิงตั้งฉากคือ

(14) $$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{y}$$

จัดสมการ (10) ให้อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์แบบแยกกันได้

$$ydy = -dx$$

หาปริพันธ์ตลอดสมการนี้จะได้ชุดเส้นโค้ง หรือ $y^2 + 2x = k$ เมื่อ k เป็นตัวคงค่า



ดังนั้น แนววิถีเชิงตั้งฉากของวงศ์เส้นโค้ง $y = ce^x$ คือ $y^2 + 2x = k$

5.2 ปัญหาทางกลศาสตร์

สำหรับในหัวข้อนี้ เป็นการนำความรู้ของการแก้สมการเชิงอนุพันธ์มาประยุกต์ใช้กับปัญหาทางกลศาสตร์ ในที่นี้เราจะกล่าวเฉพาะปัญหาทางกลศาสตร์พื้นฐานที่ใช้กฎการเคลื่อนที่ของนิวตันได้ ซึ่งกล่าวว่า

1. วัตถุต่าง ๆ จะคงสภาพหยุดยิ่งหรือเคลื่อนที่ไปในแนวเส้นตรงด้วยความเร็วคงที่ เว้นแต่จะมีแรงภายนอกมากระทำ

2. อัตราการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมของวัตถุ เป็นสัดส่วนโดยตรงกับแรงที่กระทำต่อวัตถุนั้นและมีทิศทางเดียวกับทิศทางของแรงนั้น

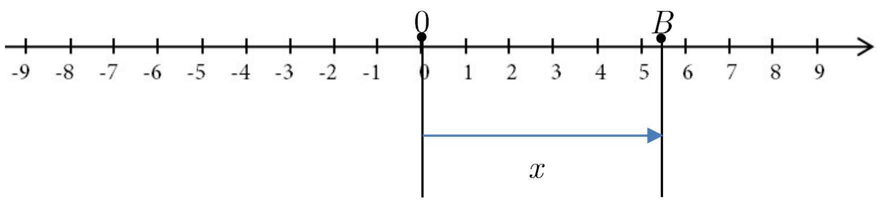
5. แรงกริยา และแรงปฏิกิริยา มีขนาดเท่ากันแต่มีทิศทางตรงข้าม

ก่อนที่จะประยุกต์สมการเชิงอนุพันธ์ในการแก้ปัญหากลศาสตร์ จะขอทบทวนหลักการเบื้องต้นทางกลศาสตร์ ดังนี้ (สุรัตนา สังข์หนุน, 2558 : 79)

นิยาม 5.1

โมเมนตัมของวัตถุ คือ ผลคูณของมวลวัตถุกับความเร็ววัตถุ

ต่อไปจะพิจารณาการเคลื่อนที่ของวัตถุ B บนเส้นตรง L เลือกจุด ๆ หนึ่งบนเส้นตรง L เป็นจุดกำเนิดเรียกว่าจุด 0 พร้อมกำหนดทิศทางการเคลื่อนที่ทิศทางหนึ่งเป็นบวกและกำหนดหน่วยระยะทางด้วย แล้วจะได้ว่าพิกัด x ของตำแหน่ง B จากจุดกำเนิดจะบอกให้ทราบถึงระยะทางการเคลื่อนที่ของวัตถุ B ดังภาพ



ภาพประกอบ 5.3 ระยะทางการเคลื่อนที่ของวัตถุ B

ที่มา : สุรัตนา สังข์หนุน. 2558 : 79

ความเร็วของ B คืออัตราการเปลี่ยนแปลงของ x ดังนี้

(15) $$v = \frac{dx}{dt}$$

ความเร่งชั่วขณะของ B คืออัตราการเปลี่ยนแปลงของ v

(16) $$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

สังเกตว่า x, v และ a เป็นปริมาณเวกเตอร์ แรงทั้งหมดระยะทางการเคลื่อนที่ ความเร็วและความเร่งในทิศทางบวกบน L จะมีค่าเป็นบวกและค่าเหล่านี้จะมีค่าเป็นลบในทิศทางลบบน L

จากกฎข้อที่ 2 ของนิวตัน สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของสมการทางคณิตศาสตร์ได้

(17) $$\frac{d}{dx}(mv) = KF$$

โดยที่ m แทนมวลของวัตถุ

v แทนความเร็วของวัตถุ

F แทนแรงที่มากระทำกับวัตถุ

K แทนค่าคงที่ของการแปรผัน

ในกรณีที่มวลของวัตถุเป็นค่าคงที่ เราสามารถจัดสมการ (15) ได้เป็น

(18) $$m\frac{dv}{dx} = KF$$

จากสมการ (16) และ (18) ได้

(19) $$a = K\frac{F}{m}$$

หรือ

(20) $$F = kma$$

โดยที่ $k = \frac{1}{K}$ จะพบว่าค่าคงที่ k ขึ้นอยู่กับหน่วยของมวล แรงและความเร่งในระบบที่เลือกใช้ สำหรับ $k = 1$ สมการ (17) จะเขียนอยู่ในรูป

(21) $$F = ma$$

มีหลายระบบที่ค่า $k = 1$ ในที่นี้จะพิจารณา ระบบหน่วยเพียง 3 ระบบคือ ระบบดังต่อไปนี้

1. The British gravitational system (British)
2. The centimater-gram-second system (cgs)
3. The meter-kilogram-second system (mks)

ทั้งสามระบบนี้แสดงได้ดังตารางต่อไปนี้ (สุรัตนา สังข์หนุน, 2558 : 80)

ตาราง 5.1 ระบบหน่วย British system, cgs system และ mks system

	British system	cgs system	mks system
แรง	ปอนด์	ไดน์	นิวตัน
มวล	สลัก	กรัม	กิโลกรัมย
ระยะทาง	ฟุต	เซนติเมตร	เมตร
เวลา	วินาที	วินาที	วินาที
ความเร็ว	ฟุตต่อวินาที	เซนติเมตรต่อวินาที	เมตรต่อวินาที
ความเร่ง	ฟุตต่อวินาที ^{2}	เซนติเมตรต่อวินาที ^{2}	เมตรต่อวินาที ^{2}

เนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลกที่กระทำต่อวัตถุคือ น้ำหนักของวัตถุนั้น ดังนั้นน้ำหนักจึงมีหน่วยวัดตามหน่วยของแรง คือวัดเป็นปอนด์ในระบบ British วัดเป็นไดน์ในระบบ cgs และวัดเป็นนิวตันในระบบ mks ความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก g ที่บริเวณผิวโลกในระบบ British cgs และ mks มีค่าเท่ากับ 32 ฟุตต่อวินาที ^{2} 980 เซนติเมตรต่อวินาที ^{2} และ 9.8 เมตรต่อวินาที ^{2} ตามลำดับ และจากกฎข้อที่ 2 ของนิวตันจะได้ว่าในการตกของวัตถุสมมติวัตถุมีมวล m และมีน้ำหนัก w และน้ำหนักของวัตถุนิยามโดย $w = mg$ ดังนั้น (วีระศักดิ์ วาจาบัณฑิตย์, 2541 : 108)

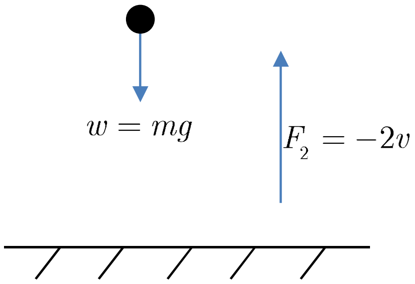
(22) $$m = \frac{w}{g}$$

ตัวอย่าง 5.3 วัตถุหนัก 8 ปอนด์ ตกจากสภาพหยุดนิ่งลงมาในแนวดิ่ง โดยมีแรงต้านของกาศ (หน่วยเป็นปอนด์) เท่ากับสองเท่าของความเร็ววัตถุ (หน่วยเป็น ฟุตต่อวินาที) จงหาความเร็วของวัตถุและระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่ลงมาได้ ณ เวลา t ใด ๆ

วิธีทำ ให้ F_1 แทนแรงที่เกิดจากน้ำหนักของวัตถุ

F_2 แทนแรงต้านทานของอากาศ

F_1 เป็นแรงที่กระทำต่อวัตถุในทิศทางดิ่งลงสู่พื้นจึงมีค่าเป็นบวก และ F_2 มีทิศทางตรงข้ามกับ F_1 จึงมีค่าเป็นลบ แสดงได้ดังภาพ



จากกฎที่สองของนิวตัน จะได้ว่า

$$m\frac{dv}{dt} = F_1 + F_2$$

$$\frac{w}{g}\frac{dv}{dt} = w - 2v$$

หรือ

(23) $$8\frac{dv}{dt} = g(8-2v)$$

จัดสมการ (23) ให้อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์แบบแยกกันได้

(24) $$\frac{8}{8-2v}dv = gdt$$

หาปริพันธ์ตลอดสมการ (24) จะได้

$$-4\ln\left|8-2v\right| = gt + c_1$$

$$\ln\left|8-2v\right| = -\frac{g}{4}t + c_2$$

$$\left|8-2v\right| = e^{-\frac{g}{4}t+c_2}$$

$$\left|8-2v\right| = e^{-\frac{g}{4}t}e^{c_2}$$

$$8-2v = \pm c_3 e^{-\frac{g}{4}t}$$

(25) $$8-2v=ce^{-\frac{g}{4}t}$$

เนื่องจากวัตถุตกจากสภาพหยุดนิ่ง ดังนั้นเงื่อนไขเริ่มต้นคือ $v(0)=0$

แทนในสมการ (25) จะได้ $c=8$

ดังนั้นความเร็วของวัตถุ ณ เวลา เวลา t ใด ๆ คือ

$$8-2v=8e^{-\frac{g}{4}t}$$
$$2v=8+8e^{-\frac{g}{4}t}$$
$$v=4\left(1+1e^{-\frac{g}{4}t}\right)$$

หรือ

(26) $$v(t)=4\left(1+1e^{-\frac{g}{4}t}\right)$$ ฟุตต่อวินาที

กำหนดให้ $x(t)$ แทนระยะทางที่วัตถุตกลงมาในแนวดิ่ง เวลา t ใด ๆ

สามารถเขียนสมการ (26) ในรูป

(27) $$\frac{dx}{dt}=4\left(1+1e^{-\frac{g}{4}t}\right)$$

หาปริพันธ์ตลอดสมการ (27) จะได้

(28) $$x=4\left(t+\frac{4}{g}e^{-\frac{g}{4}t}\right)+c_4$$

เนื่องจากวัตถุตกจากสภาพหยุดนิ่ง ดังนั้นเงื่อนไขเริ่มต้นคือ $x(0)=0$

แทนในสมการ (28) จะได้ $c_4=-\frac{16}{g}$

ดังนั้นระยะทางที่วัตถุตกลงมาในแนวดิ่ง ณ เวลา t ใด ๆ คือ

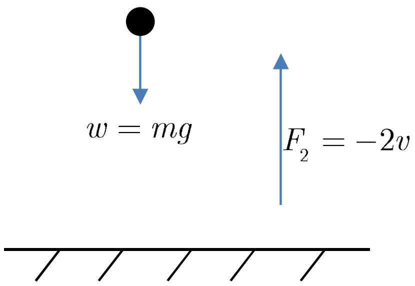
(29) $$x(t)=4\left(t+\frac{4}{g}e^{-\frac{g}{4}t}\right)-\frac{4}{g}$$ ฟุต

ตัวอย่าง 5.4 วัตถุมวล 1 กิโลกรัม ตกจากสภาพหยุดนิ่งลงมาในแนวดิ่ง โดยมีแรงต้านของกาศ (หน่วยเป็นนิวตัน) เท่ากับสองเท่าของความเร็ววัตถุ (หน่วยเป็น เมตรต่อวินาที) จงหาความเร็วของวัตถุ ณ เวลา t ใด ๆ ลิมิตของความเร็วขณะที่ $t \to \infty$ และระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่ลงมาได้ ณ เวลา t วินาที

วิธีทำ ให้ F_1 แทนแรงที่เกิดจากน้ำหนักของวัตถุ

F_2 แทนแรงต้านทานของอากาศ

F_1 เป็นแรงที่กระทำต่อวัตถุในทิศทางดิ่งลงสู่พื้นจึงมีค่าเป็นบวก และ F_2 มีทิศทางตรงข้ามกับ F_1 จึงมีค่าเป็นลบ แสดงได้ดังภาพ



จากกฎที่สองของนิวตัน จะได้ว่า

$$m\frac{dv}{dt} = F_1 + F_2$$

$$1\frac{dv}{dt} = 1(g) - 2v$$

หรือ

(30) $$\frac{dv}{dt} + 2v = g$$

สมการ (30) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น

โดยมี $p(t) = 2,\ g(t) = g$ และ $\mu(t) = e^{\int 2\,dt} = e^{2t}$

นำ $\mu(t)$ คูณตลอดสมการ (30) ได้

$$e^{2t}\frac{dv}{dt}+e^{2t}2v=e^{2t}g$$
$$\frac{d}{dt}(ve^{2t})=e^{2t}g$$

หาปริพันธ์ตลอดสมการนี้ได้

$$ve^{2t}=\frac{1}{2}e^{2t}g+c$$
$$v=e^{-2t}\left(\frac{1}{2}e^{2t}g+c\right)$$

หรือ

(31) $$v(t)=e^{-2t}\left(\frac{1}{2}e^{2t}g+c\right)$$

เนื่องจากวัตถุตกจากสภาพหยุดนิ่ง ดังนั้นเงื่อนไขเริ่มต้นคือ $v(0)=0$

แทนในสมการ (31) จะได้ $c=-\frac{g}{2}$

ดังนั้นความเร็วของวัตถุ ณ เวลา เวลา t ใด ๆ คือ

$$v=e^{-2t}\left(\frac{1}{2}e^{2t}g-\frac{g}{2}\right)$$

หรือ

(32) $$v(t)=\frac{g}{2}-\frac{g}{2}e^{-2t} \text{ เมตรต่อวินาที}$$

และ $\lim\limits_{t\to\infty}v(t)=\lim\limits_{t\to\infty}\left(\frac{g}{2}-\frac{g}{2}e^{-2t}\right)=\frac{g}{2}$

กำหนดให้ $x(t)$ แทนระยะทางที่วัตถุตกลงมาในแนวดิ่ง เวลา t วินาทีคือ

$$\begin{aligned}x(t)&=\int_0^t v(t)\,dt\\&=\int_0^t\left(\frac{g}{2}-\frac{g}{2}e^{-2t}\right)dt\\&=\left.\left(\frac{g}{2}t+\frac{g}{4}e^{-2t}\right)\right|_0^t\\&=\frac{g}{2}t+\frac{g}{4}e^{-2t}-\frac{g}{4}\end{aligned}$$

ดังนั้น ระยะทางที่วัตถุตกลงมาในแนวดิ่ง เวลา t วินาทีคือ $\frac{g}{2}t+\frac{g}{4}e^{-2t}-\frac{g}{4}$ เมตร

ตัวอย่าง 5.5 ยิงก้อนหินขึ้นไปในแนวดิ่งด้วยความเร็ว 80 ฟุตต่อวินาที และกำหนดให้ $g = 32$ ฟุตต่อวินาที ^{2}

1. เมื่อเวลาผ่านไป $\frac{3}{2}$ วินาทีก้อนหินมีทิศทางการเคลื่อนที่อย่าไร
2. ก้อนหินขึ้นไปได้สูงสุดเมื่อเวลาผ่านไปกี่วินาที
5. ก้อนหินขึ้นไปได้สูงที่สุดกี่ฟุต
4. จงหาความเร็วที่ก้อนหินตกระทบพื้น

วิธีทำ เนื่องจากการเคลื่อนที่ของลูกหินจะลดความเร็วลงด้วยแรงโน้มถ่วงของโลกคือ $g = 32$ ฟุตต่อวินาที จะได้สมการเชิงอนุพันธ์ดังนี้

(33) $$\frac{dv}{dt} = -32$$

หาปริพันธ์ตลอดสมการ (33) จะได้

$$v = -32t + c_1$$

หรือ

(34) $$v(t) = -32t + c_1$$

เนื่องจากยิงก้อนหินขึ้นไปในแนวดิ่งด้วยความเร็ว 80 ฟุตต่อวินาที

ดังนั้นเงื่อนไขเริ่มต้นคือ $v(0) = 80$ แทนในสมการ (34) จะได้ $c_1 = 80$
ดังนั้นสมการความเร็วของก่อนหิน ณ เวลา t ใด ๆ คือ

(35) $$v(t) = -32t + 80$$

กำหนดให้ $x(t)$ แทนระยะทางที่ก้อนหินเคลื่อนที่ขึ้นและลง ณ เวลา t ใด ๆ สามารถเขียนสมการ (35) ในรูป

(36) $$\frac{dx}{dt} = -32t + 80$$

หาปริพันธ์ตลอดสมการ (36) จะได้

(37) $$x(t) = -16t^2 + 80t + c_2$$

เนื่องจากถูกยิงขึ้นไปในแนวดิ่ง ดังนั้นเงื่อนไขเริ่มต้นคือ $x(0) = 0$

แทนในสมการ (37) จะได้ $c_2 = 0$

ดังนั้นสมการการเคลื่อนที่ของก้อนหิน ณ เวลา t ใด ๆ คือ

(38) $$x(t) = -16t^2 + 80t \text{ ฟุต}$$

1. เมื่อเวลาผ่านไป $\frac{3}{2}$ วินาทีก้อนหินมีทิศทางการเคลื่อนที่อย่างไร

แทนค่า $t = \frac{3}{2}$ ในสมการ (35) ได้

$$v\left(\frac{3}{2}\right) = -32\left(\frac{3}{2}\right) + 80 = 32 \text{ ฟุตต่อวินาที}$$

เนื่องจากความเร็วของก่อนหินขณะที่ $t = \frac{3}{2}$ เป็นบวก

แสดงว่าขณะนั้นก่อนหินยังคงมีทิศทางขึ้น

2. ก้อนหินขึ้นไปได้สูงสุดเมื่อเวลาผ่านไปกี่วินาที

ก้อนหินขึ้นไปได้สูงสุดเมื่อความเร็วเป็นศูนย์ นั้นคือ $v(t) = 0$ จากสมการ (35)

$$-32t + 80 = 0$$

$$t = \frac{5}{2}$$

แสดงว่าก้อนหินขึ้นไปได้สูงสุดเมื่อเวลาผ่านไป $\frac{5}{2}$ วินาที

3. ก้อนหินขึ้นไปได้สูงที่สุดกี่ฟุต

จากข้อ 2 ก้อนหินขึ้นไปได้สูงสุดเมื่อเวลาผ่านไป $\frac{5}{2}$ วินาที

แทน $t = \frac{5}{2}$ ในสมการ (38) จะได้

$$x\left(\frac{5}{2}\right) = -16\left(\frac{5}{2}\right)^2 + 80\left(\frac{5}{2}\right) = 100 \text{ ฟุต}$$

ดังนั้นก่อนหินขึ้นไปได้สุงสุด 100 ฟุต

4. จงหาความเร็วที่ก้อนหินตกกระทบพื้น

ก้อนหินกระทบพื้นเมื่อ $x(t)=0$ จากสมการ (38) จะได้

$$
\begin{aligned}
-16t^2+80t&=0\\
(80-16t)t&=0\\
t&=0,5
\end{aligned}
$$

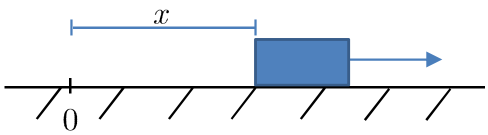
แสดงว่าก้อนหินกระทบพื้นหลังจากเวลาผ่านไป 5 วินาที

ดังนั้นความเร็วที่ก้อนหินตกกระทบพื้นแทน $t=5$ ในสมการ (35)

$$v(5)=-32(5)+80=-80 \text{ ฟุตต่อวินาที}$$

ตัวอย่าง 5.6 วัตถุมวล m กิโลกรัม เคลื่อนที่ไปบนพื้นราบในแนวเส้นตรงขณะเวลา t วินาที และอยู่ห่างจากจุดคงที่ 0 เป็นระยะทาง x เมตร มีความเร็ว v เมตรต่อวินาที และมีความเร่ง v^2-v เมตรต่อวินาที ^{2} ความเร่งมีทิศพุ่งออกจากจุดคงที่ 0 กำหนดความเร็ว $v=3$ เมตรต่อวินาที ที่ตำแหน่ง $x=0$ จงแสดงว่า $x=\ln\left|\dfrac{v-1}{3}\right|$

วิธีทำ แสดงภาพประกอบการเคลื่อนที่ของวัตถุได้ดังนี้



กำหนดทิศทางของการเคลื่อนที่ไปทางขวาของจุดเริ่มต้นเป็นบวก

จากกฎข้อที่สองของนิวตันจะได้

$$
\begin{aligned}
m\frac{dv}{dt}&=F\\
\frac{dv}{dt}&=\frac{F}{m}\\
\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt}&=a
\end{aligned}
$$

(39) $$\frac{dv}{dx}v=v^2-v$$

จัดสมการ (39) ให้อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์แบบแยกกันได้

(40) $$\frac{v}{v^2 - v}dv - dx = 0$$

หาปริพันธ์ตลอดสมการ (40) จะได้

$$\int \frac{v}{v^2 - v}dv - \int dx = 0$$

(41) $$\ln\left|v-1\right| - x = c$$

เนื่องจาก กำหนดความเร็ว $v = 3$ เมตรต่อวินาที ที่ตำแหน่ง $x = 0$

ได้เงื่อนไข $v(0) = 3$ แทนในสมการ (41) ได้ $c = \ln\left|3\right|$

แทน $c = \ln\left|3\right|$ ในสมการ (41) ได้

$$\ln\left|v-1\right| - x = \ln\left|3\right|$$

$$x = \ln\left|v-1\right| - \ln\left|3\right|$$

หรือ

$$x = \ln\left|\frac{v-1}{3}\right|$$

ตัวอย่าง 5.7 วัตถุมวล 16 กิโลกรัม ถูกลากไปข้างหน้าในแนวราบด้วยแรง 64 นิวตัน โดยมีแรงต้านทานการเคลื่อนที่ (หน่วยเป็นนิวตัน) เท่ากับกำลังสองของความเร็ว (หน่วยเป็นเมตรต่อวินาที) สมมติว่าวัตถุเคลื่อนที่จากสภาพหยุดนิ่ง จงหาว่า ณ เวลาใดวัตถุมีความเร็ว 10 เมตรต่อวินาที

วิธีทำ ให้ F_1 แทนแรงที่ลากวัตถุไปข้างหน้า (กำหนดให้มีทิศทางเป็นบวก)

F_2 แทนแรงต้านทานการเคลื่อนที่ (กำหนดให้มีทิศทางเป็นลบ)

จากกฎที่สองของนิวตัน จะได้ว่า

$$m\frac{dv}{dt} = F_1 + F_2$$

(42) $$16\frac{dv}{dt} = 64 - v^2$$

จัดสมการ (42) ให้อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์แบบแยกกันได้

(43) $$\frac{16}{64-v^2}\,dv = dt$$

หาปริพันธ์ตลอดสมการ (43) จะได้

$$\int \frac{16}{64-v^2}\,dv = \int dt$$

$$\ln\left|v+8\right| - \ln\left|v-8\right| = t + c_1$$

$$\ln\left|\frac{v+8}{v-8}\right| = t + c_1$$

$$\left|\frac{v+8}{v-8}\right| = e^{t+c_1}$$

$$\left|\frac{v+8}{v-8}\right| = e^t e^{c_1}$$

หรือ

(44) $$\left|\frac{v+8}{v-8}\right| = ce^t$$

เนื่องจากวัตถุตกจากสภาพหยุดนิ่ง ดังนั้นเงื่อนไขเริ่มต้นคือ $v(0)=0$

แทนในสมการ (44) จะได้ $c=1$

ดังนั้นความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วและเวลาคือ

$$\left|\frac{v+8}{v-8}\right| = e^t$$

และขณะที่วัตถุมีความเร็ว 10 เมตรต่อวินาที จะได้

$$\left|\frac{10+8}{10-8}\right| = e^t$$

$$e^t = 9$$

$$e^t = 3^2$$

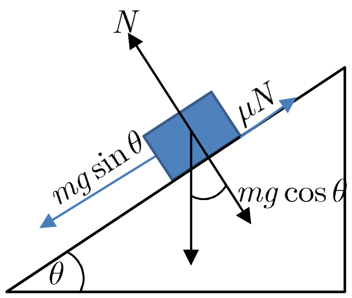
$$t = 2\ln 3$$

ดังนั้น ณ เวลา $t = 2\ln 3$ วัตถุมีความเร็ว 10 เมตรต่อวินาที

ตัวอย่าง 5.8 วัตถุมวล m กิโลกรัม เริ่มต้นเคลื่อนที่จากจุดหยุดนิ่งจากยอดข้องพื้นเอียงซึ่งทำมุม θ° กับพื้นราบ ถ้าสัมประสิทธิ์ของความเสียดทานระหว่างวัตถุกับพื้นเอียงเป็น μ จงหาสมการการเคลื่อนที่ของวัตถุแล้วจะหาว่าต้องใช้เวลานานเท่าไรวัตถุจึงจะเคลื่อนที่ถึงพื้นราบ ถ้าพื้นเอียงยาว l เมตร

วิธีทำ เส้นทางการเคลื่อนที่ของวัตถุเป็นพื้นเอียง เป็นมุม θ เลือกจุดยอดของพื้นเอียงเป็นจุดกำเนิด และให้ทิศทางการเคลื่อนที่ลงตามพื้นเอียงเป็นบวก ถ้าไม่คำนึงถึงแรงเสียดทานและแรงต้านทานของอากาศที่กระทำต่อวัตถุ คือ

1. มวล m กิโลกรัม
2. แรงแนวฉาก N ซึ่งกระทำในแนวตั้งฉากกับพื้นเอียง ดังภาพ



พิจารณา การเคลื่อนที่ของวัตถุเมื่อมีแรงเสียดทานและแรงต้านทานของอากาศ ดังนั้นแรงที่กระทำต่อวัตถุประกอบด้วย

ให้ F_1 แทนแรงที่เกิดจากน้ำหนักของวัตถุในแนวขนานกับพื้นเอียง มีค่าเป็นบวก

F_2 แทนแรงเสียดทานมีค่าเป็นลบเพราะกระทำต่อวัตถุในทิศที่สวนทางกับการเคลื่อนที่

จากกฎที่สองของนิวตัน จะได้ว่า

$$m\frac{dv}{dt} = F_1 + F_2$$

(45) $$m\frac{dv}{dt} = mg\sin\theta - \mu mg\cos\theta$$

จัดสมการ (45) ให้อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์แบบแยกกันได้ ดังต่อไปนี้

$$m\frac{dv}{dt} = mg(\sin\theta - \mu\cos\theta)$$
$$\frac{dv}{dt} = g(\sin\theta - \mu\cos\theta)$$

(46) $$dv = g(\sin\theta - \mu\cos\theta)dt$$

หาปริพันธ์ตลอดสมการ (46) จะได้

$$\int dv = \int g(\sin\theta - \mu\cos\theta)dt$$

(47) $$v = gt(\sin\theta - \mu\cos\theta) + c$$

เนื่องจากวัตถุตกจากสภาพหยุดนิ่ง ดังนั้นเงื่อนไขเริ่มต้นคือ $v(0) = 0$
แทนในสมการ (47) จะได้ $c = 0$
ดังนั้นความเร็วของวัตถุ ณ เวลา t ใด ๆ

(48) $$v(t) = gt(\sin\theta - \mu\cos\theta)$$ เมตรต่อวินาที

ให้ $x(t)$ แทนระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่ลงมาในแนวพื้นเอียงที่ เวลา t ใด ๆ
สามารถเขียนสมการ (48) ในรูป

(49) $$\frac{dx}{dt} = gt(\sin\theta - \mu\cos\theta)$$

ทำการหาปริพันธ์ จะได้

(50) $$x = \frac{gt^2}{2}(\sin\theta - \mu\cos\theta) + c_1$$

จากเงื่อนไขเริ่มต้นคือ $t(0) = 0$ แทนในสมการ (50) จะได้ $c_1 = 0$
ดังนั้น

(51) $$x(t) = \frac{gt^2}{2}(\sin\theta - \mu\cos\theta)$$

พิจารณาว่าต้องใช้เวลานานเท่าไร วัตถุจึงจะเคลื่อนที่ถึงพื้นราบ ถ้าพื้นเอียงยาว l เมตร
นั่นคือ ต้องหาว่า t เท่ากับเท่าไร เมื่อ $x = l$ จากสมการ (55) ได้ว่า

$$l = \frac{gt^2}{2}(\sin\theta - \mu\cos\theta)$$

$$t^2 = \frac{2l}{g(\sin\theta - \mu\cos\theta)}$$

(52) $$t = \pm\sqrt{\frac{2l}{g(\sin\theta - \mu\cos\theta)}}$$

เนื่องจาก t ต้องมีค่าเป็นบวกเสมอ

ดังนั้น จะต้องใช้เวลา $t = \sqrt{\dfrac{2l}{g(\sin\theta - \mu\cos\theta)}}$ วินาทีวัตถุจึงจะเคลื่อนที่ถึงพื้นราบ

5.3 ปัญหาอัตราการเปลี่ยนแปลง

ในหัวข้อนี้จะศึกษาปัญหาที่เกี่ยวข้องกับอัตราการเปลี่ยนแปลง เมื่ออัตราการเปลี่ยนแปลงเป็นฟังก์ชันของปริมาณในปัจจุบันกับเวลา และในปัญหาที่ศึกษาต้องการจะหาปริมาณ ณ เวลาใด ๆ ถ้าให้ x แทนปริมาณที่มีอยู่ ณ เวลา t แล้ว $\dfrac{dx}{dt}$ จะแทนอัตราการเปลี่ยนแปลง ดังนั้นการหาปริมาณ ณ เวลา t ใด ๆ จะต้องหาคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ และเราจะศึกษาปัญหาการสลายตัวของสารกัมมันตรังสี ปัญหาการเพิ่มของประชากร ปัญหาของผสม และปัญหาการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิของวัตถุ

5.3.1 ปัญหาการสลายตัวของสารกัมมันตรังสี

อัตราการสลายตัวของสารกัมมันตรังสี อยู่ภายใต้สมมติฐานที่ว่า “อัตราการสลายตัวของสารกัมมันตรังสีเป็นสัดส่วนโดยตรงกับปริมาณสารกัมมันตรังสีที่มีอยู่” (อุบล กลองกระโทก, 2558 : 103)

ตัวอย่าง 5.9 สารกัมมันตรังสีชนิดหนึ่ง มีอัตราการสลายเป็นสัดส่วนกับจำนวนที่มีอยู่ และพบว่าเมื่อผ่านไป 1200 ปี สารชนิดนี้จะเหลืออยู่ครึ่งหนึ่งของที่มีอยู่ จงหาว่าเมื่อเวลาผ่านไป 3600 ปี สารชนิดนี้จะเหลืออยู่กี่เปอร์เซ็นต์ของที่มีอยู่

วิธีทำ ให้ x แทนปริมาณของสารกัมมันตรังสีที่มีอยู่หลังจากผ่านไป t ปี

ดังนั้น $\dfrac{dx}{dt}$ แทนอัตราการสลายตัวของสารกัมมันตรังสี

เพราะว่าอัตราการสลายตัวของสารเป็นสัดส่วนกับจำนวนสารที่มีอยู่ และเนื่องจาก x มีค่าลดลงเมื่อ t มีค่าเพิ่มขึ้น นั่นคือ x เป็นฟังก์ชันลด ดังนั้นจะได้

(53) $$\frac{dx}{dt} = -kx$$

โดยที่ k เป็นค่าคงที่ของการแปรผัน

ให้ x_0 แทนปริมาณสารกัมมันตรังสีตอนเริ่มต้น ดังนั้นเงื่อนไขเริ่มต้นคือ $x(x_0) = 0$

เมื่อเวลาผ่านไป 1200 ปีสารชนิดนี้จะเหลือครึ่งหนึ่งของที่มีอยู่ ดังนั้นจะได้

(54) $$x(1200) = \frac{1}{2}x_0$$

จัดสมการ (53) ให้อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์แบบแยกกันได้ ดังต่อไปนี้

(55) $$\frac{1}{x}dx = -kdt$$

หาปริพันธ์ตลอดสมการ (55) จะได้

$$\int \frac{1}{x}dx = -\int kdt$$

$$\ln|x| = -kt + c_1$$

(56) $$x = ce^{-kt}$$

จากเงื่อนไขเริ่มต้น $x(x_0) = 0$ แทนในสมการ (56) ได้ $c = x_0$ ดังนั้น

(57) $$x = x_0 e^{-kt}$$

ในการหาค่า k เราจะใช้ข้อกำหนดที่ว่าสารสลายตัวไปครึ่งหนึ่งหลังจาก 1200 ปี

นั่นคือแทน $x = \frac{1}{2}x_0$ และ $t = 1200$ ในสมการ (56) จะได้

$$\frac{1}{2}x_0 = x_0 e^{-k(1200)}$$

$$e^{-k(1200)} = \frac{1}{2}$$

หรือ

(58) $$e^{-k} = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/1200}$$

เราสามารถหาค่าของ k ได้จากสมการ (58) แต่ถ้าดูจากสมการ (57) แล้วเราจะพบว่าค่าคงที่ที่เราต้องการทราบคือ e^{-k} ดังนั้น แทน $e^{-k} = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/1200}$ ในสมการ (57) จะได้

$$x = x_0\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{1/1200}\right]^t$$

หรือ

(59) $$x = x_0\left(\frac{1}{2}\right)^{t/1200}$$

สมการ (59) นั้นแทนปริมาณสารกัมมันตรังสี ณ เวลา t ใด ๆ ถ้าแทน $t = 3600$ จะได้

$$x = x_0\left(\frac{1}{2}\right)^{3600/1200}$$

$$x = x_0\left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$x = \frac{1}{8}x_0$$

ดังนั้น เมื่อเวลาผ่านไป 3600 ปี สารชนิดนี้จะเหลืออยู่ $\frac{1}{8}$ ของปริมาณที่มีอยู่ คิดเป็นเปอร์เซ็นต์เท่ากับ 12.5 เปอร์เซ็นต์

ตัวอย่าง 5.10 สารกัมมันตรังสีชนิดหนึ่งมีครึ่งชีวิตเท่ากับ 38 ชั่วโมงจงหาว่านานเท่าใดสารนี้จะสลายไปเป็นจำนวน 80 เปอร์เซ็นต์

วิธีทำ ให้ x แทนปริมาณของสารกัมมันตรังสีที่มีอยู่หลังจากผ่านไป t ชั่วโมง

ดังนั้น $\frac{dx}{dt}$ แทนอัตราการสลายตัวของสารกัมมันตรังสี

เพราะว่าอัตราการสลายตัวของสารเป็นสัดส่วนกับจำนวนสารที่มีอยู่ และเนื่องจาก x มีค่าลดลงเมื่อ t มีค่าเพิ่มขึ้น นั่นคือ x เป็นฟังก์ชันลด ดังนั้นจะได้

(60) $$\frac{dx}{dt} = -kx$$

โดยที่ k เป็นค่าคงที่ของการแปรผัน

ให้ x_0 แทนปริมาณสารกัมมันตรังสีตอนเริ่มต้น ดังนั้นเงื่อนไขเริ่มต้นคือ $x(x_0) = 0$

เมื่อเวลาผ่านไป 38 ชั่วโมง สารชนิดนี้จะเหลือครึ่งหนึ่งของที่มีอยู่ ดังนั้นจะได้

(61) $$x(38) = \frac{1}{2}x_0$$

จัดสมการ (60) ให้อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์แบบแยกกันได้ ดังต่อไปนี้

(62) $$\frac{1}{x}dx = -kdt$$

หาปริพันธ์ตลอดสมการ (62) จะได้

$$\int \frac{1}{x}dx = -\int kdt$$

$$\ln\left|x\right| = -kt + c_1$$

(63) $$x = ce^{-kt}$$

จากเงื่อนไขเริ่มต้น $x(x_0) = 0$ แทนในสมการ (63) ได้ $c = x_0$ ดังนั้น

(64) $$x = x_0 e^{-kt}$$

ในการหาค่า k เราจะใช้ข้อกำหนดที่ว่าสารสลายตัวไปครึ่งหนึ่งหลังจาก 38 ชั่วโมง

นั่นคือแทน $x = \frac{1}{2}x_0$ และ $t = 38$ ในสมการ (64) จะได้

$$\frac{1}{2}x_0 = x_0 e^{-k(38)}$$

$$e^{-k(38)} = \frac{1}{2}$$

(65) $$k = \frac{1}{38}\ln 2$$

ในที่นี้เราต้องการหาค่า t เมื่อ $x = \frac{1}{20}x_0$ ดังนั้น แทน $x = \frac{1}{20}x_0$ ในสมการ (64) จะได้

$$\frac{1}{20}x_0 = x_0 e^{-\left(\frac{1}{38}\ln 2\right)t}$$

$$\frac{1}{20} = e^{-\left(\frac{1}{38}\ln 2\right)t}$$

$$-\ln\frac{1}{20} = \left(\frac{1}{38}\ln 2\right)t$$

$$\left(\frac{1}{38}\ln 2\right)t = \ln 20$$

$$t = \frac{\ln 20}{\frac{1}{38}\ln 2}$$

$$t = 38\frac{\ln 20}{\ln 2}$$

$$t \approx 165$$

ดังนั้น สารนี้จะสลายไปเป็นจำนวน 80 เปอร์เซ็นต์ หลังจากเวลาผ่านไปประมาณ 165 ชั่วโมง

ตัวอย่าง 5.11 ซากพืชชนิดหนึ่งมีคาร์บอน 14 เหลืออยู่ 15 เปอร์เซ็นต์ จงประมาณอายุของซากพืช เมื่อใช้ครึ่งชีวิตของคาร์บอน 14 เท่ากับ 5730 ปี

วิธีทำ ให้ x_0 แทนปริมาณคาร์บอน 14 ที่มีในซากพืช และ

ให้ x แทนปริมาณของคาร์บอน 14 ที่มีอยู่หลังจากผ่านไป t ปี

ดังนั้น $\frac{dx}{dt}$ แทนอัตราการสลายตัวของคาร์บอน 14

เพราะว่าอัตราการสลายตัวของคาร์บอน 14 เป็นสัดส่วนกับจำนวนคาร์บอน 14 ที่มีอยู่ และเนื่องจาก x มีค่าลดลงเมื่อ t มีค่าเพิ่มขึ้น นั่นคือ x เป็นฟังก์ชันลด ดังนั้นจะได้

(66) $$\frac{dx}{dt} = -kx$$

โดยที่ k เป็นค่าคงที่ของการแปรผัน

จัดสมการ (66) ให้อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์แบบแยกกันได้ ดังต่อไปนี้

(67) $$\frac{1}{x}dx = -kdt$$

หาปริพันธ์ตลอดสมการ (67) จะได้

$$\int \frac{1}{x}dx = -\int kdt$$

$$\ln\left|x\right| = -kt + c_1$$

(68) $$x = ce^{-kt}$$

จากเงื่อนไขเริ่มต้น $x(x_0) = 0$ แทนในสมการ (68) ได้ $c = x_0$ ดังนั้น

(69) $$x = x_0 e^{-kt}$$

เมื่อแทน $x = \frac{1}{2}x_0$ และ $t = 5730$ ในสมการ (69) จะได้

$$\frac{1}{2}x_0 = x_0 e^{-k(5730)}$$

$$e^{-k(5730)} = \frac{1}{2}$$

(70) $$k = \frac{1}{5730}\ln 2$$

ในที่นี้เราต้องการหาค่า t เมื่อ $x = \frac{15}{100}x_0$ ดังนั้น

แทน $x = \frac{15}{100}x_0$ ในสมการ (69) จะได้

$$\frac{15}{100}x_0 = x_0 e^{-\left(\frac{1}{5730}\ln 2\right)t}$$

$$\frac{15}{100} = e^{-\left(\frac{1}{5730}\ln 2\right)t}$$

$$-\ln 0.15 = \left(\frac{1}{5730}\ln 2\right)t$$

$$\left(\frac{1}{5730}\ln 2\right)t = -\ln 0.15$$

$$t = -5730\frac{\ln 0.15}{\ln 2}$$

$$t \approx 15683$$

ดังนั้น อายุของซากพืชนี้ประมาณ $15,683$ ปี

5.3.2 ปัญหาการเพิ่มของประชากร

เราจะศึกษารูปแบบของอัตราการเปลี่ยนแปลงของจำนวนประชากร เช่น มนุษย์ สัตว์ แบคทีเรีย เป็นต้น กล่าวคือเมื่อเวลาเปลี่ยนแปลงไป จำนวนของประชากรจะเปลี่ยนแปลงด้วย ถ้าให้ $N(t)$ แทนจำนวนประชากรกลุ่มหนึ่ง ณ เวลา t ใด ๆ ภายใต้สมมติฐานว่า ไม่มีการอพยพเข้าหรือออกจากกลุ่ม ไม่มีการเปลี่ยนแปลงอย่างผิดปกติของสภาวะแวดล้อม จะได้ว่า อัตราการเปลี่ยนแปลงของประชากรเป็นสัดส่วนโดยตรงกับจำนวนประชากรที่มีอยู่ (วีระศักดิ์ วาจาบัณฑิตย์, 2541 : 96)

นั้นคือ

(71) $$\frac{dN}{dt} = kx$$

โดยที่ k เป็นค่าคงที่ของการแปรผัน

สำหรับกรณีที่อัตราการเพิ่มมากกว่าอัตราการตายจะได้ $\dfrac{dN}{dt} > 0$ ดังนั้นค่าคงที่ $k > 0$
ถ้าเริ่มต้นมีจำนวนประชากร N_0 ได้เงื่อนไขเริ่มต้นเป็น $N(t_0) = N_0$
เราจะได้ว่าจำนวนประชากร ณ เวลา t ใด ๆ คือ

(72) $$N(t) = N_0 e^{k(t-t_0)}$$

สมการ (72) จะพบว่าเมื่อ t เพิ่มขึ้น จำนวนประชากร $N(t)$ จะเพิ่มขึ้นโดยไม่มีขอบเขตจำกัดซึ่งไม่สอดคล้องกับสภาพความเป็นจริง ในความเป็นจริงแล้วการเพิ่มของประชากรต้องมีขอบเขตจำกัด และจำนวนประชากรจะเพิ่มขึ้นไปจนถึงจุดหนึ่ง และจะไม่เพิ่มขึ้นไปกว่านี้แล้ว ดังนั้นอัตราการเปลี่ยนแปลงของจำนวนประชากรที่สอดคล้องกับความเป็นจริงดังกล่าวควรจะอยู่ในรูป

(73) $$\frac{dN}{dt} = kN - \lambda N^2$$

โดยที่ค่า $k > 0$ และ $\lambda > 0$

เรียกสมการ (73) ว่า**กฎโลจีสติกส์**

พิจารณาสมการ (73) นั้นเป็นสมการแบบแยกตัวแปรได้ และเป็นสมการแบร์นูลลี

ตัวอย่าง 5.12 ประชากรของเมืองหนึ่งสอดคล้องกฎโลจิสติกส์ต่อไปนี้

(74) $$\frac{dN}{dt} = \frac{1}{100}N - \frac{1}{10^8}N^2$$

โดยที่ t เป็นเวลาคิดเป็นปี กำหนดให้เมืองนี้มีจำนวนประชากร $100,000$ คนในปี ค.ศ. 1980 และจำนวนประชากรเป็นไปตามสมการ (74) สำหรับ $t > 1980$ จงหาว่าในปี ค.ศ 2000 จะมีจำนวนประชากรเท่าใด

วิธีทำ จัดสมการ (74) ให้อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์แบบแยกกันได้ ดังต่อไปนี้

(75) $$\frac{dN}{10^{-2}N - 10^{-8}N^2} = dt$$

ทำสมการ (75) ปีนเศษส่วนย่อย จะได้

(76) $$100\left(\frac{1}{N} + \frac{10^{-6}dN}{1-10^{-6}N}\right)dN = dt$$

หาปริพันธ์ตลอดสมการ (76) จะได้

$$\int 100\left(\frac{1}{N} + \frac{10^{-6}dN}{1-10^{-6}N}\right)dN = \int dt$$

$$\int \left(\frac{1}{N} + \frac{10^{-6}dN}{1-10^{-6}N}\right)dN = \frac{1}{100}\int dt$$

$$\ln N - \ln\left(1-10^{-6}N\right) = \frac{t}{100} + c_1$$

$$\ln\frac{N}{1-10^{-6}N}=\frac{t}{100}+c_1$$

$$\frac{N}{1-10^{-6}N}=e^{t/100+c_1}$$

$$\frac{N}{1-10^{-6}N}=ce^{t/100}$$

หรือ

(77)
$$N=\frac{ce^{t/100}}{1+10^{-6}ce^{t/100}}$$

จากเงื่อนไขเริ่มต้น $N(1980)=100,000$ แทนในสมการ (77) ได้

$$100000=\frac{ce^{1980/100}}{1+10^{-6}ce^{1980/100}}$$

$$10^5=\frac{ce^{19.8}}{1+10^{-6}ce^{19.8}}$$

$$c=\frac{10^5}{e^{19.8}\left(1-10^{-1}\right)}$$

$$c=\frac{10^6}{9e^{19.8}}$$

แทนค่า $c=\dfrac{10^6}{9e^{19.8}}$ ในสมการ (77) จะได้

(78)
$$N(t)=\frac{10^6}{1+9e^{19.8-t/100}}\ \text{สำหรับ}\ t>1980$$

สมการ (78) แทนประชากร ณ เวลา t ใด ๆ

และเมื่อแทน $t=2000$ ในสมการ (78) จะได้

$$N(2000) = \frac{10^6}{1+9e^{19.8-2000/100}}$$

$$= \frac{10^6}{1+9e^{-0.2}}$$

$$\approx 119459$$

ดังนั้น ในปี ค.ศ 2000 จะมีจำนวนประชากรประมาณ $119,459$ คน

ตัวอย่าง 5.13 สมมติว่าจำนวนพลเมืองของเมือง ๆ หนึ่งเพิ่มขึ้นเป็นสัดส่วนกับจำนวนพลเมืองขณะนั้น ถ้าจำนวนพลเมืองเพิ่มขึ้นเป็นสองเท่าในเวลา 40 ปี แล้วอีกกี่ปีจำนวนพลเมืองจึงจะเพิ่มขึ้นเป็น สามเท่า

วิธีทำ ให้ N_0 แทนจำนวนพลเมืองในตอนเริ่มแรก

ให้ N แทนจำนวนพลเมือง ณ เวลา t ใด ๆ

ดังนั้น $\dfrac{dN}{dt}$ แทนอัตราการเพิ่มจำนวนของพลเมือง

เพราะว่าอัตราการเพิ่มจำนวนของพลเมืองเป็นสัดส่วนกับจำนวนพลเมืองที่มีอยู่ขณะนั้น และเนื่องจาก N มีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อ t มีค่าเพิ่มขึ้น นั่นคือ N เป็นฟังก์ชันเพิ่ม ดังนั้นจะได้

(79) $$\frac{dN}{dt} = kN$$

โดยที่ k เป็นค่าคงที่ของการแปรผัน

จัดสมการ (79) ให้อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์แบบแยกกันได้ ดังต่อไปนี้

(80) $$\frac{1}{N}dN = kdt$$

หาปริพันธ์ตลอดสมการ (67) จะได้

$$\int \frac{1}{N}dN = -\int kdt$$

$$\ln\left|N\right| = kt + c_1$$

(81) $$N = ce^{kt}$$

จากเงื่อนไขเริ่มต้น $N(0) = N_0$ แทนในสมการ (81) ได้ $c = N_0$ ดังนั้น

(82) $$N = N_0 e^{kt}$$

จำนวนพลเมืองเพิ่มขึ้นเป็นสองเท่าในเวลา 40 ปี ทำให้ได้เงื่อนไขเริ่มต้นคือ $N(40) = 2N_0$ เมื่อแทน $N = 2N_0$ และ $t = 40$ ในสมการ (82) จะได้

$$2N_0 = N_0 e^{k(40)}$$
$$2 = e^{k(40)}$$
$$e^k = 2^{1/40}$$

แทน $e^k = 2^{1/40}$ ในสมการ (82) จะได้

(83) $$N = N_0 2^{t/40}$$

ถ้า $N = 3N_0$ แทนในสมการ (83) จะได้

$$3N_0 = N_0 2^{t/40}$$
$$3 = 2^{t/40}$$
$$\ln 3 = \ln 2^{t/40}$$
$$\ln 3 = \frac{t}{40}\ln 2$$
$$t = 40\frac{\ln 2}{\ln 3}$$
$$t \approx 63.5$$

ดังนั้น อีกประมาณ 63.5 ปีจำนวนพลเมืองจึงจะเพิ่มขึ้นเป็นสามเท่า

ตัวอย่าง 5.14 จากการขยายพันธุ์ของแบคทีเรียพบว่า อัตราการเพิ่มของแบคทีเรียเป็นสัดส่วนกับจำนวนแบคทีเรียขณะนั้น ถ้าเวลาผ่านไป 6 ชั่วโมงมีแบคทีเรีย 5 ล้านตัว และเวลาผ่านไป 9 ชั่วโมงมีแบคทีเรีย 8 ล้านตัวจงหาจำนวนแบคทีเรียในตอนเริ่มต้น

วิธีทำ ให้ N_0 แทนจำนวนแบคทีเรียตอนเริ่มต้น

ให้ N แทนจำนวนแบคทีเรีย ณ เวลา t ใด ๆ

ดังนั้น $\dfrac{dN}{dt}$ แทนอัตราการเพิ่มของแบคทีเรีย

เพราะว่าอัตราการเพิ่มจำนวนของแบคทีเรียเป็นสัดส่วนกับจำนวนแบคทีเรียที่มีอยู่ขณะนั้น และเนื่องจาก N มีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อ t มีค่าเพิ่มขึ้น นั่นคือ N เป็นฟังก์ชันเพิ่ม ดังนั้นจะได้

(84) $$\frac{dN}{dt} = kN$$

โดยที่ k เป็นค่าคงที่ของการแปรผัน

จัดสมการ (84) ให้อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์แบบแยกกันได้ ดังต่อไปนี้

(85) $$\frac{1}{N}dN = kdt$$

หาปริพันธ์ตลอดสมการ (85) จะได้

$$\int \frac{1}{N}dN = -\int kdt$$

$$\ln\left|N\right| = kt + c_1$$

(86) $$N = ce^{kt}$$

จากเงื่อนไขเริ่มต้น $N(0) = N_0$ แทนในสมการ (81) ได้ $c = N_0$ ดังนั้น

(87) $$N = N_0 e^{kt}$$

ถ้าเวลาผ่านไป 6 ชั่วโมงมีแบคทีเรีย 5 ล้านตัว ทำให้ได้เงื่อนไขเริ่มต้นคือ $N(6) = 5\times 10^6$ เมื่อแทน $N = 5\times 10^6$ และ $t = 6$ ในสมการ (87) จะได้

(88) $$5\times (10)^6 = N_0 e^{6k}$$

เวลาผ่านไป 9 ชั่วโมงมีแบคทีเรีย 8 ล้านตัวทำให้ได้เงื่อนไขเริ่มต้นคือ $N(9) = 8\times 10^6$ เมื่อแทน $N = 8\times 10^6$ และ $t = 9$ ในสมการ (87) จะได้

(89) $$8\times (10)^6 = N_0 e^{9k}$$

จากสมการ (88) และ (89) จะได้ $e^{3k} = \dfrac{8}{5}$ หรือ $e^{6k} = \left(\dfrac{8}{5}\right)^2$

แทนค่า $e^{6k} = \left(\frac{8}{5}\right)^2$ ในสมการ (88) จะได้

$$5\times(10)^6 = N_0\left(\frac{8}{5}\right)^2$$

$$N_0 = \left(\frac{5}{8}\right)^2\left[5\times(10)^6\right]$$

$$= \frac{125\times(10)^6}{64}$$

$$\approx 1.9\times(10)^6$$

ดังนั้น จำนวนแบคทีเรียเริ่มต้นมีประมาณ 1.9 ล้านตัว

5.3.3 ปัญหาของผสม

ปัญหาในของผสมที่จะกล่าวนี้อาจจะเป็น เกลือ ยา หรือสิ่งอื่นก็ได้ ซึ่งบรรจุในภาชนะ เมื่อทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงเช่นการปล่อยสาร A ให้ไหลเข้าไปในภาชนะที่บรรจุของผสมชนิดหนึ่งด้วยอัตราคงที่อัตราหนึ่ง ในขณะที่สาร A ไหลเข้าไปผสมจะทำการคนของผสมอยู่ตลอดเวลา เพื่อให้ของผสมมีความเข้มข้นเท่ากันโดยตลอด ถ้าปล่อยให้ของผสมไหลออกจากภาชนะด้วยอัตราคงที่อีกอัตราหนึ่ง เราต้องการหาปริมาณของสาร A ซึ่งเหลืออยู่ในของผสม ณ เวลา t ใด ๆ (ศิริพร พัสดร. 2552, : 107)

ให้ x แทนปริมาณของสาร A ณ เวลา t ใด ๆ และ

ให้ $\frac{dx}{dt}$ แทนอัตราการเปลี่ยนแปลงของสารเทียบกับเวลา

ให้ IN แทนอัตราการไหลเข้าของสาร A

ให้ OUT แทนอัตราการไหลออกของสาร A

ดังนั้น จะได้ความสัมพันธ์ดังนี้

(90) $$\frac{dx}{dt} = IN - OUT$$

ตัวอย่าง 5.15 ถังใบหนึ่งบรรจุน้ำ 50 แกลลอน ถ้าปล่อยให้น้ำซึ่งมีเกลือปนอยู่ 2 ปอนด์ต่อแกลลอนไหลลงถังนี้ในอัตราเร็วคงที่ 3 แกลลอนต่อนาที และให้สารละลายในถังนี้ได้รับการคนให้ละลายอย่างสม่ำเสมอตลอดถัง แล้วในขณะเดียวกันก็ไหลออกจากถังในอัตราเดียวกับที่ไหลเข้า จงหาปริมาณของเกลือที่อยู่ในถังนี้เมื่อเวลาผ่านไป 25 นาที

วิธีทำ ให้ $x(t)$ แทนปริมาณของเกลือในถังใบนี้ ณ เวลา t ใด ๆ

น้ำซึ่งมีเกลือปนอยู่ 2 ปอนด์ต่อแกลลอนไหลลงถังนี้ในอัตราเร็วคงที่ 3 แกลลอนต่อนาที ดังนั้นได้ อัตราของเกลือที่ไหลเข้าถังคือ

$$IN = 2 \times 3 = 6 \text{ ปอนด์ต่อนาที}$$

เนื่องจากอัตราการไหลเข้าและไหลออกเท่ากัน ดังนั้นถังน้ำจะมีน้ำ 50 แกลลอน ณ เวลา t ใด ๆ และน้ำ 50 แกลลอน นี้จะมีเกลืออยู่ x ปอนด์ เพราะฉะนั้นความเข้มข้นของเกลือ ณ เวลา t เท่ากับ $\frac{x}{50}$ ปอนด์ต่อแกลลอน ณ เวลา t ใด ๆ อัตราของเกลือที่ไหลออกจากถัง และของผสมนี้ไหลออกด้วยอัตรา 3 แกลลอนต่อนาที ดังนั้น ได้อัตราของเกลือที่ไหลออกจากถังคือ

$$OUT = \frac{x}{50} \times 3 = \frac{3x}{50} \text{ ปอนด์ต่อนาที}$$

จาก (90) จะได้

(91) $$\frac{dx}{dt} = 6 - \frac{3x}{50}$$

จัดสมการ (91) ให้อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์แบบแยกกันได้ ดังต่อไปนี้

(92) $$\frac{dx}{100 - x} = \frac{3}{50} dt$$

หาปริพันธ์ตลอดสมการ (92) จะได้

$$\int \frac{dx}{100 - x} = \int \frac{3}{50} dt$$

$$-\ln\left|100 - x\right| = \frac{3}{50} t + c_1$$

(93) $$x = 100 - ce^{-3t/50}$$

จากเงื่อนไขเริ่มต้น $x(0) = 0$ แทนในสมการ (93) ได้ $c = 100$ แทนในสมการ (93) ได้

$$x = 100 - 100e^{-3t/50}$$

หรือ

(94) $$x(t) = 100(1 - e^{-3t/50})$$

ถ้าเวลาผ่านไป 25 นาทีจะมีปริมาณเกลือเท่ากับ

$$\begin{aligned} x(25) &= 100(1 - e^{-3(25)/50}) \\ &= 100(1 - e^{-1.5}) \\ &\approx 78 \end{aligned}$$

ดังนั้น เมื่อเวลาผ่านไป 25 นาทีจะมีปริมาณเกลือประมาณ 78 แกลลอน

ตัวอย่าง 5.16 แท้งค์ใบหนึ่งบรรจุน้ำเกลือ 50 แกลลอน โดยมีเกลือละลายอยู่ 10 ปอนด์ ปล่อยน้ำเกลือซึ่งมีความเข้มข้นของเกลือ 2 ปอนด์ต่อแกลลอน เข้าไปในแท้งค์ด้วยอัตราเร็ว 5 แกลลอนต่อนาที และให้สารละลายในถังนี้ได้รับการคนให้ละลายอย่างสม่ำเสมอตลอดถัง แล้วในขณะเดียวกันก็ปล่อยน้ำในแท้งค์ออกด้วยอัตราเร็ว 3 แกลลอนต่อนาที จงหาปริมาณของเกลือในแทงค์ ณ เวลา t ใด ๆ

วิธีทำ ให้ $x(t)$ แทนปริมาณของเกลือในแท้งค์ใบนี้ ณ เวลา t ใด ๆ

ปล่อยน้ำเกลือซึ่งมีความเข้มข้นของเกลือ 2 ปอนด์ต่อแกลลอน เข้าไปในแท้งค์ด้วยอัตราเร็ว 5 แกลลอนต่อนาที ดังนั้นได้ อัตราของเกลือที่ไหลเข้าถัง คือ

$$IN = 2 \times 5 = 10 \text{ ปอนด์ต่อนาที}$$

จากอัตราการไหลเข้า 5 แกลลอนต่อนาทีและอัตราการไหลออก 3 แกลลอนต่อนาที ว่าจะมีปริมาณของเกลือเพิ่มอยู่ 2 แกลลอนต่อนาที เพราะฉะนั้น ณ เวลา t จะมีน้ำเกลืออยู่ $50 + 2t$ แกลลอน ดังนั้น ได้อัตราของเกลือที่ไหลออกจากถัง คือ

$$OUT = \frac{3x}{50+2t}$$ ปอนด์ต่อนาที

จาก (90) จะได้

$$\frac{dx}{dt} = 10 - \frac{3x}{50+2t}$$

หรือ

(95) $$\frac{dx}{dt} + \frac{3}{50+2t}x = 10$$

จะเห็นว่าสมการ (95) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น

โดยมี $p(t) = \dfrac{3}{50+2t}$, $g(t) = 10$

และ $\mu(t) = e^{\int \frac{3}{50+2t}dt} = e^{\frac{3}{2}\ln|50+2t|} = (50+2t)^{3/2}$

นำ $\mu(t)$ คูณตลอดสมการ (95) ได้

$$(50+2t)^{3/2}\left[\frac{dx}{dt} + \frac{3}{50+2t}x\right] = 10(50+2t)^{3/2}$$

$$\frac{d}{dt}\left[x(50+2t)^{3/2}\right] = 10(50+2t)^{3/2}$$

หาปริพันธ์ตลอดสมการนี้ได้

$$x(50+2t)^{3/2} = 2(50+2t)^{5/2} + c$$

หรือ

(96) $$x = \frac{2(50+2t)^{5/2} + c}{(50+2t)^{3/2}}$$

จากเงื่อนไขเริ่มต้น $x(0) = 10$ แทนในสมการ (96) ได้

$$10=\frac{2\left[50+2(0)\right]^{5/2}+c}{\left[50+2(0)\right]^{3/2}}$$

$$10=\frac{2(50)^{5/2}+c}{(50)^{3/2}}$$

$$10=100+\frac{c}{(50)^{3/2}}$$

$$c=-90(50)^{3/2}$$

แทนค่า $c=-90(50)^{3/2}$ แทนในสมการ (96) ได้

$$x=\frac{2(50+2t)^{5/2}-90(50)^{3/2}}{(50+2t)^{3/2}}$$

หรือ

(97) $$x(t)=100+4t-\frac{90(50)^{3/2}}{(50+2t)^{3/2}}$$

ดังนั้น สมการ (97) เป็นปริมาณของเกลือในแทงค์ ณ เวลา t ใด ๆ

ตัวอย่าง 5.17 ห้องประชุมห้องหนึ่งมีขนาด 2000 ลูกบาศก์เมตร ณเวลาเริ่มต้น ห้องประชุมนี้มีคาร์บอนมอนอกไซด์ 0.002 เปอร์เซนต์ เมื่อเปิดระบบระบายอากาศโดยดูดอากาศที่มีคาร์บอนมอนอกไซด์ 3 เปอร์เซนต์ เข้าไปในห้องด้วยอัตราเร็ว 0.2 ลูกบาศก์เมตรต่อนาที และดูดอากาศในห้องออกด้วยอัตราเร็ว 0.2 ลูกบาศก์เมตรต่อนาที อยากทราบว่านานเท่าใดอากาศในห้องจึงจะมีคาร์บอนมอนอกไซด์ 0.015 เปอร์เซนต์

วิธีทำ ให้ $x(t)$ แทนปริมาณของคาร์บอนมอนอกไซด์หลังจากเวลาผ่านไป t นาที

เมื่อเปิดระบบระบายอากาศโดยดูดอากาศที่มีคาร์บอนมอนอกไซด์ 3 เปอร์เซนต์ เข้าไปในห้องด้วยอัตราเร็ว 0.2 ลูกบาศก์เมตรต่อนาที ดังนั้น

$IN=0.03\times 0.02=0.0006$ ลูกบาศก์เมตรต่อนาที

ดูดอากาศในห้องออกด้วยอัตราเร็ว 0.2 ลูกบาศก์เมตรต่อนาทีจากห้องประชุมห้องหนึ่งมีขนาด 2000 ลูกบาศก์เมตร ดังนั้น

$$OUT = \frac{x}{2000} \times 0.2 = \frac{0.2x}{2000} \text{ ลูกบาศก์เมตรต่อนาที}$$

จาก (90) จะได้

$$\frac{dx}{dt} = 0.0006 - \frac{0.2x}{2000}$$

หรือ

(98) $$\frac{dx}{dt} = \frac{12 - 0.2x}{2000}$$

จัดสมการ (98) ให้อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์แบบแยกกันได้ ดังต่อไปนี้

(99) $$\frac{dx}{12 - 0.2x} = \frac{1}{2000} dt$$

หาปริพันธ์ตลอดสมการ (92) จะได้

$$\int \frac{dx}{12 - 0.2x} = \int \frac{1}{2000} dt$$

$$-\frac{1}{0.2} \ln\left|12 - 0.2x\right| = \frac{1}{2000} t + c_1$$

$$\ln\left|12 - 0.2x\right| = -\frac{1}{1000} t + c_1$$

$$12 - 0.2x = ce^{-t/1000}$$

$$x = 60 - ce^{-t/1000}$$

หรือ

(100) $$x(t) = 60 - ce^{-t/1000}$$

ขณะเวลาเวลา 0 นาที มีปริมาณของคาร์บอนมอนอกไซด์ $2000\times\dfrac{0.002}{100}=0.04$ ลูกบาศก์เมตร ทำให้ได้เงื่อนไขเริ่มต้น $x(0)=0.04$ แทนในสมการ (100) ได้ $c=59.96$ แทนในสมการ (100) ได้

(101) $$x(t)=60-59.96e^{-t/1000}$$

ต้องการทราบว่าจะต้องใช้เวลาเท่าใดอากาศในห้องจึงจะมีคาร์บอนมอนอกไซด์ 0.015 เปอร์เซนต์นั่นคือ แทนค่า $x=2000\times\dfrac{0.015}{100}=0.3$ ในสการ (101) เพื่อหาค่า t

$$\begin{aligned}
0.3 &= 60-59.96e^{-t/1000}\\
e^{-t/1000} &= \frac{59.7}{59.96}\\
\frac{-t}{1000} &= \ln\frac{59.7}{59.96}\\
t &= -1000\ln\frac{59.7}{59.96}\\
t &\approx 43.5
\end{aligned}$$

ดังนั้น อากาศในห้องจึงจะมีคาร์บอนมอนอกไซด์ 0.015 เปอร์เซนต์ เมื่อเวลาผ่านไป 43.5 นาที

5.3.4 ปัญหาการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิของวัตถุ

เมื่อวัตถุอยู่ในตัวกลางที่ล้อมรอบ เช่น อากาศ น้ำ เป็นต้น โดยที่มีอุณหภูมิต่างกัน จะเกิดการถ่ายเทความร้อนระหว่างวัตถุกับตัวกลางที่ล้อมรอบ ทำให้อุณหภูมิของวัตถุเปลี่ยนแปลงไปการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิของวัตถุในกรณีนี้เป็นไปตามกฎการเย็นตัวของนิวตัน ซึ่งกล่าวว่า “อัตราการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิของวัตถุเป็นสัดส่วนกับผลต่างของอุณหภูมิของวัตถุกับอุณหภูมิของตัวกลางที่ล้อมรอบ” (ศรีบุตร แววเจริญ และชนศักดิ์ บ่ายเที่ยง, 2542 : 109-110)

กำหนดให้ $T(t)$ แทนอุณหภูมิของวัตถุ ณ ขณะเวลา t

และ T_{SM} แทนอุณหภูมิของตัวกลางที่ล้อมรอบวัตถุ

โดยกฎการเย็นตัวของนิวตัน จะได้ว่า อุณหภูมิของวัตถุจะเปลี่ยนแปลงไปเป็นสัดส่วนกับผลต่างของอุณหภูมิของวัตถุนั้นกับอุณหภูมิของตัวกลางที่ล้อมรอบวัตถุ จะได้

(102) $$\frac{dT}{dt} = k(T - T_{SM})$$

โดยที่ k เป็นค่าคงที่ของการแปรผัน

ตัวอย่าง 5.18 โลหะแท่งหนึ่งใช้เวลา 10 นาที ในการลดอุณหภูมิจาก 100 องศาเซลเซียส เป็น 40 องศาเซลเซียส เมื่อนำแท่งโลหะไปไว้ในห้องเย็นที่มีอุณหภูมิเท่ากับ 20 องศาเซลเซียส จงหาอุณหภูมิของโลหะ ณ เวลา t ใด ๆ

วิธีทำ ให้ $T(t)$ แทนอุณหภูมิของวัตถุ ณ ขณะเวลา t

ดังนั้น $\dfrac{dT}{dt}$ แทนอัตราการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิ

อัตราการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิของแท่งโลหะเป็นสัดส่วนกับผลต่างของอุณหภูมิของแท่งโลหะกับอุณหภูมิของห้องเย็น และเนื่องจาก T มีค่าลดลงเมื่อ t มีค่าเพิ่มขึ้น นั่นคือ T เป็นฟังก์ชันลด ดังนั้นจะได้

(103) $$\frac{dT}{dt} = -k(T - 20)$$

โดยที่ k เป็นค่าคงที่ของการแปรผัน

จัดสมการ (103) ให้อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์แบบแยกกันได้ ดังต่อไปนี้

(104) $$\frac{dT}{(T - 20)} = -kdt$$

หาปริพันธ์ตลอดสมการ (104) จะได้

$$\int \frac{1}{(T - 20)} dT = \int -kdt$$

$$\ln\left|T - 20\right| = -kt + c_1$$

$$T = 20 + ce^{-kt}$$

หรือ

(105) $$T(t) = 20 + ce^{-kt}$$

จากอุณหภูมิของโลหะตอนเริ่มต้นจะได้เงื่อนไขเริ่มต้น $T(0) = 100$ แทนในสมการ (105) ได้ $c = 80$ และแทนค่า $c = 80$ ในสมการ (105) จะได้

(106) $$T(t) = 20 + 80e^{-kt}$$

เมื่อเวลาผ่านไป 10 นาที อุณหภูมิของโลหะแท่งนี้จะลงเหลือ 40 องศาเซลเซียส จึงได้เงื่อนไขเริ่มต้น $T(10) = 40$ แทนลงในสมการ (106) จะได้

$$\begin{aligned} 40 &= 20 + 80e^{-10k} \\ 80e^{-10k} &= 20 \\ e^{-10k} &= \frac{1}{4} \\ -10k &= \ln\frac{1}{4} \\ k &= -\frac{1}{10}\ln\frac{1}{4} \\ k &= \frac{1}{5}\ln 2 \\ k &\approx 0.1386 \end{aligned}$$

แทน $k = 0.1386$ ในสมการ (106) จะได้

(106) $$T(t) = 20 + 80e^{-0.1386t}$$

ดังนั้น อุณหภูมิของโลหะ ณ เวลา t ใด ๆ คือ $T(t) = 20 + 80e^{-0.1386t}$

ตัวอย่าง 5.19 วัตถุชนิดหนึ่งใช้เวลา 2 ชั่วโมง เพื่อที่จะลดอุณหภูมิจาก 70 องศาฟาเรนไฮต์ เหลือ 50 องศาฟาเรนไฮต์ โดยที่อุณหภูมิของอากาศขนะนั้นเป็น 30 องศาฟาเรนไฮต์ จงหาว่าวัตถุชนิดนี้จะต้องใช้เวลานานเท่าใดจึงจะมีอุณหภูมิ 40 องศาฟาเรนไฮต์

วิธีทำ ให้ $T(t)$ แทนอุณหภูมิของวัตถุ ณ ขณะเวลา t

ดังนั้น $\dfrac{dT}{dt}$ แทนอัตราการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิ

อัตราการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิของวัตถุเป็นสัดส่วนกับผลต่างของอุณหภูมิของวัตถุกับอุณหภูมิของอากาศขณะนั้น และเนื่องจาก T มีค่าลดลงเมื่อ t มีค่าเพิ่มขึ้น นั่นคือ T เป็นฟังก์ชันลด ดังนั้นจะได้

(107) $$\frac{dT}{dt} = -k(T-30)$$

โดยที่ k เป็นค่าคงที่ของการแปรผัน

จัดสมการ (103) ให้อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์แบบแยกกันได้ ดังต่อไปนี้

(108) $$\frac{dT}{(T-30)} = -kdt$$

หาปริพันธ์ตลอดสมการ (104) จะได้

$$\int \frac{1}{(T-30)}dT = \int -kdt$$
$$\ln\left|T-30\right| = -kt + c_1$$
$$T = 30 + ce^{-kt}$$

หรือ

(109) $$T(t) = 30 + ce^{-kt}$$

อุณหภูมิเริ่มต้นของวัตถุชนิดนี้ ทำให้ได้เงื่อนไขเริ่มต้น $T(0) = 70$ แทนในสมการ (109) ได้ $c = 40$ และแทนค่า $c = 40$ ในสมการ (105) จะได้

(110) $$T(t) = 30 + 40e^{-kt}$$

เมื่อเวลาผ่านไป 2 ชั่วโมง อุณหภูมิของวัตถุนี้จะลดลงเหลือ 50 องศาฟาเรนไฮต์ จึงได้เงื่อนไขเริ่มต้น $T(2) = 50$ แทนลงในสมการ (110) จะได้

$$
\begin{aligned}
50 &= 30 + 40e^{-2k} \\
40e^{-2k} &= 20 \\
e^{-2k} &= \frac{1}{2} \\
-2k &= \ln\frac{1}{2} \\
k &= -\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} \\
k &= \frac{1}{2}\ln 2 \\
k &\approx 0.3466
\end{aligned}
$$

แทน $k \approx 0.3466$ ในสมการ (110) จะได้

(111) $$T(t) = 30 + 40e^{-0.3466t}$$

วัตถุชนิดนี้จะต้องใช้เวลานานเท่าใดจึงจะมีอุณหภูมิ 40 องศาฟาเรนไฮต์ จะได้สมการ

$$
\begin{aligned}
40 &= 30 + 40e^{-0.3466t} \\
e^{-0.3466t} &= \frac{1}{4} \\
-0.3466t &= \ln\frac{1}{4} \\
t &= -\frac{1}{0.3466}\ln\frac{1}{4} \\
t &\approx 4
\end{aligned}
$$

ดังนั้น วัตถุชนิดนี้จะต้องใช้เวลา 4 ชั่วโมงจึงจะมีอุณหภูมิ 40 องศาฟาเรนไฮต์

ตัวอย่าง 5.20 นำเทอร์โมมิเตอร์ที่อ่านอุณหภูมิขณะนั้นได้ 80 องศาฟาเรนไฮต์ ออกไปนอกบ้าน 5 นาทีต่อมา อ่านอุณหภูมิของเทอร์โมมิเตอร์ได้ 60 องศาฟาเรนไฮต์และอีก 5 นาทีต่อมา อ่านอุณหภูมิของเทอร์โมมิเตอร์ได้ 50 องศาฟาเรนไฮต์ จงหาอุณหภูมินอกบ้าน

วิธีทำ ให้ $T(t)$ แทนอุณหภูมิของเทอร์โมมิเตอร์ ณ ขณะเวลา t

ให้ T_{SM} แทนอุณหภูมิภายนอกบ้าน

ดังนั้น $\dfrac{dT}{dt}$ แทนอัตราการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิที่เทอร์โมมิเตอร์อ่านได้

เนื่องจาก T มีค่าลดลงเมื่อ t มีค่าเพิ่มขึ้น นั่นคือ T เป็นฟังก์ชันลด ดังนั้นจะได้

(112) $$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_{SM})$$

โดยที่ k เป็นค่าคงที่ของการแปรผัน

จัดสมการ (112) ให้อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์แบบแยกกันได้ ดังต่อไปนี้

(113) $$\frac{dT}{(T - T_{SM})} = -kdt$$

หาปริพันธ์ตลอดสมการ (104) จะได้

$$\int \frac{1}{(T - T_{SM})} dT = \int -kdt$$

$$\ln\left|T - T_{SM}\right| = -kt + c_1$$

$$T = T_{SM} + ce^{-kt}$$

หรือ

(114) $$T(t) = T_{SM} + ce^{-kt}$$

เทอร์โมมิเตอร์ที่อ่านอุณหภูมิขณะเริ่มต้นได้ 80 องศาฟาเรนไฮต์ ทำให้ได้เงื่อนไขเริ่มต้น $T(0) = 80$ แทนในสมการ (114) ได้ $c = 80 - T_{SM}$ และแทนค่า $c = 80 - T_{SM}$ ในสมการ (114) จะได้

(115) $$T(t) = T_{SM} + (80 - T_{SM})e^{-kt}$$

นำเทอโมมิเตอร์ออกไปนอกบ้าน 5 นาที แล้วอ่านอุณหภูมิของเทอร์โมมิเตอร์ได้ 60 องศาฟาเรนไฮต์ จึงได้เงื่อนไขเริ่มต้น $T(5) = 60$ แทนลงในสมการ (115) จะได้

(116) $$60 = T_{SM} + (80 - T_{SM})e^{-5k}$$

และเมื่อเวลาผ่านไป 10 นาที อ่านอุณหภูมิของเทอร์โมมิเตอร์ได้ 50 องศาฟาเรนไฮต์

จึงได้เงื่อนไขเริ่มต้น $T(10) = 50$ แทนลงในสมการ (115) จะได้

(117) $$50 = T_{SM} + (80 - T_{SM})e^{-10k}$$

หรือ

(118) $$50 = T_{SM} + (80 - T_{SM})(e^{-5k})^2$$

จากสมการ (116) จะได้

(119) $$e^{-5k} = \frac{60 - T_{SM}}{80 - T_{SM}}$$

แทน (119) ในสมการ (118) จะได้

$$50 = T_{SM} + (80 - T_{SM})\left[\frac{60 - T_{SM}}{80 - T_{SM}}\right]^2$$

$$50(80 - T_{SM}) = T_{SM}(80 - T_{SM}) + (60 - T_{SM})^2$$

$$(50 - T_{SM})(80 - T_{SM}) = (60 - T_{SM})^2$$

$$10T_{SM} = 400$$

$$T_{SM} = 40$$

ดังนั้น อุณหภูมิภายนอกบ้านเท่ากับ 40 องศาฟาเรนไฮต์

5.4 สรุปท้ายบทที่ 5

การประยุกต์อนุพันธ์ขั้นสูงนั่นคือการนำปัญหาต่างๆ มาสร้างความสัมพันธ์ของตัวแปรต่าง ใน รูปของสมการเชิงอนุพันธ์ เช่น ปัญหาวิถีเชิงตั้งฉากของวงศ์เส้นโค้งพารามิเตอร์หนึ่งตัวและ $F(x,y,c) = 0$ เป็นวงศ์เส้นโค้งพารามิเตอร์หนึ่งตัว ในระนาบ xy โดยที่ c เป็นพารามิเตอร์ หาอนุพันธ์สมการ เทียบกับ x แล้วจะได้ สมการเชิงอนุพันธ์ของวงศ์เส้นโค้ง

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

นั่นคือ เส้นโค้งแต่ละเส้นของวงศ์เส้นโค้ง ที่จุด (x,y) ใด ๆ มีความชันเท่ากับ $f(x,y)$ และความชันของแนววิถีเชิงตั้งฉาก ที่จุด (x,y) ใด ๆ เท่ากับ $-\dfrac{1}{f(x,y)}$

จะได้ว่า สมการเชิงอนุพันธ์ของวงศ์เส้นโค้งแนววิถีเชิงตั้งฉากคือ

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{f(x,y)}$$

สำหรับปัญหาทางกลศาสตร์นั้น จากกฎข้อที่ 2 ของนิวตัน สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ได้

$$\frac{d}{dx}(mv) = KF$$

โดยที่ m แทนมวลของวัตถุ

v แทนความเร็วของวัตถุ

F แทนแรงที่มากระทำกับวัตถุ

K แทนค่าคงที่ของการแปรผัน

และสุดท้ายคือปัญหาอัตราการเปลี่ยนแปลงเราสามารถสร้างฟังก์ชันของปริมาณในปัจจุบันกับเวลา และในปัญหาที่ศึกษาต้องการจะหาปริมาณ ณ เวลาใด ๆ ถ้าให้ x แทนปริมาณที่มีอยู่ ณ เวลา t แล้ว $\dfrac{dx}{dt}$ จะแทนอัตราการเปลี่ยนแปลง ดังนั้นเราสามารถแก้สมการเชิงอนุพันธ์ซึ่งเป็นตัวแบบทางคณิตศาสตร์ของปัญหานำไปใช้ในการอธิบายตัวแปรหรือปริมาณที่เราสนใจได้อย่างถูกต้อง

คำถามท้ายบท

1. จงหาแนววิถีเชิงตั้งฉากของวงศ์เส้นโค้ง ที่กำหนดให้ต่อไปนี้ โดยที่ c เป็นค่าคงที่ใด ๆ

   1.1 $y = cx^3$

   1.2 $x^2 + cy^2 = 1$

   1.3 $y^2 = cx$

   1.4 $y = (x-c)^2$

   1.5 $y^2 = x^2 + cx$

   1.6 $y = ce^{2x}$

2. นักกระโดดร่มคนหนึ่งปล่อยลูกเหล็กหนัก 1 นิวตันซึ่งผูกติดกับร่มขนาดเล็กจากสภาพหยุดนิ่ง ถ้าแรงต้านอากาศเป็นสัดส่วนกับความเร็วของลูกเหล็กขณะนั้น เมื่อลูกเหล็กมีความเร็ว 25 เมตรต่อวินาทีจะมีแรงต้านทานจากอากาศเท่ากับ 900 นิวตัน จงหาความเร็วของวัตถุ ณ เวลา t ใด ๆ และความเร็วของวัตถุ ณ เวลา 10 วินาที

3. วัตถุมวล 1 กิโลกรัมตกจากที่สูงลงมาในแนวดิ่งโดยมีแรงต้านทานของอากาศแปรผันตามความเร็วของวัตถุที่ตกลงมา ค่าค่งที่ของการแปรผันเท่ากับ 0.2 จงหาความเร็วของวัตถุ ณ เวลา t ใด ๆ

4. วัตถุหนัก 20 ปอนด์ เคลื่อนที่เป็นแนวเส้นตรงในแนวราบ ด้วยแรงที่มีค่าคงที่ 12 ปอนด์ ในการเคลื่อนที่นี้ มีแรงต้านการเคลื่อนที่ขนาดเป็นปอนด์เท่ากับ 4 เท่าของความเร็วของการเคลื่อนที่ ถ้าวัตถุนี้เคลื่อนที่จากสภาพหยุดนิง จงหาความเร็วและระยะทางเมื่อเวลาผ่านไป 0.5 วินาที

5. วัตถุมวล m กิโลกรัมเริ่มต้นเคลื่อนที่จากจุดหยุดนิ่งจากยอดของพื้นเอียงซึ่งทำมุม 45 องศากับพื้นราบ ถ้าสัมประสิทธิ์ของความเสียดทานระหว่างวัตถุกับพื้นเอียงเป็น μ จงหาความเร็วและความเร่งของวัตถุ ณ เวลา t ใด ๆ

6. โยนลูกบอลมวล 4 กรัมขึ้นไปในแนวดิ่งด้วยความเร็วต้น v_0 เซนติเมตรต่อวินาที และขณะนั้นมีแรงต้านอากาศเป็นสองเท่าของความเร็วของการเคลื่อนที่ จงหาความเร็วของลูกบอล ณ เวลา t ใด ๆ

7. สารกัมมันตรังสีชนิดหนึ่งมีอัตราการสลายเป็นสัดส่วนกับจำนวนที่มีอยู่ และพบว่าเมื่อเวลาผ่านไป 5568 ปี สารชนิดนี้จะเหลืออยู่ครึ่งหนึ่งของสารที่มีอยู่ จงหาปริมาณของสารที่เหลืออยู่ ณ เวลา t ใด ๆ

8. สารเรเดียมมีอัตราการสลายตัวเป็นสัดส่วนกับจำนวนที่เหลืออยู่ และพบว่าสารเรเดียมสลายตัว 11 เปอร์เซนต์ของที่มีอยู่ในเวลา 25 ปี จงหาว่าต้องใช้เวลานานเท่าใด สารเรเดียมจะเหลืออยู่ครึ่งหนึ่งของปริมาณเดิม

9. แบคทีเรียชนิดหนึ่งเพิ่มขึ้นเป็นสัดส่วนกับจำนวนแบคทีเรียที่มีอยู่ ถ้าจำนวนแบคทีเรียเพิ่มเป็น 2 เท่าในเวลา 24 ชั่วโมง จงหาว่าต้องใช้เวลากี่ชั่วโมง แบคทีเรียชนิดนี้จะเพิ่มขึ้นเป็น 100 เท่า

10. แบคทีเรียชนิดหนึ่งมีขนาด 2000 ตัว เมื่อเวลาผ่านไป 2 ชั่วโมง จำนวนแบคทีเรียเพิ่มเป็น 2500 ตัว จงหาจำนวนแบคที่เรีย ณ เวลา t ใด ๆ ถ้าแบคทีเรียชนิดนี้เพิ่มขึ้นเป็นสัดส่วนกับจำนวนแบคทีเรียที่มีอยู่

11. อัตราการเพิ่มของประชากรของเมืองหนึ่งเป็นสัดส่วนกับจำนวนประชากรที่มีอยู่ ถ้าจำนวนประชากรของเมืองนี้เพิ่มขึ้นเป็น 2 เท่าของประชากรที่มีอยู่ในเวลา 50 ปี จงหาจำนวนประชากรของเมืองนี้ ณ เวลา t ใด ๆ และต้องใช้เวลากี่ปีจำนวนประชากรจึงจะเพิ่มเป็น 3 เท่า

12. น้ำในทะเลสาบแห่งหนึ่งมีปริมาตร 480 ลูกบาศก์กิโลโมตร มีการควบคุมการส่งน้ำจากคลอง ให้ไหลเข้าทะเลสาบ และปล่อยให้ไหลออกจากทะเลสาบด้วยอัตราเร็วเท่ากับคือ 350 ลูกบาศก์กิโลเมตรต่อปี ถ้ากำหนดให้ตอนเริ่มต้น ความเข้มข้นของมลพิษในทะเลสาบเป็น 5 เท่าของความเข็มข้นของมลพิษในคลอง จงหาว่าจะต้องใช้เวลานานเท่าใด ความเข้มข้นของมลพิษในทะเลสาบจะลดลงเป็น 2 เท่าของความเข้มข้นของมลพิษในคลอง

13. เทอร์โมมิเตอร์อันหนึ่งอ่านสเกลได้ 15 องศาเซลเซียส ถูกนำเข้าไปวางไว้ในห้องที่มีอุณหภูมิ 23 องศาเซลเซียส เมื่อเวลาผ่านไป 1 นาที เทอร์โมมิเตอร์อันนั้นอ่านสเกลได้ 19 องศาเซลเซียส จงหาว่าใช้เวลานานเท่าใด เทอร์โมมิเตอร์จึงจะอ่านสเกลได้ 29.9 องศาเซลเซียส

14. โลหะแท่งหนึ่งใช้เวลา 40 นาทีในการลดอุณหภูมิจาก 200 องศาเซลเซียส เป็น 100 องศาเซลเซียส เมื่อจุ่มโลหะลงในของเหลวชนิดหนึ่งที่มีอุณหภูมิเท่ากับ 10 องศาเซลเซียส จงหาว่าจะต้องใช้เวลาเท่าใดจึงจะทำให้แท่งโลหะชนิดนี้ลดอุณหภูมิจาก 100 องศาเซลเซียส เป็น 10 องศาเซลเซียส ถ้าของเหลวนี้มีอุณหภูมิ 5 องศา

15. ณ เวลา 09.00 น. นำเทอร์โมมิเตอร์ที่บอกอุณหภูมิ 70 องศาฟาเรนไฮต์ ออกไปนอกบ้านซึ่งมีอุณหภูมิ 15 องศาฟาเรนไฮต์ ต่อมาเวลา 09.05 น. อ่านเทอร์โมมิเตอร์ได้ 45 องศาฟาเรนไฮต์เวลา 09.10 น นำเทอโมมิเตอร์กลับเข้าบ้านที่มีอุณหภูมิ 70 องศาฟาเรนไฮต์ จงหาอุณหภูมิที่อ่านได้ ณ เวลา 09.20 น.

16. นำเทอร์โมมิเตอร์ที่บอกอุณหภูมิ 70 องศาฟาเรนไฮต์ ออกไปนอกบ้านซึ่งมีอุณหภูมิ -10 องศาฟาเรนไฮต์ เวลาผ่านไป 2 นาที อ่านอุณหภูมิของเทอร์โมมิเตอร์ได้ 26 องศาฟาเรนไฮต์ และเมื่อเวลาผ่านไปอีก 3 นาทีนำเทอโมมิเตอร์กลับเข้าบ้านที่มีอุณหภูมิ 70 จงหาอุณหภูมิที่อ่านได้เมื่อเวลาผ่านไปอีก 4 นาที

เอกสารอ้างอิง

ดำรง ทิพย์โยธา. (2541). **การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ เล่ม 1.** กรุงเทพมหานคร : สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

วีระศักดิ์ วาจาบัณฑิตย์.(2541). **สมการเชิงอนุพันธ์.** กรุงเทพมหานคร : ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยรามคำแหง

ศิริพร พัสดร. (2552). **สมการเชิงอนุพันธ์** อุดรธานี : สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏอุดรธานี.

ศรีบุตร แววเจริญ และชนศักดิ์ บ่ายเที่ยง. (2542). **สมการเชิงอนุพันธ์ 1.** กรุงเทพมหานคร : บริษัทวงตะวัน.

สุรัตนา สังข์หนุน. (2558). **สมการเชิงอนุพันธ์ 1**. กรุงเทพมหานคร : ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ประยุกต์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ

อุบล กลองกระโทก. (2549). **คณิตศาสตร์สำหรับวิทยาศาสตร์ 2.** กรุงเทพมหานคร : คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา.

แผนบริหารการสอนประจำบทที่ 6

เนื้อหาประจำบท

1. ฟังก์ชันค่าจริงของสองตัวแปรหรือมากกว่า
2. ลิมิตของฟังก์ชันสองตัวแปร
3. อนุพันธ์ย่อย
4. กฎลูกโซ่ของฟังก์ชันของตัวแปร 2 ตัว
5. อนุพันธ์ย่อยอันดับสูง

วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม

1. อธิบายและให้ความหมายของฟังก์ชันค่าจริงของสองตัวแปรได้
2. อธิบายและให้ความหมายของฟังก์ชันค่าจริงมากกว่าสองตัวแปรได้
3. อธิบายและให้ความหมายลิมิตของฟังก์ชันสองตัวแปรได้
4. สามารถหาอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันโดยใช้บทนิยามได้
5. สามารถหาอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันโดยใช้ทฤษฎี
6. หาอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันโดยใช้กฎลูกโซ่ของฟังก์ชันของตัวแปร 2 ตัวได้
7. อธิบายความหมายของอนุพันธ์ย่อยอันดับสูงได้
8. สามารถหาอนุพันธ์ย่อยอันดับสูงได้

วิธีการสอนและกิจกรรมการเรียนการสอนประจำบท

1. ผู้สอนบรรยายหัวข้อต่อไปนี้พร้อมเปิดโอกาสให้ซักถาม

   1.1 ฟังก์ชันค่าจริงของสองตัวแปรหรือมากกว่า

   1.2 การหาโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันสองตัวแปร

   1.3 นิยามลิมิตของฟังก์ชันสองตัวแปร

   1.4 หาลิมิตของฟังก์ชันสองตัวแปร

   1.5 หาอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันโดยใช้นิยาม

   1.6 หาอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันโดยใช้ทฤษฎี

1.7 หาอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันโดยใช้กฎลูกโซ่ของฟังก์ชันของตัวแปร 2 ตัวได้

1.8 ความหมายของอนุพันธ์ย่อยอันดับสูง

1.9 การหาอนุพันธ์ย่อยอันดับสูง

2. ให้นักศึกษาทำกิจกรรมต่อไปนี้

   2.1. ศึกษาข้อมูลจากสื่ออิเล็กทรอนิกส์ เกี่ยวกับเรื่องอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชัน 2 ตัวแปร

   2.2. ทำแบบฝึกหัดที่กำหนดให้

สื่อการเรียนการสอน

1. เอกสารประกอบการสอนและตำราต่าง ๆ
2. Slide Presentation

สื่อการเรียนการสอน

1. เอกสารประกอบการสอนและตำราต่าง ๆ
2. Slide Presentation

การวัดผลและการประเมินผล

1. สังเกตความสนใจของนักศึกษาขณะสอน ความตั้งใจ การฟัง การจดบันทึกและการซักถาม
2. แบบฝึกหัด
3. แบบทดสอบ
4. การมีส่วนร่วมในกิจกรรมการเรียนการสอน

บทที่ 6
ฟังก์ชันหลายตัวแปรและอนุพันธ์ย่อย

การศึกษา เรื่องลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน และอนุพันธ์ของฟังก์ชัน ในบทที่ผ่านมานั้นเป็นการศึกษาเกี่ยวกับความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณสองปริมาณในลักษณะที่ค่าของปริมาณหนึ่งขึ้นอยู่กับอีกปริมาณหนึ่ง เราจึงแทนความสัมพันธ์เช่นนั้นได้ด้วยฟังก์ชันของตัวแปรเพียงหนึ่งตัว แต่ในการศึกษาบางเรื่อง อาจมีปริมาณมากกว่าสองปริมาณที่เกี่ยวข้องสัมพันธ์กันในรูปต่าง ๆ ซึ่งในบทนี้จะได้ศึกษาความสัมพันธ์ในรูปที่ปริมาณหนึ่งขึ้นอยู่กับปริมาณต่าง ๆ หลายปริมาณ เช่นปริมาตรของรูปทรงกระบอก $V = \pi r^2 h$ หรืออาจเขียนอยู่ในรูปของฟังก์ชันได้เป็น $V = f(r,h)$ ซึ่งจะเรียกความสัมพันธ์ในลักษณะนี้ว่าฟังก์ชันสองตัวแปรเพราะว่าค่าของ V(ปริมาตรของรูปทรงกระบอก) จะมีความสัมพันธ์กับตัวแปรอีกสองตัวคือ r(รัศมีของวงกลมที่เป็นหน้าตัด) และ h(ความสูงของทรงกระบอก) ในการศึกษาฟังก์ชันของสองตัวแปร เราถือว่าโดเมนของฟังก์ชันเป็นเซตของคู่อันดับของจำนวนจริง ส่วนฟังก์ชันหลายตัวแปรนั้นโดยทั่ว ๆ ไปก็เหมือนกับฟังก์ชันสองตัวแปร ดังนั้นผู้เรียนจะได้ศึกษาเรื่องฟังก์ชันสองตัวแปรเสียก่อน แล้วค่อยศึกษาฟังก์ชันหลายตัวแปรโดยทั่ว ๆ ไป

6.1 ฟังก์ชันค่าจริงของสองตัวแปรหรือมากกว่า

บทนิยามและสัญลักษณ์ของฟังก์ชันสองตัวแปรหรือฟังก์ชันหลายตัวแปรมีความคล้ายคลึงกับฟังก์ชันตัวแปรเดียวดังจะกล่าวบทนิยามต่อไปนี้ (อุบล กลองกระโทก, 2549 : 86)

บทนิยาม 6.1

กำหนดให้ $f : D \to R$ โดยที่ $D \subseteq R^n$ เรียกฟังก์ชัน f ว่าเป็น **ฟังก์ชัน n ตัวแปร** $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ ถ้าสำหรับจุด $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ ใด ๆ ในโดเมน D สามารถหาค่า $f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ ได้เพียงค่าเดียวเท่านั้น และถ้า กำหนดให้ $z = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ เรียกเซตของ$(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ ซึ่งเป็นจำนวนจริงว่า **โดเมนของฟังก์ชัน** f เขียนแทนด้วย D_f ส่วนเซตของ z ซึ่งเป็นจำนวนจริงเรียกว่า **เรนจ์ของฟังก์ชัน** f เขียนแทนด้วย R_f

ตัวอย่าง 6.1 ให้ $f(x,y)=x^2y-5y^2-3$ จงหา $f(1,0),\ f(2,3)$ และ $f(3d,c)$

วิธีทำ กำหนด $f(x,y)=x^2y-5y^2-3$

$$f(1,0)=1^2(0)-5(0^2)-3=-3$$

$$f(2,3)=2^2(3)-5(3^2)-3=12-45-3=-36$$

$$f(3d,c)=(3d)^2(c)-5(3d)^2-3=9d^2c-45d^2-3$$

ดังนั้น $f(1,0)=-3,\ f(2,3)=-36$ และ $f(3d,c)=9d^2c-45d^2-3$

ตัวอย่าง 6.2 ให้ $f(x,y)=\dfrac{x^2-3xy+1}{xy-1}$ โดยที่ $xy\neq 1$ จงหา $f(0,0),\ f(1,2)$ และ $f(b,c)$

วิธีทำ กำหนดให้ $f(x,y)=\dfrac{x^2-3xy+1}{xy-1}$ โดยที่ $xy\neq 1$

$$f(0,0)=\frac{0^2-3(0)(0)+1}{(0)(0)-1}=-1$$

$$f(1,2)=\frac{1^2-3(1)(2)+1}{(1)(2)-1}=4$$

$$f(b,c)=\frac{b^2-3(b)(c)+1}{(b)(c)-1}=\frac{b^2-3bc+1}{bc-1}\quad ;\ bc\neq 0$$

ตัวอย่าง 6.3 กำหนด $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$ จงหา $f(1,0)$ และหา D_f พร้อมทั้งเขียนกราฟของ D_f

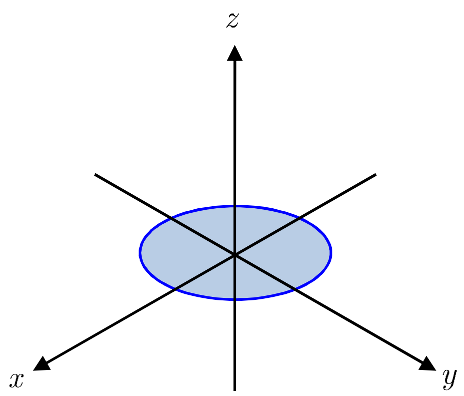
วิธีทำ เนื่องจาก $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$

ดังนั้น $f(1,0)=\sqrt{1-1^2-0^2}=0$

D_f พิจาณาได้จาก $D_f=\left\{(x,y):1-x^2-y^2\geq 0\right\}$

หรือ $D_f=\left\{(x,y):x^2+y^2\leq 1\right\}$

เขียนกราฟ D_f ได้ดังนี้



ตัวอย่าง 6.4 กำหนดให้ $f(x,y,z)=\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}$ จงหาค่า $f(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$

พร้อมทั้งหา D_f

วิธีทำ เนื่องจาก $f(x,y,z)=\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}$

ดังนั้น $f(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2})=\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(-\frac{1}{2}\right)^2}$

$$=\sqrt{1-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}}$$

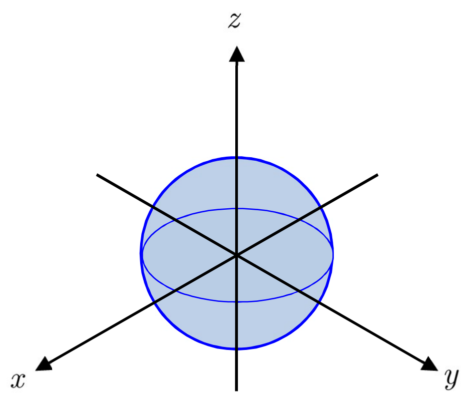
$$=\frac{1}{2}$$

โดเมนของฟังก์ชัน $f=\left\{(x,y,z):1-x^2-y^2-z^2\geq 0\right\}$

หรือ $f=\left\{(x,y,z):x^2+y^2+z^2\leq 1\right\}$

ซึ่งเป็นรูปทรงกลมตันจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(0,0,0)$ และมีรัศมี 1 หน่วย

เขียนกราฟ D_f ได้ดังนี้



ตัวอย่าง 6.5 กำหนดให้ $f(x,y) = 1 - x - \dfrac{y}{2}$ จงเขียนกราฟของฟังก์ชัน f พร้อมทั้งบอก D_f และ R_f

วิธีทำ กำหนดให้ $z = f(x,y)$

ดังนั้น $z = 1 - x - \dfrac{y}{2}$

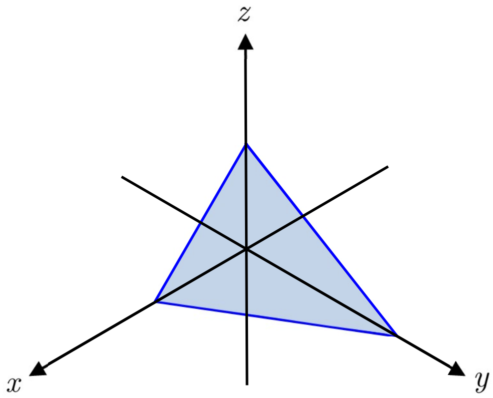
หรือ $2z + 2x + y - 2 = 0$

ซึ่งเป็นกราฟของระนาบ ตัดแกน x ที่จุด $(1,0,0)$

ตัดแกน y ที่จุด $(0,2,0)$

ตัดแกน z ที่จุด $(0,0,1)$

เขียนกราฟ D_f ได้ดังนี้

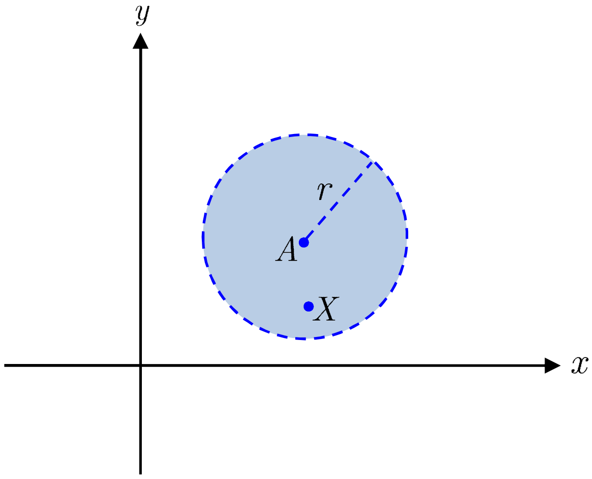


6.2 ลิมิตของฟังก์ชันสองตัวแปร

ในการศึกษาลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน จำเป็นต้องทราบความหมายของเซตของจุดในระนาบหรืออาณาบริเวณในระนาบที่สำคัญซึ่งจะต้องอ้างอิงถึงบ่อย ๆ มีดังต่อไปนี้คือ (สุชาติ เจริญนิตย์, 2554 : 103-105)

1) กำหนด $A(x_0, y_0)$ เป็นจุดคงที่จุดหนึ่งใน R^2 และจุด $X(x, y)$ เป็นจุดใด ๆ ใน R^2 ระยะทางระหว่างจุดสองจุดคือ $\left|XA\right| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ หรืออาจเขียนแทนด้วย $\left\|X - A\right\|$

2) กำหนด $A(x_0, y_0)$ เป็นจุดคงที่จุดหนึ่งใน R^2 และ r เป็นจำนวนจริงบวก แผ่นกลมเปิดซึ่งมีจุด A เป็นจุดศูนย์กลางและรัศมี r คือเซต $\left\{x \in R : \left\|X - A\right\| < r\right\}$ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $B(A; r)$ ดังภาพ



ภาพประกอบ 6.1 แสดงเซต $B(A;r)$

ที่มา : สุชาติ เจริญนิตย์. 2554 : 103

กรณีที่ไม่กำหนดรัศมีของวงกลม เราจะแทนด้วยสัญลักษณ์ $B(A)$

3) กำหนดให้ $D \subseteq R^2$ และ $A \in D$ จะเรียก A ว่าจุดภายในของ D ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก ๆ แผ่นกลมเปิด $B(A)$ ซึ่ง $B(A) \subseteq D$ และถ้าจุดทุกจุดที่อยู่ใน D เป็นจุดภายในของ D จะเรียก D ว่าเป็นเซตเปิด

4) กำหนดให้ $D \subseteq R^2$ และ $A \in R^2$ จะเรียก A ว่าจุดขอบของ D ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก ๆ แผ่นกลมเปิด $B(A)$ มีจุดอย่างน้อยหนึ่งจุดซึ่งอยู่ใน D และมีจุดอย่างน้อยหนึ่งจุดซึ่งไม่อยู่ใน D และถ้าจุดขอบทุกจุดของ D อยู่ใน D จะเรียก D ว่าเป็นเซตปิด

5) กำหนด $D \subseteq R^2$ และ $A \in R^2$ จะเรียก A ว่าจุดลิมิตของ D ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก ๆ แผ่นกลมเปิด $B(A)$ จะได้ว่า $\left(B(A)-\{A\}\right) \cap D \neq \varnothing$

บทนิยาม 6.2

กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันสองตัวแปร $f : D \to R$ โดยที่ $D \subseteq R^2$ เราจะกล่าวว่า f มีค่าลิมิตเท่ากับจำนวนจริง L ขณะที่ (x,y) ย่างเข้าสู่ จุด(x_0, y_0) ซึ่งแทนด้วยสัญลัษณ์

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$$

ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก ๆ จำนวนจริงบวก ε ที่กำหนดให้จะมีจำนวนจริงบวก $\delta > 0$ ที่ทำให้ $\left|f(x,y) - L\right| < \varepsilon$ สำหรับทุก ๆ $(x,y) \in D$ ซึ่ง $0 < \left\|(x,y)-(x_0,y_0)\right\| < \delta$

ตัวอย่าง 6.6 จงแสดงว่า $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)}(3x+2y)=7$

วิธีทำ จะต้องแสดงว่าสำหรับทุก ๆ จำนวนจริงบวก ε ที่กำหนดให้จะมีจำนวนจริงบวก $\delta > 0$ ที่ทำให้ $\left|(3x+2y)-7\right| < \varepsilon$ สำหรับทุก ๆ $(x,y)\in D$ ซึ่ง $\left\|(x,y)-(1,2)\right\| < \delta$ ดังนั้นจะต้องเลือก δ ที่เหมาะสม นั่นคือต้องเลือก δ ที่ทำให้ $\left|(3x+2y)-7\right| < \varepsilon$ พิจารณาจากสิ่งที่ต้องการ

$$\begin{aligned}
\left|(3x+2y)-7\right| &= \left|3x+2y-7\right| \\
&= \left|3x-3+2y-4\right| \\
&= \left|(3x-3)+(2y-4)\right| \\
&\le \left|3x-3\right| + \left|2y-4\right| \\
&= 3\left|x-3\right| + 2\left|y-2\right| \\
&< 5\delta
\end{aligned}$$

ดังนั้นเราเลือก $\delta = \dfrac{\varepsilon}{5}$

สามารถแสดงวิธีทำได้ดังนี้คือ

กำหนด $\varepsilon > 0$ เลือก $\delta = \dfrac{\varepsilon}{5}$ ดังนั้น $\delta > 0$

ให้ (x,y) เป็นจุดใด ๆ บน R^2 โดยที่ $(x,y)\ne(1,2)$

สมมุติให้ $0 < \left\|(x,y)-(1,2)\right\| < \delta$

และ $\left\|(x,y)-(1,2)\right\| = \sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}$

ได้ $0 < \sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2} < \delta$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\left|(3x+2y)-7\right| &= \left|3x+2y-7\right| \\
&= \left|3x-3+2y-4\right| \\
&= \left|(3x-3)+(2y-4)\right| \\
&\le \left|3x-3\right| + \left|2y-4\right| \\
&= 3\left|x-3\right| + 2\left|y-2\right|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&< 5\delta \\
&= 5\left(\frac{\varepsilon}{5}\right) \\
&= \varepsilon
\end{aligned}
$$

จึงสรุปได้ว่า $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} 3x + 2y = 7$

บทนิยาม 6.3

กำหนดให้ f ว่าเป็นฟังก์ชันสองตัวแปร $f : D \to R$ โดยที่ $D \subseteq R^2$ และ (x_0, y_0) เป็นจุดลิมิตของ D ถ้า C เป็นเส้นโค้งใด ๆ ใน R^2 ซึ่งผ่านจุด (x_0, y_0) จะกล่าวว่า f มีค่าลิมิตเท่ากับจำนวนจริง L เมื่อ (x,y) ย่างเข้าสู่จุด (x_0, y_0) ตามเส้นโค้ง C ซึ่งแทนด้วยสัญลักษณ์

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0) \\ \text{บน } C}} f(x,y) = L$$

ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก ๆ จำนวนจริงบวก ε ที่กำหนดให้จะมีจำนวนจริงบวก $\delta > 0$ ที่ทำให้ $\left|f(x,y) - L\right| < \varepsilon$ สำหรับทุก ๆ $(x,y) \in C \cap D$ ซึ่ง $0 \le \left\|(x,y) - (x_0, y_0)\right\| < \delta$

ข้อสังเกต 6.1

1. ถ้า $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$ จะได้ว่า $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0) \\ \text{บน } C}} f(x,y) = L$ สำหรับทุกเส้นโค้ง C ที่ผ่านจุด (x_0, y_0)

2. ผลจากข้อ 1 ถ้ามีเส้นโค้ง C สองเส้นคือเส้นโค้ง C_1 และ C_2 ซึ่งต่างก็ผ่านจุด (x_0, y_0) แต่ถ้า $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0) \\ \text{บน } C_1}} f(x,y) \neq \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0) \\ \text{บน } C_2}} f(x,y)$ เราสามารถสรุปได้ว่า $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ ไม่มีลิมิต

ตัวอย่าง 6.7 จงแสดงว่า $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2 - x^2}{y^2 + x^2}$ ไม่มีลิมิต

วิธีทำ กำหนดให้ C_1 แทนเส้นตรง $x = 0$

และ C_2 แทนเส้นตรง $y = 0$

จะเห็นว่า C_1 และ C_2 ซึ่งต่างก็เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด $(0,0)$ เหมือนกัน

สำหรับจุด (x,y) ใด ๆ ที่อยู่บน C_1 ซึ่ง $(x,y) \neq (0,0)$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \text{บน } C_1}} \frac{y^2 - 0^2}{y^2 + 0^2} &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2}{y^2} \\ &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} 1 \\ &= 1\end{aligned}$$

สำหรับจุด (x,y) ใด ๆ ที่อยู่บน C_2 ซึ่ง $(x,y) \neq (0,0)$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \text{บน } C_2}} \frac{0^2 - x^2}{0^2 + x^2} &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{-x^2}{x^2} \\ &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} -1 \\ &= -1\end{aligned}$$

จะเห็นว่า $\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \text{บน } C_1}} \frac{y^2 - x^2}{y^2 + x^2} \neq \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \text{บน } C_2}} \frac{y^2 - x^2}{y^2 + x^2}$

ดังนั้น $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2 - x^2}{y^2 + x^2}$ ไม่มีลิมิต

สำหรับทฤษฎีบทต่าง ๆ ที่ใช้สำหรับการหาค่าลิมิตของฟังก์ชันสองตัวแปรนั้นจะคล้ายกันกับลิมิตของฟังก์ชันตัวแปรเดียวดังจะแสดงได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้ (คณาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น, 2539 : 91)

ตัวอย่าง 6.8 จงหาค่าของ $\lim_{(x,y)\to(1,0)}(3xy^2 - x^2 + 5)$

วิธีทำ
$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(1,0)}(3xy^2 - x^2 + 5) &= \lim_{(x,y)\to(1,0)} 3xy^2 - \lim_{(x,y)\to(1,0)} x^2 + \lim_{(x,y)\to(1,0)} 5 \\ &= 3\lim_{(x,y)\to(1,0)} xy^2 - \lim_{(x,y)\to(1,0)} x^2 + \lim_{(x,y)\to(1,0)} 5 \\ &= 3\left(\lim_{(x,y)\to(1,0)} x\right)\left(\lim_{(x,y)\to(1,0)} y^2\right) - \lim_{(x,y)\to(1,0)} x^2 + \lim_{(x,y)\to(1,0)} 5 \\ &= 3(1)(0) - 1 + 5 \\ &= 4\end{aligned}$$

ดังนั้น $\lim_{(x,y)\to(1,0)}(3xy^2 - x^2 + 5) = 4$

ตัวอย่าง 6.9 จงหาค่าของ $\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{x^3 - 2x^2 + 2xy^2 - 4y^2}{xy + 3x - 2y - 6}$

วิธีทำ
$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{x^3 - 2x^2 + 2xy^2 - 4y^2}{xy + 3x - 2y - 6} &= \lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{(x^3 - 2x^2) + (2xy - 4y^2)}{(xy + 3x) - (2y + 6)} \\ &= \lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{x^2(x-2) + 2y^2(x-2)}{x(y+3) - 2(y+3)} \\ &= \lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{(x^2 + 2y^2)(x-2)}{(x-2)(y+3)} \\ &= \lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{x^2 + 2y^2}{y+3} \\ &= \frac{\lim_{(x,y)\to(1,2)}\left(x^2 + 2y^2\right)}{\lim_{(x,y)\to(1,2)}\left(y+3\right)} \\ &= \frac{\lim_{(x,y)\to(1,2)} x^2 + 2\lim_{(x,y)\to(1,2)} y^2}{\lim_{(x,y)\to(1,2)} y + \lim_{(x,y)\to(1,2)} 3} \\ &= \frac{1+8}{2+3} \\ &= \frac{9}{5}\end{aligned}$$

ดังนั้น $\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{x^3 - 2x^2 + 2xy^2 - 4y^2}{xy + 3x - 2y - 6} = \frac{9}{5}$

6.3 อนุพันธ์ย่อย

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงวิธีการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันของหลายตัวแปร โดยเริ่มจากฟังก์ชันของตัวแปร 2 ตัว $z=f(x,y)$ และถ้าเราให้ตัวแปรตัวหนึ่งสมมติว่าเป็น y มีค่าคงตัวแล้ว f จะกลายเป็นฟังก์ชันของตัวแปร 1 ตัวคือ x เท่านั้นดังนั้นเราจึงสามารถหาอนุพันธ์ของ f เทียบกับ x ได้ฟังก์ชันที่ได้ใหม่นี้เรียกว่า **อนุพันธ์ย่อยของ f เทียบกับ x** และถ้าเราให้ตัวแปรตัวหนึ่งสมมติว่าเป็น x มีค่าคงตัวแล้ว f จะกลายเป็นฟังก์ชันของตัวแปร 1 ตัวคือ y เท่านั้นดังนั้นเราจึงสามารถหาอนุพันธ์ของ f เทียบกับ y ได้ฟังก์ชันที่ได้ใหม่นี้เรียกว่า **อนุพันธ์ย่อยของ f เทียบกับ y** (Buck, Creighton R., 1978 : 163-164)

บทนิยาม 6.4

ให้ $z=f(x,y)$ เป็นฟังก์ชัน 2 ตัวแปร และ $(x_0,y_0)\in D_f$

อนุพันธ์ย่อยของ f เทียบกับ x ที่จุด (x_0,y_0) คือ

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}$$ ถ้าลิมิตหาค่าได้

อนุพันธ์ย่อยของ f เทียบกับ y ที่จุด (x_0,y_0) คือ

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0,y_0+h)-f(x_0,y_0)}{h}$$ ถ้าลิมิตหาค่าได้

หมายเหตุ

การใช้สัญลักษณ์เกี่ยวกับอนุพันธ์ย่อยมีหลายแบบเช่น (Taylor Angus E.,1972 : 158)

อนุพันธ์ย่อยของ f เทียบกับ x ที่จุด (x_0,y_0) จะใช้สัญลักษณ์

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=f_x(x_0,y_0)=f_1(x_0,y_0)=D_1(x_0,y_0)=\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$$

อนุพันธ์ย่อยของ f เทียบกับ y ที่จุด (x_0,y_0) จะใช้สัญลักษณ์

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=f_2(x_0,y_0)=D_2(x_0,y_0)=\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}$$

เนื่องจาก $f_x(x_0,y_0)$ และ $f_y(x_0,y_0)$ เป็นค่าอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชัน f เมื่อเทียบกับ x และ y ที่จุด (x_0,y_0) ตามลำดับ ในการหาค่า $f_x(x,y)$ และ $f_y(x,y)$ สำหรับอนุพันธ์ย่อยเมื่อเทียบกับ x และ y ที่จุด (x,y) ใด ๆ ก็สามารแทนค่า $x = x_0$ และ $y = y_0$ ได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้ (สุเทพ ลิ่มอรุณ, 2542 : 78)

ตัวอย่าง 6.10 กำหนด $f(x,y) = 2xy - 1$ จงหา $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$

วิธีทำ $f(x,y) = 2xy - 1$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\left[2x(y+h)-1\right]-\left[2xy-1\right]}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{2xy+2xh-1-2xy+1}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{2xh}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}2x \\
&= 2x
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x$

ตัวอย่าง 6.11 กำหนด $f(x,y) = 3x^2y - 5x$ จงหา $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ โดยใช้บทนิยาม

วิธีทำ $f(x,y) = 3x^2y - 5x$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\left[3(x+h)^2y-5(x+h)\right]-\left[3x^2y-5x\right]}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\left[3(x^2+2xh+h^2)y-5(x+h)\right]-\left[3x^2y-5x\right]}{h}
\end{aligned}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left[3x^2y + 6xyh + 3h^2y - 5x - 5h\right] - \left[3x^2y - 5x\right]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3x^2y + 6xyh + 3h^2y - 5x - 5h - 3x^2y + 5x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{6xyh + 3h^2y - 5h}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(6xy + 3hy - 5)h}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (6xy + 3hy - 5)$$

$$= 6xy - 5$$

ดังนั้น $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 6xy - 5$

ตัวอย่าง 6.12 กำหนด $f(x, y) = 3x^2y - 5x$ จงหา $\dfrac{\partial f}{\partial y}(2,1)$ โดยใช้บทนิยาม

วิธีทำ $f(x, y) = 3x^2y - 5x$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(2,1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2,1+h) - f(2,1)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left[3(2)^2(1+h) - 5(2)\right] - \left[3(2)^2(1) - 5(2)\right]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left[12 + 12h - 10\right] - \left[12 - 10\right]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{12h}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} 12$$

$$= 12$$

ดังนั้น $\dfrac{\partial f}{\partial y}(2,1) = 12$

สำหรับอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันของตัวแปรที่มากกว่าสองตัวแปรนั้นก็จะคล้ายกันกับอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันสองตัวแปรดังจะกล่าวในบทนิยามต่อไปนี้ (สุกัญญา สนิทวงศ์ ณ อยุธยา และอนัญญา อภิชาตบุตร, 2551 : 79)

บทนิยาม 6.5

กำหนดให้ $D \subset R^n$ $f : D \to R$ และ $(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) \in D$

อนุพันธ์ย่อยของ f เทียบกับ x_1 คือ

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1 + h, x_2, x_3, ..., x_n) - f(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)}{h}$$

อนุพันธ์ย่อยของ f เทียบกับ x_2 คือ

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, x_2 + h, x_3, ..., x_n) - f(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)}{h}$$

อนุพันธ์ย่อยของ f เทียบกับ x_3 คือ

$$\frac{\partial f}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, x_2, x_3 + h, ..., x_n) - f(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)}{h}$$

$$\vdots \qquad \qquad \vdots$$

อนุพันธ์ย่อยของ f เทียบกับ x_n คือ

$$\frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, x_2, x_3, ..., x_n + h) - f(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)}{h}$$

จากบทนิยาม และตัวอย่างข้างต้นการหาอนุพันธ์ย่อยเทียบแต่ละตัวแปรเราสามารถคิดเสมือนว่าตัวแปรนั้นเป็นตัวแปรที่จะทำการหาอนุพันธ์เพียงตัวแปรเดียวส่วนตัวแปรที่เหลือให้มองเป็นค่าคงตัว ดังนั้น สามารถนำทฤษฎีต่าง ๆ ของการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันหนึ่งตัวแปรมาใช้แสดงได้เหมือนกันดังตัวอย่างต่อไปนี้ (Trench William F., 1978 : 112-115)

ตัวอย่าง 6.13 กำหนด $f(x,y) = 3x^2y^3 - 5x^4 - y - 12$ จงหา $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ และ $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$

วิธีทำ กำหนด $f(x,y) = 3x^2y^3 - 5x^4 - y - 12$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\Big(3x^2y^3 - 5x^4 - y - 12\Big) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}3x^2y^3 - \frac{\partial}{\partial x}5x^4 - \frac{\partial}{\partial x}y - \frac{\partial}{\partial x}12 \\
&= 6xy^3 - 20x^3 - 0 - 0 \\
&= 6xy^3 - 20x^3
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 6xy^3 - 20x^3$

กำหนด $f(x,y) = 3x^2y^3 - 5x^4 - y - 12$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\Big(3x^2y^3 - 5x^4 - y - 12\Big) \\
&= \frac{\partial}{\partial y}3x^2y^3 - \frac{\partial}{\partial y}5x^4 - \frac{\partial}{\partial y}y - \frac{\partial}{\partial y}12 \\
&= 9x^2y^2 - 0 - 1 - 0 \\
&= 9x^2y^2 - 1
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 9x^2y^2 - 1$

ตัวอย่าง 6.14 กำหนด $f(x,y) = \big(5x^4 - xy\big)\sin 3x^2y^5$ จงหา $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ และ $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$

วิธีทำ กำหนด $f\big(x,y\big) = \big(5x^4 - xy\big)\sin 3x^2y^5$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\big(5x^4 - xy\big)\sin 3x^2y^5 \\
&= \big(5x^4 - xy\big)\frac{\partial}{\partial y}\sin 3x^2y^5 + \sin 3x^2y^5\,\frac{\partial}{\partial y}\big(5x^4 - xy\big) \\
&= \big(5x^4 - xy\big)\big(\cos 3x^2y^5\big)\frac{\partial}{\partial y}3x^2y^5 + \big(\sin 3x^2y^5\big)\big(0 - x\big) \\
&= \big(75x^6y^4 - 15x^3y^5\big)\cos 3x^2y^5 - x\sin 3x^2y^5
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \big(75x^6y^4 - 15x^3y^5\big)\cos 3x^2y^5 - x\sin 3x^2y^5$

กำหนด $f(x,y)=(5x^4-xy)\sin 3x^2y^5$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)&=\frac{\partial}{\partial x}(5x^4-xy)\sin 3x^2y^5\\&=(5x^4-xy)\frac{\partial}{\partial x}\sin 3x^2y^5+(\sin 3x^2y^5)\frac{\partial}{\partial x}(5x^4-xy)\\&=(5x^4-xy)(\cos 3x^2y^5)\frac{\partial}{\partial x}3x^2y^5+(\sin 3x^2y^5)(20x^3-y)\\&=(30x^5y^5-6x^2y^6)\cos 3x^2y^5+(20x^3-y)\sin 3x^2y^5\end{aligned}$$

ดังนั้น $\dfrac{\partial f}{\partial x}=(30x^5y^5-6x^2y^6)\cos 3x^2y^5+(20x^3-y)\sin 3x^2y^5$

ตัวอย่าง 6.15 กำหนด $f(x,y)=(x^{12}+\sin 3x^2y^5)^{30}$ จงหา $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ และ $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$

วิธีทำ กำหนด $f(x,y)=(x^{12}+\sin 3x^2y^5)^{30}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}&=\frac{\partial}{\partial y}(x^{12}+\sin 3x^2y^5)^{30}\\&=30(x^{12}+\sin 3x^2y^5)^{29}\frac{\partial}{\partial y}(x^{12}+\sin 3x^2y^5)\\&=30(x^{12}+\sin 3x^2y^5)^{29}\left[\frac{\partial}{\partial y}x^{12}+\frac{\partial}{\partial y}\sin 3x^2y^5\right]\\&=30(x^{12}+\sin 3x^2y^5)^{29}\left[0+\cos 3x^2y\frac{\partial}{\partial y}(3x^2y^5)\right]\\&=30(x^{12}+\sin 3x^2y^5)^{29}\left[0+(\cos 3x^2y)(15x^2y^4)\right]\\&=450x^2y^4\cos 3x^2y(x^{12}+\sin 3x^2y^5)^{29}\end{aligned}$$

ดังนั้น $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=450x^2y^4\cos 3x^2y(x^{12}+\sin 3x^2y^5)^{29}$

กำหนด $f(x,y)=(x^{12}+\sin 3x^2y^5)^{30}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}(x^{12}+\sin 3x^2y^5)^{30}$$

$$= 30\left(x^{12} + \sin 3x^2y^5\right)^{29} \frac{\partial}{\partial x}\left(x^{12} + \sin 3x^2y^5\right)$$

$$= 30\left(x^{12} + \sin 3x^2y^5\right)^{29} \left[\frac{\partial}{\partial x} x^{12} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\sin 3x^2y^5\right)\right]$$

$$= 30\left(x^{12} + \sin 3x^2y^5\right)^{29} \left[12x^{11} + \cos 3x^2y \frac{\partial}{\partial x}\left(3x^2y^5\right)\right]$$

$$= 30\left(x^{12} + \sin 3x^2y^5\right)^{29} \left[12x^{11} + \left(\cos 3x^2y\right)\left(6xy^5\right)\right]$$

$$= 30\left(x^{12} + \sin 3x^2y^5\right)^{29} \left[12x^{11} + 6xy^5 \cos 3x^2y\right]$$

ดังนั้น $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 30\left(x^{12} + \sin 3x^2y^5\right)^{29} \left[12x^{11} + 6xy^5 \cos 3x^2y\right]$

6.4 กฎลูกโซ่ของฟังก์ชันของตัวแปร 2 ตัว

สำหรับฟังก์ชัน $y = f(x)$ การกล่าวว่า $f'(a)$ มีค่าหมายความว่า f หาอนุพันธ์ได้ที่จุด $x = a$ แต่สำหรับฟังก์ชันหลายตัวแปร $z = f(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ การกล่าวว่า $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$ มีค่า ทุก i ไม่ได้หมายความว่า f หาอนุพันธ์ได้ที่จุด $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$ ทั้งนี้เพราะอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันเทียบแต่ละตัวแปรเปรียบเทียบได้กับอัตราการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันขณะที่ตัวแปรนั้นเปลี่ยนแปลงเพียงตัวแปรเดียว ซึ่งความเป็นจริงนั้น อัตราการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันหลายตัวแปรควรพิจารณาขณะที่ทุก ๆ ตัวแปรเปลี่ยนแปลงไปพร้อม ๆ กัน (Taylor Angus E., 1972 : 145)

บทนิยาม 6.6

กำหนดให้ $D \subset R^n$ $f : D \to R$ และ $z = f(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ เป็นฟังก์ โดย $(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) \in D$ เรากล่าวว่า f **หาอนุพันธ์ได้** ที่จุด $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$ ถ้า $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$ มีค่าทุก i

ทฤษฎีบท 6.1

$z = f(x,y)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ และสมมติว่า $x = x(t)$ และ $y = y(t)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ที่ $\dfrac{dx}{dt}$ และ $\dfrac{dy}{dt}$ หาค่าได้ และต่อเนื่อง ดังนั้น $z = f\big(x(t), y(t)\big)$ จะเป็นฟังก์ชันที่สามารถหาอนุพันธ์เทียบกับ t ได้ และ $\dfrac{df}{dt} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\cdot\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\cdot\dfrac{dy}{dt}$

ตัวอย่าง 6.16 กำหนด $z = f(x,y) = x^3y$ และ $x = 3t$, $y = t^2 - 1$ จงหา $\dfrac{df}{dt}(x,y)$

วิธีที่ 1 ใช้กฎลูกโซ่

ให้ $f(x,y) = x^3y$ และ $x = 3t$, $y = t^2 - 1$

ได้ $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y, \quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = x^3$

$$\frac{dx}{dt} = 3, \qquad \frac{dy}{dt} = 2t$$

และ $\dfrac{df}{dt} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{dy}{dt}$

$$\begin{aligned}
\frac{df}{dt} &= \left(3x^2y\right)3 + x^3 2t \\
&= 9x^2y + 2x^3t \\
&= 9(3t)^2\left(t^2-1\right) + 2(3t)^3t \\
&= 81t^2\left(t^2-1\right) + 54t^4 \\
&= 81t^4 - 81t^2 + 54t^4 \\
&= 135t^4 - 81t^2
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\dfrac{df}{dt} = 135t^4 - 81t^2$

วิธีที่ 2 ใช้การแทนค่า

ให้ $f(x,y)=x^3y$, $x=3t$, และ $y=t^2-1$

ได้ $f(x,y)=x^3y$

$$=(3t)^3(t^2-1)$$

$$=27t^3(t^2-1)$$

$$=27t^5-27t^3$$

จาก $f\left(x(t),y(t)\right)=27t^5-27t^3$

$$\frac{df}{dt}=\frac{d}{dt}(27t^5-27t^3)$$

$$\frac{df}{dt}=135t^4-81t^2$$

ดังนั้น $\dfrac{df}{dt}=135t^4-81t^2$

ตัวอย่าง 6.17 กำหนด $z=f(x,y)=xy^2$ และ $x=\cos t$, $y=\sin t$ จงหา $\dfrac{df}{dt}$

วิธีที่ 1 ใช้กฎลูกโซ่

ให้ $z=f(x,y)=xy^2$ และ $x=\cos t$, $y=\sin t$

ได้ $\dfrac{\partial f}{\partial x}=y^2, \qquad \dfrac{\partial f}{\partial y}=2xy$

$$\frac{dx}{dt}=-\sin t, \quad \frac{dy}{dt}=\cos t$$

และ $\dfrac{df}{dt}=\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{dy}{dt}$

$$\frac{df}{dt}=y^2(-\sin t)+2xy(\cos t)$$

$$=-(\sin t)^2\sin t+2(\cos t)(\sin t)(\cos t)$$

$$=-(\sin t)^3+2(\cos t)^2(\sin t)$$

$$=2\cos^2 t\ \sin t-\sin^3 t$$

ดังนั้น $\dfrac{df}{dt}=2\cos^2 t\ \sin t-\sin^3 t$

วิธีที่ 2 ใช้การแทนค่า

ให้ $z = f(x,y) = xy^2$ และ $x = \cos t\,,\ y = \sin t$

ได้ $f(x,y) = xy^2$

$$= \cos t \sin^2 t$$

จาก $f\big(x(t), y(t)\big) = \cos t \sin^2 t$

$$\frac{df}{dt} = \frac{d}{dt}\cos t \sin^2 t$$

$$\frac{df}{dt} = \cos t \frac{d}{dt}\sin^2 t + \sin^2 t \frac{d}{dt}\cos t$$

$$= (\cos t)2(\sin t)(\cos t) + \sin^2 t(-\sin t)$$

$$= 2\cos^2 t\ \sin t - \sin^3 t$$

ดังนั้น $\dfrac{df}{dt} = 2\cos^2 t\ \sin t - \sin^3 t$

ทฤษฎีบท 6.2

$z = f(x,y)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้และ $y = y(x)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ซึ่ง $\dfrac{dy}{dx}$ หาค่าได้และต่อเนื่อง ดังนั้น $z = f\big(x, y(x)\big)$ เป็นฟังก์ชันที่สามารถหาอนุพันธ์เทียบกับ x ได้ และ $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\dfrac{dy}{dx}$

ตัวอย่าง 6.18 กำหนด $u = f\big(x, y\big) = x + y^2$ และ $y = \sin x$ จงหา $\dfrac{du}{dx}$

วิธีทำ จาก $u = x + y^2$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2y$$

$$\frac{dy}{dx} = \cos x$$

จาก $\dfrac{du}{dx} = \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{dy}{dx}$

ดังนั้น $\dfrac{du}{dx} = 1 + 2y\cos x$

ตัวอย่าง 6.19 กำหนด $f(x,y) = x^3 + xy^2$ และ $y = \tan x$ จงหา $\dfrac{df}{dx}$

วิธีทำ จาก $f(x,y) = x^3 + xy^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + y^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy$$

$$\frac{dy}{dx} = \sec^2 x$$

จาก $\dfrac{df}{dx} = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{dy}{dx}$

ดังนั้น $\dfrac{df}{dx} = \left(3x^2 + y^2\right) + 2xy\sec^2 x$

ทฤษฎีบท 6.3

กำหนดให้ $z = f(x,y)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ x และ y เป็นฟังก์ชันของตัวแปร 2 ตัว r และ s นั่นคือ $x = x(r,s)$ และ $y = y(r,s)$ เป็นฟังก์ชันที่ $\dfrac{\partial f}{\partial r}, \dfrac{\partial x}{\partial s}, \dfrac{\partial y}{\partial r}$ และ $\dfrac{\partial y}{\partial s}$ ต่อเนื่อง ดังนั้นฟังก์ชันประกอบ $z = f\Big(x(r,s), y(r,s)\Big)$ เป็นฟังก์ชันที่สามารถหาอนุพันธ์เทียบกับ r และ s ได้และ

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}$$
$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}$$

ตัวอย่าง 6.20 กำหนด $z = f\Big(2x - y, x^2 + y^2\Big)$ โดยที่ f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ จงหา $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ และ $\dfrac{\partial z}{\partial y}$

วิธีทำ สามารถเขียนฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้ใหม่เป็น

$z = f(u,v)$ โดยที่ $u = 2x - y$ และ $v = x^2 + y$

จากกฎลูกโซ่ $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$

$$\frac{\partial z}{\partial u}=f_u, \qquad \frac{\partial u}{\partial x}=2$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=f_y, \qquad \frac{\partial v}{\partial x}=2x$$

ดังนั้น $\frac{\partial z}{\partial x}=2f_u+2xf_v$

จากกฎลูกโซ่ $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$

$$\frac{\partial z}{\partial u}=f_u, \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-1$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=f_y, \qquad \frac{\partial v}{\partial y}=1$$

ดังนั้น $\frac{\partial z}{\partial x}=-1f_u+1f_v=-f_u+f_v$

6.5 อนุพันธ์ย่อยอันดับสูง

อนุพันธ์ย่อยที่กล่าวมาแล้วเป็นอนุพันธ์ย่อยอันดับที่หนึ่งของฟังก์ชันหลายตัวแปรหลาย ซึ่งจะเห็นว่าอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันดังกล่าวนั้นยังคงเป็นฟังก์ชันของตัวแปรเดิม ดังนั้นสำหรับฟังก์ชันของตัวแปร 2 ตัว $z=f(x,y)$ เราสามารถหา f_x และ f_y ได้ และ f_x นั้นก็สามารถหาอนุพันธ์ย่อยเทียบกับตัวแปร x และ y ได้ และในทำนองเดียวกันก็จะสามารถหาอนุพันธ์ย่อยของ f_y เทียบกับตัวแปร x และ y ได้เช่นกัน ซึ่งอนุพันธ์ดังกล่าวนี้เรียกว่าอนุพันธ์ย่อยอันดับสองของ f ซึ่งมีวิธีการหาดังนี้ (สุกัญญา สนิทวงศ์ ณ อยุธยา และอนัญญา อภิชาตบุตร, 2551 : 69)

1. การหาอนุพันธ์ย่อยเทียบกับ x สองครั้ง

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=f_{xx}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

2. การหาอนุพันธ์ย่อยเทียบกับ y สองครั้ง

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=f_{yy}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

3. การหาอนุพันธ์ย่อยเทียบกับ y ก่อน แล้วจึงเทียบกับ x

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

4. การหาอนุพันธ์ย่อยเทียบกับ x ก่อน แล้วจึงเทียบกับ y

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

หมายเหตุ อนุพันธ์ย่อย $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ และ $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ เรียกว่าอนุพันธ์ย่อยอันดับที่สองแบบผสม

ตัวอย่าง 6.21 จงหาอนุพันธ์ย่อยอันดับที่สองของ $f(x,y) = 3x^2y - x^5 + 3y^4$

วิธีทำ จาก $f(x,y) = 3x^2y - x^5 + 3y^4$

ได้ $f_x(x,y) = 6xy - 5x^4$

และ $f_y(x,y) = 3x^2 + 12y^3$

พิจารณา

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left[f_x(x,y)\right] \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(6xy - 5x^4\right) \\ &= 6y - 20x^3 \end{aligned}$$

ดังนั้น $f_{xx}(x,y) = 6y - 20x^3$

พิจารณา

$$\begin{aligned} f_{yx}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left[f_y(x,y)\right] \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(3x^2 + 12y^3\right) \\ &= 6x \end{aligned}$$

ดังนั้น $f_{yx}(x,y) = 6x$

พิจารณา

$$\begin{aligned} f_{xy}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left[f_x(x,y)\right] \\ &= \frac{\partial}{\partial y}\left(6xy - 5x^4\right) \\ &= 6x \end{aligned}$$

ดังนั้น $f_{xy}(x,y) = 6x$

พิจารณา

$$\begin{aligned} f_{yy}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left[f_y(x,y)\right] \\ &= \frac{\partial}{\partial y}\left(3x^2 + 12y^3\right) \\ &= 36y^2 \end{aligned}$$

ดังนั้น $f_{yy}(x,y) = 36y^2$

ตัวอย่าง 6.22 จงหาอนุพันธ์ย่อยอันดับที่สองของ $f(x,y) = e^{2x} + \sin 3xy^5$

วิธีทำ จาก $f(x,y) = e^{2x} + \sin 3xy^5$

ได้ $f_x(x,y) = 2e^{2x} + 3y^5 \cos 3xy^5$

และ $f_y(x,y) = 15xy^4 \cos 3xy^5$

พิจารณา

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left[f_x(x,y)\right] \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(2e^{2x} + 3y^5 \cos 3xy^5\right) \\ &= 4e^{2x} + 3y^5\left(-3y^5 \sin 3xy^5\right) \\ &= 4e^{2x} - 9y^{10} \sin 3xy^5 \end{aligned}$$

ดังนั้น $f_{xx}(x,y) = 4e^{2x} - 9y^{10} \sin 3xy^5$

พิจารณา

$$
\begin{aligned}
f_{yx}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left[f_y(x,y)\right] \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(15xy^4\cos 3xy^5\right) \\
&= 15xy^4\frac{\partial}{\partial x}\left(\cos 3xy^5\right) + \cos 3xy^5\frac{\partial}{\partial x}15xy^4 \\
&= 15xy^4\left(3y^5(-\sin 3xy^5)\right) + \left(\cos 3xy^5\right)\left(15y^4\right)
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $f_{yx}(x,y) = -45xy^9\sin 3xy^5 + 15y^4\cos 3xy^5$

พิจารณา

$$
\begin{aligned}
f_{xy}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left[f_x(x,y)\right] \\
&= \frac{\partial}{\partial y}\left(2e^{2x} + 3y^5\cos 3xy^5\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial y}2e^{2x} + \frac{\partial}{\partial y}3y^5\cos 3xy^5 \\
&= 0 + 3y^5\frac{\partial}{\partial y}\cos 3xy^5 + \cos 3xy^5\frac{\partial}{\partial y}3y^5 \\
&= 3y^5\left(-15xy^4\sin 3xy^5\right) + \left(\cos 3xy^5\right)\left(15y^4\right) \\
&= -45xy^9\sin 3xy^5 + 15y^4\cos 3xy^5
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $f_{xy}(x,y) = -45xy^9\sin 3xy^5 + 15y^4\cos 3xy^5$

พิจารณา

$$
\begin{aligned}
f_{yy}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left[f_{yy}(x,y)\right] \\
&= \frac{\partial}{\partial y}\left(15xy^4\cos 3xy^5\right) \\
&= 15xy^4\frac{\partial}{\partial y}\left(\cos 3xy^5\right) + \left(\cos 3xy^5\right)\frac{\partial}{\partial y}15xy^4 \\
&= 15xy^4\left(-15xy^4\sin 3xy^5\right) + \left(\cos 3xy^5\right)\left(60xy^3\right) \\
&= -225x^2y^8\sin 3xy^5 + 60xy^3\cos 3xy^5
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $f_{yy}(x,y) = -225x^2y^8\sin 3xy^5 + 60xy^3\cos 3xy^5$

จากตัวอย่าง 6.21 และ 6.22 จะเห็นว่าอนุพันธ์ย่อยอันดับที่สอง $f_{xy}(x,y)$ และ $f_{yx}(x,y)$ มีค่าเท่ากัน ซึ่งเรามีทฤษฎีบทที่กล่าวถึงเงื่อนไขที่อนุพันธ์ย่อยแบบผสมจะเท่ากันดังนี้ (สิริวรรณ ตั้งจิตรวัฒนะกุล และสมศักดิ์ บุญมาเลิศ, 2542 : 87)

ทฤษฎีบท 6.4

ถ้า $f(x,y)$ และอนุพันธ์ย่อย $f_x(x,y), f_y(x,y), f_{xy}(x,y)$ และ $f_{yx}(x,y)$ หาค่าได้และต่อเนื่องที่จุด (x_0,y_0) แล้ว $f_{xy}(x_0,y_0) = f_{yx}(x_0,y_0)$

เราสามารถนิยามการหาอนุพันธ์ย่อยอันดับที่สองและทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับการเท่ากันของอนุพันธ์ย่อยแบบผสมของฟังก์ชัน 3 ตัวหรือมากกว่า 3 ตัวในทำนองเดียวกัน กำหนดฟังก์ชันของตัวแปร 3 ตัว $w = f(x,y,z)$ จะได้อนุพันธ์ย่อยอันดับที่สองของฟังก์ชัน f ดังนี้ (ศรีบุตร แววเจริญ, 2541 : 102)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}(x,y,z), \quad &&\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy}(x,y,z), \quad &&\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = f_{xz}(x,y,z)\\
&\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}(x,y,z), \quad &&\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx}(x,y,z), \quad &&\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = f_{yz}(x,y,z)\\
&\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = f_{zz}(x,y,z), \quad &&\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = f_{zy}(x,y,z), \quad &&\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = f_{zx}(x,y,z)
\end{aligned}
$$

ทฤษฎีบท 6.5

กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชัน 3 ตัวแปรซึ่ง $f = f(x,y,z)$ โดยที่อนุพันธ์ย่อยแบบผสมของ $f_x(x,y,z)$, $f_y(x,y,z)$, $f_z(x,y,z)$ หาค่าได้และ $f(x,y,z)$ ต่อเนื่องที่จุด (x_0,y_0,z_0) แล้ว

$$f_{xy}\left(x_0,y_0,z_0\right) = f_{yx}\left(x_0,y_0,z_0\right)$$

$$f_{xz}\left(x_0,y_0,z_0\right) = f_{zx}\left(x_0,y_0,z_0\right)$$

$$f_{yz}\left(x_0,y_0,z_0\right) = f_{zy}\left(x_0,y_0,z_0\right)$$

ตัวอย่าง 6.23 จงหาอนุพันธ์ย่อยอันดับที่สองของ $f(x,y,z) = 3x^2yz - yx^5 + 3y^4 + z^2$

วิธีทำ จาก $f(x,y,z) = 3x^2yz - yx^5 + 3y^4 + z^2$

จะได้ $f_x(x,y,z) = 6xyz - 5x^4y$

$f_y(x,y,z) = 3x^2z - x^5 + 12y^3$

$f_z(x,y,z) = 3x^2y + 2z$

พิจารณา

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial x}\left[f_x(x,y,z)\right] \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(6xyz - 5x^4y\right) \\ &= 6yz - 20x^3y \end{aligned}$$

ดังนั้น $f_{xx}(x,y,z) = 6yz - 20x^3y$

พิจารณา

$$\begin{aligned} f_{yx}(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial x}\left[f_y(x,y,z)\right] \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(3x^2z - x^5 + 12y^3\right) \\ &= 6xz - 5x^4 \end{aligned}$$

ดังนั้น $f_{yx}(x,y,z) = 36y^2$

พิจารณา

$$\begin{aligned} f_{xy}(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial y}\left[f_x(x,y,z)\right] \\ &= \frac{\partial}{\partial y}\left(6xyz - 5x^4y\right) \\ &= 6xz - 5x^4 \end{aligned}$$

ดังนั้น $f_{xy}(x,y,z) = 6xz - 5x^4$

พิจารณา

$$f_{yy}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial y}\left[f_y(x,y,z)\right]$$
$$= \frac{\partial}{\partial y}\left(3x^2z - x^5 + 12y^3\right)$$
$$= 36y^2$$

ดังนั้น $f_{yy}(x,y,z) = 36y^2$

พิจารณา

$$f_{xz}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial z}\left[f_x(x,y,z)\right]$$
$$= \frac{\partial}{\partial z}\left(6xyz - 5x^4y\right)$$
$$= 6xy$$

ดังนั้น $f_{xz}(x,y,z) = 6xy$

พิจารณา

$$f_{zx}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x}\left[f_z(x,y,z)\right]$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(3x^2y + 2z\right)$$
$$= 6xy$$

ดังนั้น $f_{xz} = 6xy$

พิจารณา

$$f_{yz}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial z}\left[f_y(x,y,z)\right]$$
$$= \frac{\partial}{\partial z}\left(3x^2z - x^5 + 12y^3\right)$$
$$= 3x^2$$

ดังนั้น $f_{yz}(x,y,z) = 3x^2$

พิจารณา

$$f_{zy}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial y}\left[f_z(x,y,z)\right]$$
$$= \frac{\partial}{\partial y}\left(3x^2y + 2z\right)$$
$$= 3x^2$$

ดังนั้น $f_{zy}(x,y,z) = 3x^2$

พิจารณา

$$f_{zz}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial z}\left[f_z(x,y,z)\right]$$
$$= \frac{\partial}{\partial z}\left(3x^2y + 2z\right)$$
$$= 2$$

ดังนั้น $f_{zz}(x,y,z) = 2$

จากตัวอย่างจะเห็นว่า $f_{xy}(x,y,z) = f_{yx}(x,y,z),\ f_{xz}(x,y,z) = f_{zx}(x,y,z)$ และ $f_{yz}(x,y,z) = f_{zy}(x,y,z)$

จากตัวอย่างและทฤษฎีที่ผ่านมานั้น เราสามารถนิยามอนุพันธ์ย่อยอันดับที่สูงกว่าของฟังก์ชันที่มีตัวแปรสองตัว หรือมากกว่าสองตัวได้ในทำนองเดียวกัน ดังตัวอย่าง (บัญญัติ สร้อยแสง, 2553 : 71-72)

อนุพันธ์ย่อยอันดับที่สาม

เช่น $f_{xyz}(x,y,z) = \dfrac{\partial^3 f}{\partial z \partial y \partial x} = \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right) = \dfrac{\partial}{\partial z}\left[f_{xy}(x,y,z)\right]$

อนุพันธ์ย่อยอันดับที่สี่

เช่น $f_{yxyz}(x,y,z) = \dfrac{\partial^4 f}{\partial z \partial y \partial x \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y}\right) = \dfrac{\partial}{\partial z}\left[f_{yxy}(x,y,z)\right]$

ตัวอย่าง 6.24 จงหาอนุพันธ์ย่อยอันดับที่สองของ $f(x,y,z) = 3x^5y^2z - x^5y + xz^4 + yz^2$ จงหา $f_{xyz}(x,y,z)$, $f_{xxyz}(x,y,z)$, $f_{yzyz}(x,y,z)$ และ $f_{xzyzx}(x,y,z)$

วิธีทำ พิจารณา f_{xyz}

จาก $f\left(x,y,z\right) = 3x^5y^2z - x^5y + xz^4 + yz^2$

$$f_x(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x}\left(3x^5y^2z - x^5y + xz^4 + yz^2\right)$$

$$= 15x^4y^2z - 5x^4y + z^4$$

$$f_{xy}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial y}\left(15x^4y^2z - 5x^4y + z^4\right)$$

$$= 30x^4yz - 5x^4$$

$$f_{xyz}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial z}\left(30x^4yz - 5x^4\right)$$

$$= 30x^4y$$

ดังนั้น $f_{xyz}(x,y,z) = 30x^4y$

วิธีทำ พิจารณา $f_{xxyz}(x,y,z)$

จาก $f\left(x,y,z\right) = 3x^5y^2z - x^5y + xz^4 + yz^2$

$$f_x(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x}\left(3x^5y^2z - x^5y + xz^4 + yz^2\right)$$

$$= 15x^4y^2z - 5x^4y + z^4$$

$$f_{xx}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x}\left(15x^4y^2z - 5x^4y + z^4\right)$$

$$= 60x^3y^2z - 20x^3y$$

$$f_{xxy}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial y}\left(60x^3y^2z - 20x^3y\right)$$

$$= 120x^3yz - 20x^3$$

$$f_{xxyz}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial y}\left(120x^3yz - 20x^3\right)$$

$$= 120x^3y$$

ดังนั้น $f_{xxyz}(x,y,z) = 120x^3y$

วิธีทำ พิจารณา f_{yzyz}

จาก $f\left(x,y,z\right) = 3x^5y^2z - x^5y + xz^4 + yz^2$

$$f_y(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x}\left(3x^5y^2z - x^5y + xz^4 + yz^2\right)$$
$$= 6x^5yz - x^5 + z^2$$

$$f_{yz}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial z}\left(6x^5yz - x^5 + z^2\right)$$
$$= 6x^5y + 2z$$

$$f_{yzy}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial y}\left(6x^5y + 2z\right)$$
$$= 6x^5$$

$$f_{yzyz}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial z}\left(6x^5\right)$$
$$= 0$$

ดังนั้น $f_{yzyz}(x,y,z) = 0$

วิธีทำ พิจารณา $f_{xzyzx}(x,y,z)$

จาก $f\left(x,y,z\right) = 3x^5y^2z - x^5y + xz^4 + yz^2$

$$f_x(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x}\left(3x^5y^2z - x^5y + xz^4 + yz^2\right)$$

$$= 15x^4y^2z - 5x^4y + z^4$$

$$f_{xz}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial z}\left(15x^4y^2z - 5x^4y + z^4\right)$$

$$= 15x^4y^2 - 4z^3$$

$$f_{xzy}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial y}\left(15x^4y^2 - 4z^3\right)$$

$$= 30x^4y$$

$$f_{xzyz}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial z}\left(30x^4y\right)$$

$$= 0$$

$$f_{xzyzx}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial z}\left(0\right)$$

$$= 0$$

ดังนั้น $f_{xzyzx} = 0$

6.6 สรุปท้ายบทที่ 6

ในบทนี้นั้นเป็นเรื่องของฟังก์ชันหลายตัวแปรและอนุพันธ์ย่อย โดยพื้นฐานเริ่มต้นจากฟังก์ชันหลายตัวแปรจากบทนิยาม นั้นคือกำหนดให้ $f: D \to R$ โดยที่ $D \subseteq R^n$ เรียกฟังก์ชัน f ว่าเป็น **ฟังก์ชัน n ตัวแปร** $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ ถ้าสำหรับจุด $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ ใด ๆ ในโดเมน D สามารถหาค่า $f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ ได้เพียงค่าเดียวเท่านั้น และถ้า กำหนดให้ $z = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ เรียกเซตของ $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ ซึ่งเป็นจำนวนจริงว่า **โดเมนของฟังก์ชัน** f เขียนแทนด้วย D_f ส่วนเซตของ z ซึ่งเป็นจำนวนจริงเรียกว่า **เรนจ์ของฟังก์ชัน** f เขียนแทนด้วย R_f เพื่อหาโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันหลายตัวแปร หลังจากนั้นเป็นการหาลิมิตของฟังก์ชันสองตัวแปรจากบทนิยามที่ว่าถ้า f มีค่าลิมิตเท่ากับจำนวนจริง L ขณะที่ (x, y) ย่างเข้าสู่ จุด (x_0, y_0) ซึ่งแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$ ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก ๆ จำนวนจริงบวก ε ที่กำหนดให้จะมีจำนวนจริงบวก $\delta > 0$ ที่ทำให้ $\left|f(x,y) - L\right| < \varepsilon$ สำหรับทุก ๆ $(x,y) \in D$ ซึ่ง $0 < \left\|(x,y) - (x_0,y_0)\right\| < \delta$

หรือจะเป็นการหาค่าลิมิตของฟังก์ชันสองตัวแปรโดยใช้ทฤษฎีบทต่าง ๆ เพื่อนำไปสู่การหาอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันก์หลายตัวแปรโดยเริ่มจากฟังก์ชันสองตัวแปรจนถึงฟังก์ชัน n ตัวแปร พร้อมทั้งการใช้กฎลูกโซ่ในการหาอนุพันธ์ย่อย และเรื่องสุดท้ายคือการหาอนุพันธ์ย่อยอันดับสูง

คำถามท้ายบท

1. กำหนดให้ $f\left(x,y\right)=2x^2y-5y^2-3x-1$

   1.1 จงหา $f\left(0,0\right)$

   1.2 จงหา $f\left(-2,0\right)$

   1.3 จงหา $f\left(2,5\right)$

   1.4 จงหา $f\left(x,y+h\right)$

   1.5 จงหา $f\left(x+h,y\right)$

2. กำหนดให้ $f\left(x,y\right)=\dfrac{3x^2y-y^2}{xy-2}$ โดยที่ $xy\neq 2$

   2.1 จงหา $f\left(0,0\right)$

   2.2 จงหา $f\left(-2,0\right)$

   2.3 จงหา $f\left(2,5\right)$

   2.4 จงหา $f\left(x,y+h\right)$

   2.5 จงหา $f\left(x+h,y\right)$

3. กำหนดให้ $f\left(x,y\right)=\left(x^2y-y^3\right)\left(xy-5\right)$

   3.1 จงหา $f\left(0,0\right)$

   3.2 จงหา $f\left(-2,0\right)$

   3.3 จงหา $f\left(2,5\right)$

   3.4 จงหา $f\left(x,y+h\right)$

   3.5 จงหา $f\left(x+h,y\right)$

4. จงหาโดเมนของฟังก์ชันต่อไปนี้พร้อมทั้งเขียนกราฟของโดเมนของแตละฟังก์ชัน

   4.1 $f\left(x,y\right)=\sqrt{9-x^2-y^2}$

   4.2 $f\left(x,y\right)=\sqrt{x^2+y^2-1}$

5. จงหาลิมิตต่อไปนี้

5.1 $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} 3y^2 - x^2y + 5$

5.2 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} 2xy^2$

5.3 $\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)} \dfrac{xy + x}{x^2 - y^2}$

5.4 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}$

6. จงแสดงว่าลิมิตของฟังก์ชันต่อไปนี้ไม่มีค่า

6.1 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 + y}{x^2 + y^2}$

6.2 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^3}{x^2 + y^6}$

7. กำหนด $f(x,y)$ ดังต่อไปนี้จงหา $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ และ $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ โดยใช้บทนิยาม

7.1 $f(x,y) = x^2y + 2xy$

7.2 $f(x,y) = 3xy - x^2y$

7.3 $f(x,y) = 15x^2y + x^2 - 2x + y$

7.4 $f(x,y) = xy^3 + xy - 2x^2 + y$

7.5 $f(x,y) = 2y^3 + 2x^2$

8. กำหนด $f(x,y)$ ดังต่อไปนี้จงหา $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ และ $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$

8.1 $f(x,y) = 15x^2y + x^2 - 2x + y$

8.2 $f(x,y) = xy^3 + xy - 2x^2 + y$

8.3 $f(x,y) = (xy^3 + x^5y)\sin 2x$

8.4 $f(x,y) = \dfrac{\tan(xy^3 + x^5y)}{5x - \sin 2x}$

8.5 $f(x,y) = \dfrac{xy^3 + x^5y}{15x^2y + x^2 - 2x + y}$

9. กำหนด $z = f\left(x,y\right) = x - y$ และ $x = \cos t$, $y = \cot t$ จงหา $\dfrac{df}{dt}\left(x,y\right)$

10. กำหนด $z = f\left(x,y\right) = x - y^2$ และ $x = \cos t$, $y = \sin t$ จงหา $\dfrac{df}{dt}\left(x,y\right)$

11. กำหนด $z = f\left(x,y\right) = 2xy^2$ และ $x = 3t + 5$, $y = \sin t$ จงหา $\dfrac{df}{dt}\left(x,y\right)$

12. กำหนด $z = f\left(x,y\right) = 2xy^2$ และ $x = 3t + 5$, $y = \sin t$ จงหา $\dfrac{df}{dt}\left(x,y\right)$

13. กำหนด $f\left(x,y\right) = x^3 + xy^2$ และ, $x = 3t + 5$, $y = \sin t$ จงหา $\dfrac{df}{dx}\left(x,y\right)$

14. จงหา $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ และ $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ กำหนด $z = f\left(x - y, 2x^2 + y^2\right)$ โดยที่ f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้

15. กำหนด $f\left(x,y,z\right) = x^{10}y^2z - 11y^5z - xz + x^3$ จงหาอนุพันธ์ย่อยดังต่อไปนี้

15.1 $f_{yz}\left(x,y,z\right)$

15.2 $f_{yzz}\left(x,y,z\right)$

15.3 $f_{xyz}\left(x,y,z\right)$

15.4 $f_{yxzyx}\left(x,y,z\right)$

16 กำหนด $f\left(x,y,z\right) = e^{xy} + \cos x^4y^2z$ จงหา $f_{yz}\left(x,y,z\right)$

เอกสารอ้างอิง

คณาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น. (2539). **แคลคูลัส 2.** พิมพ์ครั้งที่ 3 ขอนแก่น : มหาวิทยาลัยขอนแก่น.

บัญญัติ สร้อยแสง. (2553). **เอกสารประกอบการสอนแคลคูลัสและสมการเชิงอนุพันธ์สำหรับวิทยาศาสตร์ชีวภาพ.** ภาควิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์.

ศรีบุตร แววเจริญ. (2541). **คณิตศาสตร์สำหรับวิศวกรรมและวิทยาศาสตร์.** กรุงเทพมหานคร : วงตะวัน.

สิริวรรณ ตั้งจิตรวัฒนะกุล และสมศักดิ์ บุญมาเลิศ. (2542). **แคลคูลัสขั้นสูง 1.** พิมพ์ครั้งที่ 8 กรุงเทพมหานคร : ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยรามคำแหง.

สุกัญญา สนิทวงศ์ ณ อยุธยา และอนัญญา อภิชาตบุตร. (2551). **แคลคูลัส 2.** กรุงเทพมหานคร : ไฮเอ็ดพับลิชซิ่ง.

สุชาติ เจริญนิตย์. (2554). **แคลคูลัส 2.** พิมพ์ครั้งที่ 9 ปทุมธานี : มหาวิทยาลัยกรุงเทพ.

สุเทพ ลิ่มอรุณ. (2542). **แคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ 2.** เพชรบุรี : มหาวิทยาลัยราชภัฏเพชรบุรี.

อุบล กลองกระโทก. (2549). **เอกสารคำสอนคณิตศาสตร์สำหรับวิทยาศาสตร์ 2.** กรุงเทพมหานคร : คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา.

Buck, Creighton R. (1978). **Advanced Calculus.** New York : Mcgraw-Hill Book company Inc.

Taylor Angus E. (1972). **Advanced Calculus.** Lexingtion.

Trench William F. (1978). **Advanced Calculus.** Harper & Row, Publishers, New York.

แผนบริหารการสอนประจำบทที่ 7

เนื้อหาประจำบท

1. ปฏิยานุพันธ์
2. ปริพันธ์ของฟังก์ชันในรูปแบบต่าง ๆ
3. ปริพันธ์จำกัดเขต

วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม

1. อธิบายและให้ความหมายของปฏิยานุพันธ์ได้
2. สามารถแสดงวิธีทำเพื่อหาปริพันธ์ของฟังก์ชันในรูปแบบต่าง ๆ ได้
3. สามารถอธิบายความหมายของปริพันธ์จำกัดเขตได้
4. สามารถแสดงวิธีทำเพื่อปริพันธ์จำกัดเขตได้

วิธีการสอนและกิจกรรมการเรียนการสอนประจำบท

1. ผู้สอนบรรยายหัวข้อต่อไปนี้พร้อมเปิดโอกาสให้ซักถาม
    1.1 ปฏิยานุพันธ์
    1.2 ปริพันธ์ของฟังก์ชันในรูปแบบต่าง ๆ
    1.3 ปริพันธ์จำกัดเขต
2. ให้นักศึกษาทำกิจกรรมต่อไปนี้
    2.1. ศึกษาข้อมูลจากสื่ออิเล็กทรอนิกส์ เกี่ยวกับเรื่องปฏิยานุพันธ์
    2.2. ทำแบบฝึกหัดที่กำหนดให้

สื่อการเรียนการสอน

1. เอกสารประกอบการสอนและตำราต่าง ๆ
2. Slide Presentation

สื่อการเรียนการสอน

1. เอกสารประกอบการสอนและตำราต่าง ๆ
2. Slide Presentation

การวัดผลและการประเมินผล

1. สังเกตความสนใจของนักศึกษาขณะสอน ความตั้งใจ การฟัง การจดบันทึก และการซักถาม
2. แบบฝึกหัด
3. แบบทดสอบ
4. การมีส่วนร่วมในกิจกรรมการเรียนการสอน

บทที่ 7
ปริพันธ์

จากที่เคยกล่าวมาแล้วว่าวิชาคณิตศาสตร์สำหรับวิทยาศาสตร์ 1 นั้นเป็นส่วนหนึ่งของวิชาที่เรียกว่า แคลคูลัส และในการศึกษาแคลคูลัสนั้นโดยทั่ว 7.ๆ ไปจะแบ่งเนื้อหาที่สำคัญ ๆ ออกเป็น 2 สาขา คือสาขาหนึ่งทำการเกี่ยวกับเรื่องการหาอนุพันธ์ ซึ่งได้ทำการศึกษามาแล้วในบทที่ 3 ส่วนอีกสาขาหนึ่งเป็นการศึกษาเกี่ยวกับเรื่องการหาปริพันธ์ สำหรับปริพันธ์นี้เมื่อใช้เกี่ยวข้องกับแคลคูลัสกล่าวโดยพื้นฐานคือ การแสดงจำนวนทั้งหมด หรือ ผลบวกของผลรวม แต่ถ้าเป็นความหมายในเชิงคณิตศาสตร์ทั่วๆ ไป คือ การหาพื้นที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง การหาปริมาตร การหาความยาวเส้นโค้ง การหาจุดศูนย์ถ่วง ตลอดจนการประยุกต์ในด้านอื่น ๆ เช่น วิทยาศาสตร์ วิศวกรรมศาสตร์ และเศรฐศาสตร์ เป็นต้น โดยทั่วไปแล้ว การศึกษาเกี่ยวกับการหาปริพันธ์จะต้องควบคู่ไปกับการหาอนุพันธ์ นั่นคือ การศึกษาในเรื่องอนุพันธ์นั้นจะเริ่มจากศึกษาการกำหนดฟังก์ชัน f แล้วให้หาอนุพันธ์ของ f คือ f' แต่สำหรับการศึกษาปฏิยานุพันธ์นั้นเราจะศึกษาปัญหาที่ตรงข้ามกับปัญหาที่กล่าวมาข้างต้นแล้วจะได้ เมื่อกำหนดอนุพันธ์ฟังก์ชัน f' แล้วเราสามารถที่จะหาฟังก์ชัน f ได้

7.1 ปฏิยานุพันธ์

ก่อนที่จะหาปริพันธ์ของฟังก์ชันนั้นก่อนอื่นจะต้องศึกษาบทนิยามที่สำคัญและเกี่ยวข้องกับการหาปริพันธ์ดังต่อไปนี้ (กวิยา เนาวประทีป, 2547 : 113)

บทนิยาม 6.1

ฟังก์ชัน f เป็น**ฟังก์ชันที่หาค่าได้บนช่วง** I ถ้า สำหรับทุก ๆ $x \in I$ แล้วทำให้ $f(x)$ หาค่าได้

บทนิยาม 7.2

ให้ f เป็นฟังก์ชันที่หาค่าได้บนช่วง I ถ้ามีฟังก์ชัน F ซึ่ง $\dfrac{d}{dx}F(x) = f(x)$ ทุก $x \in I$ แล้วจะเรียก F ว่า **ปฏิยานุพันธ์** ของ f บน I

พิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 7.1

x^2	เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $2x$	เพราะ $\dfrac{d}{dx}x^2 = 2x$
$\dfrac{x^4}{4}$	เป็นปฏิยานุพันธ์ของ x^3	เพราะ $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x^4}{4}\right) = x^3$
$3x^3 - 1$	เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $9x^2$	เพราะ $\dfrac{d}{dx}\left(3x^3 - 1\right) = 9x^2$
$x^2 - 5$	เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $2x$	เพราะ $\dfrac{d}{dx}\left(x^2 - 5\right) = 2x$
$3x^3 + 5$	เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $9x^2$	เพราะ $\dfrac{d}{dx}\left(3x^3 + 5\right) = 9x^2$

จากตัวอย่าง 7.1 จะเห็นว่า x^2 และ $x^2 - 5$ ต่างก็เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $2x$ และ $3x^3 - 1$ กับ $3x^3 + 5$ ก็เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $9x^2$ ทั้งคู่ ดังนั้นแสดงให้เห็นว่าฟังก์ชันหนึ่งมีปฏิยานุพันธ์ได้มากกว่าหนึ่งฟังก์ชัน ซึ่งความจริงนี้เป็นจริงสำหรับฟังก์ชันถ้า $F(x)$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f(x)$ แล้ว $F(x) + c$ ก็เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f(x)$ ด้วย เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ ทั้งนี้เพราะว่า

$$\frac{d}{dx}\left[F(x) + c\right] = \frac{d}{dx}F(x) + \frac{d}{dx}c = f(x) + 0 = f(x)$$

ทฤษฎีบทต่อไปนี้จะแสดงให้เห็นว่าถ้า $F(x)$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f(x)$ บนช่วง I แล้วปฏิยานุพันธ์อื่น ๆ ของ $f(x)$ บน I จะอยู่ในรูป $F(x) + c$ เมื่อ c เป็นตัวคงค่า (คณาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยรามคำแหง, 2542 : 121)

ทฤษฎีบท 7.1

ถ้า $F'(x) = G'(x)$ สำหรับทุก ๆ $x \in I$ แล้วจะมีค่าคงตัว c ซึ่ง $F(x) - G(x) = c$ ทุก ๆ $x \in I$ โดยที่ c เป็นตัวคงค่า

จากทฤษฎีบท 7.1 ทำให้เราสามารถกำหนดรูปทั่วไปของปฏิยานุพันธ์ของ $f(x)$ ได้เป็น $F(x) + c$ เมื่อ F เป็นปฏิยานุพันธ์บางตัวของ f และ c เป็นตัวคงค่า และจะเรียก $F(x) + c$ ว่าเป็นปฏิยานุพันธ์ทั่วไปของ f บน I (กมล เอกไทยเจริญ, 2544 : 125)

บทนิยาม 7.3

ให้ f เป็นฟังก์ชันที่หาค่าได้บนช่วง I แล้วจะเรียกปฏิยานุพันธ์ทั่วไปของ f บน I ว่า **ปริพันธ์ไม่จำกัดเขต** ของ f แทนด้วย $\int f(x)\ dx$ หรือเขียนย่อ ๆ ด้วย $\int f$ นั่นคือ $\int f(x)\ dx = F(x) + c$

เครื่องหมาย $\int dx$ เรียกว่า**เครื่องหมายปริพันธ์เทียบกับ** x

วิธีการหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขตเรียกว่า **การหาปฏิยานุพันธ์** หรือ **ปริพันธ์ไม่จำกัดเขต**

ตัวคงค่า c ในปริพันธ์ไม่จำกัดเขต เรียกว่า **ค่าคงตัวของกาหาปฏิยานุพันธ์**

ฟังก์ชัน f หรือ $f(x)$ เรียกว่า **ปริพัทธ์**

และเรียก x ว่า **ตัวแปรหุ่นของการหาปริพันธ์**

ตัวอย่าง 7.2

$\int 4x^3\ dx = x^4 + c$ เนื่องจาก $\dfrac{d}{dx}(x^4 + c) = 4x^3$

$\int (x-1)^2\ dx = \dfrac{1}{3}(x-1)^3 + c$ เนื่องจาก $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{3}(x-1)^3 + c\right) = (x-1)^2$

สูตรสำหรับหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขต สามารถหาได้ง่ายจากสูตรของการหาอนุพันธ์ดังต่อไปนี้

1. $\int k\,dx = kx + c$ เมื่อ k เป็นค่าคงตัว
2. $\int x^n\ dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c$ เมื่อ n เป็นจำนวนจริงใด ๆ ซึ่ง $n \neq -1$

7.1.1 คุณสมบัติของปริพันธ์ไม่จำกัดเขต

ก่อนที่เราจะหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขตนั้นเราต้องอาศัยคุณสมบัติต่าง ๆ ที่จะกล่าวถึงดังต่อไปนี้ (สุรวิทย์ ตันแต่งผล และอนุสรณ์ ชนวีรยุทธ, 2557 : 146)

ทฤษฎีบท 7.2

ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันที่มีปฏิยานุพันธ์ จะได้ว่า

1. $\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$ เมื่อ k เป็นค่าคงตัว
2. $\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

โดยทั่วไปถ้า $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n$ เป็นฟังก์ชันที่มีปฏิยานุพันธ์ และ $k_1, k_2, k_3, \ldots, k_n$ เป็นค่าคงตัว แล้วจะได้ว่า (พัฒนา สีมากุล, 2539 : 131)

$$\int [k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) + \cdots + k_n f_n(x)]\, dx = \int k_1 f_1(x)\, dx + \int k_2 f_2(x)\, dx + \cdots + \int k_n f_n(x)\, dx$$

ตัวอย่าง 7.3 จงหาค่า $\int (x^2 + 3x - 1)\, dx$

วิธีทำ $\int (x^2 + 3x - 1)\, dx = \int x^2\ dx + \int 3x\ dx - \int 1\ dx$

$$= \int x^2\ dx + 3\int x\ dx - \int 1\ dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} + c_1\right] + \left[\frac{3x^2}{2} + c_2\right] - [x + c_3]$$

โดยที่ c_1, c_2 และ c_3 เป็นตัวคงค่า และให้ $c = c_1 + c_2 + c_3$ ได้

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - x + c$$

ดังนั้น $\int (x^2 + 3x - 1)\, dx = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{3x^2}{2} - x + c$

ข้อสังเกต7.3

จากตัวอย่าง 7.3 เราสามารถรวมตัวคงค่าทั้งสามค่าคือ c_1, c_2, และ c_3 ให้เป็นตัวคงค่าเพียงตัวเดียวคือ c เพียงตัวเดียวตั้งแต่นี้เป็นต้นไป c ที่ได้จากการหาปริพันธ์ หมายถึงตัวคงค่า

ตัวอย่าง 7.4 จงหาปฏิยานุพันธ์ของ $4x^3 - 2x + 5$

วิธีทำ ปฏิยานุพันธ์ของ $4x^3 - 2x + 5$ คือ $\int (4x^3 - 2x + 5)\, dx$

$$\int (4x^3 - 2x + 5)\, dx = \int 4x^3 dx - \int 2x\, dx + \int 5\ dx$$

$$= 4\int x^3 dx - 2\int x\, dx + \int 5\ dx$$

$$= \frac{4x^4}{4} - \frac{2x^2}{2} + 5x + c$$

$$= x^4 - x^2 + 5x + c$$

ดังนั้น ปฏิยานุพันธ์ของ $4x^3 - 2x + 5$ คือ $x^4 - x^2 + 5x + c$

ตัวอย่าง 7.5 จงหาค่า $\int \dfrac{3x^2 - 2x + 1}{\sqrt{x}}\, dx$

วิธีทำ $\int \dfrac{3x^2 - 2x + 1}{\sqrt{x}}\, dx = \int \dfrac{3x^2 - 2x + 1}{x^{1/2}}\, dx$

$$= \int \left(\frac{3x^2}{x^{1/2}} - \frac{2x}{x^{1/2}} + \frac{1}{x^{1/2}} \right) dx$$

$$= \int 3x^{3/2}\, dx - \int 2x^{1/2}\, dx + \int x^{-1/2}\, dx$$

$$= 3\int x^{3/2}\, dx - 2\int x^{1/2}\, dx + \int x^{-1/2}\, dx$$

$$= \frac{6x^{5/2}}{5} - \frac{4x^{3/2}}{3} + 2x^{1/2} + c$$

ดังนั้น $\int \dfrac{3x^2 - 2x + 1}{\sqrt{x}}\, dx = \dfrac{6x^{5/2}}{5} - \dfrac{4x^{3/2}}{3} + 2x^{1/2} + c$

ตัวอย่าง 7.6 จงหาค่า $\int (3x-1)^2\, dx$

วิธีทำ $\int (3x-1)^2\, dx = \int (9x^2 - 6x + 1)\, dx$

$$= \int 9x^2\, dx - \int 6x\, dx + \int 1\, dx$$

$$= 9\int x^2\, dx - 6\int x\, dx + \int 1\, dx$$

$$= \frac{9x^3}{3} - \frac{6x^2}{2} + x + c$$

$$= 3x^3 - 3x^2 + x + c$$

ดังนั้น $\int (3x-1)^2\, dx = 3x^3 - 3x^2 + x + c$

จากตัวอย่าง 7.6 $\int (3x-1)^2\, dx = \int (9x^2 - 6x + 1)\, dx$ ซึ่งสามารถทำได้ไม่ยาก เนื่องจาก $(3x-1)^2 = 9x^2 - 6x + 1$ แต่ถ้า $(3x-1)$ ยกกำลังมากกว่า 2 แล้วจะทำให้การกระจายยากขึ้นดังนั้นในกรณีดังกล่าวนั้นปริพัทธ์อยู่ในรูปของฟังก์ชันประกอบ การหาปริพันธ์จะทำได้โดยใช้ทฤษฎีบทต่อไปนี้ (เฟื่องฟ้า ศรีจันทพงศ์ และคณะ, 2553 : 133-134)

ทฤษฎีบท 7.3

ให้ $u = g(x)$ เป็นฟังก์ชันที่สามารถหาอนุพันธ์ได้บนช่วง I และให้ $f(u)$ เป็นฟังกชันที่มี $F(u)$ เป็นปฏิยานุพันธ์บนช่วง I จะได้

$$\int f[g(x)]\, g'(x)\, dx = F[g(x)] + c$$

หรือ $\int f(u)\, du = F(u) + c$ โดยที่ c เป็นตัวคงค่า

ตัวอย่าง 7.7 จงแสดงว่า $\int [f(x)]^n\, f'(x)\, dx = \dfrac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c$
เมื่อ n เป็นจำนวนจริงที่ $n \neq -1$

วิธีทำ เนื่องจาก
$$\frac{d}{dx}\left[\frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c\right] = \frac{d}{dx}\left[\frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1}\right] + \frac{d}{dx}c$$
$$= \frac{1}{n+1}\frac{d}{dx}\left[[f(x)]^{n+1}\right] + 0$$
$$= \frac{1}{n+1}\left[(n+1)[f(x)]^n\, \frac{d}{dx}f(x)\right]$$
$$= [f(x)]^n f'(x)$$

นั่นคือ $$\int [f(x)]^n\, f'(x)\, dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c$$

จากตัวอย่าง 7.7 ถ้าให้ $u = f(x)$ จะได้ $du = f'(x)\, dx$

ดังนั้น $\int [f(x)]^n\, f'(x)\, dx = \int u^n\, du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1}, n \neq 1$ จึงทำให้ได้สูตรสำหรับการหาปริพันธ์ฟังก์ชันยกกำลัง คือ $\int u^n\, du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + c$ เมื่อ n เป็นจำนวนจริงที่ $n \neq 1$ และ c เป็นตัวคงค่า

ตัวอย่าง 7.8 จงหาค่า $\int (3x-1)^{20}dx$

วิธีทำ ให้ $u = 3x-1$

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(3x-1)$$

$$\frac{du}{dx} = 3$$

$$du = 3dx$$

$$dx = \frac{du}{3}$$

จะได้ $\int (3x-1)^{20}dx = \int u^{20}\, dx$

$$= \int u^{20}\, \frac{du}{3}$$

$$= \frac{1}{3}\int u^{20}$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{u^{21}}{21}\right) + c$$

$$= \frac{u^{21}}{63} + c$$

$$= \frac{(3x-1)^{21}}{63} + c$$

ดังนั้น $\int (3x-1)^{20}dx = \dfrac{(3x-1)^{21}}{63} + c$

ตัวอย่าง 7.9 จงหาค่า $\int x^2\sqrt{5x^3+1}\; dx$

วิธีทำ ให้ $u = 5x^3+1$

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(5x^3+1)$$

$$\frac{du}{dx} = 15x^2$$

$$du = 15x^2dx$$

$$dx = \frac{du}{15x^2}$$

จะได้ $$\int x^2\sqrt{5x^3+1}\ dx = \int x^2\sqrt{u}\ \frac{du}{15x^2}$$

$$= \int x^2 u^{1/2}\,\frac{du}{15x^2}$$

$$= \int u^{1/2}\,\frac{du}{15}$$

$$= \frac{1}{15}\int u^{1/2}\,du$$

$$= \frac{1}{15}\left(\frac{u^{3/2}}{\frac{1}{2}+1}\right)+c$$

$$= \frac{2}{45}u^{3/2}+c$$

$$= \frac{2}{45}\left(5x^3+1\right)^{3/2}$$

ดังนั้น $\int x^2\sqrt{5x^3+1}\ dx = \dfrac{2}{45}\left(5x^3+1\right)^{3/2}$

ตัวอย่าง 7.10 จงหาค่า $\int \dfrac{2x^3-x}{(x^4-x^2+1)^5}\ dx$

วิธีทำ ให้ $u = x^4 - x^2 + 1$

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x^4-x^2+1\right)$$

$$\frac{du}{dx} = 4x^3-2x$$

$$du = (4x^3-2x)dx$$

$$dx = \frac{du}{(4x^3-2x)}$$

จะได้ $$\int \frac{2x^3-x}{(x^4-x^2+1)^5}\ dx = \int \frac{2x^3-x}{u^5}\ dx$$

$$= \int \frac{2x^3 - x}{u^5} \frac{du}{(4x^3 - 2x)}$$

$$= \int \frac{2x^3 - x}{u^5} \frac{du}{2(2x^3 - x)}$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{u^5} du$$

$$= \frac{1}{2} \int u^{-5} du$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{u^{-4}}{-4}\right) + c$$

$$= -\frac{1}{8} u^{-4} + c$$

$$= -\frac{1}{8}(x^4 - x^2 + 1)^{-4} + c$$

ดังนั้น $\int \frac{2x^3 - x}{(x^4 - x^2 + 1)^5}\, dx = -\frac{1}{8}(x^4 - x^2 + 1)^{-4} + c$

7.1.2 ปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

จากสูตรการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ จะได้สูตรปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติดังนี้ เมื่อกำหนดให้ $u = f(x)$ หาอนุพันธ์ได้ (ไมตรี ปชาเดชสุวัฒน์, 2532 : 142)

1. $\int \sin u \; du = -\cos u + c$
2. $\int \cos u \; du = \sin u + c$
3. $\int \sec^2 u \; du = \tan u + c$
4. $\int \csc^2 u \; du = -\cot u + c$
5. $\int \sec u \tan u \; du = \sec u + c$
6. $\int \csc u \cot u \; du = -\csc u + c$

ตัวอย่าง 7.11 จงหาค่า $\int \sin(3x-1)dx$

วิธีทำ ให้ $u = 3x - 1$

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}\big(3x-1\big)$$

$$\frac{du}{dx} = 3$$

$$du = 3dx$$

$$dx = \frac{du}{3}$$

จะได้ $\int \sin(3x-1)\,dx = \int \sin u\,dx$

$$= \int \sin u \frac{du}{3}$$

$$= \frac{1}{3}\int \sin u\,du$$

$$= -\frac{1}{3}\cos u + c$$

$$= -\frac{1}{3}\cos(3x-1) + c$$

ดังนั้น $\int \sin(3x-1)dx = -\cos(3x-1) + c$

ตัวอย่าง 7.12 จงหาค่า $\int x^3 \sec x^4 \tan x^4\, dx$

วิธีทำ ให้ $u = x^4$

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}x^4$$

$$\frac{du}{dx} = 4x^3$$

$$du = 4x^3 dx$$

$$dx = \frac{du}{4x^3}$$

จะได้ $\int x^3 \sec x^4 \tan x^4\, dx = \int x^3 \sec u \tan u\, dx$

$$= \int x^3 \sec u \tan u \frac{du}{4x^3}$$

$$= \frac{1}{4} \int \sec u \tan u \, du$$

$$= \frac{1}{4} \sec u + c$$

$$= \frac{1}{4} \sec x^4 + c$$

ดังนั้น $\int x^3 \sec x^4 \tan x^4 \, dx = \frac{1}{4} \sec x^4 + c$

ตัวอย่าง 7.13 จงหาค่า $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1-\cos 2x}} \, dx$

วิธีทำ ให้ $u = 1 - \cos 2x$

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}\left(1 - \cos 2x\right)$$

$$\frac{du}{dx} = 2\sin 2x$$

$$du = (2\sin 2x)dx$$

$$dx = \frac{du}{(2\sin 2x)}$$

จะได้ $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1-\cos 2x}} \, dx = \int \frac{\sin 2x}{\sqrt{u}} \, dx$

$$= \int \frac{\sin 2x}{\sqrt{u}} \frac{du}{2\sin 2x}$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{u}} \, du$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{u^{1/2}} \, du$$

$$= \frac{1}{2} \int u^{-1/2} \, du$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{u^{1/2}}{\frac{1}{2}}\right) + c$$

$$= u^{1/2} + c$$

$$= (1-\cos 2x)^{1/2} + c$$

$$= \sqrt{1-\cos 2x} + c$$

ดังนั้น $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1-\cos 2x}}\, dx = \sqrt{1-\cos 2x} + c$

ตัวอย่าง 7.14 จงหาค่า $\int \sqrt{\tan x}\sec^2 x\, dx$

วิธีทำ ให้ $u = \tan x$

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}\tan x$$

$$\frac{du}{dx} = \sec^2 x$$

$$du = \sec^2 x\, dx$$

$$dx = \frac{du}{\sec^2 x}$$

จะได้ $\int \sqrt{\tan x}\sec^2 x\, dx = \int \sqrt{u}\sec^2 x\, dx$

$$= \int \sqrt{u}\sec^2 x \frac{du}{\sec^2 x}$$

$$= \int \sqrt{u}\, du$$

$$= \int u^{1/2}\, du$$

$$= \frac{2}{3}u^{3/2} + c$$

$$= \frac{2}{3}\tan^{3/2} x + c$$

ดังนั้น $\int \sqrt{\tan x}\sec^2 x\, dx = \frac{2}{3}\tan^{3/2} x + c$

ตัวอย่าง 7.15 จงหาค่า $\int \frac{\cot x}{\csc^4 x}\ dx$

วิธีทำ ให้ $u = \csc x$

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\csc x\right)$$

$$\frac{du}{dx} = -\csc x \cot x$$

$$du = (-\csc x \cot x)dx$$

$$dx = \frac{du}{(-\csc x \cot x)}$$

จะได้ $\int \frac{\cot x}{\csc^4 x}\ dx = \int \frac{\cot x}{u^4}\ dx$

$$= \int \frac{\cot x}{u^4}\ \frac{du}{(-\csc x \cot x)}$$

$$= \int \frac{1}{u^4}\ \frac{du}{(-\csc x)}$$

$$= \int \frac{1}{-u^5} du$$

$$= \int -u^{-5}\ du$$

$$= \left(\frac{-u^{-4}}{-4}\right) + c$$

$$= \frac{u^{-4}}{4} + c$$

$$= \frac{1}{4}(\csc^{-4} x) + c$$

ดังนั้น $\int \frac{\cot x}{\csc^4 x}\ dx = \frac{1}{4}(\csc^{-4} x) + c$

7.1.3 ปริพันธ์ของฟังก์ชันลอกาลิทึม และฟังก์ชันชี้กำลัง

จากสูตรการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันลอกาลิทึม และฟังก์ชันชี้กำลัง จะได้สูตรปริพันธ์ของฟังก์ชันลอกาลิทึม และฟังก์ชันชี้กำลัง ดังนี้เมื่อกำหนดให้ $u = f(x)$ หาอนุพันธ์ได้ (จันทนีย์ กาญจนะโรจน์ และชุลี โชติกประคัลภ์, 2557 : 131)

1. $\int \frac{1}{u} du = \ln|u| + c$
2. $\int e^{u}\, du = e^{u} + c$
3. $\int a^{u}\, du = \frac{a^{u}}{\ln a} + c, \quad a > 0$ และ $a \neq 1$

ตัวอย่าง 7.16 จงหาค่า $\int \frac{1}{2x+5}\, dx$

วิธีทำ ให้ $u = 2x + 5$

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(2x+5)$$

$$\frac{du}{dx} = 2$$

$$du = 2dx$$

$$dx = \frac{du}{2}$$

จะได้
$$\int \frac{1}{2x+5}\, dx = \int \frac{1}{u}\, dx$$
$$= \int \frac{1}{u}\, \frac{du}{2}$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\, du$$
$$= \frac{1}{2}\ln|u| + c$$
$$= \frac{1}{2}\ln|2x+5| + c$$

ดังนั้น $\int \frac{1}{2x+5}\, dx = \frac{1}{2}\ln|2x+5| + c$

ตัวอย่าง 7.17 จงหาค่า $\int \tan x\,dx$

วิธีทำ $\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx$

ให้ $u = \cos x$

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}\cos x$$

$$\frac{du}{dx} = -\sin x$$

$$du = -\sin x\,dx$$

$$dx = \frac{du}{-\sin x}$$

จะได้ $\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx$

$$= \int \frac{\sin x}{u}\ dx$$

$$= \int \frac{\sin x}{u}\ \frac{du}{(-\sin x)}$$

$$= -\int \frac{1}{u}du$$

$$= -\ln\left|u\right| + c$$

$$= -\ln\left|\cos x\right| + c$$

$$= \ln\left|\cos x\right|^{-1} + c$$

$$= \ln\left|\sec x\right| + c$$

ดังนั้น $\int \tan x\,dx = \ln\left|\sec x\right| + c$

ตัวอย่าง 7.18 จงหาค่า $\int 3x^2 e^{x^3}\, dx$

วิธีทำ ให้ $u = x^3$

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}x^3$$

$$\frac{du}{dx} = 3x^2$$

$$du = 3x^2\, dx$$

$$dx = \frac{du}{3x^2}$$

จะได้ $\int 3x^2 e^{x^3}\, dx = \int 3x^2 e^u\, dx$

$$= \int 3x^2 e^u \frac{du}{3x^2}$$

$$= \int e^u\, du$$

$$= e^u + c$$

$$= e^{x^3} + c$$

ดังนั้น $\int 3x^2 e^{x^3}\, dx = e^{x^3} + c$

ตัวอย่าง 7.19 จงหาค่า $\int \frac{e^x}{e^x + 1} dx$

วิธีทำ ให้ $u = e^x + 1$

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(e^x + 1)$$

$$\frac{du}{dx} = e^x$$

$$du = e^x\, dx$$

$$dx = \frac{du}{e^x}$$

จะได้ $\int \frac{e^x}{e^x + 1} dx = \int \frac{e^x}{u} dx$

$$= \int \frac{e^x}{u} \frac{du}{e^x}$$

$$= \int \frac{1}{u} du$$

$$= \ln\left|u\right| + c$$

$$= \ln\left|e^x + 1\right| + c$$

ดังนั้น $\int \frac{e^x}{e^x + 1} dx = \ln\left|e^x + 1\right| + c$

ตัวอย่าง 7.20 จงหาค่า $\int \sqrt{10^{3x}}\, dx$

วิธีทำ $\int \sqrt{10^{3x}}\, dx = \int 10^{3x/2}\, dx$

ให้ $u = \frac{3x}{2}$

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{3x}{2}\right)$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{3}{2}$$

$$dx = \frac{2}{3} du$$

จะได้ $\int \sqrt{10^{3x}}\, dx = \int 10^{3x/2}\, dx$

$$= \int 10^u\, dx$$

$$= \frac{2}{3} \int 10^u\, du$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{10^u}{\ln 10}\right) + c$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{10^{3x/2}}{\ln 10}\right) + c$$

ดังนั้น $\int \sqrt{10^{3x}}\, dx = \frac{2}{3}\left(\frac{10^{3x/2}}{\ln 10}\right) + c$

7.2 ปริพันธ์จำกัดเขต

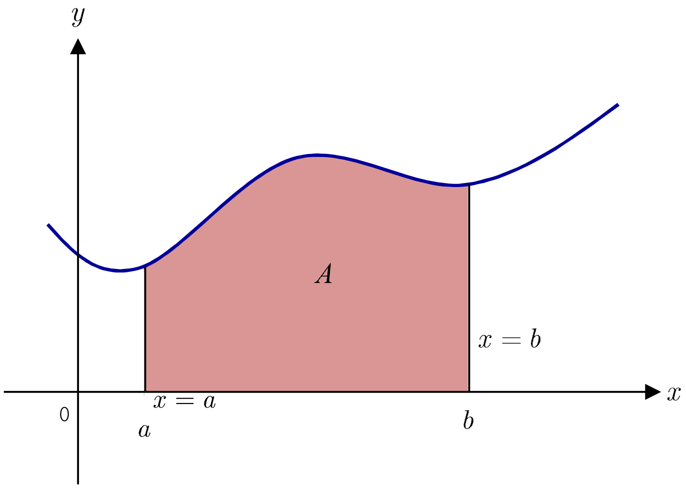
ก่อนที่จะศึกษาปริพันธ์จำกัดเขตนั้นต้องรู้จัก ตัวอักษรกรีก $\sum$ คือ **ซิกมา** ใช้ในคณิตศาสตร์นั้นใช้สำหรับระบุการบวกซ้ำ ๆ (Ross, F.L. Maurice,.W.D. and Frank, G.R., 2001 : 231)

ตัวอย่างเช่น

1. $\sum_{1}^{100} i = 1+2+3+\cdots+100$
2. $\sum_{1}^{5} 2i+1 = 3+5+7+9+11$
3. $\sum_{1}^{4} 3i = 3+6+9+12 = 3\left(1+2+3+4\right) = 3\sum_{1}^{4} i$

ในกรณีทั่ว ๆ ไปเมื่อกำหนดฟังก์ชัน f ที่นิยามบนเซตของจำนวนเต็ม และกำหนดจำนวนเต็ม k และ $n \geq k$ แทนด้วย $\sum_{i=k}^{n} f(i) = f(k) + f(k+1) + \cdots + f(n)$

ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่ง $f(x) \geq 0$ สำหรับทุกค่าของ x บนช่วงปิด $[a,b]$ กราฟของ f เป็นเส้นโค้งอยู่เหนือแกน x การหาพื้นที่ซึ่งอยู่ใต้เส้นโค้งเหนือแกน x และอยู่ระหว่างเส้น $x = a$ และ $x = b$ ในหัวข้อนี้เราจะพัฒนาวิธีการสำหรับหาพื้นที่ดังกล่าว

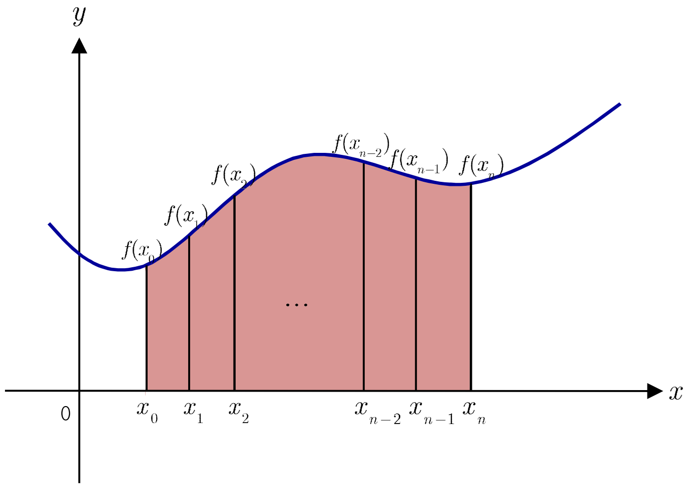


ภาพประกอบ 7.1 แสดงพื้นที่ A บนช่วงปิด $[a,b]$

ที่มา : คณาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยรามคำแหง. 2542 : 198

ให้ f เป็นฟังก์ชันใด ๆ ที่มีความต่อเนื่องบนช่วง $[a,b]$ แบ่งช่วง $[a,b]$ ออกเป็น n ส่วนที่เท่ากัน โดยมีจุดแบ่งคือ $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ โดยที่ $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ ดังนั้นแต่ละช่วงจะต้องยาว $\dfrac{b-a}{n} = \Delta x_i$ ในแต่ละช่วง $[x_i, x_{i-1}]$ ให้ $f(x_i)$ เป็นค่าของฟังก์ชัน f ณ จุด x_i และให้ S_n แทนผลบวกที่กำหนดดังนี้ (เลิศ สิทธิโกศล, 2541 : 141-142)

$$S_n = f(x_1)[x_1 - x_0] + f(x_2)[x_2 - x_1] + \cdots + f(x_3)[x_n - x_{n-1}]$$



ภาพประกอบ 7.2 แสดงการหา S_n ช่วง $[a,b]$

ที่มา : คณาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยรามคำแหง. 2542 : 198

บทนิยาม 7.4

กำหนดให้ a และ b เป็นค่าคงตัวใด ๆ โดยที่ $a = x_0$ และ $x_n = b$

ปริพันธ์จำกัดเขตของฟังก์ชัน f จาก a ถึง b หาค่าได้เมื่อ

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} f\left[(x_1)[x_1 - x_0] + f(x_2)[x_2 - x_1] + \cdots + f(x_3)[x_n - x_{n-1}]\right]$$

หาค่าได้จะใช้สัญลักษณ์ $\int_a^b f(x)\,dx$ เรียก a ว่าค่าลิมิตล่าง และเรียก b ว่าค่าลิมิตบน

นั่นคือ $\int_a^b f(x)\ dx = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$ เมื่อ $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ สำหรับ $i = 1, 2, 3, \ldots, n$

ทฤษฎีบท 7.4

ถ้า $\int f(x)\,dx = F(x)+c$ (หมายถึง $F(x)+c$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f(x)$) แล้ว **ปริพันธ์จำกัดเขต**ของ $f(x)$ จาก a ถึง b ซึ่งเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\int_a^b f(x)\,dx$ มีค่าเท่ากับ $F(x)\Big|_a^b$ หรือ $F(x)\Big|_{x=a}^{x=b} = F(b)-F(a)$

จากบนิยาม 7.4 $\int f(x)\,dx = F\left(x\right)+c$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \left[F(x)+c\right]\Big|_a^b \\ &= \left[F(b)+c\right]-\left[F(a)+c\right] \\ &= F(b)+c-F(a)-c \\ &= F(b)-F(a)\end{aligned}$$

ดังนั้น $\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$ เนื่องจากตัวคงค่า c ลบกันไปหมดจึงไม่จำเป็นต้องบวกเข้าไปดังตัวอย่างต่อไปนี้ (Wright,D.F. and New, B.D.,1992 : 211)

ตัวอย่าง 7.21 จงหาค่า $\int_1^3 2x\,dx$

วิธีทำ $2x$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[1,3]$

ได้
$$\begin{aligned}\int_1^3 2x\,dx &= \left[\frac{2x^2}{2}\right]\Bigg|_1^3 \\ &= \left[x^2\right]\Big|_1^3 \\ &= 3^2-1^2 \\ &= 9-1 \\ &= 8\end{aligned}$$

ดังนั้น $\int_1^3 2x\,dx = 8$

ตัวอย่าง 7.22 จงหาค่า $\int_{-1}^{2}(x^2-3x+1)\,dx$

วิธีทำ x^2-3x+1 เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[-1,2]$

ได้ $$\int_{-1}^{2}(x^2-3x+1)\,dx=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+x\right]\Bigg|_{-1}^{2}$$

$$=\left[\frac{2^3}{3}-\frac{3(2)^2}{2}+2\right]-\left[\frac{(-1)^3}{3}-\frac{3(-1)^2}{2}+(-1)\right]$$

$$=\left[\frac{8}{3}-\frac{12}{2}+2\right]-\left[-\frac{1}{3}-\frac{3}{2}-1\right]$$

$$=\frac{8}{3}-\frac{12}{2}+2+\frac{1}{3}+\frac{3}{2}+1$$

$$=\frac{9}{3}-\frac{9}{2}+3$$

$$=3+3-\frac{9}{2}$$

$$=1.5$$

ดังนั้น $\int_{-1}^{2}(x^2-3x+1)\,dx=1.5$

ตัวอย่าง 7.23 จงหาค่า $\int_{0}^{2}(3x-1)^{20}\,dx$

วิธีทำ $(3x-1)^{20}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[0,2]$

จากตัวอย่าง 7.8 $\int(3x-1)^{20}\,dx=\dfrac{(3x-1)^{21}}{63}+c$

จะได้ว่า $$\int_{0}^{2}(3x-1)^{20}\,dx=\left[\frac{(3x-1)^{21}}{63}\right]\Bigg|_{0}^{2}$$

$$=\left[\frac{(3(2)-1)^{21}}{63}\right]-\left[\frac{(3(0)-1)^{21}}{63}\right]$$

$$=\frac{5^{21}}{63}-\frac{(-1)}{63}$$

$$= \frac{5^{21}+1}{63}$$

ดังนั้น $\int_0^2 (3x-1)^{20}\,dx = \frac{5^{21}+1}{63}$

ตัวอย่าง 7.24 จงหาค่า $\int_0^1 x^2\sqrt{5x^3+1}\;dx$

วิธีทำ $x^2\sqrt{5x^3+1}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[0,1]$

จากตัวอย่าง 7.9 $\int x^2\sqrt{5x^3+1}\;dx = \frac{2}{45}\left(5x^3+1\right)^{\frac{3}{2}} + c$

จะได้ $\int_0^1 x^2\sqrt{5x^3+1}\;dx = \left[\frac{2}{45}\left(5x^3+1\right)^{3/2}\right]\Bigg|_0^1$

$$= \left[\frac{2}{45}\left(5(1^3)+1\right)^{3/2}\right] - \left[\frac{2}{45}\left(5(0)^3+1\right)^{3/2}\right]$$

$$= \frac{2}{45}(6^{3/2}) - \frac{2}{45}(1^{3/2})$$

$$= \frac{2}{45}\left[(6^{3/2})-1\right]$$

ดังนั้น $\int_0^1 x^2\sqrt{5x^3+1}\;dx = \frac{2}{45}\left[(6^{3/2})-1\right]$

7.3 สรุปท้ายบทที่ 6

ในการศึกษาเกี่ยวกับเรื่องปริพันธ์ สำหรับในเรื่องการหาอนุพันธ์ได้กล่าวถึง การหาอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ย อัตราการเปลี่ยนแปลงขณะใด ๆ รวมถึงความเร็ว และความเร่งในการเคลื่อนที่ และถ้าเราต้องการหาระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่ หรือแต่ถ้าเราต้องการการหาพื้นที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง การหาปริมาตร การหาความยาวเส้นโค้ง การหาจุดศูนย์ถ่วง ซึ่งเราไม่สามารถหาโดยใช้สูตร ที่เคยเรียนมาแล้วแต่เราสามารถใช้ปริพันธ์ เพราะปริพันธ์ตามความหมายของแคลคูลัสคือการแสดงจำนวนทั้งหมด หรือ ผลบวกของผลรวม เราสามารถใช้หลักการนี้นำไปประยุกต์ เพื่อหาคำตอบของสิ่งต่าง ๆ ที่เราต้องการได้ ดังนั้นการศึกษาปริพันธ์นั้นนอกจากจะมีความสำคัญในสาขาวิชาคณิตศาสตร์แล้ว ยังสามารถนำไปประยุกต์ใช้ในสาขาวิชาอื่น ๆ ได้อีกมากมายๆ เช่น วิทยาศาสตร์ วิศวกรรมศาสตร์ และเศรษฐศาสตร์ เป็นต้น

ถามท้ายบท

1. จงแสดงว่า x^2+1 เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $2x$
2. จงแสดงว่า $3x^5+7x^2-1$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $15x^4+14x$
3. จงแสดงว่า $x^{10}+x^6-x^4-3x+2$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $10x^9+6x^5-4x^3-3$
4. จงแสดงวิธีทำเพื่อหาค่าปริพันธ์ต่อไปนี้

   4.1 $\int (x^2+3x-1)\ dx$ 　　4.2 $\int (2x-1)\ dx$

   4.3 $\int (x^2\sqrt{x}+2x)\ dx$ 　　4.4 $\int (\sqrt{x}+2x^{20})\ dx$

5. จงใช้ทฤษฎีบท 7.3 เพื่อหาค่าปริพันธ์ต่อไปนี้

   5.1 $\int (\sqrt{x}+2x)^2\ dx$ 　　5.2 $\int (2+3t)^{2/3}\ dx$

   5.3 $\int \frac{dx}{\left(3x-2\right)^2}$ 　　5.4. $\int (x\sqrt{5x^2-3})\ dx$

   5.5 $\int \frac{y}{\sqrt{2y^2+1}}\ dy$ 　　5.6. $\int \frac{z+1}{\sqrt{z^2+2x+2}}\ dz$

6. จงหาค่าปริพันธ์ต่อไปนี้

   6.1 $\int \sin(2x-1)dx$ 　　6.2 $\int \cos(2x-1)dx$

   6.3 $\int \sec^2(x-1)\ dx$ 　　6.4 $\int \csc^2(3x+5)\ dx$

   6.5 $\int \sec(2x+9)\tan(2x+9)\ dx$ 　　6.6 $\int \csc(x-2)\cot(x-2)\ dx$

7. จงหาค่าปริพันธ์ต่อไปนี้

   7.1 $\int 3x^2\sec x^3\tan x^3\ dx$ 　　7.2 $\int \frac{\cos 3x}{\sqrt{1-\sin 3x}}\ dx$

   7.3 $\int \sqrt{\tan 2x}\sec^2 2x\, dx$ 　　7.4 $\int \sec^{10} 2x\tan 2x\, dx$

8. จงหาค่าปริพันธ์ต่อไปนี้

8.1 $\int \dfrac{1}{x-5}\ dx$

8.2 $\int \dfrac{3x}{x^2-5}\ dx$

8.3 $\int \dfrac{3}{6x+7}\ dx$

8.4 $\int e^{2x-1}\ dx$

8.5 $\int xe^{2x^2-3}\ dx$

8.6 $\int 3e^{-5x}\ dx$

9. จงหาค่าปริพันธ์จำกัดเขตต่อไปนี้

9.1 $\int_{0}^{5} (3x^2-1)\,dx$

9.2 $\int_{-1}^{0} (x^4-3x+2)\,dx$

9.3 $\int_{1}^{3} 5\,dx$

9.4 $\int_{0}^{3} (-6x+2)\,dx$

9.5 $\int_{0}^{1} (6x-2)\,dx$

9.6 $\int_{-3}^{3} (5x^4-6x^2+2)\,dx$

9.7 $\int_{0}^{1} x^2(5x^3+1)^{20}\,dx$

9.8 $\int_{2}^{5} (\dfrac{x}{2x^2-1})\,dx$

10. จงหาค่าปริพันธ์จำกัดเขตต่อไปนี้

10.1 $\int_{0}^{\pi} \sin(2x-1)\,dx$

10.2 $\int_{-1}^{0} \sin(2x-1)\,dx$

10.3 $\int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{\tan 2x}\sec^2 2x\,dx$

10.4 $\int_{0}^{3} \dfrac{1}{-6x+2}\,dx$

10.5 $\int_{0}^{1} \dfrac{x}{x^2-9}\,dx$

10.6 $\int_{-1}^{0} e^{3x}\,dx$

10.7 $\int_{0}^{1} xe^{x^2}\,dx$

10.8 $\int_{2}^{5} e^{3x-9}\,dx$

เอกสารอ้างอิง

กมล เอกไทยเจริญ. (2544). **แคลคูลัส 1.** กรุงเทพมหานคร : ไฮเอ็ดพับลิชชิ่ง.

กวิยา เนาวประทีป. (2547). **เทคนิคการเรียนคณิตศาสตร์ แคลคูลัสเบื้องต้น.** กรุงเทพมหานคร : ฟิสิกส์เซ็นเตอร์.

คณาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยรามคำแหง. (2542). **แคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ 1.** พิมพ์ครั้งที่ 8 กรุงเทพมหานคร : มหาวิทยาลัยรามคำแหง.

จันทนีย์ กาญจนะโรจน์ และชุลี โชติกประคัลภ์. (2557). **แคลคูลัส 1.** พิมพ์ครั้งที่ 4 กรุงเทพมหานคร : คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยกรุงเทพ.

พัฒนา สีมากุล. (2539). **แคลคูลัส 1.** กรุงเทพมหานคร : เจเนอรัลบุ๊คส์.

เฟื่องฟ้า ศรีจันทพงศ์ และคณะ. (2553). **แคลคูลัส 1.** พิมพ์ครั้งที่ 5 ขอนแก่น : ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น.

ไมตรี ปชาเดชสุวัฒน์. (2532). **แคลคูลัสเบื้องต้น.** กรุงเทพมหานคร : ประกอบเมไตร.

เลิศ สิทธิโกศล. (2541). **แคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ 1.** กรุงเทพมหานคร : สกายบุคส์.

สุรวิทย์ ตันแต่งผล และอนุสรณ์ ชนวีรยุทธ. (2557). **แคลคูลัส 1.** กรุงเทพมหานคร : จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

Ross, F.L. Maurice,.W.D. and Frank, G.R. (2001). **Calculus with analytic geometry.** New Yok : Addison-wesley.

Wright,D.F. and New, B.D. (1992). **Calulus with Applications.** Massachusetts : D.C Heath.

แผนบริหารการสอนประจำบทที่ 8

เนื้อหาประจำบท

1. กฎสำหรับการหาปฏิยานุพันธ์
2. การหาปริพันธ์โดยการแทนค่า หรือเปลี่ยนตัวแปร
3. การหาปริพันธ์โดยวิธีแยกเศษส่วนย่อย
4. การหาปริพันธ์ทีละส่วน
5. ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ

วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม

1. อธิบายและให้ความหมายกฎสำหรับการหาปฏิยานุพันธ์ได้
2. สามารถแสดงวิธีทำเพื่อหาปริพันธ์โดยการแทนค่า หรือเปลี่ยนตัวแปรได้
3. สามารถแสดงวิธีทำเพื่อหาปริพันธ์โดยวิธีแยกเศษส่วนย่อยได้
4. สามารถแสดงวิธีทำเพื่อหาปริพันธ์ทีละส่วนได้
5. สามารถแสดงวิธีทำเพื่อหาปริพันธ์ปริพันธ์ไม่ตรงแบบได้

วิธีการสอนและกิจกรรมการเรียนการสอนประจำบท

1. ผู้สอนบรรยายหัวข้อต่อไปนี้พร้อมเปิดโอกาสให้ซักถาม

   1.1 กฎสำหรับการหาปฏิยานุพันธ์

   1.2 การหาปริพันธ์โดยการแทนค่า หรือเปลี่ยนตัวแปร

   1.3 การหาปริพันธ์โดยวิธีแยกเศษส่วนย่อย

   1.4 การหาปริพันธ์ทีละส่วน

   1.5 ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ

2. ให้นักศึกษาทำกิจกรรมต่อไปนี้

   2.1. ศึกษาข้อมูลจาก เกี่ยวกับเรื่องเทคนิคการหาปริพันธ์เพิ่มเติม

   2.2. ทำแบบฝึกหัดที่กำหนดให้

สื่อการเรียนการสอน

1. เอกสารประกอบการสอนและตำราต่าง ๆ
2. Slide Presentation

การวัดผลและการประเมินผล

1. สังเกตความสนใจของนักศึกษาขณะสอน ความตั้งใจ การฟัง การจดบันทึก และการซักถาม
2. แบบฝึกหัด
3. แบบทดสอบ
4. การมีส่วนร่วมในกิจกรรมการเรียนการสอน

บทที่ 8
เทคนิคการหาปริพันธ์

การหาปริพันธ์ของฟังก์ชันนั้นถึงแม้จะมีสูตรพื้นฐานมากมายหลายสูตร ที่ทำให้เราสามารถหาปริพันธ์ของฟังก์ชันต่าง ๆ ได้ แต่ก็ยังมีฟังก์ชันหลายฟังก์ชันหลายรูปแบบที่เราไม่สามารถหาปริพันธ์ได้โดยใช้เพียงสูตรพื้นฐานจึงจำเป็นที่จะต้องใช้เทคนิคบางประการของการหาปริพันธ์เข้าช่วยจึงจะหาผลลัพธ์ได้สำเร็จ วัตถุประสงส์ของการศึกาในบทนี้จึ่งเน้นในแง่การเพิ่มเติมและพัฒนาเทคนิคของการหาปริพันธ์ให้เป็นระบบ เพื่อที่จะสามารถเลือกใช้ระเบียบวิธีที่เหมาะสมกับรูปแบบของตัวปริพันธ์ ซึ่งจัดเป็นรูปแบบต่าง ๆ ได้ เทคนิคสำคัญของการหาปริพันธ์แบ่งได้เป็น 3 วิธี คือการหาปริพันธ์โดยการแทนค่า หรือเปลี่ยนตัวแปร การหาปริพันธ์โดยวิธีแยกเศษส่วนย่อย การหาปริพันธ์ที่ละส่วน และนอกจากนี้ในบทนี้ยังได้ศึกษาการหาปริพันธ์จำกัดเขตแต่ขอบเขตนั้นไม่เป็นจำนวนจริงเหมือนกับบทที่ผ่านมาซึ่งเรียกว่าการหาปริพันธ์ไม่ตรงแบบ และในบางปัญหารการหาปริพันธ์ทั้งการหาปริพันธ์จำกัดเขตและไม่จำกัดเขต อาจต้องใช้เทคนิคของการหาปริพันธ์มากกว่า 1 เทคนิค ผสมผสานกันก็ได้

8.1 กฎพื้นฐานสำหรับปฏิยานุพันธ์

กฎสำหรับการหาอนุพันธ์ โดยเฉพาะกฎผลบวกหรือผลต่าง และกฎลูกโซ่ ใช้สร้างกฎที่สมนัยกันสำหรับหาปฏิยานุพันธ์ เมื่อกำหนดให้ u และ v เป็นฟังก์ชันของตัวแปรอิสระบางตัว (เช่น x) ซึ่งหาอนุพันธ์ได้โดยที่ a, n และ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ แล้วเราจะได้กฎพื้นฐานสำหรับการหาปริพันธ์ดังต่อไปนี้ (ทศพร คล้ายอุดม และคณะ, 2537 : 15-16)

1. $\int du = u + c$
2. $\int a\ du = a\int du$
3. $\int [du + dv] = \int du + \int dv$
4. $\int u^n\ du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + c$ เมื่อ $n \neq -1$

ข้อสังเกต 8.1

สำหรับกฎข้อที่ 3 สามารถขยายได้สำหรับกรณีผลบวกเชิงอนุพันธ์ที่มีจำนวนพจน์จำกัดนั่นคือ $\int [du_1 + du_2 + \cdots + du_n] = \int du_1 + \int du_2 + \cdots + \int du_n$

ตัวอย่าง 8.1 จงหาค่า $\int (x^2 + 3x - 1)\ dx$

วิธีทำ $\int (x^2 + 3x - 1)\ dx = \int x^2\ dx + \int 3x\ dx - \int 1\ dx$

$$= \int x^2\ dx + 3\int x\ dx - \int 1\ dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} + c_1\right] + \left[3\left(\frac{x^2}{2}\right) + c_2\right] - [x + c_3]$$

เมื่อ c_1, c_2 และ c_3 เป็นตัวคงค่า

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - x + c$$ เมื่อ c เป็นตัวคงค่าที่ $c = c_1 + c_2 + c_3$

ดังนั้น $\int (x^2 + 3x - 1)\ dx = \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - x + c$

ข้อสังเกต 8.2

จากตัวอย่าง 8.2 เราสามารถรวมตัวคงค่าทั้งสามค่า คือ c_1, c_2, และ c_3 ให้เป็นตัวคงค่าเพียงค่าเดียวคือ c ดังนั้นจากนี้เป็นต้นไปการหาปริพันธ์ที่บรรจุตัวคงค่าเพียงตัวเดียวเท่านั้น

ตัวอย่าง 8.2 จงหาปฏิยานุพันธ์ของ $4x^3 - 2x + 5$

วิธีทำ ปฏิยานุพันธ์ของ $4x^3 - 2x + 5$ คือ $\int \left(4x^3 - 2x + 5\right) dx$

$$\int \left(4x^3 - 2x + 5\right) dx = \int 4x^3\ dx - \int 2x\ dx + \int 5\ dx$$

$$= 4\int x^3\ dx - 2\int x\ dx + \int 5\ dx$$

$$= \frac{4x^4}{4} - \frac{2x^2}{2} + 5x + c$$

$$= x^4 - x^2 + 5x + c$$

ดังนั้น ปฏิยานุพันธ์ของ $4x^3 - 2x + 5$ คือ $x^4 - x^2 + 5x + c$

ตัวอย่าง 8.3 จงหาค่า $\int (3x-1)^2\,dx$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\int (3x-1)^2\,dx &= \int \left(9x^2-6x+1\right)\,dx \\ &= \int 9x^2\ dx - \int 6x\ dx + \int 1\ dx \\ &= 9\int x^2\ dx - 6\int x\ dx + \int 1\ dx \\ &= \frac{9x^3}{3} - \frac{6x^2}{2} + x + c \\ &= 3x^3 - 3x^2 + x + c\end{aligned}$$

ดังนั้น $\int \left(3x-1\right)^2 dx = 3x^3 - 3x^2 + x + c$

จากตัวอย่าง 8.3 $\int (3x-1)^2\,dx = \int \left(9x^2-6x+1\right)\,dx$ ซึ่งสามารถทำได้ไม่ยาก เนื่องจาก $(3x-1)^2 = 9x^2-6x+1$ แต่ถ้า $(3x-1)$ ยกกำลังมากกว่า 2 แล้วจะทำให้การกระจายยากขึ้นดังนั้น จึงต้องใช้เทคนิคการเปลี่ยนตัวแปรเพื่อช่วยในการหาปฏิยานุพันธ์ให้ง่ายขึ้น ตัวอย่างเช่น $\int (3x-1)^{20}\,dx$ ต้องกระจาย $(3x-1)$ คูณกันทั้งหมด 20 ครั้งซึ่งทำให้ยุ่งยากและเสียเวลาดังนั้น จึงต้องใช้เทคนิคการหาปริพันธ์โดยการเปลี่ยนตัวแปรซึ่งจะกล่าวถึงในหัวข้อ 8.2 ดังต่อไปนี้

8.2 การหาปริพันธ์โดยการแทนค่า หรือเปลี่ยนตัวแปร

เป็นวิธีการหาปริพันธ์ที่ใช้เพื่อเปลี่ยนรูปแบบของปริพัทธ์ ให้เข้าแบบมาตรฐานตามสูตรพื้นฐานของการหาปริพันธ์ซึ่งได้กล่าวถึงในหัวข้อ 8.1 ไปแล้วนั้น โดยทั่วไปแล้วไม่มีกฎเกณฑ์ตายตัวว่าควรจะแทนค่าแบบใดหรือเปลี่ยนตัวแปร อย่างไรต้องอาศัยหมั่นฝึกฝน สังเกต ความแม่นสูตร และจินตนาการ จึงจะทำให้การสร้างสมประสบการณ์ที่จะเป็นประโยชน์ในการหาปริพันธ์ในคราวต่อ ๆ ไปได้ แต่อย่างไรก็ตามเราสามารถกำหนดปริพัทธ์ออกเป็นพวกหรือประเภทที่ใช้ระเบียบวิธีการแทนค่า แบบเดียวกันได้ หลายประเภทดังนี้

การแทนค่าอย่างง่ายรูปทั่ว ๆ ไป

ถ้าต้องการหาค่าของ $\int f[g(x)]g'(x)\ dx$ โดยการแทนค่า $u = g(x)$ และถ้าเราทราบว่า F เป็นปฏิยานุพันธ์ของ f แล้ว

$\int f[g(x)]g'(x)\ dx = \int f(u)\ du = F(u) + c = F[g(x)] + c$

ทั้งนี้เรามีจุดมุ่งหมายของการแทนค่าหรือเปลี่ยนตัวแปรให้ปริพัทธ์ อยู่ในรูปแบบมาตรฐาน แบบหนึ่งแบบใดจากสูตรต่อไปนี้ (คณาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น, 2539 : 1-2)

1. $\int u^n\ du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + c$ เมื่อ $n \neq -1$
2. $\int \dfrac{1}{u}\ du = \ln u + c$
3. $\int e^u\ du = e^u + c$
4. $\int a^u\ du = \dfrac{a^u}{\ln a} + c$ เมื่อ $a > 0$
5. $\int \sin u\ du = -\cos u + c$
6. $\int \cos u\ du = \sin u + c$
7. $\int \sec^2 u\ du = \tan u + c$
8. $\int \csc^2 u\ du = -\cot u + c$
9. $\int \sec u \tan u\ du = \sec u + c$
10. $\int \csc u \cot u\ du = -\csc u + c$
11. $\int \sec u \tan u\ du = \sec u + c$
12. $\int \tan u\ du = \ln\left|\sec u\right| + c$
13. $\int \cot u\ du = \ln\left|\sin u\right| + c$
14. $\int \sec u\ du = \ln\left|\sec u + \tan u\right| + c$
15. $\int \csc u\ du = \ln\left|\csc u + \cot u\right| + c$
16. $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\dfrac{u}{a} + c$ เมื่อ $a > 0$
17. $\int \dfrac{du}{a^2 + u^2} = \arctan\dfrac{u}{a} + c$ เมื่อ $a > 0$
18. $\int \dfrac{du}{u\sqrt{a^2 - u^2}} = \dfrac{1}{a}\operatorname{arcsec}\left|\dfrac{u}{a}\right| + c$ เมื่อ $\left|u\right| > a > 0$

ตัวอย่าง 8.4 จงหาค่า $\int (3x-1)^{20}\,dx$

วิธีทำ ให้ $u = 3x-1$

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(3x-1)$$

$$\frac{du}{dx} = 3$$

$$du = 3dx$$

$$dx = \frac{du}{3}$$

นั่นคือ $\int (3x-1)^{20} dx = \int u^{20}\,dx$

$$= \int u^{20}\,\frac{du}{3}$$

$$= \frac{1}{3}\int u^{20}\,du$$

$$= \frac{1}{3}\frac{u^{21}}{21} + c$$

$$= \frac{u^{21}}{63} + c$$

$$= \frac{(3x-1)^{21}}{63} + c$$

ดังนั้น $\int (3x-1)^{20}\,dx = \dfrac{\left(3x-1\right)^{21}}{63} + c$

ตัวอย่าง 8.5 จงหาค่า $\int x^2\sqrt{5x^3+1}\;dx$

วิธีทำ ให้ $u = 5x^3+1$

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(5x^3+1)$$

$$\frac{du}{dx} = 15x^2$$

$$du = 15x^2dx$$

$$dx = \frac{du}{15x^2}$$

นั่นคือ $\int x^2\sqrt{5x^2+1}\ dx = \int x^2\sqrt{u}\ \frac{du}{15x^2}$

$$= \int x^2 u^{1/2}\frac{du}{15x^2}$$

$$= \int u^{1/2}\frac{du}{15}$$

$$= \frac{1}{15}\int u^{1/2}\ du$$

$$= \frac{1}{15}\left(\frac{u^{3/2}}{\frac{1}{2}+1}\right)$$

$$= \frac{2}{45}u^{3/2}$$

$$= \frac{2}{45}\left(5x^3+1\right)^{3/2}$$

ดังนั้น $\int x^2\sqrt{5x^3+1}\ dx = \frac{2}{45}\left(5x^3+1\right)^{3/2}$

ตัวอย่าง 8.6 จงหาค่า $\int \frac{1}{3x-5}\ dx$

วิธีทำ ให้ $u = 3x-5$

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(3x-5)$$

$$\frac{du}{dx} = 3$$

$$du = 3dx$$

$$dx = \frac{du}{3}$$

นั่นคือ $\int \frac{1}{3x-5}\ dx = \int \frac{1}{3x-5}\ dx$

$$= \int \frac{1}{u}\frac{du}{3}$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{1}{u}du$$

$$= \frac{1}{3}\ln\left|u\right| + c$$

$$= \frac{1}{3}\ln\left|3x-5\right| + c$$

ดังนั้น $\int \frac{1}{3x-5}\ dx = \frac{1}{3}\ln\left|3x-5\right| + c$

ตัวอย่าง 8.7 จงหาค่า $\int \frac{5}{7x}\ dx$

วิธีทำ ให้ $u = 7x$

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(7x)$$

$$\frac{du}{dx} = 7$$

$$du = 7dx$$

$$dx = \frac{du}{7}$$

นั่นคือ $\int \frac{5}{7x}\ dx = \int \frac{5}{u}\ dx$

$$= \int \frac{5}{u}\frac{du}{7}$$

$$= \frac{5}{7}\int \frac{1}{u}du$$

$$= \frac{5}{7}\ln\left|u\right| + c$$

$$= \frac{5}{7}\ln\left|7x\right| + c$$

ดังนั้น $\int \frac{5}{7x}\ dx = \frac{5}{7}\ln\left|7x\right| + c$

ตัวอย่าง 8.8 จงหาค่า $\int \frac{3}{-4x+9}\ dx$

วิธีทำ ให้ $u = -4x+9$

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(-4x+9)$$

$$\frac{du}{dx} = -4$$

$$du = -4dx$$

$$dx = -\frac{du}{4}$$

นั่นคือ
$$\int \frac{3}{-4x+9}\ dx = \int \frac{3}{u}\ dx$$
$$= \int \frac{3}{u}\frac{du}{-4}$$
$$= -\frac{3}{4}\int \frac{1}{u}du$$
$$= -\frac{3}{4}\ln\left|u\right| + c$$
$$= -\frac{3}{4}\ln\left|-4x+9\right| + c$$

ดังนั้น $\int \frac{3}{-4x+9}\ dx = -\frac{3}{4}\ln\left|-4x+9\right| + c$

ตัวอย่าง 8.9 จงหาค่า $\int e^{3x-5}\ dx$

วิธีทำ ให้ $u = 3x-5$

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(3x-5)$$

$$\frac{du}{dx} = 3$$

$$du = 3dx$$

$$dx = \frac{du}{3}$$

นั่นคือ $\int e^{3x-5}\ dx = \int e^{u}\ dx$

$$= \int e^u \frac{du}{3}$$

$$= \frac{1}{3}\int e^u \, du$$

$$= \frac{1}{3}e^u + c$$

$$= \frac{1}{3}e^{3x-5} + c$$

ดังนั้น $\int e^{3x-5} \ dx = \frac{1}{3}e^{3x-5} + c$

ตัวอย่าง 8.10 จงหาค่า $\int e^{-6x+1} \ dx$

วิธีทำ ให้ $u = -6x+1$

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(-6x+1)$$

$$\frac{du}{dx} = -6$$

$$du = -6dx$$

$$dx = -\frac{du}{6}$$

นั่นคือ $\int e^{-6x+1} \ dx = \int e^u \ dx$

$$= \int e^u \frac{du}{-6}$$

$$= -\frac{1}{6}\int e^u \, du$$

$$= -\frac{1}{6}e^u + c$$

$$= -\frac{1}{6}e^{-6x+1} + c$$

ดังนั้น $\int e^{3x-5} \ dx = -\frac{1}{6}e^{-6x+1} + c$

ตัวอย่าง 8.11 จงหาค่า $\int \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}\, dx$

วิธีทำ ให้ $u = 1+\sin^2 x$

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(1+\sin^2 x)$$

$$\frac{du}{dx} = 2\sin x \cos x$$

$$du = 2\sin x \cos x\, dx$$

$$du = \sin 2x\, dx$$

$$dx = \frac{du}{\sin 2x}$$

นั่นคือ $\int \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}\, dx = \int \frac{\sin 2x}{u}\, \frac{du}{\sin 2x}$

$$= \int \frac{1}{u}\, du$$

$$= \ln\left|u\right| + c$$

$$= \ln\left|1+\sin^2 x\right| + c$$

ดังนั้น $\int \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}\, dx = \ln\left|1+\sin^2 x\right| + c$

ตัวอย่าง 8.12 จงหาค่า $\int \frac{1}{(\arccos x)^5\sqrt{1-x^2}}\, dx$

วิธีทำ ให้ $u = \arccos x$

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(\arccos x)$$

$$\frac{du}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$du = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$dx = -\sqrt{1-x^2}\, du$$

นั่นคือ $\int \frac{1}{(\arccos x)^5\sqrt{1-x^2}}\, dx = \int \frac{1}{u\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1-x^2}\, du$

$$= \int \frac{1}{u^5}\ du$$
$$= \int u^{-5}\ du$$
$$= \frac{1}{4}u^{-4} + c$$
$$= \frac{1}{4}(\arccos x)^{-4} + c$$

ดังนั้น $\int \frac{1}{(\arccos x)^5\sqrt{1-x^2}}\ dx = \frac{1}{4}(\arccos x)^{-4} + c$

8.3 การหาปริพันธ์โดยวิธีแยกเศษส่วนย่อย

เพื่อให้เข้าใจวัตถุประสงค์ของการหาปริพันธ์โดยวิธีแยกเศษส่วนย่อยโดยรวดเร็ว จะแสดงตัวอย่างวิธีบวกเศษส่วนย่อย 2 จำนวนดังนี้

$$\frac{4}{5x+1} + \frac{3}{x-2} = \frac{4(x-2)+3(5x+1)}{(5x+1)(x-2)}$$
$$= \frac{4x-8+15x+3}{(5x+1)(x-2)}$$
$$= \frac{19x-5}{(5x+1)(x-2)}$$

และถ้าเราต้องแก้ปัญหา $\int \frac{19x-5}{(5x+1)(x-2)}\ dx$

และเนื่องจาก $\frac{19x-5}{(5x+1)(x-2)} = \frac{4}{5x+1} + \frac{3}{x-2}$

วิธีหนึ่งที่เราน่าจะเกิดแนวความคิด $\frac{19x-5}{(5x+1)(x-2)}$ แทนด้วย $\frac{4}{5x+1} + \frac{3}{x-2}$

แล้ว $\int \frac{19x-5}{(5x+1)(x-2)}\ dx = \int \frac{4}{5x+1} + \frac{3}{x-2}\ dx$

$$= \int \frac{4}{5x+1}\ dx + \int \frac{3}{x-2}\ dx$$
$$= \frac{4}{5}\ln\left|5x+1\right| + 3\ln\left|x-2\right| + c$$

แต่ถ้าเป็นการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันตรรกยะอื่น ๆ ซึ่งเราไม่ทราบมาก่อนว่าเกิดจากการบวกกันของเศษส่วนใดบ้าง เราต้องการวิธีการคิดย้อนกลับเพื่อหาเศษส่วนย่อยต่าง ๆ เหล่านั้น วิธีการหาเศษส่วนย่อยเหล่านั้นเรียกว่า **วิธีการแยกเศษส่วนย่อย** เช่น ถ้าต้องการแยก $\dfrac{19x-5}{(5x+1)(x-2)}$ ต้องอาศัยวิธีดังต่อไปนี้ (มงคล ทองสงคราม, 2536 : 276)

สมมุติให้ $\dfrac{19x-5}{(5x+1)(x-2)}=\dfrac{A_1}{5x+1}+\dfrac{A_2}{x-2}$ แล้วหาค่า A_1 และ A_2 ต่อไป ในกรณีทั่ว ๆ ไปแล้วสามารถสรุปได้ว่า การแยกเศษส่วนย่อยของฟังก์ชันตรรกยะ $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ เมื่อ $P(x)$ และ $Q(x)$ เป็นพหุนามที่ไม่มีตัวประกอบร่วม สามารถทำได้โดยมีลำดับขั้นตอนดังนี้

1) ถ้าระดับขั้นของ $P(x)$ ไม่น้อยกว่า $Q(x)$ ให้หาร $P(x)$ ด้วย $Q(x)$ เพื่อให้ได้ผลลัพธ์ดังนี้ $\dfrac{P(x)}{Q(x)}=S(x)+\dfrac{R(x)}{Q(x)}$ ซึ่ง $S(x)$ เป็นพหุนาม และระดับขั้นของ $R(x)$ น้อยกว่า $Q(x)$

2) แยกตัวประกอบของ $Q(x)$ ซึ่งตัวประกอบของ $Q(x)$ จะมีแต่ตัวประกอบเชิงเส้นในรูปของ $(x-a)$ และตัวประกอบกำลังสองในรูป ax^2+bx+c (ซึ่งแยกตัวประกอบต่อไปไม่ได้) เท่านั้น

3) ถ้า $(x-a)^m$ เป็นตัวประกอบของ $Q(x)$ แล้วจะเกิดผลบวกของเศษส่วนย่อย m เศษส่วนย่อยจากตัวประกอบ $(x-a)^m$ ในรูปของ

$$\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\frac{A_3}{(x-a)^3}+\cdots+\frac{A_m}{(x-a)^m}$$

4) ถ้า $(ax^2+bx+c)^n$ เป็นตัวประกอบของ $Q(x)$ แล้วจะเกิดผลบวกของเศษส่วนย่อย n เศษส่วนย่อยจากตัวประกอบ $(ax^2+bx+c)^n$ ในรูปของ

$$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c}+\frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\frac{A_3x+B_3}{(ax^2+bx+c)^3}+\cdots+\frac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n}$$

5) แล้วหาค่าของสัมประสิทธิ์ทุกตัว โดยวิธีหนึ่งวิธีใดก็ได้ แต่โดยทั่ว ๆ ไปนิยมวิธีการเทียบสัมประสิทธิ์

6) ถ้าต้องการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันตรรกยะ ก็แยกเป็นผลบวกของปริพันธ์ของแต่ละเศษส่วนย่อย แล้วหาผลลัพธ์โดยวิธีต่าง ๆ ที่เราเรียนรู้มาแล้วตามความเหมาะสม

เพื่อให้เข้าใจได้ง่ายขึ้น ก็อาจจะขยายความให้ละเอียดมากขึ้นได้ว่า ถ้าต้องการแยกเศษส่วนย่อยของฟังก์ชันตรรกยะ $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ และระดับขั้นของ $P(x)$ น้อยกว่า $Q(x)$ แล้วสามารถแยกได้เป็น 4 กรณีดังต่อไปนี้ (วัลลภ เฉลิมสุวิวัฒนาการ, 2539 : 197)

กรณีที่ 1 $Q(x)$ เป็นตัวประกอบเชิงเส้นที่ไม่ซ้ำกันเช่น

$Q(x) = (x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)...(x-a_n)$ จะแยก

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + \frac{A_3}{x-a_3} + \cdots + \frac{A_n}{x-a_n}$$

จะเห็นว่า $Q(x)$ มีตัวประกอบเชิงเส้นที่ไม่ซ้ำกัน n ตัว แต่ละตัวประกอบด้วย $x-a_i$ เกิดเศษส่วนย่อย 1 ตัว ในรูปของ $\dfrac{A_i}{x-a_i}$, $i = 1,2,3,...,n$ และจะต้องหาค่าคงตัว A_i, $i = 1,2,3,...,n$ ต่อไป ดังตัวอย่างต่อไปนี้ (วัลลภ เฉลิมสุวิวัฒนาการ, 2539 : 369-370)

ตัวอย่าง 8.13 จงหาค่า $\displaystyle\int \frac{x^2+2x+3}{x^3-x}\,dx$

วิธีทำ เนื่องจาก $x^3 - x = x(x^2-1) = x(x-1)(x+1)$

จึงเขียน $\dfrac{x^2+2x+3}{x^3-x} = \dfrac{A_1}{x} + \dfrac{A_2}{x-1} + \dfrac{A_3}{x+1}$

แล้วดำเนินการหา A_1, A_2 และ A_3 ต่อไปโดยวิธีต่อไปนี้

วิธีที่ 1 โดยการเทียบสัมประสิทธิ์

$$\frac{x^2+2x+3}{x^3-x} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{A_3}{x+1}$$

$$\begin{aligned}
x^2+2x+3 &= \left[\frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{A_3}{x+1}\right]\left(x^3-x\right) \\
&= \frac{A_1(x^3-x)}{x} + \frac{A_2(x^3-x)}{x-1} + \frac{A_3(x^3-x)}{x+1} \\
&= \frac{A_1x(x-1)(x+1)}{x} + \frac{A_2x(x-1)(x+1)}{x-1} + \frac{A_3x(x-1)(x+1)}{x+1} \\
&= A_1(x-1)(x+1) + A_2x(x+1) + A_3x(x-1)
\end{aligned}$$

$$= A_1(x^2-1) + A_2(x^2+x) + A_3(x^2-x)$$
$$= A_1(x^2-1) + A_2(x^2+x) + A_3(x^2-x)$$
$$= A_1x^2 - A_1 + A_2x^2 + A_2x + A_3x^2 - A_3x$$
$$= (A_1 + A_2 + A_3)x^2 + (A_2 - A_3)x - A_1$$

(1) $x^2 + 2x + 3 = (A_1 + A_2 + A_3)x^2 + (A_2 - A_3)x - A_1$

และเทียบสัมประสิทธิ์ได้ว่า

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 + A_3 &= 1 \\ A_2 - A_3 &= 2 \\ -A_1 &= 3 \end{aligned}$$

และจากการแก้สมการทั้งสามได้ $A_1 = -3,\ A_2 = 3$ และ $A_3 = 1$

วิธีที่ 2 โดยวิธีแทนค่า x ที่เหมาะสม

$$\frac{x^2+2x+3}{x^3-x} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{A_3}{x+1}$$
$$x^2+2x+3 = \left[\frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{A_3}{x+1}\right]\left(x^3-x\right)$$
$$= \frac{A_1(x^3-x)}{x} + \frac{A_2(x^3-x)}{x-1} + \frac{A_3(x^3-x)}{x+1}$$
$$= \frac{A_1x(x-1)(x+1)}{x} + \frac{A_2x(x-1)(x+1)}{x-1} + \frac{A_3x(x-1)(x+1)}{x+1}$$
$$= A_1(x-1)(x+1) + A_2x(x+1) + A_3x(x-1)$$

(2) $x^2 + 2x + 3 = A_1(x-1)(x+1) + A_2x(x+1) + A_3x(x-1)$

จากสมการ (1) ซึ่งเป็นสมการที่เป็นจริงสำหรับทุกค่า x จะเลือกค่า x ที่ทำให้การคิดคำนวณหา A_1, A_2 และ A_3 ง่าย สะดวก และรวดเร็ว ซึ่งพิจารณาแล้วเห็นได้ว่าสมมุติให้ x เป็น $0,1$ และ -1 ดังนี้

แทน $x = 1$ ในสมการ (2) ได้

$$\begin{aligned}
1^2 + 2(1) + 3 &= A_1(1-1)(1+1) + A_2(1)(1+1) + A_3(1)(1-1) \\
6 &= A_2(1)(1+1) \\
6 &= A_2(2) \\
A_2 &= \frac{6}{2} \\
A_2 &= 3
\end{aligned}$$

แทน $x = -1$ ในสมการ (2) ได้

$$\begin{aligned}
(-1)^2 + 2(-1) + 3 &= A_1(-1-1)(-1+1) + A_2(-1)(-1+1) + A_3(-1)(-1-1) \\
2 &= A_3(-1)(-2) \\
2 &= A_3(2) \\
A_3 &= \frac{2}{2} \\
A_3 &= 1
\end{aligned}$$

แทน $x = 0$ ในสมการ (2) ได้

$$\begin{aligned}
0^2 + 2(0) + 3 &= A_1(0-1)(0+1) + A_2(0)(x+1) + A_3(0)(0-1) \\
3 &= A_1(-1)(1) \\
3 &= A_1(-1) \\
A_1 &= -3
\end{aligned}$$

และจากการแก้สมการทั้งสามได้ $A_1 = -3, A_2 = 3$ และ $A_3 = 1$

นั่นคือ
$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2 + 2x + 3}{x^3 - x}\, dx &= \int -\frac{3}{x} + \frac{3}{x-1} + \frac{1}{x+1}\, dx \\
&= -\int \frac{3}{x}\, dx + \int \frac{3}{x-1}\, dx + \int \frac{1}{x+1}\, dx \\
&= -3\ln|x| + 3\ln|x-1| + \ln|x+1| + c \\
&= -\ln|x|^3 + \ln|x-1|^3 + \ln|x+1| + c \\
&= \ln\left|\frac{(x-1)^3(x+1)}{x^3}\right| + c
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\int \frac{x^2 + 2x + 3}{x^3 - x}\, dx = \ln\left|\frac{(x-1)^3(x+1)}{x^3}\right| + c$

กรณีที่ 2 กรณีตัวประกอบบางตัวของ $Q(x)$ เป็นตัวประกอบเชิงเส้นที่ซ้ำกัน

ตัวอย่างเช่น $Q(x)=(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)^m$ จะแยก

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_2}{x-a_2}+\frac{B_1}{(x-a_3)^2}\cdots+\frac{B_m}{(x-a_3)^m}.$$

จะเห็นว่า $P(x)$ แยกเศษส่วนย่อยได้ $m+2$ เศษส่วนย่อย

จากตัวประกอบ $(x-a_1)$ แยกเศษส่วนย่อยได้ 1 เศษส่วนย่อย

จากตัวประกอบ $(x-a_2)$ แยกเศษส่วนย่อยได้ 1 เศษส่วนย่อย

จากตัวประกอบ $(x-a_3)^m$ แยกเศษส่วนย่อยได้ m เศษส่วนย่อย

แล้วดำเนินการหา $A_1, A_2,\ B_1, B_2, \ldots, B_m$ ต่อไป (วัลลภ เฉลิมสุวิวัฒนาการ, 2539 : 370)

ตัวอย่าง 8.14 จงหาค่า $\int \frac{x+5}{x^3-3x+2}\,dx$

วิธีทำ เนื่องจาก $x^3-3x+2=(x-1)^2(x+2)$

จึงเขียน $\dfrac{x+5}{x^3-3x+2}=\dfrac{A_1}{(x-1)}+\dfrac{A_2}{(x-1)^2}+\dfrac{A_3}{(x+2)}$

แล้วดำเนินการหา A_1, A_2 และ A_3 ต่อไปโดยวิธีแทนค่า x ที่เหมาะสมดังนี้

จาก $\dfrac{x+5}{x^3-3x+2}=\dfrac{A_1}{(x-1)}+\dfrac{A_2}{(x-1)^2}+\dfrac{A_3}{(x+2)}$

ได้
$$x+5=\left[\frac{A_1}{(x-1)}+\frac{A_2}{(x-1)^2}+\frac{A_3}{(x+2)}\right](x^3-3x+2)$$

$$x+5=\frac{A_1(x^3-3x+2)}{(x-1)}+\frac{A_2(x^3-3x+2)}{(x-1)^2}+\frac{A_3(x^3-3x+2)}{(x+2)}$$

$$x+5=\frac{A_1(x-1)^2(x+2)}{(x-1)}+\frac{A_2(x-1)^2(x+2)}{(x-1)^2}+\frac{A_3(x-1)^2(x+2)}{(x+2)}$$

(3) $$x+5=A_1(x-1)(x+2)+A_2(x+2)+A_3(x-1)^2$$

แทน $x=1$ ในสมการ (3) ได้

$$1+5 = A_1(1-1)(1+2)+A_2(1+2)+A_3(1-1)^2$$
$$6 = A_1(0)(1+2)+A_2(3)+A_3(0)^2$$
$$6 = A_2(3)$$
$$A_2 = 2$$

แทน $x=-2$ ในสมการ (3) ได้

$$(-2)+5 = A_1[(-2)-1][(-2)+2]+A_2[(-2)+2]+A_3[(-2)-1]^2$$
$$3 = A_1(-3)(0)+A_2(0)+A_3(-3)^2$$
$$3 = A_3(9)$$
$$A_3 = \frac{1}{3}$$

แทน $x=0$ ในสมการ (3) ได้

$$0+5 = A_1(0-1)(0+2)+A_2(0+2)+A_3(0-1)^2$$
$$5 = A_1(-2)+A_2(2)+A_3(-1)^2$$
$$5 = A_1(-2)+(2)(2)+\frac{1}{3}$$
$$A_1 = -\frac{1}{3}$$

นั่นคือ $\displaystyle\int \frac{x+5}{x^3-3x+2}\,dx = \int -\frac{1}{3(x-1)}+\frac{2}{(x-1)^2}+\frac{1}{3(x+2)}\,dx$

$$= \int -\frac{1}{3(x-1)}\,dx+\int \frac{2}{(x-1)^2}\,dx+\int \frac{1}{3(x+2)}\,dx$$
$$= -\frac{1}{3}\ln\left|x-1\right|-\frac{2}{x-1)}+\frac{1}{3}\ln\left|x+2\right|+c$$

ดังนั้น $\displaystyle\int \frac{x+5}{x^3-3x+2}\,dx = -\frac{1}{3}\ln\left|x-1\right|-\frac{2}{x-1)}+\frac{1}{3}\ln\left|x+2\right|+c$

กรณีที่ 3 กรณีตัวประกอบของ $Q(x)$ เป็นตัวประกอบกำลังสองที่ไม่ซ้ำกัน

ตัวอย่างเช่น $Q(x)=(x-a_1)(x-a_2)(ax^2+bx+c)$ จะแยก

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_2}{x-a_2}+\frac{Bx+D}{ax^2+bx+c}$$

จะเห็นว่า $P(x)$ แยกเศษส่วนย่อยได้ 3 เศษส่วนย่อย

จากตัวประกอบ $(x-a_1)$ แยกเศษส่วนย่อยได้ 1 เศษส่วนย่อยคือ $\dfrac{A_1}{x-a_1}$

จากตัวประกอบ $(x-a_2)$ แยกเศษส่วนย่อยได้ 1 เศษส่วนย่อยคือ $\dfrac{A_2}{x-a_2}$

และ จากตัวประกอบ (ax^2+bx+c) แยกเศษส่วนย่อยได้ 1 เศษส่วนย่อยคือ $\dfrac{Bx+D}{ax^2+bx+c}$

แล้วดำเนินการหา A_1, A_2, B, D ต่อไป (วัลลภ เฉลิมสุวิวัฒนาการ, 2539 : 370-371)

ตัวอย่าง 8.15 จงหาค่า $\int \dfrac{1}{x^5-x^2}\,dx$

วิธีทำ เนื่องจาก $x^5-x^2 = x^2(x^3-1) = x^2(x-1)(x^2+x+1)$

จึงเขียน $\dfrac{1}{x^5-x^2} = \dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x^2}+\dfrac{C}{x-1}+\dfrac{Dx+E}{x^2+x+1}$

แล้วดำเนินการหา A_1, A_2 และ A_3 ต่อไปโดยวิธีแทนค่า x ที่เหมาะสมดังนี้

จาก $\dfrac{1}{x^5-x^2} = \dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x^2}+\dfrac{C}{x-1}+\dfrac{Dx+E}{x^2+x+1}$

ได้ $$1 = \left[\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-1}+\frac{Dx+E}{x^2+x+1}\right](x^5-x^2)$$

$$1 = \frac{A}{x}(x^5-x^2)+\frac{B}{x^2}(x^5-x^2)+\frac{C}{x-1}(x^5-x^2)+\frac{Dx+E}{x^2+x+1}(x^5-x^2)$$

$$1 = \frac{A}{x}x^2(x-1)(x^2+x+1)+\frac{B}{x^2}x^2(x-1)(x^2+x+1)$$

$$+\frac{C}{x-1}x^2(x-1)(x^2+x+1)+\frac{Dx+E}{x^2+x+1}x^2(x-1)(x^2+x+1)$$

$$1 = Ax(x-1)(x^2+x+1)+B(x-1)(x^2+x+1)$$

$$+Cx^2(x^2+x+1)+(Dx+E)x^2(x-1)$$

$$1 = A(x^4-x)+B(x^3-1)+C(x^4+x^3+x^2)+(Dx+E)(x^3-x^2)$$

$$1 = Ax^4-Ax+Bx^3-B+Cx^4+Cx^3+Cx^2+Dx^4-Dx^3+Ex^3-Ex^2$$

(4) $$1 = (A+C+D)x^4+(B+C+E-D)x^3+(C-E)x^2-Ax-B$$

จากสมการ(4)เทียบสัมประสิทธิ์ได้ว่า

$$\begin{aligned} A+C+D&=0\\ B+C+E-D&=0\\ C-E&=0\\ -A&=0\\ -B&=1 \end{aligned}$$

และจากการแก้สมการได้

$$\begin{aligned} A&=0\\ B&=-1\\ C&=\frac{1}{3}\\ D&=-\frac{1}{3} \end{aligned}$$

นั่นคือ $\displaystyle \int \frac{1}{x^5-x^2}\,dx = \int \frac{0}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{\frac{1}{3}}{x-1}+\frac{-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}}{x^2+x+1}\,dx$

$$= \int \frac{1}{x^2}\,dx + \frac{1}{3}\int \frac{1}{x-1}\,dx - \frac{1}{3}\int \frac{x-1}{x^2+x+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{x}+\frac{1}{3}\ln\left|x-1\right|-\frac{1}{6}\ln\left|x^2+x+1\right|+\frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dx$$

$$= \frac{1}{x}+\frac{1}{6}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}+\frac{1}{3}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+c$$

ดังนั้น $\displaystyle \int \frac{1}{x^5-x^2}\,dx = \frac{1}{x}+\frac{1}{6}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}+\frac{1}{3}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+c$

กรณีที่ 4 กรณีตัวประกอบของ $Q(x)$ เป็นตัวประกอบกำลังสองซ้ำกัน

ตัวอย่างเช่น $Q(x)=(ax^2+bx+c)^m(x-a_1)$ แยก

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c}+\frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\ldots+\frac{A_mx+B_m}{(ax^2+bx+c)^m}+\frac{D}{x-a_1}$$

จะเห็นว่า $P(x)$ แยกเศษส่วนย่อยได้ $m+1$ เศษส่วนย่อย

จากตัวประกอบ $(ax^2+bx+c)^m$ แยกเศษส่วนย่อยได้ m เศษส่วนย่อยคือ

$$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c}+\frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2}+...+\frac{A_mx+B_m}{(ax^2+bx+c)^m}$$

และจากตัวประกอบ $(x-a_1)$ แยกเศษส่วนย่อยได้ 1 เศษส่วนย่อยคือ $\dfrac{D}{x-a_1}$

แล้วดำเนินการหา $A_1,A_2...A_m,B_1,B_2...B_m,D$ ต่อไป (วัลลภ เฉลิมสุวิวัฒนาการ, 2539 : 371-372)

ตัวอย่าง 8.16 จงหาค่า $\int \dfrac{x^3-2x}{(x^2+1)^2}\,dx$

วิธีทำ $\dfrac{x^3-2x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{Ax+B}{x^2+1}+\dfrac{Cx+D}{(x^2+1)^2}$

แล้วดำเนินการหา A,B,C และ D ต่อไปโดยวิธีเทียบสัมประสิทธิ์

จาก $\dfrac{x^3-2x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{Ax+B}{x^2+1}+\dfrac{Cx+D}{(x^2+1)^2}$

ได้
$$\begin{aligned}x^3-2x &= \left[\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}\right](x^2+1)^2\\ &= \frac{Ax+B}{x^2+1}(x^2+1)^2+\frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}(x^2+1)^2\\ &= (Ax+B)(x^2+1)+Cx+D\\ &= Ax^3+Ax+Bx^2+B+Cx+D\\ &= Ax^3+Bx^2+(A+C)x+B+D\end{aligned}$$

(5) $x^3-2x=Ax^3+Bx^2+(A+C)x+B+D$

จากสมการ(5)เทียบสัมประสิทธิ์ได้ว่า

$$\begin{aligned}A&=1\\ B&=0\\ A+C&=-2\\ B+D&=0\end{aligned}$$

และจากการแก้สมการได้

$$\begin{aligned}A&=1\\ B&=0\\ C&=-3\\ D&=0\end{aligned}$$

นั่นคือ $\int \frac{x^3-2x}{(x^2+1)^2}\,dx = \int \frac{x}{x^2+1}+\frac{-3x}{(x^2+1)^2}\,dx$

$$= \int \frac{x}{x^2+1}\,dx + \int \frac{-3x}{(x^2+1)^2}\,dx$$

$$= \int \frac{x}{x^2+1}\,dx - 3\int \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\frac{3}{2(x^2+1)}+c$$

ดังนั้น $\int \frac{x^3-2x}{(x^2+1)^2}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\frac{3}{2(x^2+1)}+c$

ตัวอย่าง 8.17 จงหาค่า $\int \frac{x^4-3x^2-3x-2}{x^3-x^2-2x}\,dx$

วิธีทำ เนื่องจากปริพัทธ์มีระดับขันของตัวเศษมากกว่าระดับขั้นของส่วน จึงหารเศษด้วยส่วนเสียก่อน

ดังนี้ $$\frac{x^4-3x^2-3x-2}{x^3-x^2-2x} = x+1-\frac{x+2}{x(x^2-x-2)}$$

ดังนั้น $\int \frac{x^4-3x^2-3x-2}{x^3-x^2-2x}\,dx = \int (x+1-\frac{x+2}{x(x^2-x-2)})\,dx$

$$= \int x+1\,dx - \int \frac{x+2}{x(x-2)(x+1)}\,dx$$

แต่ $\frac{x+2}{x(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+1}$

ได้ $$x+2 = \left[\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+1}\right]x(x-2)(x+1)$$

$$= \frac{A}{x}x(x-2)(x+1)+\frac{B}{x-2}x(x-2)(x+1)$$
$$+\frac{C}{x+1}x(x-2)(x+1)$$

$$= A(x-2)(x+1)+Bx(x+1)+Cx(x-2)$$

(6) $\quad x+2 = A(x-2)(x+1)+Bx(x+1)+Cx(x-2)$

แทน $x=2$ ในสมการ (6) ได้

$$
\begin{aligned}
2+2 &= A(2-2)(2+1)+B2(2+1)+C2(2-2)\\
4 &= A(0)(3)+B2(3)+C2(0)\\
4 &= B6\\
B &= \frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

แทน $x=0$ ในสมการ (6) ได้

$$
\begin{aligned}
0+2 &= A(0-2)(0+1)+B0(0+1)+C0(0-2)\\
2 &= A(-2)(1)+B0(1)+C0(-2)\\
2 &= -2A\\
A &= -1
\end{aligned}
$$

แทน $x=-1$ ในสมการ (6) ได้

$$
\begin{aligned}
-1+2 &= A(-1-2)(-1+1)+B(-1)(-1+1)+C(-1)(-1-2)\\
1 &= A(-3)(0)+B(-1)(0)+C(-1)(-3)\\
1 &= 3C\\
C &= \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

นั่นคือ

$$
\begin{aligned}
\int x+1\ dx-\int\frac{x+2}{x(x-2)(x+1)}\ dx &= \int x+1\ dx-\int\frac{1}{x}\ dx-\frac{2}{3}\int\frac{1}{x-2}\ dx-\frac{1}{3}\int\frac{1}{x+1}\ dx\\
&= \int x+1\ dx-\int\frac{1}{x}\ dx-\frac{2}{3}\int\frac{1}{x-2}\ dx\\
&\quad -\frac{1}{3}\int\frac{1}{x+1}\ dx\\
&= \frac{x^2}{2}+x+\ln\left|x\right|-\frac{2}{3}\ln\left|x-2\right|-\frac{1}{3}\ln\left|x+1\right|+c
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $\displaystyle\int\frac{x^4-3x^2-3x-2}{x^3-x^2-2x}\ dx=\frac{x^2}{2}+x+\ln\left|x\right|-\frac{2}{3}\ln\left|x-2\right|-\frac{1}{3}\ln\left|x+1\right|+c$

8.4 การหาปริพันธ์ทีละส่วน

เป็นเทคนิคที่จะช่วยให้สามารถคำนวณหาค่าของปริพันธ์ได้หลายลักษณะที่ไม่เหมาะสมกับการใช้เทคนิคอื่น ๆ แล้ว

ถ้า $u(x)$ และ $v(x)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ โดยกฎของการหาอนุพันธ์ของผลคูณของสองฟังก์ชัน

$$\frac{d}{dx}[u(x)v(x)] = u(x)v'(x) + v(x)u'(x)$$

แล้วหาปริพันธ์เทียบกับ x ทั้งสองข้างของสมการจะได้ผลลัพธ์

$$\int \frac{d}{dx}[u(x)v(x)]\ dx = \int u(x)v'(x) + v(x)u'(x)\ dx$$

หรือ $$u(x)v(x) + c = \int u(x)v'(x)\ dx + \int v(x)u'(x)\ dx$$

หรือ $$\int u(x)v'(x)\ dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\ dx + c$$

เนื่องจากปริพันธ์ทางขวามือของสมการจะต้องให้ค่าคงตัวของการหาปริพันธ์จึงไม่จำเป็นที่จะต้องใส่ค่า c จึงได้สูตร

(7) $$\int u(x)v'(x)\ dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\ dx$$

เรียกสมการ (7) ว่า**การหาปริพันธ์ทีละส่วน** และโดยการใช้สูตรการหาปริพันธ์ที่ละส่วนนี้ จะทำให้ความยากของปัญหาการหาปริพันธ์ลดลงได้มากมาย ในการนำสูตรปริพันธ์ทีละส่วนไปใช้นิยมที่จะเขียนสูตร (7) ใหม่ให้จำได้ง่ายขึ้นดังนี้

(8) $$\int u\ dv = uv - \int v\ du$$

หลักสำคัญของการหาปริพันธ์ทีละส่วน คือ ต้องแยกตัวที่จะหาปริพันธ์ออกเป็น 2 ส่วน ส่วนหนึ่ง เป็น u และอีกส่วนหนึ่งเป็น dv โดยปรกติมีหลักการทั่วไปพอสรุปได้ดังนี้ (คณาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น, 2539 : 93)

1) เลือก u ซึ่งเมื่อหา du แล้วทำให้เกิดปริพันธ์ใหม่เป็น $\int v\ du$ ซึ่งง่ายกว่าปริพันธ์ตัวเดิมคือ $\int u\ dv$

2) เลือก dv ซึ่งเป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์ v ได้ง่าย

3) พยายามจัดกลุ่มฟังก์ชันที่มีหลายฟังก์ชันที่เราจะหาปริพันธ์ ให้เป็นกลุ่มใหญ่ที่สุดให้เป็น dv เพื่อลดความยุ่งยากที่จะเกิดขึ้นในการหาปริพันธ์ตัวใหม่

โดยปรกติ วิธีการหาปริพันธ์ทีละส่วน ใช้ได้ดีกับตัวที่เราจะหาปริพันธ์ประเภทต่อไปนี้

1. เป็นผลคูณของสองฟังก์ชันขึ้นไป

2. มีฟังก์ชันลอการิทึม

3 มีฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน และฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกผกฝัน

ตัวอย่าง 8.18 จงหาค่า $\int xe^{3x}\ dx$

วิธีทำ เราจะหาปริพันธ์ที่อยู่ในรูปผลคูณ xe^{3x}

เลือก $u = x$

$$du = dx$$

$$dv = e^{3x}dx$$

$$v = \int e^{3x}\ dx = \frac{1}{3}e^{3x}$$

$$\begin{aligned}\int xe^{3x}\ dx &= \frac{1}{3}xe^{3x} - \int \frac{1}{3}e^{3x}\ dx \\ &= \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{9}xe^{3x} + c\end{aligned}$$

ดังนั้น $\int xe^{3x}\ dx = \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{9}xe^{3x} + c$

ตัวอย่าง 8.19 จงหาค่า $\int x\sin 2x\ dx$

วิธีทำ เราจะหาปริพันธ์ที่อยู่ในรูปผลคูณ $x\sin 2x$

เลือก $u = x$

$$du = dx$$

$$dv = \sin 2xdx$$

$$v = \int \sin 2x\ dx = -\frac{1}{2}\cos 2x$$

$$\begin{aligned}\int x\sin 2x\ dx &= -\frac{1}{2}x\cos 2x + \int \frac{1}{2}\cos 2x\ dx \\ &= -\frac{1}{2}x\cos 2x - \frac{1}{4}\sin 2x + c\end{aligned}$$

ดังนั้น $\int x\sin 2x\ dx = -\frac{1}{2}x\cos 2x - \frac{1}{4}\sin 2x + c$

ตัวอย่าง 8.20 จงหาค่า $\int \arctan x \; dx$

วิธีทำ เลือก $u = \arctan x$

$$du = \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$dv = dx$$

$$v = \int dx = x$$

$$\begin{aligned}\int \arctan x \; dx &= x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} \; dx \\ &= x \arctan x - \frac{1}{2} \ln\left|1+x^2\right| + c\end{aligned}$$

ดังนั้น $\int \arctan x \; dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln\left|1+x^2\right| + c$

ตัวอย่าง 8.21 จงหาค่า $\int x^2 e^x \; dx$

วิธีทำ เราจะหาปริพันธ์ที่อยู่ในรูปผลคูณ $x^2 e^x$

เลือก $u = x^2$

$$du = 2x dx$$

$$dv = e^x dx$$

$$v = \int e^x \; dx = e^x$$

$$\begin{aligned}\int x^2 e^x \; dx &= x^2 e^x - \int 2x e^x \; dx \\ &= x^2 e^x - 2\int x e^x \; dx \\ &= x^2 e^x - 2A\end{aligned}$$

เมื่อ $A = \int x e^x \; dx$

ดำเนินการหา A โดยการหาปริพันธ์ทีละส่วนอีกครั้ง

เลือก $u_1 = x$

$$du_1 = x dx$$

$$dv_1 = e^x dx$$

$$v_1 = \int e^x \; dx = e^x$$

$$\begin{aligned} A &= \int xe^x \ dx \\ &= u_1v_1 - \int v_1 \ du_1 \\ &= xe^x - \int e^x \ dx \\ &= xe^x - e^x + c \end{aligned}$$

นั่นคือ $A = xe^x - e^x + c$

ดังนั้น $\int x^2e^x \ dx = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + c$

ตัวอย่าง 8.22 จงหาค่า $\int \sec^3 x \ dx$

วิธีทำ กำหนดให้ $A = \int \sec^3 x \ dx = \int \sec x \sec^2 x \ dx$

หาปริพันธ์ที่อยู่ในรูปผลคูณ $\sec x \sec^2 x$

เลือก $u = \sec x$

$$\begin{aligned} du &= \sec x \tan x \ dx \\ dv &= \sec^2 x \ dx \\ v &= \int \sec^2 x \ dx = \tan x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= \int \sec^3 x \ dx \\ &= \int \sec x \sec^2 x \ dx \\ &= \sec x \tan x - \int \tan x \sec x \tan x \ dx \\ &= \sec x \tan x - \int \tan^2 x \sec x \ dx \\ &= \sec x \tan x - \int (\sec^2 x - 1) \sec x \ dx \\ &= \sec x \tan x - \int \sec^3 x \ dx - \int \sec x \ dx \\ &= \sec x \tan x - A - \int \sec x \ dx \\ &= \sec x \tan x - A - \ln\left|\sec x + \tan x\right| + c \\ 2A &= \sec x \tan x - \ln\left|\sec x + \tan x\right| + c \\ A &= \frac{\sec x \tan x}{2} - \frac{1}{2}\ln\left|\sec x + \tan x\right| + c \end{aligned}$$

ดังนั้น $\int \sec^3 x \ dx = \dfrac{\sec x \tan x}{2} - \dfrac{1}{2}\ln\left|\sec x + \tan x\right| + c$

ตัวอย่าง 8.23 จงหาค่า $\int \sqrt{a^2 - x^2}\ dx$

วิธีทำ กำหนดให้ $I = \int \sqrt{a^2 - x^2}\ dx$

แล้วคูณปริพัทธ์ด้วย $\dfrac{\sqrt{a^2 - x^2}}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ เพื่อแปลงรูปปริพัทธ์ให้ง่ายต่อการหาปริพันธ์ต่อไป

$$\begin{aligned}
I &= \int \sqrt{a^2 - x^2}\ dx \\
&= \int \sqrt{a^2 - x^2}\,\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{\sqrt{a^2 - x^2}}\ dx \\
&= \int \frac{a^2 - x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}\ dx \\
&= \int \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}\ dx - \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}\ dx \\
&= \int \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}\ dx - \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}\ dx \\
&= a^2 \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\ dx - \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}\ dx \\
&= a^2 \arcsin\frac{x}{a} - \int x \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\ dx \\
&= a^2 \arcsin\frac{x}{a} - I_1
\end{aligned}$$

เมื่อ $I_1 = \int x \dfrac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\ dx$

ดำเนินการหา I_1 โดยการหาปริพันธ์ทีละส่วน

เลือก

$$\begin{aligned}
u_1 &= x \\
du_1 &= dx \\
dv_1 &= \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx \\
v_1 &= \int \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\ dx = -\sqrt{a^2 - x^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int x \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\ dx \\
&= -x\sqrt{a^2 - x^2} + \int \sqrt{a^2 - x^2}\ dx \\
&= -x\sqrt{a^2 - x^2} + I
\end{aligned}$$

ซึ่ง $I = \int \sqrt{a^2 - x^2}\ dx$

จะเห็นว่า $I = a^2 \arcsin\frac{x}{a} - I_1$

และ $I_1 = -x\sqrt{a^2 - x^2} + I$

โดยการหาปริพันธ์ที่ผ่านมาได้ว่า

$$I = \int \sqrt{a^2 - x^2}\ dx$$

$$I = a^2 \arcsin\frac{x}{a} + x\sqrt{a^2 - x^2} - I$$

$$2I = a^2 \arcsin\frac{x}{a} + x\sqrt{a^2 - x^2} \qquad \int \sqrt{a^2 - x^2}\ dx$$

$$I = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + c$$

ดังนั้น $\int \sqrt{a^2 - x^2}\ dx = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + c$

8.5 ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ

จากที่เคยทราบมาแล้วว่าการหาปริพันธ์จำกัดเขต

$$\int_a^b f(x)\ dx$$

จะหาค่าได้ก็ต่อเมื่อลิมิตของการหาปริพันธ์ คือ a และ b ต้องเป็นจำนวนจริงที่กำหนดค่าให้ชัดเจน และฟังก์ชัน f ต้องต่อเนื่องหรือมีขอบเขตบนช่วงของการหาปริพันธ์คือ $[a,b]$

ในหัวข้อนี้จะพิจารณาปริพันธ์จำกัดเขตในกรณีที่ลิมิตของการหาปริพันธ์มีค่าเป็นอนันต์ (∞) หรือ f ไม่ต่อเนื่องแบบที่มีค่าเป็นอนันต์ที่บางจุด $c \in [a,b]$ ซึ่งจะเรียนกปริพันธ์ในลักษณะดังกล่าวนี้ว่า **ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ** และจะแยกพิจารณาเป็นกรณีย่อย ๆ ดังต่อไปนี้ (อำพล ธรรมเจริญ, 2546 : 145-147)

8.5.1 กรณีที่ลิมตของการหาปริพันธ์มีค่าเป็นอนันต์

ก. ลิมิตบนเป็นอนันต์ $(b = \infty)$

ถ้า f ต่อเนื่องบน $[a,\infty)$ จะกำหนดว่า

(9) $$\int_a^\infty f(x)\ dx = \lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)\ dx$$

หมายความว่า $\lim\limits_{t\to\infty}\int\limits_a^t f(x)\ dx$ ต้องหาค่าได้ และจะกล่าวว่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\int\limits_a^\infty f(x)\ dx$ นี้**ลู่เข้า** แต่ถ้า $\lim\limits_{t\to\infty}\int\limits_a^t f(x)\ dx$ หาค่าไม่ได้แสดงว่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\int\limits_a^\infty f(x)\ dx$ นี้**ลู่ออก**

หมายเหตุ 8.1

1. ถ้า $f(x)\geq 0$ บน $[a,\infty)$ แล้วค่าลิมิตในสมการ (9) จะหาค่าได้หรือไม่ก็เป็นค่าอนันต์ และถ้ามีค่าอนันต์ จะกล่าวว่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบนั้น **ลู่ออกสู่อนันต์** และเขียนแทนด้วย

$$\int\limits_a^\infty f(x)\ dx=\infty$$

2. ถ้า $f(x)$ มีค่าเป็นทั้งบวกและลบบน $[a,\infty)$ แล้วปริพันธ์ไม่ตรงแบบดังกล่าว อาจจะลู่ออก หรือแบบแกว่งกวัด นั้นคือไม่ลู่ออกสู่อนันต์ เช่น $\int\limits_0^\infty \sin x\ dx=\infty$

จะเห็นว่า $\int\limits_0^t \sin x\ dx=\begin{cases}0 & ;t=2k\pi,\ k\in Z\\ 2 & ;t=(2k+1)\pi,\ k\in Z\end{cases}$

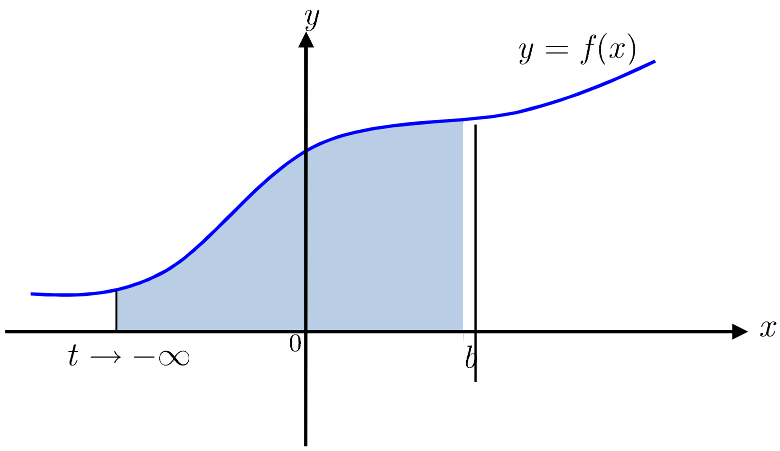
ซึ่งมีค่าแก่วงกวัดอยู่ระหว่าง 0 และ 2 เมื่อ $t\to\infty$ ดังนั้นลิมิตในสมการ (9) จึงหาค่าไม่ได้

ข. ลิมิตล่างเป็นอนันต์ $(a=-\infty)$

ในทำนองเดียวกันกับกรณี ก ถ้า f ต่อเนื่องบน $(-\infty,b]$ จะกำหนดว่า

(10) $$\int\limits_{-\infty}^b f(x)\ dx=\lim\limits_{t\to-\infty}\int\limits_t^b f(x)\ dx$$

โดยลิมิตในสมการ (10) หาค่าได้ ดังรูป



ภาพประกอบที่ 8.1 ลิมิตล่างเป็นอนันต์

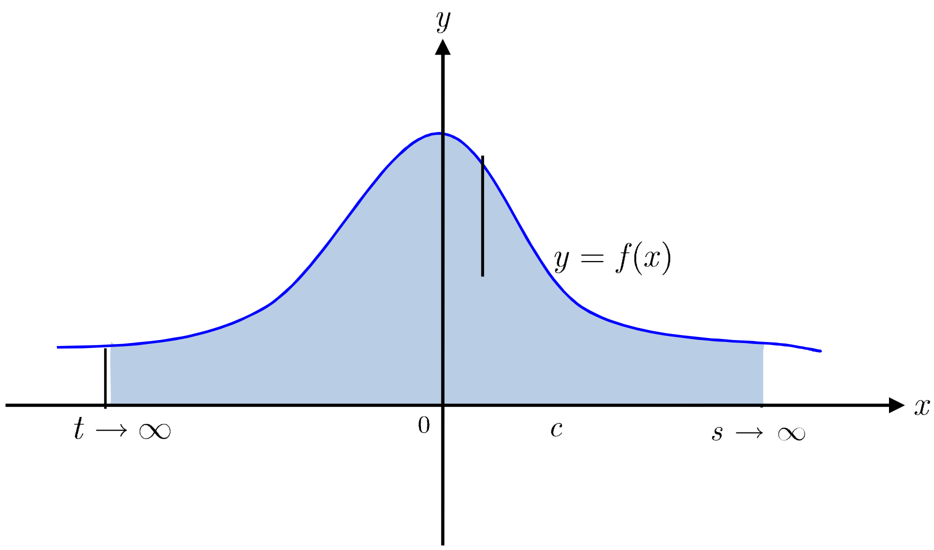
ที่มา : คณาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น. 2539 : 113

ค. ทั้งลิมิตล่างและลิมิตบนเป็นอนันต์ $(a = -\infty, b = \infty)$

โดยอาศัยกรณี ก และ ข ถ้า f ต่อเนื่องบน $(-\infty, \infty)$ จะกำหนดว่า

(11) $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{\infty} f(x)\,dx$$

โดยที่ c เป็นจำนวนจริงใด ๆ ที่มีค่าคงตัว และอินทิกรัลไม่ตรงแบบทั้งสอง ซึ่งอยู่ทางขวาของสมการ (11) ต้องลู่เข้าดังภาพประกอบที่ 8.2 โดยใช้ สมการ (9) และ (10) จะเขียน (11) ได้ในรูป



ภาพประกอบที่ 8.2 ทั้งลิมิตล่างและลิมิตบนเป็นอนันต์

ที่มา : คณาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น. 2539 : 114

หมายเหตุ 8.2

1. ค่า c ในสมการ (10) หรือ (11) จะเลือกใช้ค่าใดก็ได้ เพราะจะไม่ทำให้ค่าของการหาปริพันธ์ไม่ตรงแบบเปลี่ยนแปลงทั้งนี้เพราะว่า ถ้าค่า c ที่เลือกมาทำให้ปริพันธ์ไม่ตรงแบบทางซ้ายของสมการ (10) ลู่เข้าแล้วจะได้ว่า ทุก ๆ ค่าจำนวนจริง $d \neq c$ (ให้ $c < d$) ซึ่งใช้แทน c ในสมการ (10) ก็จะทำให้ปริพันธ์นั้นลู่เข้าด้วย ซึ่งแสดงได้ดังนี้

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{c} f(x)\ dx + \int_{c}^{\infty} f(x)\ dx &= \int_{-\infty}^{c} f(x)\ dx + \int_{c}^{d} f(x)\ dx + \int_{d}^{\infty} f(x)\ dx \\ &= \int_{-\infty}^{d} f(x)\ dx + \int_{d}^{\infty} f(x)\ dx\end{aligned}$$

โดยมีเงื่อนไขว่าลิมิตที่เกี่ยวข้องทั้งหมดต้องหาค่าได้ (ในกรณี $c > d$ ก็แสดงได้ในทำนองเดียวกัน) และถ้า c ที่เลือกมาทำให้ปริพันธ์ไม่ตรงแบบทางซ้ายของสมการ (9) ลู่ออก ก็จะได้ว่าทุกจำนวนจริง d ที่เลือกมาทำให้ปริพันธ์ไม่ตรงแบบทางซ้ายของสมการ (10) ลู่ออก ก็จะได้ว่าทุกจำนวนจริง d ที่ใช้แทน c ก็จะทำให้ปริพันธ์ดังกล่าวลู่ออกด้วยซึ่งแสดงได้ดังนี้

เพราะว่า $\displaystyle\int_{c}^{\infty} f(x)\ dx = \lim_{t\to\infty}\int_{c}^{t} f(x)\ dx$

$$\begin{aligned} &= \lim_{t\to\infty}[F(x)]\Big|_{c}^{t} \quad (F \text{ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ } f) \\ &= \lim_{t\to\infty}[F(t) - F(c)] \\ &= \left[\lim_{t\to\infty} F(t)\right] - F(c)\end{aligned}$$

ดังนั้นถ้า $\displaystyle\int_{c}^{\infty} f(x)\ dx$ ลู่ออกแสดงว่า $\displaystyle\lim_{t\to\infty} F(t)$ หาค่าไม่ได้ และสำหรับจำนวนจริง d ใด ๆ จะได้ทำนองเดียวกันว่า $\displaystyle\int_{d}^{\infty} f(x)\ dx = \left[\lim_{d\to\infty} F(t)\right] - F(d)$ ซึ่งลู่ออกเมื่อ $\displaystyle\lim_{t\to\infty} F(t)$ หาค่าไม่ได้เช่นเดียวกัน

2. สังเกตว่า $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx$ ไม่จำเป็นต้องเท่ากับ $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\int_{-t}^{t} f(x)\ dx$

สรุปนิยามของการหาปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่ลิมิตของการหาปริพันธ์เป็นอนันต์ดังนี้ถ้า f ต่อเนื่องทุกจุดบนช่วงของการหาปริพันธ์ และทุกลิมิตที่ปรากฏในสมการข้างล่างหาค่าได้จะได้ว่า (คณาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น, 2539 : 115)

1. $\int_{a}^{\infty} f(x)\ dx = \lim_{t\to\infty}\int_{a}^{t} f(x)\ dx$

2. $\int_{-\infty}^{b} f(x)\ dx = \lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{b} f(x)\ dx$

3. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\ dx + \int_{c}^{\infty} f(x)\ dx$

ตัวอย่าง 8.24 จงแสดงว่า ปริพันธ์ต่อไปนี้ ลู่เข้าหรือลู่ออก ถ้าลู่เข้าจงหาค่าของปริพันธ์นั้น

ก) $\int_{1}^{\infty}\frac{1}{x^3}\ dx$ ข) $\int_{0}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}\ dx$

ค) $\int_{0}^{\infty} e^{x}\ dx$ ง) $\int_{0}^{\infty} xe^{-x}\ dx$

ก) วิธีทำ

$$\int_{1}^{\infty}\frac{1}{x^3}\ dx = \lim_{t\to\infty}\int_{a}^{t}\frac{1}{x^3}\ dx$$

$$= \lim_{t\to\infty}[-\frac{1}{2x^2}]\Big|_{1}^{t}$$

$$= -\lim_{t\to\infty}\left[\frac{1}{2t^2}\right]\Bigg|_{1}^{t}$$

$$= -\lim_{t\to\infty}\left[\frac{1}{2t^2} - \frac{1}{2(1)^2}\right]$$

$$= -\left[0-1\right]$$

$$= 1$$

ดังนั้น $\int_{1}^{\infty}\frac{1}{x^3}\ dx$ ลู่เข้าสู่ 1

ข) วิธีทำ

$$\int_{0}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}\ dx = \lim_{t\to\infty}\int_{0}^{t}\frac{1}{1+x^2}\ dx$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left[\arctan x\right]\Big|_{0}^{t}$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left[\arctan t - \arctan 0\right]$$

$$= \lim_{t\to\infty}\arctan t - 0$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

ดังนั้น $\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\ dx$ ลู่เข้าสู่ $\frac{\pi}{2}$

ค) วิธีทำ $\int_0^{\infty} e^x\ dx = \lim_{t\to\infty}\int_0^{t} e^x\ dx$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{t\to\infty}[e^x]\Big|_0^t \\
&= \lim_{t\to\infty}\left[e^t - e^0\right] \\
&= \lim_{t\to\infty} e^t - \lim_{t\to\infty} e^t 1 \\
&= \infty
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $\int_0^{\infty} e^x\ dx$ ลู่ออกสู่อนันต์

ง) วิธีทำ $\int_0^{\infty} xe^x\ dx = \lim_{t\to\infty}\int_0^{t} xe^x\ dx$

การหา $\int xe^x\ dx$ ใช้เทคนิคการหาปริพันธ์ที่ละส่วนในหัวข้อ 8.5 ที่ผ่านมา

จาก $\int u\ dv = uv - \int v\ du$

ให้ $u = x$ และ $dv = e^{-x}dx$ ดังนั้น $du = dx$ และ $v = -e^{-x}$

จะได้ $\int xe^x\ dx = uv - \int v\ du$

$$
\begin{aligned}
&= uv - \int v\ du \\
&= -xe^{-x} + \int e^{-x}\ dx \\
&= -xe^{-x} - e^{-x} + c
\end{aligned}
$$

ทำให้ $\int_0^{\infty} xe^x\ dx = \lim_{t\to\infty}\int_0^{t} xe^x\ dx$

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\infty} xe^x\ dx &= \lim_{t\to\infty}\int_0^{t} xe^x\ dx \\
&= \lim_{t\to\infty}[-xe^{-x} - e^{-x}]\Big|_0^t \\
&= \lim_{t\to\infty}\left[(-te^{-t} - e^{-t}) - (-0e^{-0} - e^{-0})\right] \\
&= \lim_{t\to\infty}\left[(-te^{-t} - e^{-t}) - (-0e^{-0} - e^{-0})\right] \\
&= \lim_{t\to\infty}\left[-e^{-t}(t+1) + 1\right]
\end{aligned}
$$

$$= -\lim_{t\to\infty} e^{-t}(t+1) + \lim_{t\to\infty} 1$$

$$= -\lim_{t\to\infty} e^{-t}(t+1) + 1$$

เนื่องจาก $\lim\limits_{t\to\infty} e^{-t}(t+1) = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{t+1}{e^t}$ (รูปแบบยังไม่กำหนด $\dfrac{\infty}{\infty}$)

$= \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{1}{e^t}$ (โดยกฎของโลปิตาล)

$= 0$

ดังนั้น $\int\limits_0^\infty xe^{-x}\ dx$ ลู่เข้าสู่ 1

ตัวอย่าง 8.25 จงแสดงว่า ปริพันธ์ต่อไปนี้ ลู่เข้าหรือลู่ออก ถ้าลู่เข้าจงหาค่าของปริพันธ์นั้น

ก) $\int\limits_{-\infty}^{-1} \dfrac{1}{x^4}\ dx$ ข) $\int\limits_{-\infty}^{0} e^x\ dx$ ค) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{dx}{e^x + e^{-x}}\ dx$

ก) วิธีทำ $\int\limits_{-\infty}^{-1} \dfrac{1}{x^4}\ dx = \lim\limits_{t\to-\infty} \int\limits_t^{-1} \dfrac{1}{x^4}\ dx$

$$= \lim_{t\to-\infty} [-\frac{1}{3x^3}]\Big|_t^{-1}$$

$$= -\lim_{t\to-\infty} \left[\frac{1}{3x^3}\right]\Big|_t^{-1}$$

$$= -\lim_{t\to\infty} \left[\frac{1}{3(-1)^3} - \frac{1}{3(t)^3}\right]$$

$$= -\lim_{t\to\infty} \left[-\frac{1}{3} - \frac{1}{3t^3}\right]$$

$$= \frac{1}{3} + 0$$

$$= \frac{1}{3}$$

ดังนั้น $\int\limits_{-\infty}^{-1} \dfrac{1}{x^4}\ dx$ ลู่เข้าสู่ $\dfrac{1}{3}$

ข) วิธีทำ $$\int_{-\infty}^{0} e^{x}\ dx = \lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{0} e^{x}\ dx$$

$$= \lim_{t\to-\infty}\left[e^{x}\right]\Big|_{t}^{0}$$

$$= -\lim_{t\to-\infty}\left[e^{x}\right]\Big|_{t}^{0}$$

$$= \lim_{t\to-\infty}\left[e^{0}-e^{t}\right]$$

$$= 1-0$$

$$= 1$$

ดังนั้น $\int_{-\infty}^{0} e^{x}\ dx$ ลู่เข้าสู่ 1

ค) วิธีทำ $$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-x}}\ dx = \lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-x}}\ dx$$

$$= \lim_{t\to-\infty}\left[-2\sqrt{1-x}\right]\Big|_{t}^{0}$$

$$= -\lim_{t\to-\infty}\left(2\sqrt{1-0}\right)-\left(2\sqrt{1-t}\right)$$

$$= \lim_{t\to-\infty} 2\sqrt{1-t}-2$$

$$= \infty$$

ดังนั้น $\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-x}}\ dx$ ลู่ออกสู่ ∞

ตัวอย่าง 8.26 จงแสดงว่า ปริพันธ์ต่อไปนี้ ลู่เข้าหรือลู่ออก ถ้าลู่เข้าจงหาค่าของปริพันธ์นั้น

ก) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{x}\ dx$ ข) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x+1}{x^{2}+2x+2}\ dx$

ค) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{e^{x}+e^{-x}}\ dx$

ก) วิธีทำ $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^x \ dx = \int\limits_{-\infty}^{0} e^x \ dx + \int\limits_{0}^{\infty} e^x \ dx$ (เลือกค่า $c = 0$ ในสมการ (11))

$$= \lim_{t \to -\infty} \int\limits_{-\infty}^{0} e^x \ dx$$

แต่จากตัวอย่าง 8.24 (ค) $\int\limits_{0}^{\infty} e^x \ dx$ ลู่ออกสู่อนันต์

ดังนั้น $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^x \ dx$ ลู่ออก

ข) วิธีทำ $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x+1}{x^2+2x+2} \ dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x+1}{(x+1)^2+1} \ dx$

แต่ $\int \frac{x+1}{(x+1)^2+1} \ dx = \frac{1}{2} \ln \left| (x+1)^2 + 1 \right| + c$

เลือกค่า $c = -1$ ในสมการ (10) จะได้ว่า

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x+1}{x^2+2x+2} \ dx = \int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{x+1}{(x+1)^2+1} \ dx + \int\limits_{-1}^{\infty} \frac{x+1}{(x+1)^2+1} \ dx$$

แต่เนื่องจาก $\int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{x+1}{(x+1)^2+1} \ dx = \lim\limits_{t \to -\infty} \int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{x+1}{(x+1)^2+1} \ dx$

$$= \lim_{t \to -\infty} \left[\frac{1}{2} \ln \left| (x+1)^2 + 1 \right| \right] \Bigg|_{t}^{-1}$$

$$= \lim_{t \to -\infty} - \left[\frac{1}{2} \ln \left| (t+1)^2 + 1 \right| \right]$$

$$= -\infty$$

เนื่องจาก $\int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{x+1}{(x+1)^2+1} \ dx$ ลู่ออก

ดังนั้น $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x+1}{x^2+2x+2} \ dx$ ลู่ออก

ค) วิธีทำ เลือกค่า $c = 0$ ในสมการ (10) จะได้ว่า

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{e^x + e^{-x}} \ dx = \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{1}{e^x + e^{-x}} \ dx + \int\limits_{0}^{\infty} \frac{1}{e^x + e^{-x}} \ dx$$

$$= \lim_{t \to -\infty} \int\limits_{t}^{0} \frac{1}{e^x + e^{-x}} \ dx + \lim_{s \to \infty} \int\limits_{0}^{s} \frac{1}{e^x + e^{-x}} \ dx$$

เพราะว่า $\int \frac{1}{e^x + e^{-x}}\, dx = \int \frac{e^x}{e^{2x}+1}\, dx$

$= \arctan e^x + c$

ดังนั้น $\lim\limits_{t\to-\infty} \int_t^0 \frac{1}{e^x + e^{-x}}\, dx = \lim\limits_{t\to-\infty} \left[\arctan e^x\right]\Big|_t^0$

$= \lim\limits_{t\to-\infty} \left[\frac{\pi}{4} - \arctan e^t\right]$

$= \lim\limits_{t\to-\infty} \left[\frac{\pi}{4} - \arctan 0\right]$

$= \frac{\pi}{4}$

และ $\lim\limits_{s\to\infty} \int_0^s \frac{1}{e^x + e^{-x}}\, dx = \lim\limits_{s\to\infty} \left[\arctan e^t\right]\Big|_t^0$

$= \lim\limits_{s\to\infty} \left[\arctan e^s - \frac{\pi}{4}\right]$

$= \lim\limits_{s\to\infty} \left[\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right]$

$= \frac{\pi}{4}$

จึงทำให้ได้ว่า $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}}\, dx = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

ดังนั้น $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{e^x + e^{-x}}\, dx$ ลู่เข้าสู่ $\frac{\pi}{2}$

8.5.2 กรณีปริพัทธ์ไม่ต่อเนื่องและมีค่าเป็นอนันต์

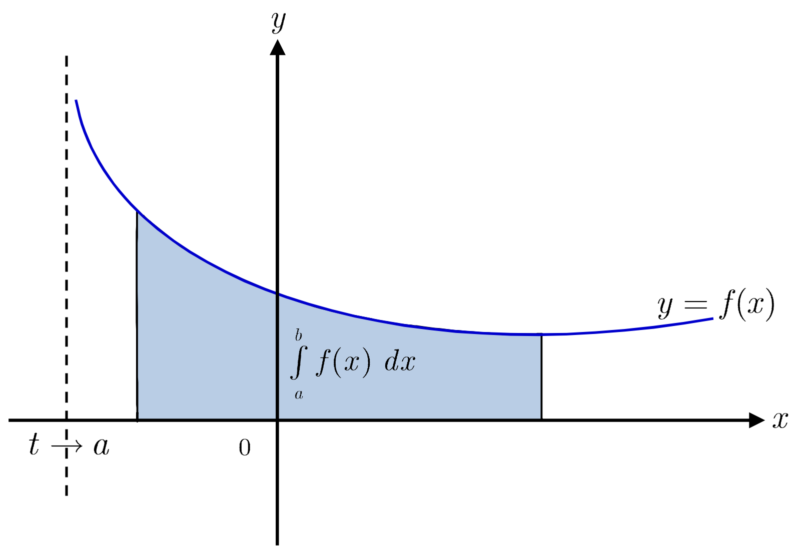
ถ้า f ต่อเนื่องบนช่วง $[a,b]$ ยกเว้นบางจุด $c \in [a,b]$ ซึ่ง $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \pm\infty$ จะกำหนดค่าของการหาปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\int_a^b f(x)\, dx$ ดังนี้

ก. f ต่อเนื่องบนช่วง $(a,b]$ และ f ไม่ต่อเนื่องที่ $c = a$ และ $f(x) \to \infty$ เมื่อ $x \to a^+$ จะกำหนดว่า

(12) $$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{t\to a^+} \int_t^b f(x)\, dx$$

โดยที่ลิมิตในสมการ (12) นี้ต้องหาค่าได้ ซึ่งจะกล่าวว่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบ (ทางซ้ายของสมการ(12)) ลู่เข้าแต่ถ้าลิมิตนี้หาค่าไม่ได้ จะกล่าวว่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบดังกล่าวนั้นลู่ออก และถ้าลิมิตนี้มีค่าเป็นอนันต์ (∞) จะกล่าวว่า ปริพันธ์ไม่ตรงแบบนั้น **ลู่ออกสู่อนันต์**

เพื่อให้เข้าใจสมการ (12) ให้มากขึ้น พิจารณาภาพต่อไปนี้



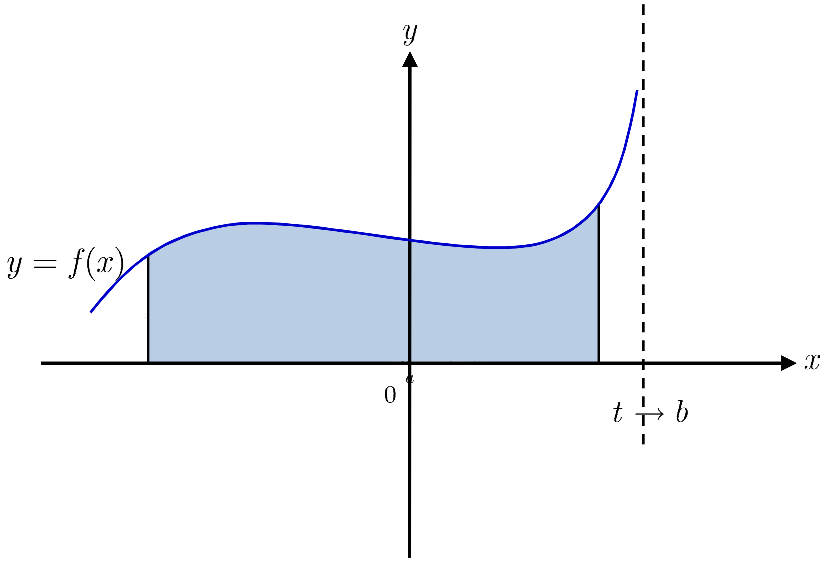
ภาพประกอบที่ 8.3 แสดง $\int_a^b f(x)\ dx$

ที่มา : คณาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น. 2539 : 123

ข. f ต่อเนื่องบนช่วง $[a,b)$ และ f ไม่ต่อเนื่องที่ $c = d$ และ $f(x) \to \infty$ เมื่อ $x \to b^-$ จะกำหนดว่า

(13) $$\int_a^b f(x)\ dx = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)\ dx$$

โดยลิมิตในสมการ (13) นี้ต้องหาค่าได้และเพื่อให้เข้าใจสมการ (13) ให้มากขึ้น พิจารณาภาพต่อไปนี้



ภาพประกอบที่ 8.4 แสดง $\int_a^b f(x)\ dx = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)\ dx$

ที่มา : คณาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น. 2539 : 124

ค. f ต่อเนื่องบนช่วง $[a,b]$ ยกเว้นที่จุด $c \in (a,b)$ ซึ่งลิมิตทางซ้ายหรือทางขวาของ f ที่ $x = c$ มีค่าอนันต์ จะกำหนดว่า

(14) $$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx$$

โดยที่ปริพันธ์ไม่ตรงแบบทั้งสองทางขวาของสมการ (14) ต้องลู่เข้า ถ้าปริพันธ์ใดปริพันธ์หนึ่งลู่ออกจะได้ว่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบทางซ้ายของ (9) นั้นลู่ออก

หมายเหตุ

ในกรณีที่ f ต่อเนื่องบนช่วง (a,b) และไม่ต่อเนื่องที่ $x = a$ และที่ $x = b$ โดยที่ $\lim_{t \to a^+} f(x) = \pm\infty$ และ $\lim_{t \to b^-} f(x) = \pm\infty$ จะได้ว่า

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx$$

โดยที่ $c \in (a,b)$

ตัวอย่าง 8.27 จงแสดงว่า ปริพันธ์ต่อไปนี้ ลู่เข้าหรือลู่ออก ถ้าลู่เข้าจงหาค่าของปริพันธ์นั้น

ก) $\int\limits_{1}^{2} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx$ ข) $\int\limits_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

ค) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx$

ก) วิธีทำ เพราะว่า $f(x)=\int\limits_{1}^{2} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx$ ต่อเนื่องบน $(1,2]$ และไม่ต่อเนื่องที่ $x=1$ และ $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\infty$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}\int\limits_{1}^{2} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx &= \lim_{t\to 1^+}\int\limits_{1}^{2} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx\\ &= \lim_{t\to 1^+}\Big[\operatorname{arc}\sec x\Big]\Big|_t^2\\ &= \lim_{t\to 1^+}\Big[\operatorname{arc}\sec 2 - arc\sec t\Big]\\ &= \frac{\pi}{3}-0\\ &= \frac{\pi}{3}\end{aligned}$$

ดังนั้น $\int\limits_{1}^{2} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx$ ลู่เข้าสู่ $\frac{\pi}{3}$

ข) วิธีทำ เพราะว่า $f(x)=\int\limits_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ ต่อเนื่องบน $[0,2)$ แต่ไม่ต่อเนื่องที่ $x=1$ และ $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\infty$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}\int\limits_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx &= \lim_{t\to 1^-}\int\limits_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\\ &= \lim_{t\to 1^-}\Big[\operatorname{arc}\sin x\Big]\Big|_0^t\\ &= \lim_{t\to 1^-}\Big[\arcsin t - \arcsin 0\Big]\\ &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

ดังนั้น $f(x)=\int\limits_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ ลู่เข้าสู่ $\frac{\pi}{2}$

ค) วิธีทำ เพราะว่า $f(x)=\int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx$ ต่อเนื่องทุกจุดยกเว้น $x=0$

และ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\infty$ ดังนั้น

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2}\,dx=\int_{-1}^{0}\frac{1}{x^2}\,dx+\int_{0}^{1}\frac{1}{x^2}\,dx$$

เพราะว่า $\int_{-1}^{0}\frac{1}{x^2}\,dx=\lim\limits_{t\to 0^-}\int_{-1}^{t}\frac{1}{x^2}\,dx$

$$=\lim_{t\to 0^-}\left[-\frac{1}{x}\right]\Bigg|_{-1}^{t}$$

$$=\lim_{t\to 0^-}\left[-\frac{1}{t}-1\right]$$

$$=\infty$$

และในทำนองเดียวกันจะหาได้ว่า $\int_{0}^{1}\frac{1}{x^2}\,dx=\infty$

เนื่องจาก $\int_{-1}^{0}\frac{1}{x^2}\,dx$ และ $\int_{0}^{1}\frac{1}{x^2}\,dx=\infty$ ลู่ออก

ดังนั้น $\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2}\,dx$ ลู่ออก

8.6 สรุปท้ายบทที่ 8

การหาปริพันธ์ของฟังก์ชันต่าง ๆ มีความสำคัญมาก ดังจะเห็นได้ว่านักคณิตศาสตร์พยายามที่จะ สร้างสูตรสำเร็จในการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันให้ได้มากที่สุดเท่าที่จะมากได้ เพื่อสะดวกต่อการนำมาใช้อย่างรวดเร็ว แต่ก็ไม่สามารถที่จะสร้างสูตรสาหรับฟังก์ชันทุกฟังก์ชันได้ ดังนั้นการหา วิธีการใหม่ ๆ หรือวิธีการที่แตกต่างกันออกไปเพื่อที่จะทำให้สามารถหาปริพันธ์ของฟังก์ชันนั้น ๆ ได้ ดังนั้นในและบทนี้เป็นการใช้เทคนิคการหาปริพันธ์ในรูปแบบต่าง ๆ ที่นิยม คือ การหาปริพันธ์แบบเปลี่ยนตัวแปร การหาปริพันธ์แบบแยกส่วน และการหาปริพันธ์โดยแยกเป็นเศษส่วนย่อย นอกจากนี้ยังมีเนื้อหาเกี่ยวกับการหาปริพันธ์ไม่ตรงแบบด้วย

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 1

1. จงหาค่าของ

1.1 $\int \left(x^2 + 3x - 1\right) dx$ 1.2 $\int \left(2x - 1\right) dx$

1.3 $\int \left(x^2\sqrt{x} + 2x\right) dx$ 1.4 $\int \left(\sqrt{x} + 2x^{20}\right) dx$

2. จงหาปริพันธ์โดยใช้เทคนิคเปลี่ยนตัวแปร

2.1 $\int \left(\sqrt{x} + 2x\right)^2 dx$ 2.2. $\int \left(2 + 3t\right)^{2/3} dx$

2.3. $\int \frac{dx}{\left(3x - 2\right)^2}$ 2.4. $\int x\sqrt{5x^2 - 3}\ dx$

2.5 $\int \frac{y}{\sqrt{2y^2 + 1}} dy$ 2.6. $\int \frac{z + 1}{\sqrt{z^2 + 2x + 2}} dz$

3. จงหาปริพันธ์โดยใช้เทคนิคแยกเศษส่วนย่อย

3.1 $\int \frac{x}{(x - 2)^2} dx$ 3.2 $\int \frac{1}{x^2 - 4^2} dx$

3.3 $\int \frac{1}{x^2 - 1} dx$ 3.4 $\int \frac{4}{x^3 - 4x} dx$

3.5 $\int \frac{1}{x^3 + x} dx$ 3.6. $\int \frac{x}{x^2 - 3x - 4} dx$

4. จงหาปริพันธ์โดยจัดรูปแบบฟังก์ชันใหม่แล้วแยกเศษส่วนย่อย

.7. $\int \frac{x^5 + 2x^2 + 1}{x^3 - x} dx$ 2.8. $\int \frac{x^4 + x^2 - 16}{(x + 1)(x - 3)^2} dx$

2.9 $\int \frac{3x^3 - 10}{x^2 - 4x + 4} dx$ 2.10. $\int \frac{x^4 - 9x - 9}{x^3 - 9x} dx$

5. จงหาปริพันธ์โดยเทคนิคการหาปริพันธ์ทีละส่วน

5.1 $\int xe^{-x}\ dx$ 5.2 $\int x^2e^{-3x}\ dx$

5.3 $\int x\sin 6x\ dx$ 5.4 $\int x^2e^{x}\ dx$

5.5 $\int x^2\cos x\ dx$ 5.6. $\int \sqrt{x}\ln x\ dx$

5.7. $\int e^{x}\sin x\ dx$ 5.8. $\int \ln(2x+3)\ dx$

5.9 $\int x\,sce^2x\ dx$ 5.10. $\int \sin\ln(x)\ dx$

6. จงแสดงว่า $\int_{3}^{\infty}\frac{1}{x^2}\ dx$ ลู่เข้า หรือ ลู่ออก ถ้าลู่เข้าจงหาค่าของปริพันธ์นั้น

7. จงแสดงว่า $\int_{5}^{\infty}\frac{1}{x^{3/4}}\ dx$ ลู่เข้า หรือ ลู่ออก ถ้าลู่เข้าจงหาค่าของปริพันธ์นั้น

8. จงแสดงว่า $\int_{-\infty}^{-1}\frac{1}{1+x^2}\ dx$ ลู่เข้า หรือ ลู่ออก ถ้าลู่เข้าจงหาค่าของปริพันธ์นั้น

9. จงแสดงว่า $\int_{-\infty}^{-1}\frac{1}{x(x-1)}\ dx$ ลู่เข้า หรือ ลู่ออก ถ้าลู่เข้าจงหาค่าของปริพันธ์นั้น

10. จงแสดงว่า $\int_{-\infty}^{\infty}3x^2\ dx$ ลู่เข้า หรือ ลู่ออก ถ้าลู่เข้าจงหาค่าของปริพันธ์นั้น

11. จงแสดงว่า $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{1+2x^2}\ dx$ ลู่เข้า หรือ ลู่ออก ถ้าลู่เข้าจงหาค่าของปริพันธ์นั้น

เอกสารอ้างอิง

คณาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น. (2539). **แคลคูลัส 2.** พิมพ์ครั้งที่ 3. ขอนแก่น : มหาวิทยาลัยขอนแก่น.

ทศพร คล้ายอุดม และคณะ. (2537). **แคลคูลัส 2.** กรุงเทพมหานคร : ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยรามคำแหง

วัลลภ เฉลิมสุวิวัฒนาการ. (2539). **แคลคูลัสเบื้องต้น.** กรุงเทพมหานคร : แมคกรอ-ฮิล อินเตอร์เนชั่นแนล เอ็นเตอร์ไพรส์ อิงค์.

อำพล ธรรมเจริญ. (2546). **แคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ตอนที่ 3.** กรุงเทพมหานคร : พิทักษ์การพิมพ์.

บรรณานุกรม

กมล เอกไทยเจริญ. (2544). **แคลคูลัส 1.** กรุงเทพมหานคร : ไฮเอ็ดพับลิชชิ่ง.

__________. (2545). **แคลคูลัส 2.** กรุงเทพมหานคร : ไฮเอ็ดพับลิชชิ่ง.

กวิยา เนาวประทีป. (2547). **เทคนิคการเรียนคณิตศาสตร์ แคลคูลัสเบื้องต้น.** กรุงเทพมหานคร : ฟิสิกส์เซ็นเตอร์.

กานดา ลือสุทธิวิบูลย์ และยุพิน จิรสุขานนท์. (2549). **สรุปคณิตศาสตร์ ม.ปลาย.** กรุงเทพมหานคร : เดอะบุคส์ จำกัด

คณาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยรามคำแหง. (2542). **แคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ 1.** พิมพ์ครั้งที่ 8 กรุงเทพมหานคร : มหาวิทยาลัยรามคำแหง.

คณาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น. (2539). **แคลคูลัส 2.** พิมพ์ครั้งที่ 3 ขอนแก่น : มหาวิทยาลัยขอนแก่น.

จำรัส อินสม และประทีป โรจนวิกาต. (2550). **คู่มือคณิตศาสตร์พื้นฐาน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เล่ม 2 ภาคเรียนที่ 2.** กรุงเทพมหานคร : แม็ค.

จันทนีย์ กาญจนะโรจน์ และชุลี โชติกประคัลภ์. (2557). **แคลคูลัส 1.** พิมพ์ครั้งที่ 4 กรุงเทพมหานคร : คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยกรุงเทพ.

ชัยสงคราม เครือหงส์. (2544). **เอกสารประกอบการสอนรายวิชาแคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์1.** สุราษฎร์ธานี : มหาวิทยาลัยราชภัฏสุราษฎร์ธานี.

ดวงใจ ลิ้มอำไพ. (2554). **คณิตศาสตร์สำหรับคอมพิวเตอร์.** บุรีรัมย์ : คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี สถาบันราชภัฏบุรีรัมย์.

ดำรง ทิพย์โยธา. (2541). **การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ เล่ม 1.** กรุงเทพมหานคร : สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

ทศพร คล้ายอุดม. (2531). **สมการดิเฟอเรนเชียล.** กรุงเทพมหานคร : สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยรามคำแหง.

ทศพร คล้ายอุดม และคณะ. (2537). **แคลคูลัส 2.** กรุงเทพมหานคร : ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยรามคำแหง

ทัศนีย์ อารยะตระกูลลิขิต. (2539). **แคลคูลัส 1.** ขอนแก่น : ภาควิชาคณิตศาสตร์

คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น.

ธีระศักดิ์ อุรัจนานนท์. (2548). **อินทิกรัล.** กรุงเทพมหานคร : สกายบุ๊กส์.

__________. (2546). **แคลคูลัส 1.** กรุงเทพมหานคร : สกายบุ๊กส์.

บัญญัติ สร้อยแสง. (2553). **เอกสารประกอบการสอนแคลคูลัสและสมการเชิงอนุพันธ์สำหรับวิทยาศาสตร์ชีวภาพ.** ภาควิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์

ประเสริฐ ภู่เงิน.(2538). **คณิตศาสตร์พื้นฐาน.** บุรีรัมย์ : ภาควิชาคณิตศาสตร์และสถิติ สถาบันราชภัฏบุรีรัมย์

ปราณี เหรียญกิติวัฒน์ และลัดดาวัลย์ เพ็ญสุภา. (2530). **คณิตศาสตร์ทั่วไป.** กรุงเทพมหานคร : สำนักประกายพรึก.

ปิยรัตน์ จาตุรันตบุตร. (2547). **หลักการคณิตศาสตร์.** กรุงเทพมหานคร : ด่านสุทธาการพิมพ์.

พลอนันต์ แสงประสิทธิ์. (2554). **แนวข้อสอบคณิตศาสตร์ ม. ปลาย.** กรุงเทพมหานคร : เดอะบุคส์.

พัฒนา สีมากุล. (2537). **แคลคูลัส 1.** กรุงเทพมหานคร : เจเนอรัลบุ๊คส์.

เฟื่องฟ้า ศรีจันทพงศ์ และคณะ. (2553). **แคลคูลัส 1.** พิมพ์ครั้งที่ 5 ขอนแก่น : ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น.

ไมตรี ปชาเดชสุวัฒน์. (2532). **แคลคูลัสเบื้องต้น.** กรุงเทพมหานคร : ประกอบเมไตร.

มาริสา มัยยะ และวันเพ็ญ จันทรังษี. (2550). **แคลคูลัส 1.** กรุงเทพมหานคร : ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์.

ราชบัณฑิตยสถาน. (2553). **พจนานุกรมศัพท์คณิตศาสตร์ฉบับราชบัณฑิตยสถาน.** พิมพ์ครั้งที่ 10 กรุงเทพมหานคร นานมีบุคส์พับลิเคชั่นส์.

รณชัย มาเจริญทรัพย์. (2547). **คณิตศาสตร์เพิ่มเติมเล่ม 1.** กรุงเทพมหานคร : ภูมิบัณฑิตการพิมพ์.

__________ . (2551). **คณิตศาสตร์เพิ่มเติมเล่ม 3.** กรุงเทพมหานคร : ภูมิบัณฑิตการพิมพ์.

เลิศ สิทธิโกศล. (2541). **แคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ 1.** กรุงเทพมหานคร : สกายบุคส์.

วัลลภ เฉลิมสุวิวัฒนาการ. (2539). **แคลคูลัสเบื้องต้น.** กรุงเทพมหานคร : แมคกรอ-ฮิล อินเตอร์เนชั่นแนล เอ็นเตอร์ไพรส์ อิงค์.

วิรุฬห์ บูญสมบัติ.(2534). **คณิตศาสตร์ทั่วไป.** กรุงเทพมหานคร : จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

วีระศักดิ์ วาจาบัณฑิตย์. (2541). **สมการเชิงอนุพันธ์.** กรุงเทพมหานคร : ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยรามคำแหง.

เวชชัย สังข์สาย. (2536). **คณิตศาสตร์พื้นฐาน.** สุรินทร์ : ภาควิชาคณิตศาสตร์และสถิติ วิทยาลัยครูสุรินทร์.

ศิริพร พัสดร. (2552). **สมการเชิงอนุพันธ์** อุดรธานี : สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏอุดรธานี.

ศรีบุตร แววเจริญ. (2541). **คณิตศาสตร์สำหรับวิศวกรรมและวิทยาศาสตร์.** กรุงเทพมหานคร : วงตะวัน.

ศรีบุตร แววเจริญ และชนศักดิ์ บ่ายเที่ยง. (2542). **สมการเชิงอนุพันธ์ 1.** กรุงเทพมหานคร : บริษัทวงตะวัน.

ศุภกิจ เฉลิมวิสุตม์กุล. (2553). **คณิตศาสตร์ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4.** กรุงเทพมหานคร : แม็ค.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2546). **หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 1 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ มัธยมศึกษาปีที่ 4.** กรุงเทพมหานคร : สำนักพิมพ์คุรุสภา.

สิริวรรณ ตั้งจิตรวัฒนะกุล และสมศักดิ์ บุญมาเลิศ. (2542). **แคลคูลัสขั้นสูง 1.** พิมพ์ครั้งที่ 8 กรุงเทพมหานคร : ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยรามคำแหง.

สุกัญญา สนิทวงศ์ ณ อยุธยา และอนัญญา อภิชาตบุตร. (2551). **แคลคูลัส 2.** กรุงเทพมหานคร : ไฮเอ็ดพับลิชชิ่ง.

สุรวิทย์ ตันแต่งผล และอนุสรณ์ ชนวีรยุทธ. (2557). **แคลคูลัส 1.** กรุงเทพมหานคร : จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

สุรัตนา สังข์หนุน. (2558). **สมการเชิงอนุพันธ์ 1**. กรุงเทพมหานคร : ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ประยุกต์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ

สุชาติ เจริญนิตย์. (2554). **แคลคูลัส 2.** พิมพ์ครั้งที่ 9 ปทุมธานี : มหาวิทยาลัยกรุงเทพ.

สุเทพ ลิ่มอรุณ. (2542). **แคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ 2.** เพชรบุรี : มหาวิทยาลัยราชภัฏเพชรบุรี.

สมเกียรติ พาน้อย. (2543). **แคลคูลัส 1.** ขอนแก่น : ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น.

อัจฉรา ปาจีนบูรวรรณ์. (2555). **แคลคูลัส 1.** กรุงเทพมหานคร : ภาควิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์.

อุษณีย์ ลีรวัฒน์. (2552). **เอกสารประกอบการสอนรายวิชาคณิตศาสตร์ขั้นสูง I.** กรุงเทพมหานคร : มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์.

อุบล กลองกระโทก. (2549). **เอกสารคำสอนคณิตศาสตร์สำหรับวิทยาศาสตร์ 2.** กรุงเทพมหานคร : คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา.

อำพล ธรรมเจริญ. (2546). **แคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ตอนที่ 3.** กรุงเทพมหานคร : พิทักษ์การพิมพ์.

Anton, Howard. (1995). **Calculus with analytic geometry.** New York : John Wiley & son.

Ben-Ari, M. (1993). **Mathematical Logic for Computer Science.** Prentice Hall International (UK) Ltd.

Buck, Creighton R. (1987). **Advanced Calculus.** New York : Mcgraw-Hill Book company Inc.

Combe, H.J. (1971). **Set and Symbolic Logic.** London : Macmillan Company.

Olmsted, John. M.H. (1962). **The Real Number System.** New York : Appletion-Century Crofts

Ross, F.L. Maurice,.W.D. and Frank, G.R. (2001). **Calculus with analytic geometry.** New Yok : Addison-wesley.

Stein, S.K.& Barcellos, A. (1992). **Calculus and analytic Geometry.** McGraw-Hill.

Taylor Angus E. (1972). **Advanced Calculus.** Lexingtion.

Trench William F. (1978)**Advanced Calculus.** Harper & Row, Publishers, New York.

Wright,D.F. and New, B.D. (1992). **Calulus with Applications.** Massachusetts : D.C Heath.