

# แผนบริหารการสอนประจำบทที่ 1

## ความเค้นและความเครียด

### หัวข้อเนื้อหาประจำบท

1. ความเค้น
  - ความเค้นดึง
  - ความเค้นอัด
  - ความเค้นเฉือน
2. ความเครียด
  - ความเครียดดึง
  - ความเครียดอัด
  - ความเครียดเฉือน
3. โมดูลัสยืดหยุ่นหรือยังส์โมดูลัส
4. โมดูลัสความคงรูปหรือโมดูลัสเฉือน
5. อัตราส่วนปัวส์ซอง
6. กราฟความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียด
  - ค่าความปลอดภัย
  - ความเค้นออกแบบ
7. สัมประสิทธิ์การขยายตัวทางความร้อน
8. สูตรท่ายบท
9. แบบฝึกหัดท่ายบท

### วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม

เมื่อนักศึกษาเรียนบทเรียนนี้แล้วสามารถ

1. อธิบายและคำนวณความเค้นในวัสดุได้
2. อธิบายและคำนวณความเครียดในวัสดุได้
3. อธิบายโมดูลัสยืดหยุ่นหรือยังส์โมดูลัสในวัสดุได้
4. อธิบายโมดูลัสความคงรูปหรือโมดูลัสเฉือนในวัสดุได้
5. อธิบายอัตราส่วนปัวส์ซอง และแก้โจทย์ปัญหาที่เกี่ยวข้องกับอัตราส่วนปัวส์ซองใน

วัสดุได้

6. อธิบายกราฟความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดได้
7. อธิบายค่าความปลอดภัยและความเค้นออกแบบ ตลอดจนสามารถแก้โจทย์ปัญหาที่เกี่ยวข้องได้
8. อธิบายสัมประสิทธิ์การขยายตัวทางความร้อน ตลอดจนสามารถแก้โจทย์ปัญหาที่เกี่ยวข้องได้

### วิธีสอนและกิจกรรมการเรียนการสอนประจำบท

1. บรรยายเนื้อหาในเอกสารประกอบคำสอน การถามและตอบในห้องเรียนร่วมกับการใช้สื่อประกอบอื่น เช่น สื่อแผ่นใส สื่อคอมพิวเตอร์ หรือสื่อวีดิทัศน์ เป็นต้น
2. แสดงตัวอย่างชิ้นงานที่ทำจากวัสดุชนิดต่าง ๆ ทั้งก่อนและหลังการทดสอบเพื่อให้ผู้เรียนได้สังเกตรูปร่างเดิม การเปลี่ยนแปลงรูปร่าง และลักษณะการวิบัติของชิ้นงาน
3. สาธิตขั้นตอนการแก้โจทย์หาโจทย์ที่เกี่ยวข้องกับเนื้อหาในการเรียนการสอน เช่น ความเค้น ความเครียด โมดูลัสยืดหยุ่น โมดูลัสความคงรูป อัตราส่วนปัวส์ซอง และสัมประสิทธิ์การขยายตัวเชิงต่ออุณหภูมิ เป็นต้น
4. มอบหมายงาน
  - 4.1 ให้ผู้เรียนแต่ละคนแก้โจทย์หาโจทย์ที่เกี่ยวข้องกับเนื้อหา เช่น ความเค้น ความเครียด โมดูลัสยืดหยุ่น โมดูลัสความคงรูป อัตราส่วนปัวส์ซอง และสัมประสิทธิ์การขยายตัวทางความร้อน เป็นต้น
  - 4.2 ให้ผู้เรียนแต่ละกลุ่มศึกษาเพิ่มเติมเกี่ยวกับกราฟความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดของวัสดุวิศวกรรมสมัยใหม่และวัสดุในท้องถิ่น
  - 4.3 ให้ผู้เรียนแต่ละคนทำแบบฝึกหัดจากคำถามท้ายบท เพื่อทดสอบความรู้ที่ได้เรียนมา
5. ทำแบบฝึกหัดท้ายบท

### การวัดและประเมินผล

1. การสังเกตความสนใจของผู้เรียน
2. การฝึกปฏิบัติเกี่ยวกับการคำนวณปัญหาโจทย์
3. การทดสอบจากแบบทดสอบ
4. การประเมินผล ผู้เรียนจะต้องได้คะแนนรวมไม่ต่ำกว่าร้อยละ 60 จึงจะผ่านเกณฑ์การเรียนรู้

## บทที่ 1

### ความเค้นและความเครียด

ชิ้นส่วนของสิ่งก่อสร้างและเครื่องจักรกลสามารถผลิตจากวัสดุหลากหลายชนิด วัสดุแต่ละชนิดมีคุณสมบัติแตกต่างกันจึงส่งผลต่อความมั่นคงแข็งแรงต่างกัน ถ้าชิ้นส่วนของสิ่งก่อสร้างหรือเครื่องจักรกลยังคงอยู่ได้โดยไม่เกิดการวิบัติแสดงว่าชิ้นส่วนนั้นสามารถต้านทานแรงได้อย่างปลอดภัย คุณสมบัติด้านกำลัง (Strength) หรือการต้านทานแรงเป็นคุณสมบัติที่วัสดุทั่วไปจะต้องมีเพื่อรักษาสถานะสมดุล วัสดุที่นำมาใช้ผลิตชิ้นส่วนต่าง ๆ หากมีคุณสมบัติด้านกำลังที่ดีก็ย่อมทำให้ชิ้นส่วนมีความแข็งแรง นอกจากนี้คุณสมบัติการต้านทานการเปลี่ยนแปลงรูปร่างก็มีความสำคัญด้วยเช่นกัน วัสดุทั่วไปจะมีรูปร่างเปลี่ยนไปเมื่อมีแรงมากระทำ ถ้าสถานะแวดล้อมเปลี่ยนไปแต่ชิ้นส่วนถูกจำกัดการเปลี่ยนแปลงรูปร่างก็จะทำให้ชิ้นส่วนนั้นเกิดแรงภายในขึ้นและอาจส่งผลเสียต่อชิ้นส่วนนั้นในภายหลัง จะเห็นได้ว่าคุณสมบัติการต้านทานแรงและการเปลี่ยนแปลงรูปร่างมีความสำคัญดังนั้นบทนี้จึงอธิบายเนื้อหาเกี่ยวกับความเค้นและความเครียดซึ่งมีความสัมพันธ์กับแรงภายในและการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของวัตถุ ตลอดจนคุณสมบัติด้านต่าง ๆ ที่สัมพันธ์กับความเค้นและความเครียด

#### ความเค้น

เกรียงศักดิ์ อุดมสิน โรจน์ (2540 : 1-10) กล่าวว่าความเค้น (Stress :  $\sigma$ ) คือแรงกระทำบนส่วนของพื้นที่หรือค่าแรงหารด้วยขนาดพื้นที่ สมโพธิ์ วิวิธเกยูรวงศ์ (2542 : 1) กล่าวว่าความเค้น ของวัตถุคือแรงต้านทานของเนื้อวัตถุต่อหนึ่งหน่วยพื้นที่ของโครงสร้างเมื่อมีน้ำหนักภายนอกมากระทำเพื่อให้โครงสร้างนั้นอยู่ในสมดุล บรรจบ อรชร (2542 : 1-29) กล่าวว่าความเค้นคือความเข้มของแรงหรือแรงภายในที่กระทำต่อหน่วยพื้นที่ ในขณะที่ มนตรี พิรุณเกษร (2544 : 15) กล่าวว่าความเค้นคือแรงกระทำในเนื้อวัสดุต่อหนึ่งหน่วยพื้นที่ที่ตั้งฉากหรือขนานกับแรงนั้น จากคำจำกัดความข้างต้นอาจสรุปได้ว่าความเค้นคือแรงต้านทานภายในเนื้อวัสดุต่อหนึ่งหน่วยพื้นที่เมื่อมีแรงมากระทำและผลรวมของแรงต้านทานภายในจะต้องทำให้วัตถุนั้นอยู่ในสถานะสมดุล โดยสถานะสมดุลอาจเป็นความสมดุลทางสถิตยศาสตร์หรือพลศาสตร์ก็ได้

มนตรี พิรุณเกษร (2544 : 15-18) และ สิทธิชัย แสงอาทิตย์ (2549 : 1-10-1-24) กล่าวว่าวัตถุโดยทั่วไปมักมีแรงกระทำหลายรูปแบบและแรงแต่ละรูปแบบจะส่งผลต่อวัตถุแตกต่างกัน หากแรงที่มากระทำอยู่ในแนวแกนและเป็นแรงดึงจะทำให้วัตถุยืดออก แต่ถ้าหากเป็นแรงอัดก็จะทำให้วัตถุหดสั้นเข้า ถ้าแรงที่กระทำตั้งฉากกับแนวแกนหรือเรียกว่าแรงเฉือนก็จะทำให้วัตถุ

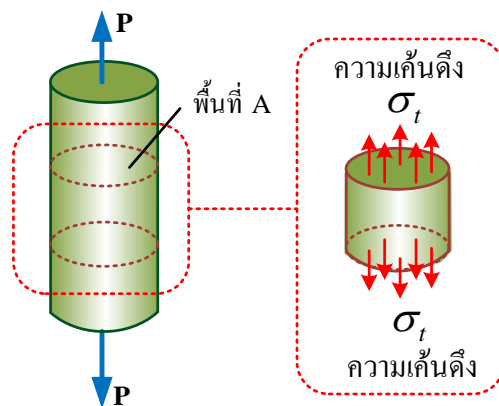
ลักษณะออกจากกัน ดังนั้นความเค้นในเนื้อวัสดุก็จะมีค่าแตกต่างกันสอดคล้องกับรูปแบบที่แรงกระทำ ความเค้นในวัตถุที่รับแรงในแนวแกนสามารถคำนวณได้จากการนำแรง  $P$  หารด้วยพื้นที่หน้าตัด  $A$  ของวัตถุ ดังสมการต่อไปนี้

$$\sigma = \frac{P}{A} \quad (1.1)$$

หากพิจารณาประเภทของความเค้นตามรูปแบบของแรงที่มากระทำสามารถแบ่งออกได้ดังต่อไปนี้ (Ferdinand P. Beer, et al. 2012 : 7-12, James M. Gere and Barry J. Goodno. 2012 : 7-10 and Russell C. Hibbeler. 2011 : 22-26)

### 1. ความเค้นดึง

ความเค้นดึง (Tensile Stress :  $\sigma_t$ ) เป็นความเค้นที่วัตถุต้านทานแรงที่มากระทำเมื่อแรงนั้นเป็นแรงดึงในแนวแกนและพยายามทำให้วัตถุยืดออก ในขณะที่เดียวกันก็จะมีแรงเกิดขึ้นภายในเนื้อวัสดุเป็นแรงต้านทานการยืดและมีทิศทางตั้งฉากกับพื้นที่หน้าตัดดังแสดงในภาพที่ 1.1 ถ้าวัสดุมีคุณสมบัติด้านกำลังดึงสูงแสดงว่าสามารถต้านทานแรงดึงได้ดี ตัวอย่างวัสดุที่ใช้ในการก่อสร้างและมีคุณสมบัติด้านกำลังดึงที่ดี เช่น เหล็กกล้าคาร์บอน เส้นใยแก้วสังเคราะห์ (Glass Fiber) และเส้นใยคาร์บอนสังเคราะห์ (Carbon Fiber) เป็นต้น



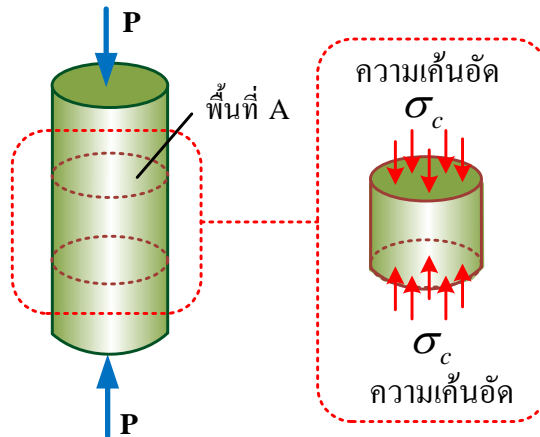
ภาพที่ 1.1 ความเค้นดึง

ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

### 2. ความเค้นอัด

ความเค้นอัด (Compressive Stress :  $\sigma_c$ ) เป็นความเค้นที่วัตถุต้านทานแรงที่มากระทำเมื่อแรงนั้นเป็นแรงอัดในแนวแกนและพยายามทำให้วัตถุหดสั้นลง ในขณะที่มีแรงอัดกระทำก็จะมีแรงเกิดขึ้นภายในเนื้อวัสดุเป็นแรงต้านทานการหดตัวและมีทิศทางตั้งฉากกับพื้นที่หน้าตัด

ดังแสดงในภาพที่ 1.2 ถ้าวัสดุมีคุณสมบัติด้านกำลังอัดสูงแสดงว่าสามารถต้านทานแรงอัดได้ดี ตัวอย่างวัสดุที่ใช้ในการก่อสร้างและมีคุณสมบัติด้านกำลังอัดที่ดี เช่น หินอ่อน หินแกรนิต เหล็กกล้าคาร์บอน เหล็กหล่อ และไม้ในแนวขนานเส้น เป็นต้น

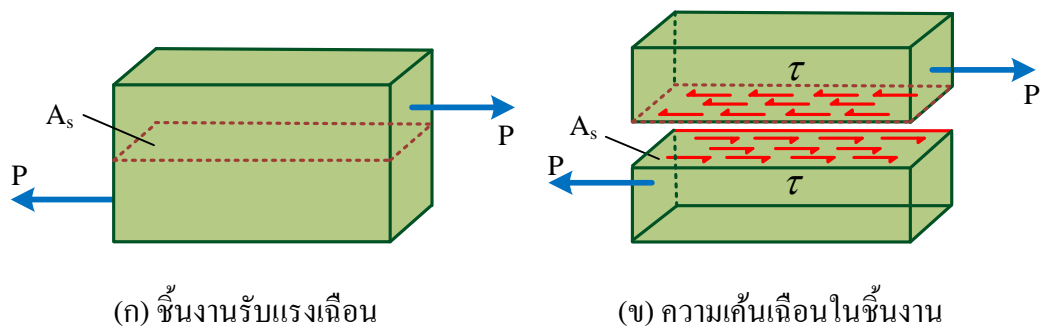


ภาพที่ 1.2 ความเค้นอัด

ที่มา : จิรวัดน์ วิมุติสุขวิริยา. 2556

### 3. ความเค้นเฉือน

ความเค้นเฉือน (Shear Stress :  $\tau$ ) เป็นความเค้นที่วัตถุต้านทานแรงที่มากระทำเมื่อแรงนั้นเป็นแรงเฉือนและพยายามทำให้วัตถุขาดออกจากกันในระนาบเฉือน แรงต้านทานในเนื้อวัสดุจะกระทำขนานกับพื้นที่ที่รับแรงเฉือนดังแสดงในภาพที่ 1.3 ความเค้นเฉือนหาได้จากการนำแรงเฉือน P หารด้วยพื้นที่ที่รับแรงเฉือน  $A_s$  ดังสมการต่อไปนี้ (มนตรี พิรุณเกษตร. 2544 : 16-18, สมโพธิ วิวิธเกตุรงค์. 2542 : 9-10 และ James M. Gere and Stephen P. Timoshenko. 1991 : 27-29)



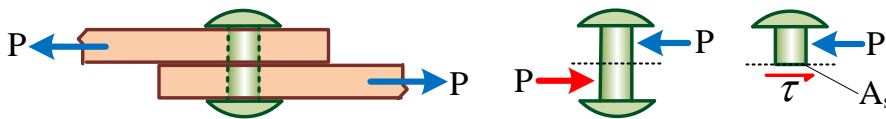
ภาพที่ 1.3 ความเค้นเฉือน

ที่มา : จิรวัดน์ วิมุติสุขวิริยา. 2556

$$\tau = \frac{P}{A_s} \quad (1.2)$$

การคำนวณความเค้นเฉือนในวัตถุแบ่งตามระนาบที่รับแรงเฉือนได้ดังนี้

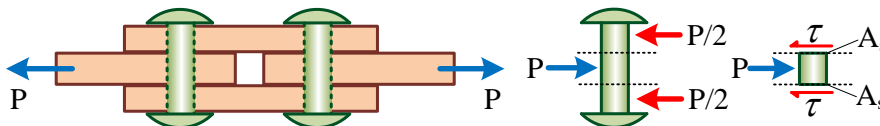
3.1 แรงเฉือนระนาบเดียว (Single Shear) เป็นแรงเฉือนที่ทำให้วัตถุขาดออกจากกันเพียงหนึ่งระนาบและเรียกความเค้นที่เกิดขึ้นนี้ว่าความเค้นเฉือนระนาบเดียว ตัวอย่างความเค้นเฉือนระนาบเดียวแสดงในภาพที่ 1.4 จากภาพพบว่าหมุดยึดจะขาดออกจากกันสองท่อนโดยมีพื้นที่รับแรงเฉือนเท่ากับพื้นที่หน้าตัดของหมุดยึด  $A_s$



ภาพที่ 1.4 แรงเฉือนระนาบเดียว

ที่มา : จิรวัดน์ วิมุติสุขวิริยา. 2556

3.2 แรงเฉือนสองระนาบ (Double Shear) เป็นแรงเฉือนที่ทำให้วัตถุขาดออกจากกันสองระนาบ เรียกความเค้นที่เกิดขึ้นนี้ว่าความเค้นเฉือนสองระนาบ ตัวอย่างความเค้นเฉือนสองระนาบแสดงในภาพที่ 1.5 จากภาพพบว่าหมุดยึดจะขาดออกจากกันสามท่อนโดยมีพื้นที่รับแรงเฉือนเท่ากับสองเท่าของพื้นที่หน้าตัดของหมุดยึด  $A_s$



ภาพที่ 1.5 แรงเฉือนสองระนาบ

ที่มา : จิรวัดน์ วิมุติสุขวิริยา. 2556

### ความเครียด

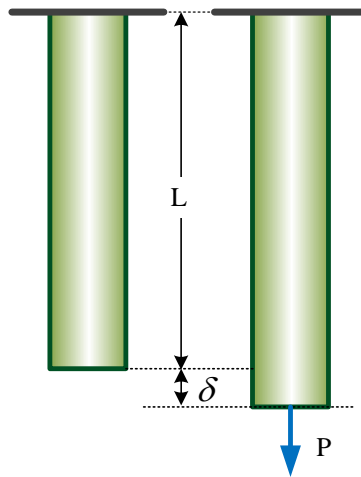
เกรียงศักดิ์ อุดมสินโรจน์ (2540 : 2-1) กล่าวว่าความเครียด (Strain :  $\epsilon$ ) คือรูปร่างของวัตถุที่เปลี่ยนแปลงไปเมื่อมีแรงมากระทำโดยอาจจะสามารถมองเห็นได้หรือไม่สามารถมองเห็นได้ สิริศักดิ์ ปโยชรสิริ (2549 : 8) กล่าวว่าความเครียดคือการวัดหรือเปรียบเทียบการเปลี่ยนรูปของวัตถุโดยใช้อัตราส่วนความยืดหดต่อหนึ่งหน่วยความยาวเดิม ในขณะที่ สิทธิชัย แสงอาทิตย์ (2549 : 2-1) กล่าวว่าวัตถุที่สามารถเปลี่ยนแปลงรูปร่างได้เมื่ออนุภาคในวัตถุนั้นมีการเปลี่ยนตำแหน่งเกิดขึ้นภายใต้การกระทำของแรง และความเค้นคือการยืดหรือหดของส่วนของเส้นตรง

ที่เชื่อมอนุภาค 2 อนุภาคบนวัตถุต่อหนึ่งหน่วยความยาวภายใต้การกระทำของแรง จากคำจำกัดความข้างต้นสามารถสรุปได้ว่าในขณะที่วัตถุใด ๆ ก็ตามมีแรงมากระทำก็จะเกิดการเปลี่ยนแปลงรูปร่าง อัตราส่วนการเปลี่ยนแปลงรูปร่างเมื่อเทียบกับขนาดเดิมเรียกว่าความเครียด การเปลี่ยนแปลงรูปร่างดังกล่าวมีความสัมพันธ์กับแรงที่มากระทำ ความเครียดเป็นค่าที่ไม่มีหน่วย เพราะเป็นการหารระหว่างสองจำนวนที่มีหน่วยเดียวกัน ความเครียดที่นำเสนอในบทนี้แบ่งเป็น 3 ชนิดดังต่อไปนี้ (สิทธิชัย แสงอาทิตย์. 2549 : 2-1-2-4, Ferdinand P. Beer, et al. 2012 : 56-59, James M. Gere and Barry J. Goodno. 2012 : 10-11 และ Russell C. Hibbeler. 2011 : 65-69)

### 1. ความเครียดดึง

ความเครียดดึง (Tensile Strain :  $\epsilon_t$ ) คือความเครียดที่เกิดจากวัตถุถูกแรงดึงในแนวแกน ทำให้ยืดออกดังแสดงในภาพที่ 1.6 เมื่อ  $\delta$  คือส่วนที่วัตถุยืดออก และ  $L$  คือความยาวเดิมของวัตถุ ซึ่งความเครียดดึงสามารถคำนวณได้จากอัตราส่วนที่วัตถุยืดออกต่อความยาวเดิมดังแสดงในสมการต่อไปนี้ (มนตรี พิรุณเกษตร. 2544 : 61-62)

$$\epsilon_t = \frac{\delta}{L} \quad (1.3)$$



ภาพที่ 1.6 ความเครียดดึง

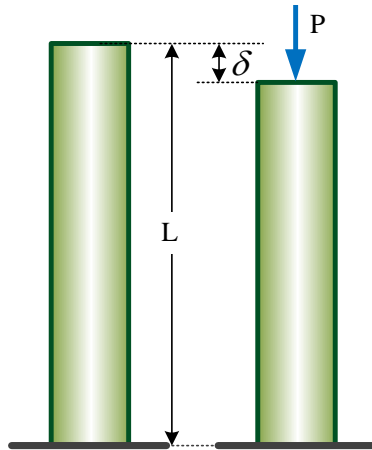
ที่มา : จิรวัดน์ วิมุติสุขวิริยา. 2556

### 2. ความเครียดอัด

ความเครียดอัด (Compressive Strain :  $\epsilon_c$ ) คือความเครียดที่เกิดจากวัตถุถูกแรงอัด ทำให้วัตถุหดลงดังแสดงในภาพที่ 1.7 เมื่อ  $\delta$  คือส่วนที่วัตถุหดเข้า และ  $L$  คือความยาวเดิมของวัตถุ ซึ่ง

จะหาค่าความเครียดของวัสดุสามารถคำนวณได้จากอัตราส่วนที่วัตถุหดเข้าต่อความยาวเดิม ดังแสดงในสมการต่อไปนี้ (มนตรี พิรุณเกษตร. 2544 : 61-62)

$$\varepsilon_c = \frac{\delta}{L} \quad (1.4)$$



ภาพที่ 1.7 ความเครียดอัด

ที่มา : จิรวัดน์ วัฒนศิริสุวิริยา. 2556

### 3. ความเครียดเฉือน

ความเครียดเฉือน (Shear Strain :  $\varepsilon_t$ ) คือความเครียดที่เกิดขึ้นเมื่อมีแรงเฉือนมากระทำกับวัตถุจนเกิดการเปลี่ยนแปลงรูปร่างไปเป็นมุม  $\gamma$  ดังแสดงในภาพที่ 1.8 การหาค่าความเครียดเฉือนสามารถหาได้จากอัตราส่วนระหว่างระยะที่วัตถุเปลี่ยนแปลงไปตามแนวเฉือนต่อระยะในแนวขวางดังแสดงในสมการต่อไปนี้ (มนตรี พิรุณเกษตร. 2544 : 85)

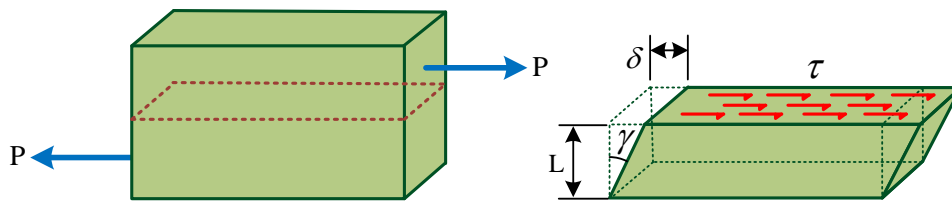
$$\varepsilon_t = \frac{\delta}{L} = \tan \gamma \quad (1.5)$$

หาก  $\gamma$  เป็นมุมขนาดเล็กมากจะได้  $\tan \gamma$  มีค่าใกล้เคียงกับ  $\gamma$  ดังนั้น

$$\varepsilon_t = \frac{\delta}{L} = \gamma \quad (1.6)$$

เมื่อ  $\delta$  คือระยะเปลี่ยนแปลงในแนวเฉือน  $L$  คือระยะในแนวขวาง และ  $\gamma$  คือค่ามุมที่เกิดจากความเค้นเฉือน

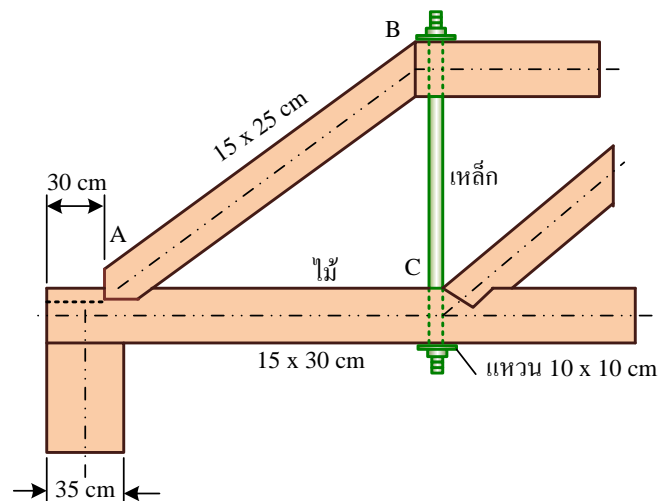




ภาพที่ 1.8 ความเครียดเฉือน

ที่มา : จีรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

ตัวอย่างที่ 1.1 โครงสร้างหลังคาแสดงในภาพที่ 1.9 ประกอบด้วยไม้และเหล็ก



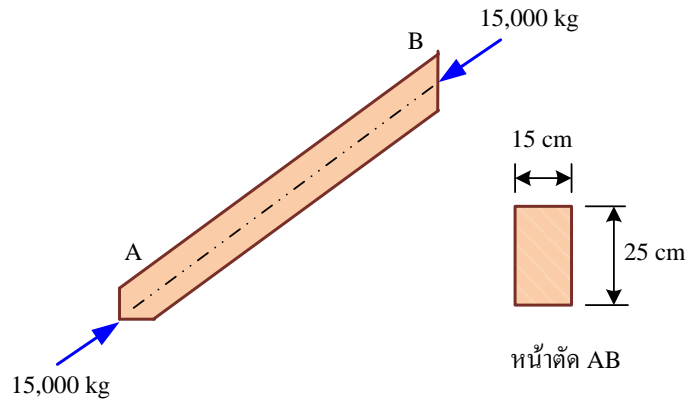
ภาพที่ 1.9 โครงหลังคา

ที่มา : จีรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

- (ก) จงหาความเค้นอัดในไม้ AB ที่มีขนาด  $15 \times 25$  cm และรับน้ำหนัก  $15,000$  kg
- (ข) จงหาความเค้นดึงในท่อนเหล็กเกลียว BC ซึ่งมีขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง  $2$  cm และขนาดเส้นผ่าศูนย์กลางเกลียว  $1.7$  cm เมื่อมีน้ำหนัก  $2,500$  kg กระทำ
- (ค) จงหาความเค้นที่เกิดกับแหวนดำแท่งเหล็กเกลียว BC มีน้ำหนัก  $2,500$  kg กระทำ และแหวนเป็นรูปสี่เหลี่ยมขนาด  $10 \times 10$  cm มีรูเจาะขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง  $2.2$  cm
- (ง) จงหาความเค้นอัดในไม้ AC ขนาด  $15 \times 30$  cm ที่วางบนหัวเสาขนาด  $30 \times 30$  cm เมื่อมีน้ำหนัก  $7,000$  kg กระทำบนเสา
- (จ) จงหาความเค้นเฉือนที่ปลายไม้ AC ที่มีระยะขอบ  $30$  cm และมีน้ำหนัก  $5,500$  kg กระทำในแนวระนาบ

วิธีทำ

(ก) ความเค้นอัดของไม้ AB

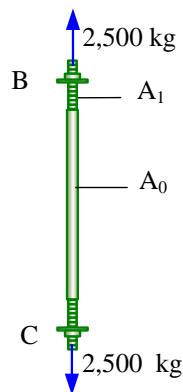


ภาพที่ 1.10 โครงหลังคาชิ้นส่วน AB

ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

แรงอัด ;	P	=	15,000 kg	
พื้นที่หน้าตัดของไม้ AB ;	A	=	15 × 25	= 375 cm <sup>2</sup>
ความเค้นอัดในไม้ AB ;	$\sigma_c$	=	$\frac{P}{A}$	
		=	$\frac{15,000}{375}$	= 40 kg/cm <sup>2</sup> <b>ตอบ</b>

(ข) ความเค้นในท่อนเหล็ก BC



ภาพที่ 1.11 ท่อนเหล็ก BC

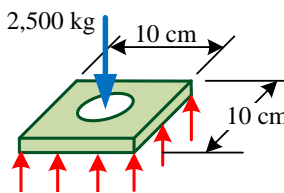
ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

แรงดึง ;  $P = 2,500 \text{ kg}$

พื้นที่ท่อนเหล็กบริเวณเกลียว ;  $A_1 = \frac{\pi d^2}{4}$   
 $= \frac{\pi \times 1.7^2}{4} = 2.27 \text{ cm}^2$

ความเค้นดึงในท่อนเหล็ก BC ;  $\sigma_t = \frac{P}{A_1}$   
 $= \frac{2,500}{2.27} = 1,101.32 \text{ kg/cm}^2$       **ตอบ**

(ค) ความเค้นอัดระหว่างไม้และแหวนรอง



ภาพที่ 1.12 แหวนรองท่อนเหล็ก BC

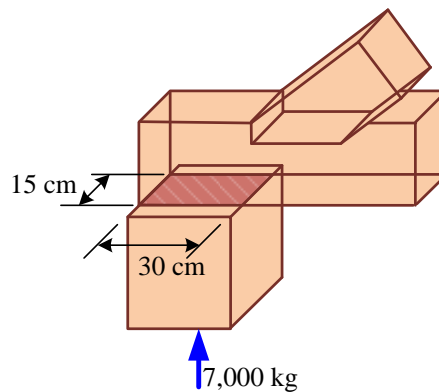
ที่มา : จีรวัดน์ วิมุติสุขวิริยา. 2556

พื้นที่ของแหวนรองสี่เหลี่ยม ;  $A = 100 - 3.8 = 96.2 \text{ cm}^2$

แรงอัด ;  $P = 2,500 \text{ kg}$

ความเค้นอัดของแหวนรอง ;  $\sigma_b = \frac{P}{A}$   
 $= \frac{2,500}{96.2} = 25.99 \text{ kg/cm}^2$       **ตอบ**

(ง) ความเค้นอัดของไม้ AC บนเสา

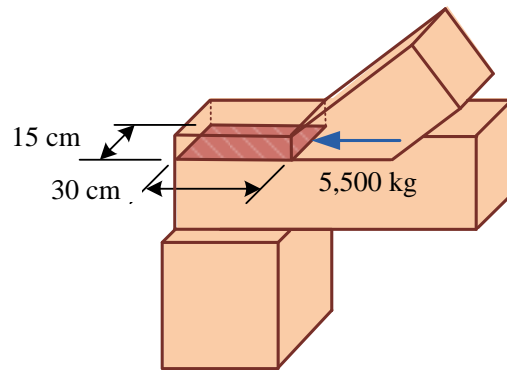


ภาพที่ 1.13 ความเค้นในไม้ AC

ที่มา : จีรวัดน์ วิมุติสุขวิริยา. 2556

$$\begin{aligned}
 \text{พื้นที่รับความเค้นในไม้ AC ; } A &= 15 \times 30 = 450 \text{ cm}^2 \\
 \text{แรงอัด ; } P &= 7,000 \text{ kg} \\
 \text{ความเค้นอัดของไม้ AC บนเสา ; } \sigma_b &= \frac{P}{A} \\
 &= \frac{7,000}{450} = 15.56 \text{ kg/cm}^2 \quad \text{ตอบ}
 \end{aligned}$$

(จ) ความเค้นเฉือนที่ปลายไม้ AC



ภาพที่ 1.14 โครงหลังคาบริเวณปลายไม้ AC

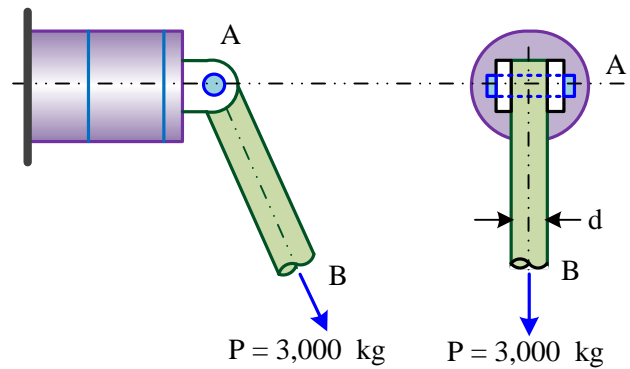
ที่มา : จีรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

$$\begin{aligned}
 \text{พื้นที่รับแรงเฉือนของไม้ AC ; } A_s &= 30 \times 15 = 450 \text{ cm}^2 \\
 \text{แรงเฉือน ; } P &= 5,500 \text{ kg} \\
 \text{ความเค้นเฉือนในไม้ AC ; } \tau &= \frac{P}{A_s} \\
 &= \frac{5,500}{450} = 12.22 \text{ kg/cm}^2 \quad \text{ตอบ}
 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 1.2 ข้อต่อเครื่องจักรดังแสดงในภาพที่ 1.15 ถ้าน้ำหนัก P กระทำที่ตอนเหล็กกลม AB เท่ากับ 3,000 kg

(ก) จงหาขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางของสลักที่จุด A ถ้ากำหนดให้ค่าความเค้นเฉือนปลอดภัยเท่ากับ  $1,000 \text{ kg/cm}^2$

(ข) จงหาขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางของท่อนเหล็ก AB ถ้ากำหนดให้ค่าความเค้นดึงปลอดภัยเท่ากับ  $1,500 \text{ kg/cm}^2$



ภาพที่ 1.15 ข้อต่อเครื่องจักร

ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

### วิธีทำ

(ก) ขนาดเส้นผ่าศูนย์กลางของสลัก

$$\text{ความเค้นเฉือนปลอดภัย ; } \tau = 1,000 \text{ kg/cm}^2$$

$$\text{น้ำหนักที่กระทำ ; } P = 3,000 \text{ kg}$$

$$\text{สลักรับแรงเฉือน 2 ระนาบ ; } \tau = \frac{P}{2A_s}$$

$$\begin{aligned} \text{พื้นที่สลักเกลียวที่ต้องการ ; } A_s &= \frac{P}{2\tau} \\ &= \frac{3,000}{2 \times 1,000} \\ &= 1.5 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ขนาดเส้นผ่าศูนย์กลางของสลัก ; } d &= \sqrt{\frac{4A_s}{\pi}} \\ &= \sqrt{\frac{4 \times 1.5}{\pi}} \\ &= 1.38 \text{ cm} \end{aligned}$$

เลือกใช้สลักที่มีขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง 1.4 cm

ตอบ

(ข) ขนาดเส้นผ่าศูนย์กลางของเหล็ก AB

$$\text{ค่าความเค้นดึงปลอดภัย ; } \sigma_t = 1,500 \text{ kg/cm}^2$$

$$\text{น้ำหนักที่กระทำ ; } P = 3,000 \text{ kg}$$

$$\text{พื้นที่ท่อนเหล็ก AB ที่ต้องการ ; } A_t = \frac{P}{\sigma_t}$$

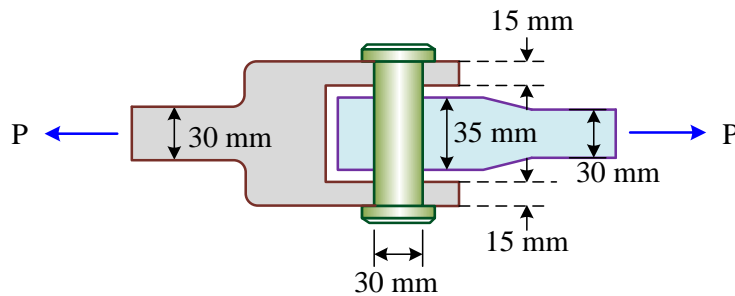
$$\begin{aligned}
 &= \frac{3,000}{1,500} \\
 &= 2.0 \text{ cm}^2 \\
 \text{ขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง AB ; } d &= \sqrt{\frac{4A_t}{\pi}} \\
 &= \sqrt{\frac{4 \times 2}{\pi}} \\
 &= 1.60 \text{ cm}
 \end{aligned}$$

เลือกใช้เหล็กที่มีขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง 1.6 cm

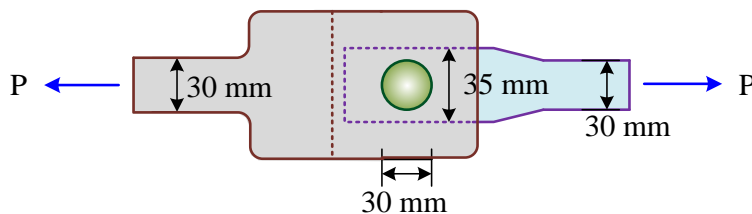
ตอบ

**ตัวอย่างที่ 1.3** ข้อต่อเครื่องจักรกลใช้ท่อนโลหะต่อกันดังแสดงในภาพที่ 1.16 เหล็กแต่ละท่อน ถูกดึงด้วยน้ำหนัก 12,000 kg

- (ก) จงหาความเค้นเฉือนในหมุดย้ำขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง 30 mm
- (ข) จงหาความเค้นอัดในเหล็กรูปตัวยูที่หนาด้านละ 15 mm
- (ค) จงหาความเค้นอัดในท่อนเหล็กกลางใกล้หมุดย้ำขนาด 35×35 mm



(ก) รูปด้านข้าง



(ข) รูปด้านบน

ภาพที่ 1.16 ข้อต่อเครื่องจักรกล

ที่มา : จีรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

**วิธีทำ**

(ก) หมุดย้ำถูกเค้นด้วยแรงเค้น 2 ระนาบ

$$\begin{aligned} \text{พื้นที่รับแรงเค้น ; } A &= 2 \left( \frac{\pi}{4} (3.0)^2 \right) \\ &= 14.14 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ความเค้นเค้นในหมุดย้ำ ; } \tau &= \frac{P}{A} \\ &= \frac{12,000}{14.14} = 848.66 \text{ kg/cm}^2 \quad \text{ตอบ} \end{aligned}$$

(ข) ความเค้นอัดในเหล็กรูปตัวยู

$$\begin{aligned} \text{พื้นที่ของเหล็กรูปตัวยู} &= \text{พื้นที่ภาคตัดที่ตั้งฉากกับแนวแรง} \\ &= 2 (1.5 \times 3.0) \\ &= 9.00 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ความเค้นอัดในเหล็กรูปตัวยู ; } \sigma_c &= \frac{P}{A} \\ &= \frac{12,000}{9} = 1,333.33 \text{ kg/cm}^2 \quad \text{ตอบ} \end{aligned}$$

(ค) ความเค้นอัดในหัวเหล็ก

$$\begin{aligned} \text{พื้นที่ของเหล็ก} &= \text{พื้นที่ภาคตัดที่ตั้งฉากกับแนวแรง} \\ &= 3.0 \times 3.5 = 10.5 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ความเค้นอัดในหัวเหล็ก ; } \sigma_c &= \frac{P}{A} \\ &= \frac{12,000}{10.5} = 1,142.86 \text{ kg/cm}^2 \quad \text{ตอบ} \end{aligned}$$

**การทดสอบแรงดึงและแผนภาพระหว่างความเค้นและความเครียด**

คุณสมบัติเชิงกลของวัสดุเป็นคุณสมบัติสำคัญที่วิศวกรหรือผู้ออกแบบผลิตภัณฑ์จำเป็นต้องรู้ คุณสมบัติเชิงกลที่สำคัญ เช่น กำลังดึง กำลังอัด กำลังเค้น กำลังตัด และกำลังบิด เป็นต้น การทดสอบคุณสมบัติเชิงกลของวัสดุเหนียวซึ่งเป็นวัสดุที่สามารถเปลี่ยนแปลงรูปร่างได้ต่อนิยมนำมาทดสอบแรงดึง (Tensile Test) แต่สำหรับวัสดุเปราะซึ่งเป็นวัสดุที่มีคุณสมบัติการเปลี่ยนแปลงรูปร่างที่ไม่ดีจึงนิยมนำมาทดสอบแรงอัด (Compression Test) อย่างไรก็ตามในการทดสอบคุณสมบัติเชิงกลของวัสดุมักใช้เครื่องทดสอบอเนกประสงค์ (Universal Testing Machine) ดังแสดงในภาพที่ 1.17 อนึ่งเนื้อหาในหัวข้อนี้จะอธิบายคุณสมบัติเชิงกลโดยมุ่งเน้นที่การทดสอบแรงดึง ตลอดจนการนำเสนอแผนภาพความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดจากการทดสอบแรงดึง ในการทดสอบแรงดึงนิยมนำมาทดสอบกับวัสดุเหนียวเนื่องจาก

สามารถสังเกตเห็นผลได้อย่างชัดเจน ตัวอย่างวัสดุเหนียวที่นิยมใช้ในวงการก่อสร้าง เช่น โลหะเหล็ก และวัสดุสังเคราะห์ เป็นต้น โดยชิ้นงานทดสอบจะต้องถูกเตรียมอย่างเหมาะสมทั้งขนาดและรูปร่างตามข้อกำหนดในมาตรฐานการทดสอบ สำหรับประเทศไทยนิยมอ้างอิงการทดสอบวัสดุตามข้อกำหนดในมาตรฐานผลิตภัณฑ์อุตสาหกรรม (มอก) นอกจากนั้นยังสามารถอ้างอิงจากมาตรฐานต่างประเทศได้อีกด้วย เช่น มาตรฐานสมาคมเพื่อทดสอบและวัสดุแห่งอเมริกา (American Society for Testing and Materials : ASTM) มาตรฐานอุตสาหกรรมประเทศญี่ปุ่น (Japaness Industrial Standards : JIS) หรือมาตรฐานอุตสาหกรรมประเทศเยอรมัน (German Institute for Standardization หรือ Deutsches Institut für Normung : DIN) เป็นต้น



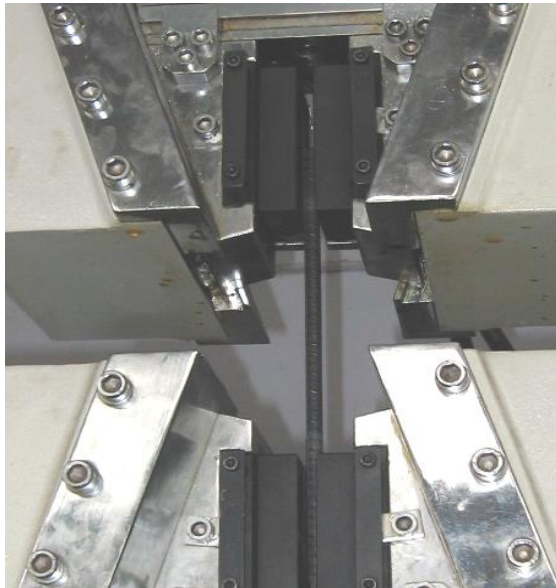
ภาพที่ 1.17 เครื่องทดสอบอเนกประสงค์

ที่มา : จิรวัดณ์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

มนตรี พิรุณเกษตร (2544 : 63-65) สมโพธิ์ วิวิธเกยูรวงศ์ (2542 : 36-39) Hearn E. J. (2000 : 4-8) James M. Gere and Barry J. Goodno. (2012 : 15-26) และ Timoshenko S. (1940 : 6-7) ได้นำเสนอตัวอย่างการทดสอบแรงดึงของเหล็กที่ใช้งานทั่วไปไว้ดังต่อไปนี้ ก่อนการทดสอบแรงดึงจะต้องนำชิ้นงานมากำหนดระยะวัด (Gauge Length) และวัดขนาดพื้นที่หน้าตัด (Cross Sectional Area) อย่างละเอียดเสียก่อน จากนั้นนำชิ้นงานไปติดตั้งในเครื่องมือทดสอบแรงดึงดังแสดงในภาพที่ 1.18 ออกแรงดึงชิ้นงานในแนวแกนด้วยอัตราคงที่กระทั่งชิ้นงานวิบัติ เมื่อมีแรงดึงมากกระทำกับชิ้นงานจนทำให้เกิดความเค้นในเนื้อวัสดุ ความเค้นดังกล่าวเป็นความ

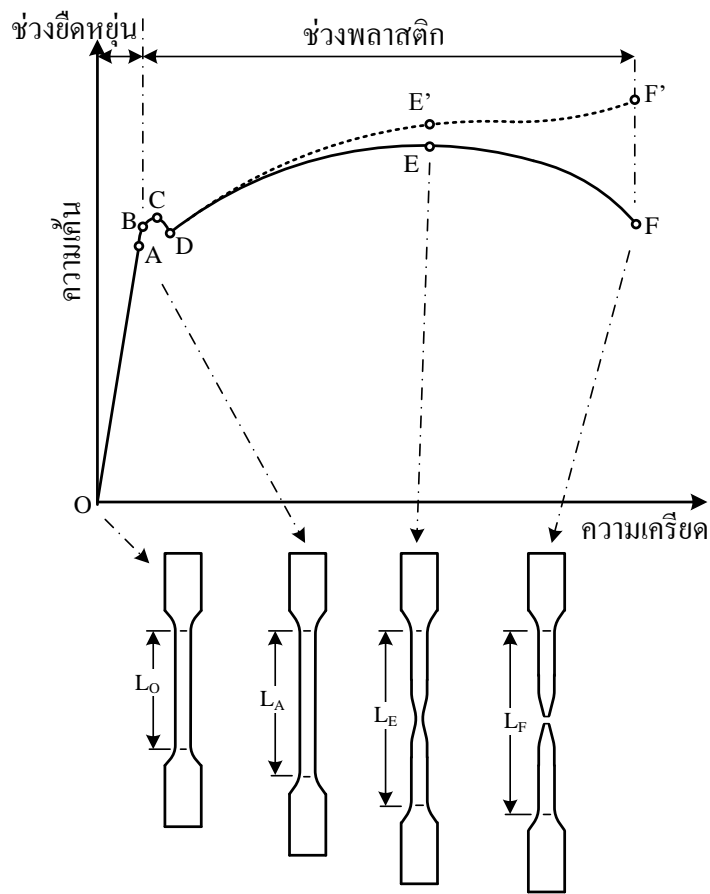


เค้นดึงซึ่งจะมีค่าเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ ตามขนาดของแรงที่กระทำ ในขณะที่ชิ้นงานรับแรงอยู่นั้นก็จะเกิดการเปลี่ยนแปลงรูปร่างขึ้นทั้งการยืดตัวไปตามแนวแรงที่กระทำและการหดตัวทางด้านข้างจากรูปร่างที่เปลี่ยนไป ในการจดบันทึกโดยทั่วไปจะพิจารณาเฉพาะการยืดตัวไปตามแนวแรงที่สอดคล้องกับความเครียดดึงภายในชิ้นงาน ที่เป็นเช่นนั้นเนื่องจากการเปลี่ยนแปลงรูปร่างทางด้านข้างมีค่าน้อยและสังเกตเห็นได้ยากเมื่อเทียบกับการเปลี่ยนแปลงรูปร่างตามแนวแรง ภาพที่ 1.19 เป็นตัวอย่างแผนภาพความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดของเหล็กกล้าคาร์บอนที่ใช้ในงานก่อสร้างทั่วไป แผนภาพแสดงให้เห็นว่าความเค้นและความเครียดจะเป็นอัตราส่วนโดยตรงต่อกันในช่วงแรกจากสภาวะเริ่มต้นจุด O จนกระทั่งถึงจุด A หรืออาจกล่าวได้ว่าช่วง OA มีความสัมพันธ์แบบเชิงเส้น โดยชิ้นงานจะหดกลับไปยังตำแหน่งเริ่มต้นได้เมื่อนำแรงที่กระทำออกและเรียกจุด A นี้ว่า ขีดจำกัดสัดส่วน (Proportional Limit) แต่พอชิ้นงานยืดจนเลยจุด A ไปแล้วความเค้นและความเครียดจะไม่เป็นอัตราส่วนโดยตรงต่อกัน โดยชิ้นงานจะยังสามารถหดกลับได้เมื่อนำแรงที่กระทำออกแต่จะไม่ใช้ตำแหน่งเริ่มต้น เมื่อชิ้นงานยืดจนเลยจุด B ไปแล้วรูปร่างของชิ้นงานจะเกิดการเปลี่ยนแปลงอย่างถาวรและเรียกจุด B ว่า ขีดจำกัดยืดหยุ่น (Elastic Limit) ความชันของเส้นโค้งจะลดลงเมื่อเลยจุด B จนกระทั่งเป็นศูนย์ที่จุด C ซึ่งเป็นสภาวะที่ชิ้นงานเกิดการยืดตัวในขณะที่แรงคงที่และเรียกจุด C ว่า จุดครากบน (Upper Yield Limit)



ภาพที่ 1.18 การทดสอบแรงดึงของเหล็กเส้น

ที่มา : จีรวัดน์ วิมุติสุขวิริยา. 2556



ภาพที่ 1.19 แผนภาพความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียด

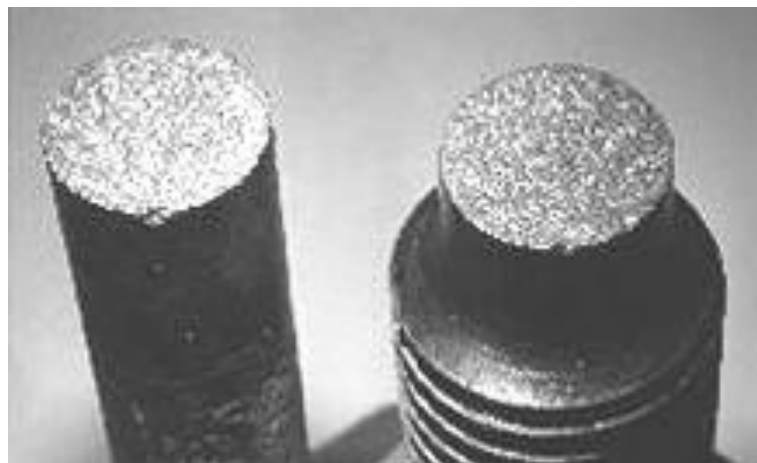
ที่มา : Hearn E. J. 2000 : 4

วัสดุบางชนิดซึ่งงานอาจเกิดการยืดในขณะที่แรงดึงลดลงถึงจุด D เรียกว่า จุดครากล่าง (Lower Yield Limit) ช่วง CD เป็นช่วงที่ผลึกเริ่มเปลี่ยนคุณสมบัติจากวัสดุเหนียวเป็นวัสดุเปราะ แต่สำหรับวัสดุบางชนิดซึ่งงานจะยืดออกในขณะที่แรงดึงคงที่เรียกช่วงนี้ว่า พลาสติกสมบูรณ์ (Perfect Plasticity) เมื่อคุณสมบัติของผลึกเปลี่ยนไปซึ่งงานจะกลับมารับแรงได้เพิ่ม ขึ้นแต่การยืดตัวก็จะเพิ่มมากกว่าช่วง OA โดยช่วง DE เป็นช่วงที่ความเครียดเพิ่มขึ้นในอัตราที่มากกว่าความเค้นและทำให้ซึ่งงานเกิดการรอยคอด (Necking Down) ทั้งนี้ในวัสดุบางชนิดเช่นวัสดุเปราะอาจไม่สามารถสังเกตเห็นรอยคอดได้ จุด E เป็นจุดที่ซึ่งงานสามารถรับแรงได้สูงสุดเรียกว่า จุดกำลังประลัย (Ultimate Strength) หลังจากนั้นแรงที่ซึ่งงานรับได้จะลดลงจนขาดออกจากกันที่จุด F และเรียกจุดนี้ว่า จุดกำลังแตกหัก (Rupture Strength) ตัวอย่างการวิบัติของวัสดุเหนียวและวัสดุเปราะภายใต้แรงดึงแสดงในภาพที่ 1.20 อย่างไรก็ตามแผนภาพความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดตามแนวเส้นโค้ง OF ได้มาจากการนำพื้นที่หน้าตัดก่อนการทดสอบไปคำนวณ

ความเค้นตั้งแต่เริ่มต้นจนกระทั่งวิบัติ หากพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดโดยคำนวณจากพื้นที่หน้าตัดจริงของชิ้นงานพบว่า ค่าความเค้นที่ได้จากการใช้พื้นที่จริงของชิ้นงานจะมีค่าเพิ่มขึ้นเนื่องจากพื้นที่หน้าตัดจะลดลงเมื่อแรงเพิ่มขึ้น และพื้นที่หน้าตัดจะมีขนาดเล็กที่สุด ณ ตำแหน่งที่เกิดการวิบัติดังแสดงในภาพที่ 1.21 ดังนั้นแผนภาพที่ได้จากการคำนวณวิธีนี้เป็นเส้นโค้ง 'OF' ที่แสดงในภาพที่ 1.19 แต่การใช้พื้นที่จริงในการคำนวณทำได้ยากเนื่องจากการวัดขนาดพื้นที่หน้าตัดของชิ้นงานที่เปลี่ยนไปทำได้ยาก



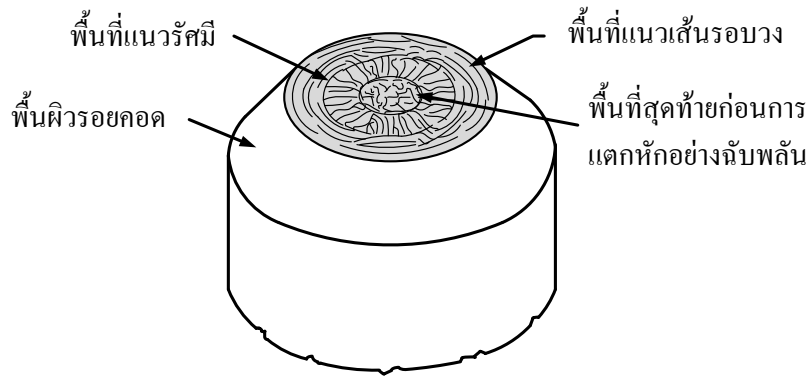
(ก) วัสดุเหนียว



(ข) วัสดุเปราะ

ภาพที่ 1.20 หน้าตัดวัสดุภายหลังจากการวิบัติ

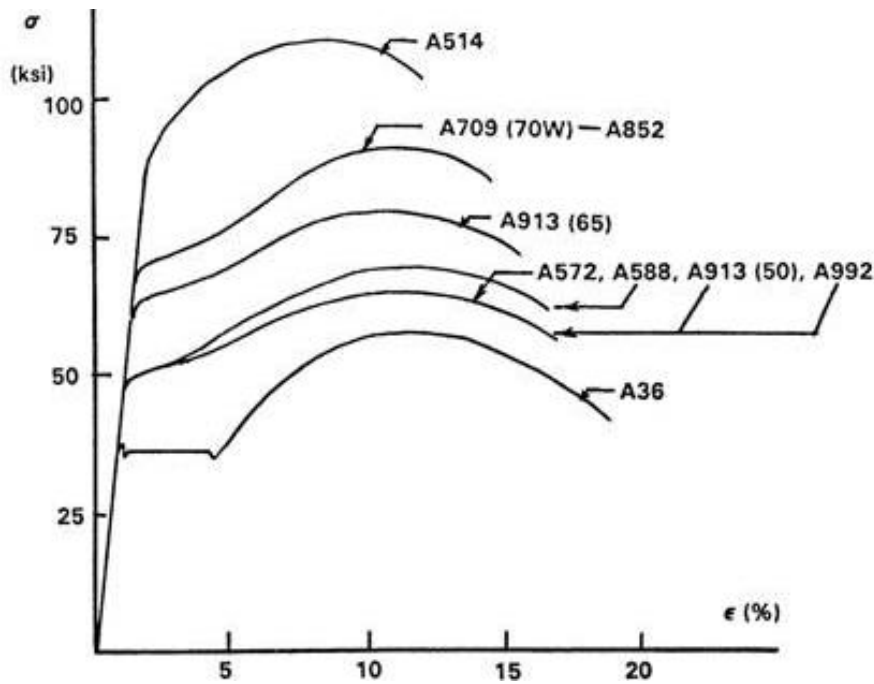
ที่มา : Engineering Materials. n.d.



ภาพที่ 1.21 ขยายหน้าตัดวัสดุเหนียวภายหลังจากการวิบัติ

ที่มา : Engineering Materials. n.d.

ผลการทดสอบแรงดึงมักถูกนำไปใช้อ้างอิงในการตรวจสอบคุณภาพผลิตภัณฑ์ที่ผลิตเพื่อจำหน่ายแก่ผู้บริโภค โดยเฉพาะในการนำผลิตภัณฑ์กลุ่มโลหะและเหล็กไปใช้งานจำเป็นต้องรู้ข้อมูลด้านกำลังดึง ยกตัวอย่างเช่นข้อกำหนดด้านกำลังดึงสำหรับเหล็กแผ่นและเหล็กเส้นรีดร้อนที่ใช้ในงานก่อสร้างมาตรฐาน ASTM ดังแสดงในภาพที่ 1.22 ข้อกำหนดในมาตรฐานดังกล่าวได้จำแนกเหล็กไว้หลายเกรดซึ่งอ้างอิงจากผลการทดสอบแรงดึงดังรายละเอียดต่อไปนี้ (Metal Pass. 2005)



ภาพที่ 1.22 แผนภาพความเค้นและความเครียดดึงของเหล็กตามมาตรฐาน ASTM

ที่มา : Metal Pass. 2005

เหล็กเกรด A36 เป็นเหล็กกล้าคาร์บอนและเป็นเหล็กพื้นฐานของเหล็กโครงสร้างที่มีค่าความเค้นครากไม่น้อยกว่า 36 ksi (36,000 lb/in<sup>2</sup>) และความเค้นประลัยไม่น้อย 58 ksi ตามลำดับ เมื่อ 1 ksi เท่ากับ 70.37 kg/cm<sup>2</sup>

เหล็กเกรด A514 มักถูกผลิตเป็นเหล็กแผ่นที่สามารถรับกำลังได้สูง โดยมีค่าความเค้นครากไม่น้อยกว่า 100 ksi และความเค้นประลัยระหว่าง 110-130 ksi

เหล็กเกรด A529 เป็นเหล็กกล้าคาร์บอนผสมแมงกานีสที่นิยมใช้ในงานก่อสร้างโรงงานอุตสาหกรรม และสามารถนำมาผลิตเป็นเหล็กรูปพรรณได้ด้วย เช่น เหล็กฉาก เหล็กทรงน้ำ และเหล็กแผ่น เป็นต้น เหล็กเส้นเกรด A529 ที่มีขนาดเล็กกว่า 37.5 mm จะมีค่าความเค้นครากไม่น้อยกว่า 55 ksi และความเค้นประลัยไม่น้อยกว่า 70 ksi ส่วนเหล็กเส้นที่มีขนาดระหว่าง 37.5-62.5 mm จะต้องมีความเค้นครากไม่น้อยกว่า 50 ksi และความเค้นประลัยไม่น้อยกว่า 70 ksi

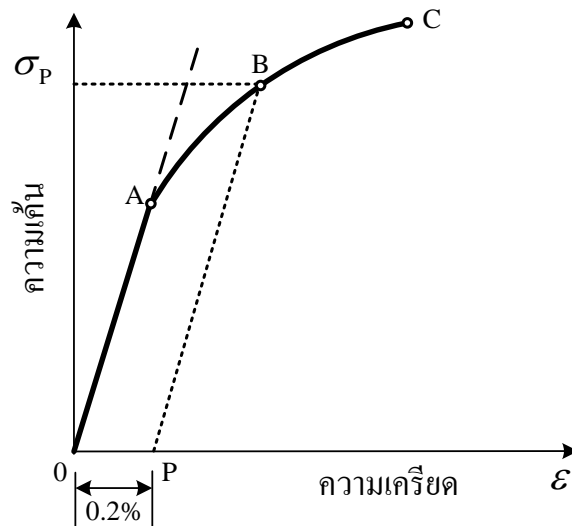
เหล็กเกรด A572 แบ่งออกเป็น 4 เกรดย่อยคือ เหล็กเกรด A572-42 มีค่าความเค้นครากไม่น้อยกว่า 42 ksi และความเค้นประลัยไม่น้อยกว่า 60 ksi เหล็กเกรด A572-50 มีค่าความเค้นครากไม่น้อยกว่า 50 ksi และความเค้นประลัยไม่น้อยกว่า 65 ksi เหล็กเกรด A572-60 มีค่าความเค้นครากไม่น้อยกว่า 60 ksi และความเค้นประลัยไม่น้อยกว่า 75 ksi และเหล็กเกรด A572-65 มีค่าความเค้นครากไม่น้อยกว่า 65 ksi และความเค้นประลัยไม่น้อยกว่า 80 ksi

เหล็กเกรด A588 เป็นเหล็กที่สามารถต้านการกัดกร่อนจากสภาวะธรรมชาติได้ดี เหล็กเกรด A588 แบ่งออกเป็น 4 เกรดย่อยคือ A588-A A588-B A588-C และ A588-k โดยมีค่าความเค้นครากไม่น้อยกว่า 50 ksi และความเค้นประลัยไม่น้อยกว่า 70 ksi

เหล็กเกรด A709 เป็นเหล็กที่ถูกพัฒนาขึ้นจากเหล็ก A36 A572 A588 A852 และ A514 เพื่อวัตถุประสงค์ในการต้านทานการผุกร่อนบนชั้นบรรยากาศและนิยมนำไปใช้ในการก่อสร้างโครงสร้างสะพาน เหล็กเกรด A709 โดยแบ่งเป็น 6 เกรดย่อยคือ A709-36 A709-50 A709-50W A709-70W A709-100 และ A709-100W ตามลำดับ

ยังมีโลหะบางชนิดที่ไม่สามารถหาจุดครากได้โดยตรงจากแผนภาพความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียด เช่น ทองแดง อะลูมิเนียม รวมถึงวัสดุสังเคราะห์ชนิดต่าง ๆ เป็นต้น เนื่องจากวัสดุเหล่านี้มักจะแสดงพฤติกรรมในการรับแรงดึงแบบวัสดุเปราะกล่าวคือมีระยะยืดตัวน้อยก่อนการวิบัติอย่างฉับพลันดังแสดงในภาพที่ 1.23 อย่างไรก็ตามยังมีวิธีการหาตำแหน่งจุดครากสมมติได้โดยกำหนดความเครียดที่จุด P ซึ่งมีค่าระหว่างร้อยละ 10 ถึง 20 ของค่าเริ่มต้น จากนั้นลากเส้นขนานกับแนว OA ที่เป็นช่วงขีดจำกัดสัดส่วน ไปตัดเส้นโค้งที่จุด B ซึ่งจุดนี้เองเป็นจุดแทนจุดคราก (John Case, 1999 : 31 and Ferdinand P. Beer, et al. 2012 : 60) อย่างไรก็ตามอาจเรียกค่าความเค้นที่อ่านได้จากจุด B นี้ว่า ความเค้นพิสูจน์ (Proof Stress :  $\sigma_p$ )

ซึ่งนิยมนำมาใช้ในการคำนวณและออกแบบโครงสร้างมากกว่าการนำค่าความเค้นที่จุด C ซึ่งเป็นความเค้นประลัยไปใช้ เนื่องจากวัสดุเปราะจะวิบัติอย่างฉับพลันดังนั้นจึงควรทอนกำลังของวัสดุเหล่านีลงเพื่อความปลอดภัยของผู้ใช้งาน



ภาพที่ 1.23 ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดแบบไม่มีจุดคราก

ที่มา : Ferdinand P. Beer, 2012

### กฎของฮุกและโมดูลัสยืดหยุ่น

โรเบิร์ต ฮุก (Robert Hooke) ได้นำวัสดุชนิดต่าง ๆ มาทำการทดสอบแรงดึง เขาพบว่าเมื่อวัตถุถูกแรงกระทำจะมีการเปลี่ยนแปลงรูปร่างที่สอดคล้องกับขนาดและทิศทางของแรงนั้น เมื่อนำแรงที่กระทำออกไปวัตถุจะกลับคืนสู่สภาพเดิมได้หากอยู่ในช่วงพิกัดยืดหยุ่นหรือขีดจำกัดสัดส่วน คุณสมบัติวัสดุทดสอบที่มีความเค้นแปรผันตรงกับความเครียดจะมีค่าเท่ากับค่าคงที่เรียกว่า ยังส์ โมดูลัส (Young's Modulus) หรือ โมดูลัสยืดหยุ่น (Modulus of Elasticity : E) นอกจากนี้เขายังพบอีกว่าภายในขีดจำกัดความยืดหยุ่นวัสดุส่วนที่ยึดตัวตามขนาดของแรงจะแปรผกผันกับพื้นที่หน้าตัด โดยที่ค่าโมดูลัสยืดหยุ่นสามารถหาได้จากอัตราส่วนระหว่างความเค้น  $\sigma$  ต่อความเครียด  $\epsilon$  ดังสมการต่อไปนี้ (เกรียงศักดิ์ อุคมสินโรจน์, 2540 : 3-3, บรรจบ อรชร, 2542 : 1-77, Ferdinand P. Beer, et al. 2012 : 63-65 และ Timoshenko S. 1940 : 2-6)

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon} \quad (1.7)$$

แทนค่า  $\sigma = \frac{P}{A}$  และ  $\epsilon = \frac{\delta}{L}$  ในสมการ

$$\text{จะได้} \quad E = \frac{P/A}{\delta/L} \quad (1.8)$$

$$\text{หรือ} \quad E = \frac{PL}{\delta A} \quad (1.9)$$

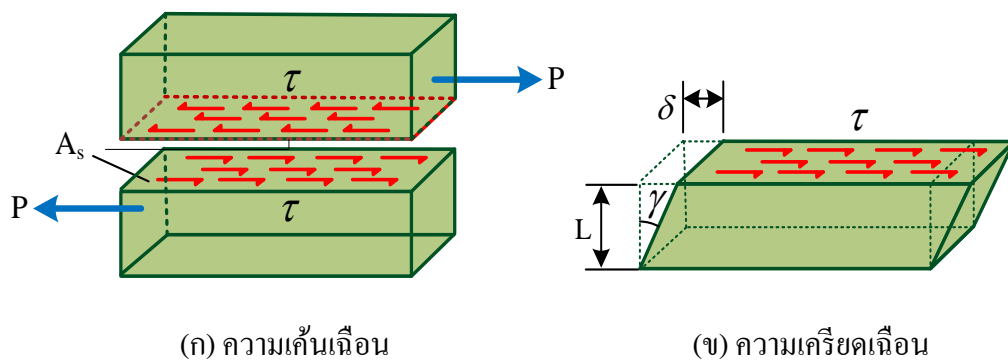
เมื่อต้องการหาค่าระยะที่เปลี่ยนแปลงของวัสดุจะได้

$$\delta = \frac{PL}{AE} \quad (1.10)$$

เมื่อ  $\delta$  คือระยะตามแนวแกนที่วัสดุยืดหรือหด  $P$  คือแรงกระทำตามแนวแกนทั้งหมด  $L$  คือความยาวเดิมของวัสดุ และ  $A$  คือพื้นที่หน้าตัดของวัสดุ

### โมดูลัสความคงรูป

บรรจบ อรชร (2542 : 3-14) Ferdinand P. Beer, et al. (2012 : 99-101) และ James M. Gere and Barry J. Goodno (2012 : 37-38) กล่าวว่า โมดูลัสความคงรูป (Modulus of Rigidity :  $G$ ) หรือเรียกอีกอย่างว่าโมดูลัสเฉือน (Shearing Modulus) เป็นคุณสมบัติที่เกิดจากแรงเฉือนที่เกิดขึ้นในเนื้อวัสดุจนทำให้วัตถุเบี้ยวหรือเปลี่ยนแปลงรูปร่างไปตามทิศทางของแรงเป็นมุม  $\gamma$  ดังแสดงในภาพที่ 1.24 ซึ่งก็เป็นไปตามกฎของฮุกในช่วงขีดจำกัดสัดส่วน นั่นคือความเค้นเฉือนที่เกิดขึ้นจะเป็นปฏิภาคโดยตรงกับความเครียดเฉือน และมีค่าคงที่สำหรับวัสดุชนิดหนึ่งๆ การหาค่าโมดูลัสความคงรูปสามารถหาได้จากสมการต่อไปนี้



ภาพที่ 1.24 การเปลี่ยนแปลงรูปร่างเนื่องจากความเค้นเฉือน

ที่มา : จีรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

$$G = \frac{\tau}{\gamma} \quad (1.11)$$

$$\text{จาก} \quad \tau = \frac{P}{A_s} \quad (1.12)$$

$$\text{และ} \quad \gamma = \frac{\delta}{L} \quad (1.13)$$

$$\text{ดังนั้น} \quad \delta = \frac{PL}{A_s G} \quad (1.14)$$

เมื่อ  $\tau$  คือความเค้นเฉือน  $\gamma$  คือความเครียดเฉือน  $P$  คือแรงเฉือน  $L$  คือระยะในแนวขวาง  $A_s$  คือพื้นที่รับแรงเฉือน และ  $\delta$  คือระยะที่เปลี่ยนแปลงตามแนวแรง

### อัตราส่วนปัวส์ซอง

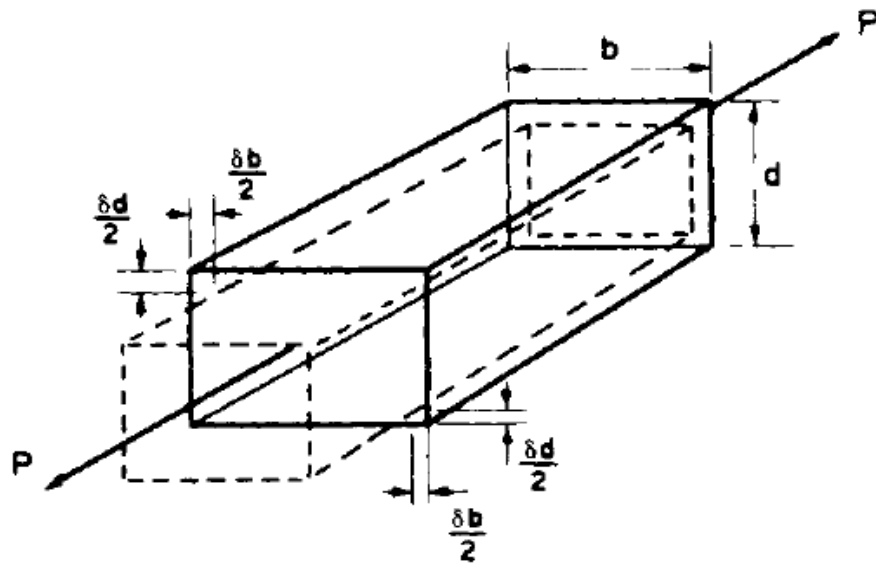
ชาญ ถนัดงาน (2523 : 10-11), Hearn E. J. (2000 : 9-10) และ James M. Gere and Barry J. Goodno (2012 : 28-29) นำเสนอเนื้อหาเกี่ยวกับอัตราส่วนปัวส์ซองไว้ดังต่อไปนี้ เมื่อวัตถุหรือชิ้นงานมีแรงมากระทำก็จะเกิดการเปลี่ยนแปลงรูปร่าง ถ้าวัสดุยังคงอยู่ในสภาวะยืดหยุ่นและมีคุณสมบัติทางกลเหมือนกันทุกทิศทางก็จะทำให้การเปลี่ยนแปลงรูปร่างที่เกิดขึ้นในทิศทางต่างๆ มีความสัมพันธ์กัน ยกตัวอย่างเช่นวัสดุรับแรงในแนวแกนจะทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงรูปร่างทั้งในแนวแกนและแนวขวาง ถ้าวัสดุยืดออกตามแนวแกนเนื่องจากแรงดึงก็จะทำให้เกิดการหดตัวทางด้านขวางเพื่อรักษาปริมาตรให้คงที่ ในทางตรงกันข้ามหากวัสดุที่หดตัวตามแนวแกนเนื่องจากแรงอัดก็จะทำให้เกิดการขยายตัวตามแนวขวาง ถ้านำความเครียดในแนวแกนและแนวขวางมาพิจารณาก็จะพบความสัมพันธ์เชิงเส้น อัตราส่วนระหว่างความเครียดในแนวขวางต่อความเครียดในแนวแกนเรียกว่า อัตราส่วนปัวส์ซอง (Poisson's Ratio :  $\nu$ ) ถ้าเครื่องหมายของค่าอัตราส่วนปัวส์ซองเป็นบวกแสดงว่ามีการยืดหรือขยายตัว แต่ถ้าเครื่องหมายเป็นลบแสดงว่าหดสั้นลงหรือหดเล็กลงจากภาพที่ 1.25 พบว่าความเครียดในแนวขวางคือ  $\epsilon_{lat}$  และความเครียดในแนวยาวคือ  $\epsilon_{long}$  ค่าความเครียดทั้งสองสามารถคำนวณได้จากสมการดังต่อไปนี้

$$\epsilon_{lat} = \frac{\delta_b}{b} \quad (1.15)$$

$$\text{หรือ} \quad \epsilon_{lat} = \frac{\delta_d}{d} \quad (1.16)$$

$$\epsilon_{long} = \frac{\delta_L}{L} \quad (1.17)$$





ภาพที่ 1.25 การเปลี่ยนแปลงรูปร่างเนื่องจากแรงดึง

ที่มา : Hearn E. J. 2000 : 9

อัตราส่วนปัวส์ซงหาได้จากการนำความเครียดตามแนวขวางหารด้วยความเครียดตามแนวยาวดังสมการต่อไปนี้

$$\nu = \frac{\text{ความเครียดตามแนวขวาง}}{\text{ความเครียดตามแนวยาว}} \quad (1.18)$$

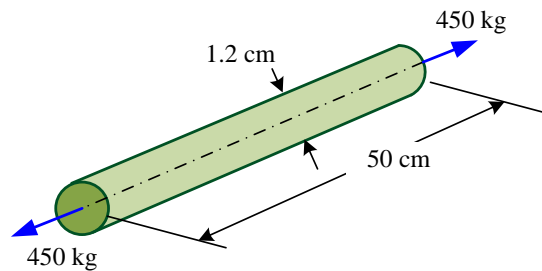
$$\nu = \frac{\epsilon_{\text{lat}}}{\epsilon_{\text{long}}} \quad (1.19)$$

เมื่อ  $L$  คือความยาวตามแนวยาวของวัตถุ  $b$  คือความกว้างของวัตถุ  $d$  คือความสูงของวัตถุ  $\delta_b$  คือระยะเปลี่ยนแปลงตามความกว้างของวัตถุ  $\delta_d$  คือระยะเปลี่ยนแปลงตามความสูงของวัตถุ และ  $\delta_L$  คือระยะเปลี่ยนแปลงตามแนวยาวของวัตถุ ตามลำดับ นอกจากนี้อัตราส่วนปัวส์ซงยังสามารถหาได้จากความสัมพันธ์ระหว่างโมดูลัสยืดหยุ่น  $E$  และ โมดูลัสความคงรูป  $G$  ดังสมการ

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (1.20)$$

หรือ 
$$\nu = \left( \frac{E}{2G} \right) - 1 \quad (1.21)$$

ตัวอย่างที่ 1.4 จงหาค่าอัตราส่วนปัวส์ซองของแท่งโลหะดังแสดงในภาพที่ 1.26 ซึ่งมีความยาว 50 cm และมีขนาดเส้นผ่าศูนย์กลางกลาง 1.2 cm ถ้ากำหนดให้  $E = 1.125 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$  และ  $G = 4.22 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$  และจงหาขนาดเส้นผ่าศูนย์กลางของแท่งโลหะที่เปลี่ยนแปลงไปเมื่อแท่งโลหะดังกล่าวถูกดึงด้วยน้ำหนัก 450 kg



ภาพที่ 1.26 แท่งโลหะรับแรงดึง

ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \text{จากอัตราส่วนปัวส์ซอง ;} \quad v &= \left( \frac{E}{2G} \right) - 1 \\ &= \left( \frac{1.125 \times 10^6}{2 \times 4.22 \times 10^5} \right) - 1 = 0.333 \quad \text{ตอบ} \end{aligned}$$

$$\text{แรงดึง ;} \quad P = 450 \text{ kg}$$

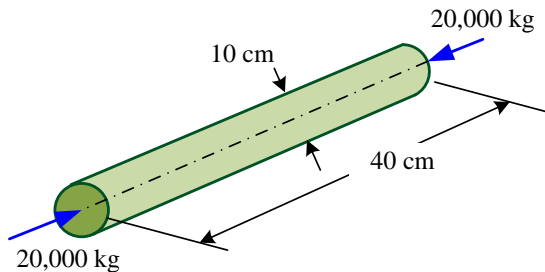
$$\begin{aligned} \text{พื้นที่หน้าตัด ;} \quad A &= \frac{\pi}{4} \times 1.20^2 \\ &= 1.13 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ความเค้นดึง ;} \quad \sigma &= \frac{P}{A} \\ &= \frac{450}{1.13} = 398.23 \text{ kg/cm}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ความเคียดดึง ;} \quad \epsilon &= \frac{\sigma}{E} \\ &= \frac{398.23}{1.125 \times 10^6} = 0.00035 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ขนาดเส้นผ่าศูนย์กลางเปลี่ยนแปลงไป ; } \delta' &= v \epsilon b \\ &= 0.333 \times 0.00035 \times 1.2 \\ &= 0.00014 \text{ cm} \quad \text{ตอบ} \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 1.5 แท่งโลหะยาว 40 cm ขนาดเส้นผ่าศูนย์กลางกลาง 10 cm ดังแสดงในภาพที่ 1.27 เมื่อถูกกดด้วยน้ำหนัก 20,000 kg ทำให้แท่งโลหะสั้นลง 0.01 cm และขนาดเส้นผ่าศูนย์กลางเพิ่มขึ้น 0.00050 cm จงหาโมดูลัสยืดหยุ่น E และอัตราส่วนปัวส์ซอง  $\nu$  ของแท่งโลหะ



ภาพที่ 1.27 แท่งโลหะรับแรงอัด

ที่มา : จีรวัดน์ วิมุติสุขวิริยา. 2556

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \text{โมดูลัสยืดหยุ่น ; } E &= \frac{PL}{\delta A} \\ &= \frac{20000 \times 40}{0.01 \times \pi(5^2)} = 1.019 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2 \quad \text{ตอบ} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{อัตราส่วนปัวส์ซอง ; } \nu &= \frac{\text{ความเครียดตามแนวขวาง}}{\text{ความเครียดตามแนวยาว}} \\ &= \left( \frac{0.0005/10}{0.01/40} \right) \\ &= 0.20 \quad \text{ตอบ} \end{aligned}$$

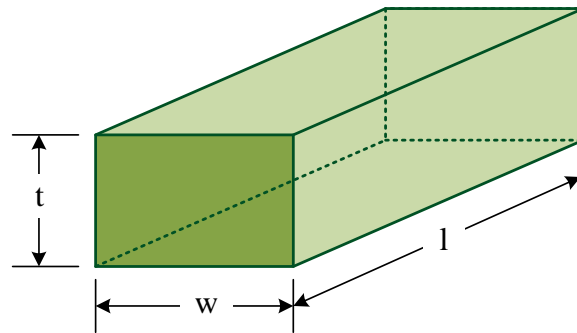
**ความเค้นออกแบบ**

จากการทดสอบชิ้นงานที่ทำจากวัสดุชนิดต่าง ๆ และนำผลการทดสอบมาสร้างเป็นแผนภาพความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดแล้วนั้น แผนภาพดังกล่าวสามารถนำไปใช้หาค่าความเค้นที่จุดครากและความเค้นประลัยได้ เป็นที่ทราบกันดีว่าเมื่อความเค้นเลยจุดครากไปแล้ววัสดุจะอยู่ในสภาวะพลาสติกซึ่งยุ่งยากในการคาดเดาพฤติกรรมทางกายภาพ วัสดุอาจจะแตกหักหรือวิบัติเสียหายก่อนหากมีจุดบกพร่องหรือช่องว่างภายใน ดังนั้นในการใช้งานจึงมักให้ความเค้นที่เกิดขึ้นจริงในชิ้นงาน ไม่มากเกินกว่าความเค้นที่จุดคราก และเพื่อความปลอดภัยยิ่งขึ้นคุณสมบัติของวัสดุที่ใช้ในการออกแบบ โครงสร้างจะต้องถูกทอนกำลังลงโดยตัวเลขค่าหนึ่งซึ่งเรียกว่า ค่าความปลอดภัย (Safety Factor : FS) ซึ่งความเค้นของวัสดุที่ถูกทอน

กำลังเรียกว่า ความเค้นออกแบบ (Design Stress :  $\sigma_d$ ) สามารถหาได้จากสมการดังนี้ (มนตรี พิรุณเกษตร. 2541 : 79, James M. Gere and Barry J. Goodno. 2012 : 43-46)

$$\sigma_d = \frac{\sigma_y}{FS} \quad (1.22)$$

ตัวอย่างที่ 1.6 ท่อนเหล็กดังแสดงในภาพที่ 1.28 มีพื้นที่หน้าตัดรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าถูกดึงด้วยน้ำหนัก 9,000 kg ถ้าอัตราส่วนของความกว้างและความหนาของเหล็ก  $w:t$  เท่ากับ 3:2 จงหาพื้นที่หน้าตัดของท่อนเหล็กนี้ ถ้าเหล็กมีความเค้นดึงจุดคราก  $\sigma_y = 5,000 \text{ kg/cm}^2$  และมีค่าความปลอดภัย  $FS = 5$



ภาพที่ 1.28 ท่อนเหล็กหน้าตัดรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

วิธีทำ

ความเค้นออกแบบ ; 
$$\begin{aligned} \sigma_d &= \frac{\sigma_y}{FS} \\ &= \frac{5000}{5} = 1,000 \text{ kg/cm}^2 \end{aligned}$$

ถ้าให้  $w$  เป็นความกว้าง และ  $t$  เป็นความหนาของเหล็ก จะได้  $\frac{w}{t} = \frac{3}{2}$  หรือ  $t = \frac{2w}{3}$

พื้นที่หน้าตัด ; 
$$A = wt = \frac{2w^2}{3}$$

และ 
$$\begin{aligned} A &= \frac{P}{\sigma_d} \\ &= \frac{9,000}{1,000} = 9.0 \end{aligned}$$

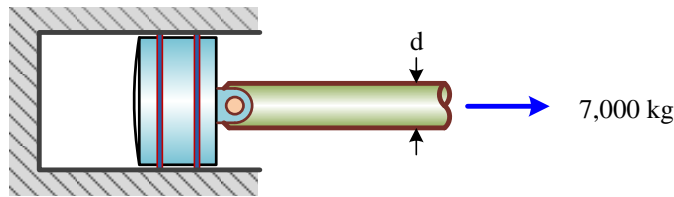
จะได้ 
$$\begin{aligned} \frac{2w^2}{3} &= 9.0 \\ w &= 3.67 \text{ cm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{แทนค่า } w ; \quad t &= \frac{2}{3} \times 3.67 \\ &= 2.45 \text{ cm} \end{aligned}$$

พื้นที่หน้าตัดของเหล็กควรจะเป็น  $3.7 \times 2.5 \text{ cm}$

ตอบ

**ตัวอย่างที่ 1.7** ครอบอกสูบเครื่องยนต์อันหนึ่งประกอบด้วยลูกสูบยึดกับก้านสูบดังแสดงในภาพที่ 1.29 จงหาขนาดเส้นผ่าศูนย์กลางของก้านสูบเมื่อรับน้ำหนัก  $7,000 \text{ kg}$  ถ้าค่าความเค้นดึงจุดครากของก้านสูบ  $\sigma_y = 4,000 \text{ kg/cm}^2$  และค่าความปลอดภัย  $FS = 10$



**ภาพที่ 1.29** ครอบอกสูบเครื่องยนต์รับแรงดึง

ที่มา : จีรวัดณ์ วิมุติสุขวิริยา. 2556

**วิธีทำ**

สมมติให้ขนาดเส้นผ่าศูนย์กลางของก้านสูบคือ  $d \text{ cm}$

$$\text{พื้นที่หน้าตัดของก้านสูบ ;} \quad A = \frac{\pi d^2}{4}$$

$$\begin{aligned} \text{ความเค้นออกแบบ ;} \quad \sigma_a &= \frac{\sigma_y}{FS} \\ &= \frac{4,000}{10} = 400 \text{ kg/cm}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ความเค้นที่เกิดขึ้นจริง ;} \quad \sigma &= \frac{P}{A} \\ &= \frac{7,000}{\pi d^2 / 4} = \frac{28,000}{\pi d^2} \text{ kg/cm}^2 \end{aligned}$$

ความเค้นที่เกิดขึ้นจริงจะมีค่าไม่เกินความเค้นที่ใช้ออกแบบจะได้

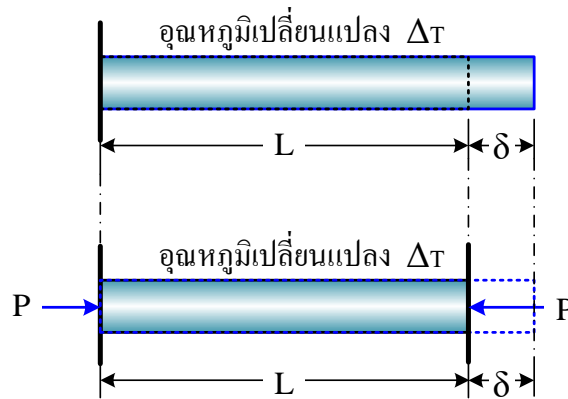
$$\begin{aligned} 400 &= \frac{28,000}{\pi d^2} \\ d &= \sqrt{\frac{28,000}{\pi \times 400}} \\ d &= 4.72 \text{ cm} \end{aligned}$$

เลือกขนาดของเส้นผ่าศูนย์กลางก้านสูบเท่ากับ  $4.8 \text{ cm}$

ตอบ

### ความเค้นเนื่องจากการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิ

โดยทั่วไปวัตถุจะขยายตัวเมื่ออุณหภูมิสูงขึ้นและจะหดตัวเมื่ออุณหภูมิลดลง การที่วัตถุเปลี่ยนแปลงอย่างอิสระจะไม่มี ความเค้นเกิดขึ้นในเนื้อวัสดุ ชาญ อดันงาน (2523 : 14) และ James M. Gere and Barry J. Goodno (2012 : 115-117) กล่าวว่าถ้าอัตราส่วนระหว่างความเครียดและอุณหภูมิที่เปลี่ยนไปเป็นค่าคงที่ ก็จะเรียกค่าคงที่นี้ว่า สัมประสิทธิ์การขยายตัวทางความร้อน (Coefficient of Thermal Expansion :  $\alpha$ ) ถ้าหากวัสดุถูกจำกัดการเปลี่ยนแปลงรูปร่างก็จะทำให้เกิดความเค้นภายในเรียกว่า ความเค้นเนื่องจากการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิดังแสดงในภาพที่ 1.30 ในการออกแบบชิ้นส่วนโครงสร้างหากไม่ได้คำนึงถึงผลจากการเปลี่ยนแปลงรูปร่างเนื่องจากอุณหภูมิก็คอาจทำให้โครงสร้างเกิดความเสียหายได้ การเปลี่ยนแปลงรูปร่างของวัตถุ  $\delta$  เมื่อเทียบกับความยาวเดิม  $L$  ในขณะที่อุณหภูมิเปลี่ยนแปลงไป  $\Delta T$  สามารถหาได้จากสมการดังต่อไปนี้



ภาพที่ 1.30 ความเค้นที่เกิดจากการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิ

ที่มา : จีรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

$$\alpha = \frac{\text{ความเครียด}}{\text{อุณหภูมิที่เปลี่ยนแปลง}} \quad (1.23)$$

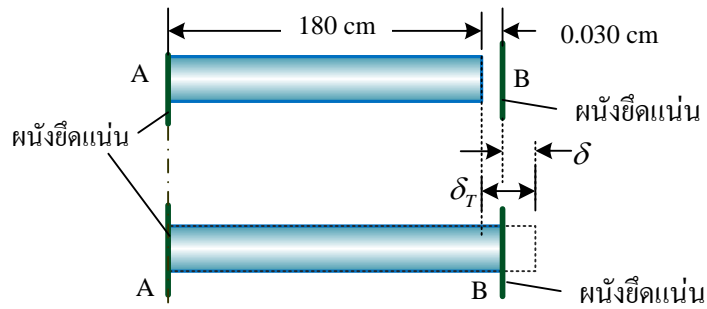
$$\alpha = \frac{\varepsilon}{\Delta T} \quad (1.24)$$

จาก  $\varepsilon = \frac{\delta}{L} \quad (1.25)$

ดังนั้นจะได้  $\alpha = \frac{\delta}{L\Delta T} \quad (1.26)$

หรือ  $\delta = \alpha L\Delta T \quad (1.27)$

ตัวอย่างที่ 1.8 แท่งโลหะยาว 180 cm ยึดแน่นติดกับผนังที่จุด A ดังแสดงในภาพที่ 1.31 โดยมีปลายข้างหนึ่งห่างจากกำแพง B เป็นระยะ 0.030 cm จงหาอุณหภูมิที่เพิ่มขึ้นแล้วทำให้แท่งโลหะขยายตัวจนแตะผนัง B พอดี และจงหาความเค้นในแท่งโลหะถ้าอุณหภูมิเพิ่มขึ้นจากเดิม 35°C กำหนดให้สัมประสิทธิ์การขยายตัวทางความร้อน  $\alpha = 18 \times 10^{-6}/^{\circ}\text{C}$  และ โมดูลัสยืดหยุ่น  $E = 1.125 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$



ภาพที่ 1.31 แท่งโลหะยึดติดผนัง

ที่มา : จีรวัดณ์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

#### วิธีทำ

$$\begin{aligned} \text{ระยะที่เปลี่ยนไป ;} \quad \delta &= \alpha L \Delta T \\ \text{จะได้ ;} \quad \Delta T &= \frac{\delta}{\alpha L} \\ &= \frac{0.030}{18 \times 10^{-6} \times 180} \\ &= 9.26 \text{ }^{\circ}\text{C} \quad \text{ตอบ} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{แท่งโลหะขยายตัวอย่างอิสระ ;} \quad \delta_T &= \alpha L \Delta T \\ &= 18 \times 10^{-6} \times 180 \times 35 \\ &= 0.1134 \text{ cm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{หรือมีค่าเท่ากับ ;} \quad \delta_T &= \delta + 0.030 \\ &= \frac{PL}{EA} + 0.030 \\ 0.113 &= \frac{\sigma_c L}{E} + 0.030 \end{aligned}$$

$$1.125 \times 10^6 (0.1134 - 0.03) = \sigma_c \times 180$$

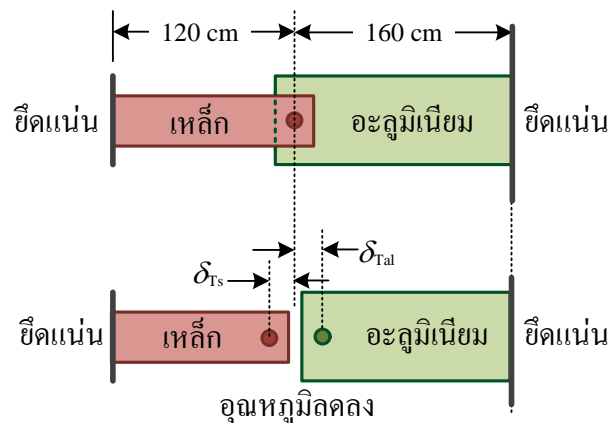
$$\sigma_c \times 180 = (12.71 \times 10^4) - (3.38 \times 10^4)$$

$$\sigma_c = 521.25 \text{ kg/cm}^2$$

ความเค้นอัดในแท่งทองแดงเมื่ออุณหภูมิเพิ่มขึ้นมีค่าเท่ากับ 521.25 kg/cm<sup>2</sup>

ตอบ

ตัวอย่างที่ 1.9 แผ่นอะลูมิเนียมพื้นที่หน้าตัด  $12 \text{ cm}^2$  ถูกยึดปลายด้านหนึ่งติดกับแผ่นเหล็ก พื้นที่หน้าตัด  $6 \text{ cm}^2$  ด้วยหมุดย้ำซึ่งมีขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง  $2.0 \text{ cm}$  และปลายอีกด้านถูกยึดติดกับผนัง ในขณะที่ปลายแผ่นเหล็กอีกด้านก็ถูกยึดกับผนังเช่นกันดังแสดงในภาพที่ 1.32 จงหาค่าความเค้นเฉือนในหมุดย้ำเมื่ออุณหภูมิลดลง  $35^\circ\text{C}$  กำหนดให้เหล็กมีสัมประสิทธิ์การขยายตัวทางความร้อน  $\alpha_s = 11.7 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$  ค่าโมดูลัสยืดหยุ่น  $E_s = 2.04 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$  และอะลูมิเนียมมีสัมประสิทธิ์การขยายตัวทางความร้อน  $\alpha_{al} = 23.6 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$  ค่าโมดูลัสยืดหยุ่น  $E_{al} = 0.703 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$



ภาพที่ 1.32 แผ่นอะลูมิเนียมยึดติดกับขาเหล็กด้วยหมุดย้ำ

ที่มา : จีรวัดน์ วิมุตติสุขวิทยา. 2556

### วิธีทำ

$$\begin{aligned} \text{ระยะเหล็กหดตัวอิสระ ;} \quad \delta_{Ts} &= \alpha L \Delta T \\ &= 11.7 \times 10^{-6} \times 120 \times 35 = 0.04914 \text{ cm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ระยะอะลูมิเนียมหดตัวอิสระ ;} \quad \delta_{Tal} &= \alpha L \Delta T \\ &= 23.6 \times 10^{-6} \times 160 \times 35 = 0.13216 \text{ cm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ระยะหดตัวรวม ;} \quad \delta &= \delta_{Ts} + \delta_{Tal} \\ &= 0.04914 + 0.13216 = 0.1813 \text{ cm} \end{aligned}$$

แรง P ที่เกิดกับแท่งเหล็กและอะลูมิเนียมเมื่อผนังยึดแน่นทั้งสองด้านหาได้ความสัมพันธ์

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{PL_s}{E_s A_s} + \frac{PL_{al}}{E_{al} A_{al}} \\ 0.1813 &= P \left[ \left( \frac{120}{2.04 \times 10^6 \times 6.0} \right) + \left( \frac{160}{0.703 \times 10^6 \times 12.0} \right) \right] \\ 0.1813 &= P (9.804 \times 10^{-6} + 1.896 \times 10^{-5}) \end{aligned}$$



$$P = \frac{0.1813}{2.877 \times 10^{-5}}$$

$$= 6,301.63 \text{ kg}$$

ความเค้นในหมุดย้ำ ;

$$\sigma = \frac{P}{A}$$

$$= \frac{6,301.63}{(\pi(2)^2/4)} = 2,005.87 \text{ kg/cm}^2$$

ความเค้นในหมุดย้ำเมื่ออุณหภูมิลดลงมีค่าเท่ากับ  $2,005.87 \text{ kg/cm}^2$  ตอบ

### สรุปท้ายบท

ความเค้นคือแรงต้านทานภายในวัสดุต่อหนึ่งหน่วยพื้นที่เมื่อมีแรงมากระทำ โดยผลรวมของแรงต้านจะมีค่าเท่ากับแรงที่มากระทำและทำให้วัตถุอยู่ในสภาวะสมดุล ความเค้นมีหลายประเภทขึ้นอยู่กับขนาดและทิศทางที่แรงกระทำ เช่น ความเค้นดึง ความเค้นอัด และความเค้นเฉือน เป็นต้น ในขณะที่วัตถุมีแรงมากระทำก็จะเกิดการเปลี่ยนแปลงรูปร่าง การเปลี่ยนแปลงรูปร่างดังกล่าวขึ้นอยู่กับประเภทของแรงที่มากระทำนั้น อัตราส่วนการเปลี่ยนแปลงรูปร่างเมื่อเทียบกับขนาดเดิมเรียกว่าความเครียด ประเภทของความเครียดจะสอดคล้องกับความเค้น เช่น ความเครียดดึงเป็นความเครียดที่เกิดจากวัตถุถูกแรงดึงให้ยืดออก ความเครียดอัดเป็นความเครียดที่เกิดจากวัตถุถูกแรงอัดให้หดสั้นลง และความเครียดเฉือนเป็นความเครียดที่เกิดจากวัตถุเปลี่ยนแปลงรูปร่างเมื่อมีแรงเฉือนมากระทำ เป็นต้น

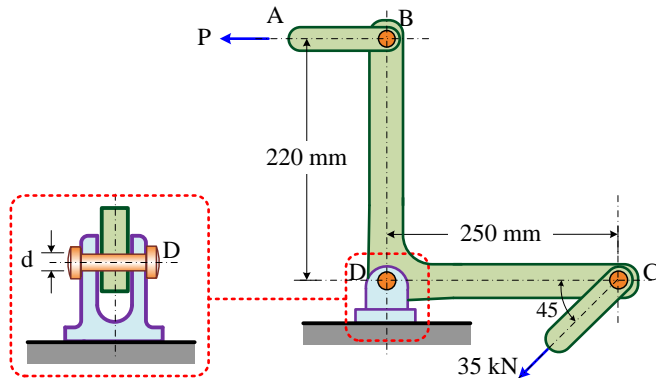
การทดสอบแรงดึงของชิ้นงานที่ทำจากวัสดุชนิดต่าง ๆ พบว่าเมื่อมีแรงมากระทำก็จะทำให้ชิ้นงานนั้นเปลี่ยนแปลงรูปร่างสอดคล้องกับขนาดและทิศทางของแรง ชิ้นงานจะสามารถกลับคืนสู่สภาพเดิมได้หากคุณสมบัติวัสดุอยู่ในช่วงพิกัดยืดหยุ่น วัสดุแต่ละชนิดจะมีความเค้นแปรผันตรงกับความเครียดและมีค่าเท่ากับค่าคงที่เรียกว่า ยังส์ โมดูลัสหรือ โมดูลัสยืดหยุ่น สำหรับค่าคงที่จากความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดเมื่อวัตถุอยู่ภายใต้แรงเฉือนคือ โมดูลัสความคงรูปหรือ โมดูลัสเฉือน ถ้าคุณสมบัติวัสดุในสภาวะยืดหยุ่นมีคุณสมบัติทางกลเหมือนกันทุกทิศทางเมื่อวัสดุนั้นมีแรงมากระทำก็จะทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงรูปร่าง เมื่อนำความเครียดในแนวแกนและแนวขวางมาพิจารณาก็จะพบความสัมพันธ์เชิงเส้น อัตราส่วนระหว่างความเครียดในแนวขวางต่อความเครียดในแนวแกนเรียกว่า อัตราส่วนปัวส์ซอง

วัตถุโดยทั่วไปจะขยายตัวเมื่ออุณหภูมิสูงขึ้นและหดตัวเมื่ออุณหภูมิลดลง อัตราส่วนของความเครียดต่ออุณหภูมิที่เปลี่ยนไปนี้เรียกว่า สัมประสิทธิ์การขยายตัวทางความร้อน ถ้าหากวัตถุสามารถเปลี่ยนแปลงรูปร่างได้อย่างอิสระก็จะไม่มีความเค้นภายในเนื้อวัสดุ แต่ถ้าวัตถุถูก

จำกัดการเปลี่ยนแปลงรูปร่างก็จะเกิดความเค้นภายในเรียกว่าความเค้นเนื่องจากการเปลี่ยนแปลง  
อุณหภูมิ

## แบบฝึกหัดท้ายบท

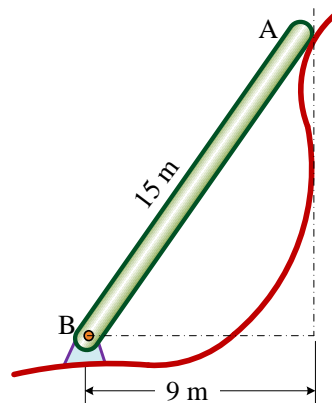
1. ข้อเหวี่ยงดังแสดงในภาพที่ 1.33 มีแรง 35 kN เอียงทำมุม  $45^\circ$  กระทำที่จุด C จงหาขนาดเส้นผ่าศูนย์กลางของก้าน AB ถ้ากำหนดให้ความเค้นในแนวแกน  $\sigma = 150$  MPa และจงหาความเค้นเฉือนที่สลักยึด D ถ้าสลักมีขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง  $d = 25$  mm



ภาพที่ 1.33 ข้อเหวี่ยงในสภาวะสมดุล

ที่มา : จีรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

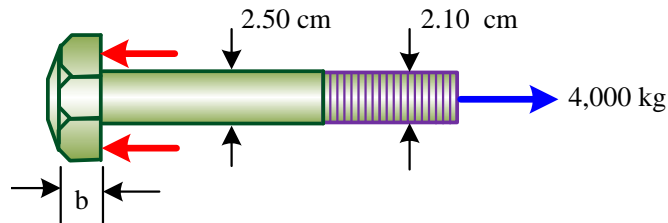
2. ท่อนโลหะหน้าตัดสมมาตรยาว 15 m ปลาย B ถูกยึดด้วยสลักเกลียวและปลาย A ถูกพาดไว้กับผนังผิวเรียบดังแสดงในภาพที่ 1.34 ท่อนโลหะนี้มีน้ำหนัก 3,000 kg จงหาขนาดสลักเกลียวที่ยึดท่อนโลหะนี้ไว้อย่างปลอดภัย ถ้าความเค้นเฉือนสูงสุดที่สลักเกลียวรับได้ไม่เกิน 50 MPa โดยพิจารณาสลักเกลียวนี้เป็นการเฉือนคู่



ภาพที่ 1.34 คานสมมาตรยาวพาดผนัง

ที่มา : จีรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

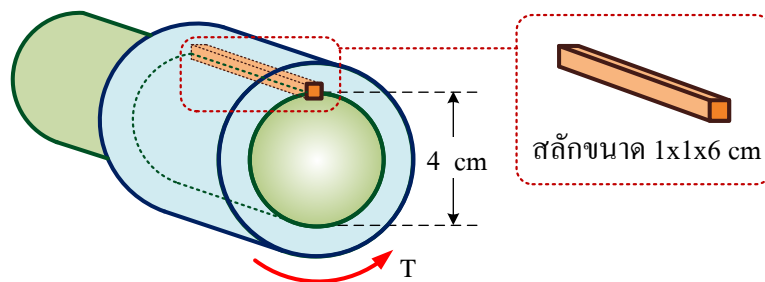
3. สลักเกลียวรับแรงดึงแสดงในภาพที่ 1.35 จงหาความหนาของหัวสลักเกลียวนี้ถ้ากำหนดให้ความเค้นดึงในสลักเกลียวเป็น 3 เท่าของความเค้นเฉือนของหัวสลักเกลียว



ภาพที่ 1.35 สลักเกลียวรับแรงดึง

ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

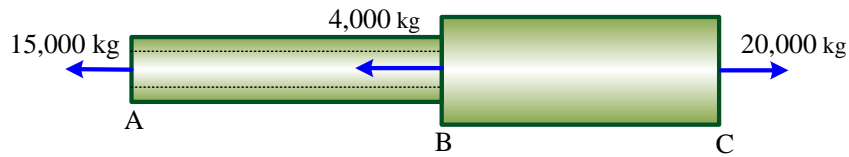
4. ในการยึดค้อนเข้ากับเพลาด้วยการใช้สลักยึดดังแสดงในภาพที่ 1.36 ถ้าวัสดุที่ใช้ทำสลักรับความเค้นเฉือนได้ไม่เกิน  $800 \text{ kg/cm}^2$  จงหาโมเมนต์บิดสูงสุดที่สลักยึดสามารถรับได้อย่างปลอดภัย



ภาพที่ 1.36 การยึดค้อนกับเพลาดู

ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

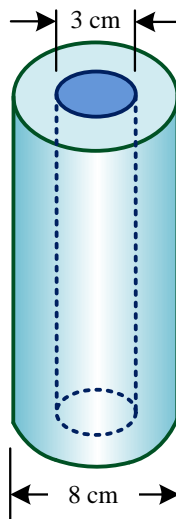
5. ท่อนโลหะทรงกระบอกสองท่อนยึดแน่นดังแสดงในภาพที่ 1.37 ท่อนโลหะกลวง AB มีขนาดเส้นผ่าศูนย์กลางภายใน 5 cm ภายนอก 10 cm และยาว 50 cm ส่วนโลหะตัน BC มีเส้นผ่าศูนย์กลาง 15 cm ยาว 45 cm ถ้ากำหนดให้ท่อนโลหะทั้งสองมีค่าโมดูลัสยืดหยุ่น  $E = 2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$  และอัตราส่วนปัวส์ซอง  $\nu = 0.3$  จงหาความเค้นและปริมาตรที่เปลี่ยนแปลงไปของท่อนโลหะทั้งสอง



ภาพที่ 1.37 ครอบอกกลางยึดแน่นกับครอบอกตัน

ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

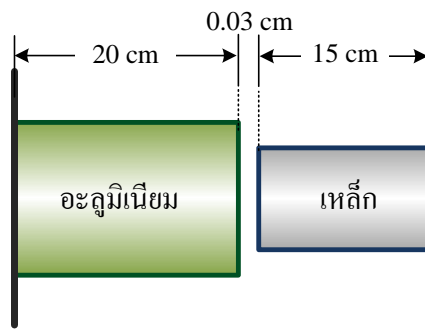
6. แท่งโลหะระหว่างอะลูมิเนียมกลางยึดแน่นกับแกนทองเหลืองดังแสดงในภาพที่ 1.38 ถ้าแท่งโลหะเชิงประกอบนี้ไม่เกิดความเค้นภายในที่อุณหภูมิ  $15^{\circ}\text{C}$  จงหาความเค้นในอะลูมิเนียมถ้าอุณหภูมิเพิ่มเป็น  $195^{\circ}\text{C}$  กำหนดให้อะลูมิเนียมมีโมดูลัสยืดหยุ่น  $E_{al} = 0.7 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$  ค่าสัมประสิทธิ์การขยายตัวทางความร้อน  $\alpha_{al} = 2.3 \times 10^{-5}/^{\circ}\text{C}$  และทองเหลืองมีโมดูลัสยืดหยุ่น  $E_{br} = 2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$  ค่าสัมประสิทธิ์การขยายตัวทางความร้อน  $\alpha_{br} = 1.9 \times 10^{-5}/^{\circ}\text{C}$



ภาพที่ 1.38 ครอบอกอะลูมิเนียมยึดติดแน่น

ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

7. ท่อนอะลูมิเนียมและเหล็กถูกยึดดังแสดงในภาพที่ 1.39 ที่อุณหภูมิ  $20^{\circ}\text{C}$  ช่องว่างระหว่างท่อนโลหะทั้งสองเท่ากับ  $0.03 \text{ cm}$  จงหาความเค้นและความยาวของท่อนอะลูมิเนียมหากอุณหภูมิเพิ่มขึ้นเป็น  $140^{\circ}\text{C}$  กำหนดให้พื้นที่หน้าตัดอะลูมิเนียมเท่ากับ  $20 \text{ cm}^2$  พื้นที่หน้าตัดเหล็กเท่ากับ  $8 \text{ cm}^2$  อะลูมิเนียมมีค่าโมดูลัสยืดหยุ่น  $E_{al} = 0.7 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$  ค่าสัมประสิทธิ์การขยายตัวทางความร้อน  $\alpha_{al} = 2.3 \times 10^{-5}/^{\circ}\text{C}$  และเหล็กมีค่าโมดูลัสยืดหยุ่น  $E_s = 19 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$  ค่าสัมประสิทธิ์การขยายตัวทางความร้อน  $\alpha_s = 1.8 \times 10^{-5}/^{\circ}\text{C}$



ภาพที่ 1.39 ท่อนอะลูมิเนียมและเหล็กถูกยึดแน่น  
ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

## เอกสารอ้างอิง

- เกรียงศักดิ์ อุคมสินโรจน์. (2540). **กลศาสตร์ของวัสดุ**. กรุงเทพฯ : มิตรนราการพิมพ์.  
บรรจบ อรชร. (2542). **กลศาสตร์ของแข็ง**. กรุงเทพฯ : พิมพ์ดี.  
มนตรี พิรุณเกษตร. (2541). **กลศาสตร์ของวัสดุ เล่ม 1**. กรุงเทพฯ : ซีเอ็ดดูเคชั่น.  
\_\_\_\_\_. (2544). **กลศาสตร์ของวัสดุ**. กรุงเทพฯ : วิทยพัฒน์.  
วินิต ช่อวิเชียร วรนิติ ช่อวิเชียร และวรสฤษฎ์ ช่อวิเชียร. (2548). **กำลังวัสดุ/กลศาสตร์วัสดุ**.  
กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.  
สมโพธิ วิวิธเกยูรวงศ์. (2542). **กลศาสตร์ของวัสดุ**. กรุงเทพฯ : ฟิสิกส์เซ็นเตอร์การพิมพ์.  
สุกิจ นามพิชญ์. (2541). **ความแข็งแรงของวัสดุ**. กรุงเทพฯ : ซีเอ็ดดูเคชั่น.  
สิทธิชัย แสงอาทิตย์. (2549). **กลศาสตร์ของวัสดุ**. นครราชสีมา : สาขาวิชาวิศวกรรมโยธา  
สำนักวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี.  
สิริศักดิ์ ปโยธรสิริ. (2549). **กลศาสตร์วัสดุ**. กรุงเทพฯ : ว.พีเชรสกุล.  
Bhavikatti S.S. (2010). **Mechanics of Solids**. New Delhi : New Age International (P)  
Limited Publishers.  
Engineering Materials. (n.d.). **Types of Fracture**. Retrieved June 12, 2013, from  
[http://www.hsc.csu.edu.au/engineering\\_studies/application/lift/3210/index.html](http://www.hsc.csu.edu.au/engineering_studies/application/lift/3210/index.html).  
Ferdinand P. Beer, Russell Johnston, John T. DeWolf and David F. Mazurek. (2012).  
**Mechanics of Materials**. New York : Mc Graw Hill.  
Hearn E. J. (2000). **Mechanics of Materials 1: An Introduction to the Mechanics of  
Elastic and Plastic Deformation of Solids and Structural Materials**. Oxford :  
Butterworth-Heinemann.  
James M. Gere and Barry J. Goodno. (2012). **Mechanics of Materials**. Stamford : Cengage  
Learning.  
John Case, Lord Chilver and Carl T. F. Ross. (1999). **Strength of Materials and  
Structures**. London : Arnold.  
Joseph E. Shigley. (2004). **Mechanical Engineering Design**. New York : McGraw-Hill.  
Metal Pass. (2005). **Metallurgy & Materials**. Retrieved June 18, 2013, from  
<http://www.metalpass.com/metallmaterials>.

**เอกสารอ้างอิง (ต่อ)**

Nirmal Bansal. (2009). **Strength of Materials**. New Delhi : Laxmi Publications (P) Ltd.

Russell C. Hibbeler. (2011). **Mechanics of Materials**. New York : Prentice Hall  
International Inc.

Timoshenko S. (1940). **Strength of Materials : Part I Elementary Theory and Problems**.  
New York : D. Van Nostrand Company, Inc.

Vitor Dias da Silva. (2006). **Mechanics and Strength of Materials**. Heidelberg : Springer-  
Verlag.

William A. Nash. (1998). **Theory and Problems of Strength of Materials**. New York :  
McGraw-Hill.



## แผนบริหารการสอนประจำบทที่ 2

### ภาษาผนังบางรับความดัน การต่อด้วยหมุดย้าและการเชื่อม

#### หัวข้อเนื้อหาประจำบท

1. ภาษาผนังบางรับความดัน
  - สมมติฐานการคำนวณภาษาผนังบาง
  - ภาษาผนังบางทรงกระบอก
  - ภาษาผนังบางทรงกลม
2. ความดันใช้งาน
3. การต่อโครงสร้างโดยใช้หมุดย้า
  - การต่อโดยใช้หมุดย้าแบบปลายแผ่นเดียวกัน
  - การต่อโดยใช้หมุดย้าแบบปลายแผ่นชนกัน
  - การคำนวณความแข็งแรงของรอยต่อแบบหมุดย้า
4. การต่อโครงสร้างโดยการเชื่อม
  - การต่อโดยการเชื่อมแบบปลายแผ่นชนกัน
  - การต่อโดยการเชื่อมแบบปลายแผ่นเดียวกัน
  - การกระจายแรงผ่านรอยเชื่อมและมาตรฐานการเชื่อม
5. สรุปท้ายบท
6. แบบฝึกหัดท้ายบท

#### วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม

- เมื่อนักศึกษาเรียนบทเรียนนี้แล้วสามารถ
1. อธิบายสมมติฐานการคำนวณภาษาผนังบางได้
  2. อธิบายและคำนวณความเค้นภายในภาษาผนังบาง รูปทรงกระบอกได้
  3. อธิบายและคำนวณความเค้นภายในภาษาผนังบางรูปทรงกลมได้
  4. อธิบายและคำนวณความดันใช้งานได้
  5. อธิบายและคำนวณรอยต่อโดยใช้หมุดย้าแบบปลายแผ่นเดียวกันได้
  6. อธิบายและคำนวณรอยต่อโดยใช้หมุดย้าแบบปลายแผ่นชนกันได้
  7. อธิบายและคำนวณความแข็งแรงรอยต่อแบบหมุดย้าได้
  8. อธิบายและคำนวณรอยต่อโดยการเชื่อมแบบปลายแผ่นชนกันได้

9. อธิบายและคำนวณรอยต่อโดยการเชื่อมแบบปลายแผ่นยกกันได้
10. อธิบายการกระจายแรงผ่านรอยเชื่อมและมาตรฐานการเชื่อมได้

### วิธีสอนและกิจกรรมการเรียนการสอนประจำบท

1. บรรยายเนื้อหาในเอกสารประกอบคำสอน การถามและตอบในห้องเรียนร่วมกับการใช้สื่อประกอบอื่น เช่น สื่อแผ่นใส สื่อคอมพิวเตอร์ หรือสื่อวีดิทัศน์ เป็นต้น

2. สาธิตขั้นตอนการแก้ปัญหาโจทย์ที่เกี่ยวข้องกับเนื้อหาในการเรียนการสอน เช่น ภาชนะผนังบางทรงกระบอก ภาชนะผนังบางทรงกลม การต่อชิ้นงานโดยใช้หมุดย้ำ และการต่อชิ้นงานโดยการเชื่อม เป็นต้น

#### 3. มอบหมายงาน

3.1 ให้ผู้เรียนแต่ละคนแก้ปัญหาโจทย์ที่เกี่ยวข้องกับเนื้อหา เช่น ภาชนะผนังบางทรงกระบอก ภาชนะผนังบางทรงกลม การต่อชิ้นงานโดยใช้หมุดย้ำ และการต่อชิ้นงานโดยการเชื่อม เป็นต้น

3.2 ให้ผู้เรียนแต่ละกลุ่มศึกษาเพิ่มเติมเกี่ยวกับภาชนะผนังบางรูปทรงอื่น ตลอดจนเทคนิคและวิธีการต่อชิ้นงานที่ทำจากวัสดุชนิดอื่น

3.3 ให้ผู้เรียนแต่ละคนทำแบบฝึกหัดจากคำถามท้ายบท เพื่อทดสอบความรู้ที่ได้เรียนมา

#### 4. ทำแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

### การวัดและประเมินผล

1. การสังเกตความสนใจของผู้เรียน
2. การฝึกปฏิบัติเกี่ยวกับการคำนวณปัญหาโจทย์
3. การทดสอบจากแบบทดสอบ
4. การประเมินผล ผู้เรียนจะต้องได้คะแนนรวมไม่ต่ำกว่าร้อยละ 60 จึงจะผ่านเกณฑ์การเรียนรู้

## บทที่ 2

### ภาชนะผนังบางรับความดัน การต่อด้วยหมุดย้ำและการเชื่อม

ภาชนะผนังบางรับความดันนิยมใช้อย่างกว้างขวางในวงการอุตสาหกรรม ส่วนใหญ่มักเป็นภาชนะเพื่อการบรรจุหรืออาจเป็นท่อเพื่อการส่งถ่ายของเหลวหรือแก๊ส นอกจากนั้น โครงสร้างผนังบางรับความดันยังรวมถึงเรือดำน้ำ ท่อเรือ และผนังบอลูนที่บรรจุแก๊สอีกด้วย การหาความเค้นภายในภาชนะผนังบางมักคิดเพียงความเค้นตามแนวยาวและตามแนวขวางโดยไม่คำนึงถึงความหนา สำหรับการเชื่อมต่อชิ้นส่วนโครงสร้างจะต้องคำนึงถึงความแข็งแรงของจุดเชื่อมต่อนั้น การเลือกวิธีการต่อแบบใดขึ้นอยู่กับประเภทของโครงสร้าง อย่างไรก็ตามจุดต่อจะต้องสามารถต้านทานแรงต่าง ๆ ได้อย่างปลอดภัย โดยทั่วไปจุดต่อจะถูกออกแบบให้มีความแข็งแรงมากกว่าชิ้นส่วนโครงสร้างเพื่อลดความยุ่งยากในการคำนวณและออกแบบ จุดเชื่อมต่อที่พบเห็นทั่วไปนิยมใช้หมุดย้ำหรือการเชื่อม ดังนั้นเนื้อหาในบทนี้จึงขออธิบายเกี่ยวกับการคำนวณความเค้นในภาชนะผนังบางรับความดันและการออกแบบจุดต่อโครงสร้างโดยมุ่งเน้นที่หมุดย้ำและการเชื่อม

#### ภาชนะผนังบางรับความดัน

ภาชนะผนังบางรับความดัน (Thin Wall Pressure Vessels) เป็นภาชนะปิดภายในบรรจุของเหลวหรือแก๊สที่มีความดัน โดยผนังของภาชนะมีความหนาน้อยเมื่อเทียบกับขนาดหรือเส้นผ่าศูนย์กลางภาชนะ ตัวอย่างภาชนะผนังบางที่มักพบเห็น เช่น ถังเก็บน้ำ ถังแก๊สหุงต้มในครัวเรือน ถังบรรจุแก๊สออกซิเจนในโรงพยาบาล ท่อลำเลียงแก๊สธรรมชาติ และถังบรรจุน้ำมัน เป็นต้น การหาความเค้นภายในภาชนะผนังบางมักคิดเพียงความเค้นตามแนวยาวและตามแนวขวางโดยไม่คำนึงถึงความหนาเพื่อลดความยุ่งยากในการคำนวณ ต่างจากภาชนะที่มีความหนามากที่จะต้องคำนึงถึงความเค้นในแนวรัศมีด้วย ดังนั้นวัสดุที่ใช้ทำภาชนะควรมีคุณสมบัติต้านทานความเค้นดึงดี ภาชนะผนังบางมีหลายรูปทรง เช่น ทรงกระบอก ทรงกลม ทรงรี และทรงโคนท เป็นต้น แต่ที่เป็นพื้นฐานในการคำนวณออกแบบคือภาชนะรูปทรงกระบอกและทรงกลม มนตรี พิรุณเกษตร (2544 : 136-146) และ John Case, et al. (1999 : 48-49) กล่าวถึงสมมติฐานและการคำนวณความเค้นภายในภาชนะผนังบางไว้ดังต่อไปนี้

#### 1. สมมติฐานในการคำนวณและออกแบบภาชนะผนังบาง

สมมติฐานที่ใช้ในการคำนวณและออกแบบภาชนะผนังบางรับความดันประกอบด้วย

##### 1.1 ภาชนะผนังบางรับความดันควรมีความหนาของผนังสม่ำเสมอตลอดทั้งภาชนะ

1.2 ภาชนะมีรูปร่างสมมาตรและความเค้นภายในจะเกิดขึ้นอย่างอิสระ น้ำหนักบรรทุกรวมถึงน้ำหนักของภาชนะจะต้องถูกกระจายลงสู่ฐานรองรับอย่างสมดุลเพื่อป้องกันการเสี้ยวรูปของภาชนะ

1.3 ความดันภายในภาชนะจะต้องกระจายตัวอย่างสม่ำเสมอและเป็นความดันมาตร (Gage Pressure) โดยทั่วไปความดันภายในภาชนะที่ใช้ในการคำนวณเป็นความดันจากภายในสู่ภายนอกหรือความดันบวก (Positive Pressure) ที่พยายามทำให้ภาชนะวิบัติโดยการระเบิดหรือแตกออกด้านนอก กรณีที่ความดันภายนอกมีค่ามากกว่าภายในจะต้องพิจารณาความเค้นอื่นร่วมด้วยเนื่องจากต้องคำนึงถึงการวิบัติจากการโก่งของผนังด้วย

1.4 ผนังมีความหนาน้อยเมื่อเทียบกับขนาดภาชนะ โดยรัศมีของภาชนะควรมากกว่า 10 เท่าของความหนาภาชนะ หรืออัตราส่วนระหว่างรัศมีของภาชนะทรงกระบอกหรือทรงกลม  $r$  ต่อความหนา  $t$  ของภาชนะควรมีค่ามากกว่าสิบ  $r/t > 10$

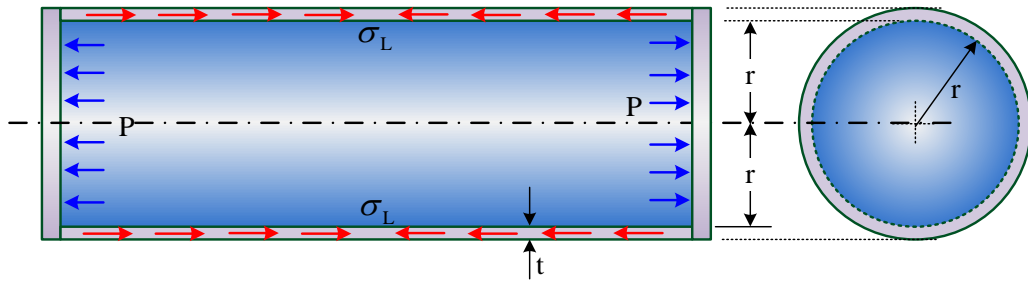
## 2. ภาชนะผนังบางรูปทรงกระบอก

ภาชนะผนังบางรูปทรงกระบอก (Thin Walled Cylinder) รับความดันดังแสดงในภาพที่ 2.1 เป็นภาชนะรูปทรงกระบอกที่ภายในบรรจุของเหลวหรือแก๊ส วัสดุที่นิยมนำมาใช้ทำภาชนะส่วนใหญ่เป็นเหล็กแผ่นดัดขึ้นรูปและเชื่อมต่อกันจนสามารถต้านทานความดันของเหลวที่อยู่ภายในได้ ความดันภายในภาชนะทำให้ผนังเกิดความเค้นถึง 2 ทิศทางคือความเค้นตามแนวยาว (Longitudinal Stress :  $\sigma_L$ ) และความเค้นตามแนวขวาง (Circumferential Stress :  $\sigma_C$ )

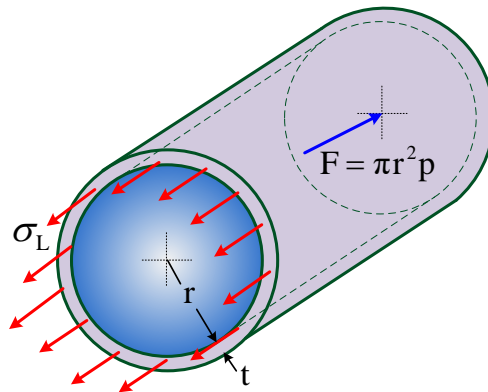


ภาพที่ 2.1 ถังบรรจุแก๊สทรงกระบอก

ที่มา : Machinio, 2012



(ก) ภาพตัดถึงทรงกระบอก



(ข) ภาพตัดตามแนวขวางถึงทรงกระบอก

**ภาพที่ 2.2** แรงดันภายในภาชนะทรงกระบอกบาง

ที่มา : จีรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

สม โปธิ วิวิธเกชรวงศ์ (2542 : 20-25) Hearn E. J. (2000 : 198-202) และ Russell C. Hibbeler. (2011 : 405-407) กล่าวถึงสมการที่ใช้ในการหาความเค้นตามแนวยาวและความเค้นตามแนวขวางไว้ดังต่อไปนี้ จากภาพที่ 2.2 ซึ่งเป็นความเค้นตามแนวยาว  $\sigma_L$  ที่เกิดภายในภาชนะทรงกระบอกเมื่อกำหนดให้  $F$  คือแรงดันที่พยายามจะดันฝาปิดของรูปทรงกระบอก และ  $p$  คือความดันภายใน ซึ่งมีรัศมีภายในคือ  $r$  การคำนวณหาความเค้นตามแนวยาวสามารถหาได้ดังนี้

แรงดัน ; 
$$F = \text{ความดัน} \times \text{พื้นที่ที่ตั้งฉากกับแรง}$$

$$= p \pi r^2 \tag{2.1}$$

แรงดัน  $F$  จะทำให้เกิดความเค้นตามแนวยาว  $\sigma_L$  ขึ้นตามพื้นที่ขอบของรูปทรงกระบอก

$$\sigma_L = \frac{p}{A} \tag{2.2}$$

พื้นที่หน้าตัดวงแหวน  $A$  ของรูปทรงกระบอกที่มีความหนา  $t$  หาได้จาก

$$\begin{aligned}
 A &= \pi(r+t)^2 - \pi r^2 \\
 &= \pi(2rt+t^2) = \pi(2r+t)t
 \end{aligned}
 \tag{2.3}$$

ถ้ารัศมีภายในภาชนะ  $r$  มีค่ามากกว่าความหนา  $t$  มากจะนั่นจะได้ว่า  $2r+t \approx 2r$  ส่งผลทำให้พื้นที่หน้าตัดวงแหวน  $A$  และแรงดัน  $F$  เปลี่ยนเป็น

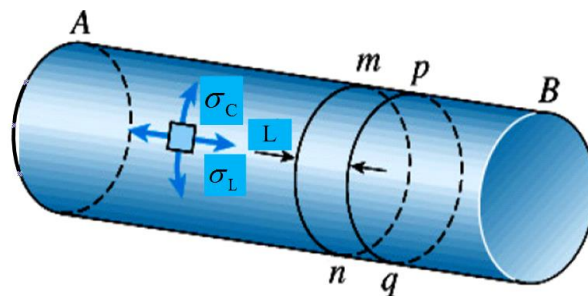
$$A = 2\pi r t \tag{2.4}$$

$$F = A \sigma_L = 2\pi r t \sigma_L \tag{2.5}$$

แทนค่าจะได้;  $2\pi r t \sigma_L = p \pi r^2$

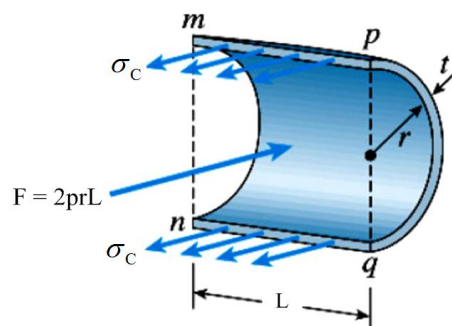
$$\text{หรือ} \quad \sigma_L = \frac{pr}{2t} \tag{2.6}$$

ภาพที่ 2.3 และ 2.4 แสดงความเค้นตามแนวขวางหรือแนวรอบวง  $\sigma_c$  ที่เกิดขึ้นภายในผนังของภาชนะทรงกระบอกที่มีความยาว  $L$  เมื่อกำหนดให้  $F$  คือแรงที่พยายามจะดันให้รูปทรงกระบอกขาดออกจากกันตามแนวยาวและ  $p$  คือความดันภายในภาชนะ การคำนวณหาความเค้นตามแนวขวางสามารถหาได้ดังนี้



ภาพที่ 2.3 ความเค้นภายในภาชนะแรงดันทรงกระบอก

ที่มา : Pablo G. Caceres-Valencia. n.d



ภาพที่ 2.4 แรงภายในแนวรอบวงหรือตามแนวขวางภาชนะทรงกระบอก

ที่มา : Pablo G. Caceres-Valencia. n.d

แรงดัน ;  $F = \text{ความดัน} \times \text{พื้นที่ที่ตั้งฉากกับแรง}$

$$= p \times 2rL = 2prL \quad (2.7)$$

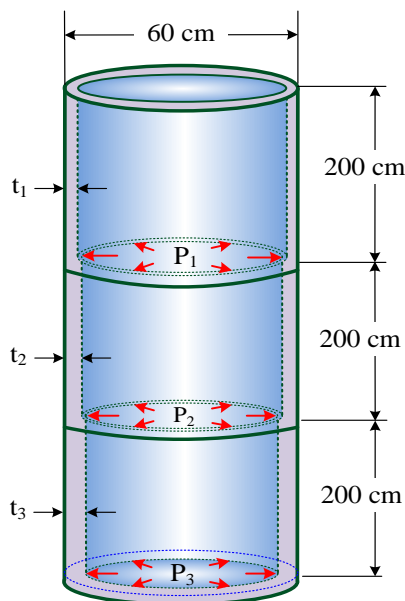
แรงดัน  $F$  จะทำให้เกิดความเค้นขึ้นในพื้นที่ผนังตามความยาวของรูปทรงกระบอกดังนี้

$$\sigma_c = \frac{F}{A} \quad (2.8)$$

เมื่อพื้นที่ผนังตามความยาวของรูปทรงกระบอก  $A = 2Lt$  จะสามารถหาความเค้นตามแนวขวางได้จากสมการ

$$\sigma_c = \frac{2prL}{2Lt} = \frac{pr}{t} \quad (2.9)$$

ตัวอย่างที่ 2.1 ภาชนะรูปทรงกระบอกมีขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง 60 cm และสูง 600 cm ภายในบรรจุของเหลวที่มีความหนาแน่น  $2.7 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$  ถ้าภาชนะรูปทรงกระบอกนี้ถูกเชื่อมด้วยแผ่นเหล็กรูปวงแหวนซึ่งสูงท่อนละ 200 cm จำนวน 3 ท่อนดังแสดงในภาพที่ 2.5 จงหาความหนาของวงแหวนแต่ละช่วง ถ้ากำหนดให้แผ่นเหล็กสามารถรับความเค้นดึงได้ไม่เกิน  $300 \text{ kg/cm}^2$



ภาพที่ 2.5 ภาชนะทรงกระบอก 3 ช่วงบรรจุของเหลว

ที่มา : จีรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

วิธีทำ

ความหนาแน่นของเหลวที่กำหนดคือ  $2.7 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$  หรือ  $2.7 \times 10^{-3} \text{ kg/cm}^3$

ความดันของเหลวที่ความลึก  $h_1 = 200$  cm จากด้านบน

$$\begin{aligned} p_1 &= \gamma h_1 \\ &= 2.7 \times 10^{-3} \times 200 = 0.54 \text{ kg/cm}^2 \end{aligned}$$

ความดันของเหลวที่ความลึก  $h_2 = 400$  cm จากด้านบน

$$\begin{aligned} p_2 &= \gamma h_2 \\ &= 2.7 \times 10^{-3} \times 400 = 1.08 \text{ kg/cm}^2 \end{aligned}$$

ความดันของเหลวที่ความลึก  $h_3 = 600$  cm จากด้านบน

$$\begin{aligned} p_3 &= \gamma h_3 \\ &= 2.7 \times 10^{-3} \times 600 = 1.62 \text{ kg/cm}^2 \end{aligned}$$

หาความหนาของแผ่นเหล็กกวางแหวนแต่ละช่วง

ความหนาช่วงบน ;  $t_1 = \frac{p_1 r}{\sigma_c} = \frac{0.54 \times 30}{300} = 0.054 \text{ cm}$     ตอบ

ความหนาช่วงกลาง ;  $t_2 = \frac{p_2 r}{\sigma_c} = \frac{1.08 \times 30}{300} = 0.108 \text{ cm}$     ตอบ

ความหนาช่วงล่าง ;  $t_3 = \frac{p_3 r}{\sigma_c} = \frac{1.62 \times 30}{300} = 0.162 \text{ cm}$     ตอบ

**ตัวอย่างที่ 2.2** ภาชนะทรงกระบอกมีขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง 100 cm ผลิตจากแผ่นเหล็กขึ้นรูปหนา 1.25 cm ดังแสดงในภาพที่ 2.6 ผนังภาชนะสามารถต้านทานความเค้นตามแนวรอบวงได้ไม่เกิน  $1,200 \text{ kg/cm}^2$  ที่ปลายภาชนะปิดด้วยแผ่นเหล็กยึดด้วยสลักเกลียวขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง 2.5 cm จงหาจำนวนของสลักเกลียวถ้าความเค้นดึงที่สลักเกลียวรับได้ไม่เกิน  $3,000 \text{ kg/cm}^2$

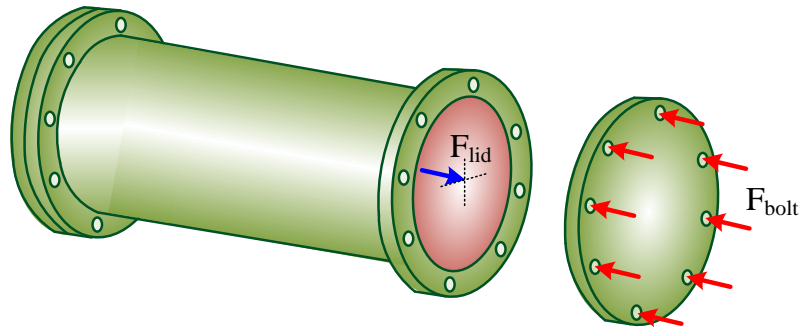
**วิธีทำ**

พื้นที่หน้าตัดของสลักเกลียว ;  $A_{\text{bolt}} = \frac{1}{4} \pi (2.5)^2 = 4.91 \text{ cm}^2$

แรงดึงที่สลักเกลียวแต่ละตัวสามารถรับได้อย่างปลอดภัย ;

$$F_{\text{bolt}} = 4.91 \times 3,000 = 14,730 \text{ kg}$$





ภาพที่ 2.6 ภาพระทรงกระบอกฝาปิดยึดด้วยสลักเกลียว

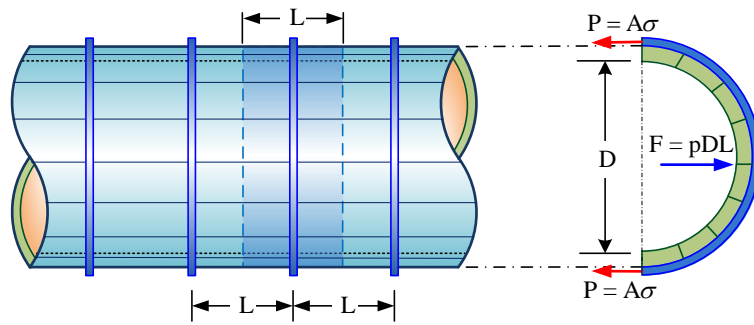
ที่มา : จีรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

$$\begin{aligned}
 \text{ความเค้นแนวรอบวง ;} \quad \sigma_c &= \frac{pr}{t} \\
 \sigma_c &= \frac{pr}{1.25} \leq 1,200 \text{ kg/cm}^2 \\
 \text{ความดันภายในภาชนะ ;} \quad p &\leq \frac{1,200 \times 1.25}{r} \\
 &\leq \frac{1,500}{50} \\
 &\leq 30 \text{ kg/cm}^2 \\
 \text{แรงดันที่กระทำกับฝา ;} \quad F_{\text{lid}} &= \frac{1}{4} \pi (100)^2 \times 30 \\
 &= 235,619 \text{ kg} \\
 \text{จำนวนสลักเกลียว ;} \quad n &= \frac{F_{\text{lid}}}{F_{\text{bolt}}} \\
 &= \frac{235,619}{14,730} \\
 &= 15.99 \text{ ตัว}
 \end{aligned}$$

เลือกใช้สลักเกลียวขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง 2.5 cm จำนวน 16 ตัว

ตอบ

ตัวอย่างที่ 2.3 ท่อส่งน้ำขนาดใหญ่มีขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง 1.5 m ใช้ลำเลียงน้ำจากอ่างเก็บน้ำดังแสดงในภาพที่ 2.7 ท่อดังกล่าวทำด้วยไม้ประกอบโดยใช้แถบเหล็กรัดเป็นระยะเท่ากันตลอดความยาว โดยแถบรัดมีพื้นที่หน้าตัด  $300 \text{ mm}^2$  และสามารถรับความเค้นดึงได้ไม่เกิน 130 MPa จงหาระยะห่างของแถบรัดถ้าท่อนี้ถูกใช้งานต่ำกว่าระดับน้ำในอ่าง 30 m กำหนดให้ความหนาแน่นของน้ำในอ่างเท่ากับ  $1,000 \text{ kg/m}^3$



ภาพที่ 2.7 ท่อกลมรััดด้วยแถบเหล็ก

ที่มา : จีรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

### วิธีทำ

ความดันของน้ำภายในท่อ  $p$  ที่ความลึกจากระดับผิวน้ำ 30 m

$$\begin{aligned} p &= \rho gh \\ &= 1,000 \times 9.81 \times 30 \\ &= 294.3 \times 10^3 \text{ N/m}^2 \text{ หรือ } 294.3 \text{ kPa} \end{aligned}$$

แรงดึงสูงสุดที่แถบรััดสามารถรับได้ ;

$$F_s = A\sigma$$

แรงดันน้ำภายในท่อ ;

$$F_w = pDL$$

กำหนดให้แถบรััดมีระยะห่างเท่ากับ  $L$  และพิจารณาสมดุลของแรงในท่อส่งน้ำตามแนวขวางจะได้

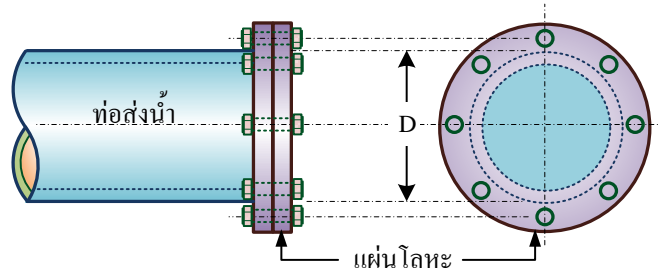
$$\begin{aligned} F_w &= 2F_s \\ pDL &= 2A\sigma \\ 294.3 \times 10^3 \times 1.5 \times L &= 2 \times 300 \times 10^{-6} \times 130 \times 10^6 \\ L &= 0.177 \text{ m หรือ } 17.7 \text{ cm} \end{aligned}$$

เลือกใช้ระยะเว้นระหว่างแถบรััดเหล็กเท่ากับ 17 cm

ตอบ

ตัวอย่างที่ 2.4 ท่อส่งน้ำขนาดเส้นผ่าศูนย์กลางภายนอก 450 mm มีผนังหนา 10 mm และรับความดันน้ำภายในท่อ 3.5 MPa ที่ปลายท่อถูกปิดด้วยแผ่นโลหะและยึดด้วยสลักเกลียวดังแสดงในภาพที่ 2.8 ถ้าความเค้นใช้งานในสลักเกลียวเท่ากับ 80 MPa โดยมีความเค้นเริ่มต้น 55 MPa จงหาว่า

จะต้องใช้สลักเกลียวขนาดเส้นผ่าศูนย์กลางกลาง 40 mm จำนวนกี่ตัวเพื่อยึดแผ่นโลหะและจงหาความเค้นตามแนวยาวของท่อส่งน้ำนี้



ภาพที่ 2.8 แผ่นโลหะปิดปลายท่อส่งน้ำยึดด้วยสลักเกลียว

ที่มา : จีรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

วิธีทำ

ขนาดเส้นผ่าศูนย์กลางภายในท่อ  $D$  เท่ากับ 430 mm หรือ 0.43 m

$$\begin{aligned} \text{แรงดันน้ำในท่อ ;} \quad F &= \frac{\pi}{4} D^2 p \\ &= \frac{\pi}{4} \times 0.43^2 \times 3.5 \times 10^6 \\ &= 508,270.42 \text{ N หรือ } 508.27 \text{ kN} \end{aligned}$$

แรงดึง  $T$  ในสลักเกลียวที่สามารถรับได้เมื่อพิจารณาจากความเค้นใช้งาน  $\sigma_w$  และความเค้นเริ่มต้น  $\sigma_i$

$$\begin{aligned} T &= \frac{\pi}{4} d^2 (\sigma_w - \sigma_i) \\ &= \frac{\pi}{4} \times 0.04^2 \times (80 - 55) \times 10^6 \\ &= 31,415.92 \text{ N หรือ } 31.42 \text{ kN} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{จำนวนสลักเกลียว ;} \quad n &= \frac{F}{T} \\ &= \frac{508.27}{31.42} = 16.178 \text{ ตัว} \end{aligned}$$

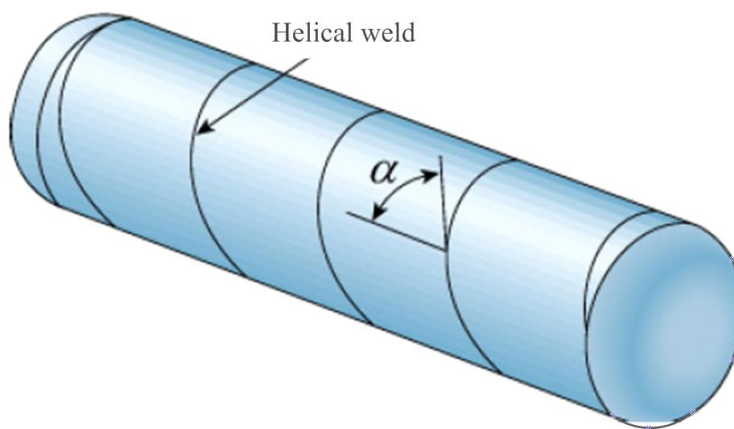
เลือกใช้สลักเกลียวจำนวน 17 ตัว

ตอบ

$$\begin{aligned} \text{ความเค้นตามแนวยาวท่อส่งน้ำ ;} \quad \sigma_L &= \frac{pr}{2t} \\ &= \frac{(35 \times 10^6)(0.43/2)}{2 \times 0.01} \\ &= 376,250 \text{ N/m}^2 \text{ หรือ } 376.25 \text{ kPa} \end{aligned}$$

ตอบ

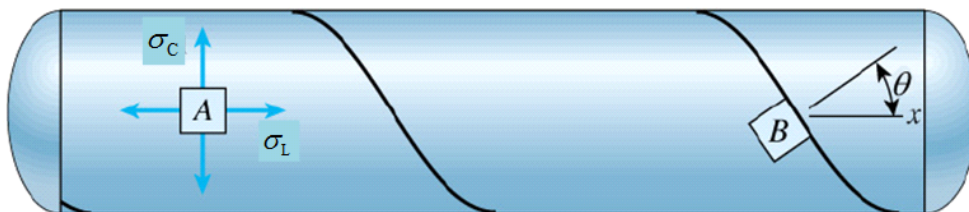
ภาชนะความดันผนังบางทรงกระบอกสามารถผลิตจากการนำแผ่น โลหะมาเชื่อมต่อกัน ในแนวทแยงได้ด้วยดังแสดงในภาพที่ 2.9 แผ่นโลหะจะถูกดัดงอในแนวทแยงด้วยมุม  $\alpha$  กับแนวแกนทรงกระบอก ingsาดังกล่าวมีความแตกต่างกันขึ้นอยู่กับขนาดของแผ่นโลหะและขนาดเส้นผ่าศูนย์กลางของภาชนะทรงกระบอกที่จะผลิต ยกตัวอย่างเช่นหากแผ่น โลหะแคบนำมาผลิต ทรงกระบอกขนาดใหญ่่องศาทแยงก็จะมีค่ามากเป็นต้น แนวสัมผัสระหว่างแผ่น โลหะจะถูก เชื่อมเป็นแนวเวียนอย่างต่อเนื่อง (Helical Weld) ท่อประเภทนี้อาจจำเป็นต้องคำนวณความเค้น เหนือที่ตำแหน่งรอยเชื่อมเพื่อตรวจสอบความแข็งแรงด้วย (Pablo G. Caceres – Valencia. n.d)



ภาพที่ 2.9 ภาชนะแรงดันทรงกระบอกเชื่อมแบบเกลียว

ที่มา : Pablo G. Caceres – Valencia. n.d

ตัวอย่างที่ 2.5 ถังความดันทรงกระบอกผลิตจากแผ่นเหล็กหนา 20 mm ดังแสดงในภาพที่ 2.10 ภายในบรรจุแก๊สมีความดัน 800 kPa ถังมีรัศมีภายใน 1.8 m และมีแนวเชื่อมเป็นมุมทแยง  $55^\circ$  จงหาความเค้นและความเครียดตามแนวแกนและตามแนวขวาง ถ้ากำหนดให้แผ่นเหล็กมีค่า โมดูลัสยืดหยุ่น  $E = 200 \text{ GPa}$  และอัตราส่วนปัวส์ซอง  $\nu = 0.30$



ภาพที่ 2.10 ความเค้น ณ ตำแหน่งตะเข็บรอยเชื่อมแบบเกลียว

ที่มา : Pablo G. Caceres – Valencia. n.d

### วิธีทำ

$$\begin{aligned}
 \text{ความเค้นตามแนวยาว ; } \quad \sigma_L &= \frac{pr}{2t} \\
 &= \frac{(800 \times 10^3) \times (1.8)}{2(0.02)} \\
 &= 36 \times 10^6 \text{ N/m}^2 \text{ หรือ } 36 \text{ MPa} \quad \text{ตอบ}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ความเค้นตามแนวขวาง ; } \quad \sigma_c &= \frac{pr}{t} \\
 &= \frac{(800 \times 10^3) \times (1.8)}{0.02} \\
 &= 72 \times 10^6 \text{ N/m}^2 \text{ หรือ } 72 \text{ MPa} \quad \text{ตอบ}
 \end{aligned}$$

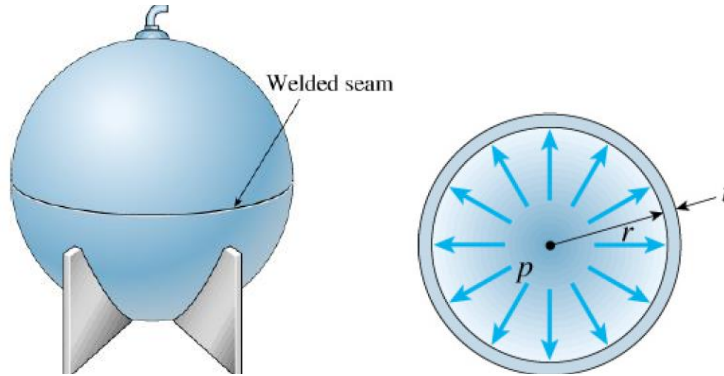
$$\begin{aligned}
 \text{ความเครียดตามแนวยาว ; } \quad \epsilon_L &= \frac{(1-2\nu)pr}{2tE} = \frac{(1-2\nu)\sigma_L}{E} \\
 &= \frac{(1-2(0.30)) \times (36 \times 10^6)}{200 \times 10^9} \\
 &= 7.2 \times 10^{-5} \quad \text{ตอบ}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ความเครียดในแนวรอบวง ; } \quad \epsilon_c &= \frac{(2-\nu)pr}{2tE} = \frac{(2-\nu)\sigma_c}{2E} \\
 &= \frac{(2-0.30) \times (72 \times 10^6)}{2(200 \times 10^9)} \\
 &= 3.06 \times 10^{-4} \quad \text{ตอบ}
 \end{aligned}$$

### 3. ภาชนะผนังบางทรงกลม

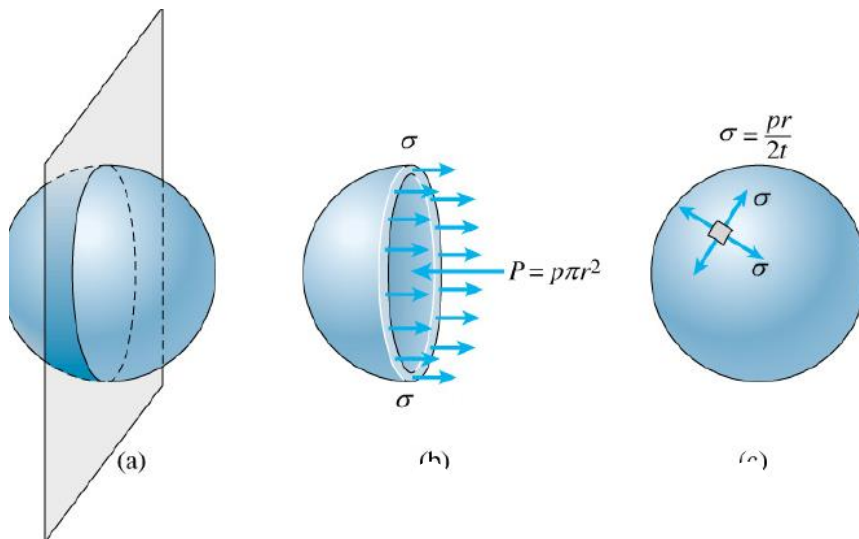
ภาชนะผนังบางทรงกลม (Spherical Tanks) เป็นภาชนะหรือโครงสร้างรับความดันที่ปิดสนิทรูปทรงกลมดังแสดงในภาพที่ 2.11 โดยทั่วไปมักเป็นโครงสร้างที่ใช้บรรจุแก๊สในโรงงานอุตสาหกรรม ในการประกอบชิ้นส่วนแต่ละชิ้นจะต้องมีความละเอียดรอบคอบเนื่องจากเป็นชิ้นส่วนที่มีความโค้ง แนวเชื่อมระหว่างชิ้นส่วนต้องมีความแข็งแรงเพียงพอและสามารถรับความเค้นดึงได้ไม่น้อยกว่าชิ้นส่วนของผนัง ฐานรองรับโครงสร้างประเภทนี้ต้องมีความแข็งแรง และสามารถถ่ายน้ำหนักที่กระจายตามผิวโค้งลงสู่พื้นดินได้ เกรียงศักดิ์ อุดมสิน โรจน์ (2540 : 8-3) Hearn E. J. (2000 : 202-204) และ Russell C. Hibbeler (2011 : 407) กล่าวว่าโดยทั่วไปภาชนะผนังบางทรงกลมจะมีอัตราส่วนรัศมี  $r$  ต่อความหนา  $t$  มีค่ามากกว่า 10 ดังสมมติฐานที่ได้กล่าวมาแล้วข้างต้น ในการหาความเค้นภายในผนังจะพิจารณาโดยการตัดผ่านศูนย์กลางของทรงกลมดังแสดงในภาพที่ 2.12 จากนั้นจะพิจารณาแรงดัน  $P$  ที่กระทำกับภาชนะโดยมีความดัน

ภายใน  $p$  กระทำกับผนังเท่ากันทุกทิศทาง โดยความเค้น  $\sigma$  ที่จุดใด ๆ ภายในผนังจะพิจารณาเฉพาะความเค้นดึงซึ่งจะมีค่าเท่ากันทุกทิศทางดังสมการต่อไปนี้



ภาพที่ 2.11 ภาชนะผนังบางทรงกลม

ที่มา : Pablo G. Caceres-Valencia. n.d



ภาพที่ 2.12 สมดุลแรงของภาชนะผนังบางทรงกลม

ที่มา : Pablo G. Caceres-Valencia. n.d

จากภาพที่ 2.11 แรงดันภายในภาชนะจะมีค่าเท่ากันทุกทิศทางดังสมการ

$$P = p\pi r^2 \tag{2.10}$$

จากภาพที่ 2.12 แรงต้านทานภายในผนังตามแนวตัดขวางหาได้จากสมการ

$$F = \sigma (2\pi r_m) t \tag{2.11}$$

รัศมีเฉลี่ยที่กึ่งกลางความหนาของผนังภาชนะ  $r_m$  หาได้จากสมการ

$$r_m = r - \frac{t}{2} \quad (2.12)$$

จากสมมูลแรงจะได้แรงดัน  $P$  เท่ากับแรงต้าน  $F$  จะได้

$$P = F \quad (2.13)$$

$$\sigma (2\pi r_m)t = p\pi r^2 \quad (2.14)$$

ดังนั้นความเค้นดึงภายในผนังทรงกลมหาได้จากสมการ

$$\sigma = \frac{pr}{2t} \quad (2.15)$$

### ความดันใช้งานของภาชนะผนังบาง

ชาญ ถนัดงาน (2523 : 245) และมนตรี พิรุณเกษตร (2544 : 139) กล่าวว่าความดันใช้งาน (Working Pressure) ที่ภาชนะผนังบางสามารถรับได้อย่างปลอดภัยจะพิจารณาจากรูปทรงของภาชนะผนังบางซึ่งมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

#### 1. ภาชนะผนังบางรูปทรงกระบอกแบบไม่มีตะเข็บ

ความดันใช้งานของภาชนะผนังบางรูปทรงกระบอกแบบไม่มีตะเข็บหาได้จากการวิเคราะห์ลักษณะการวิบัติ แรงดันที่จะทำให้รูปทรงกระบอกมีขนาดมักจะเป็นความเค้นที่เกิดขึ้นตามแนวขวาง  $\sigma_c$  ของรูปทรงกระบอก ดังนั้นค่าความดันใช้งานจึงหาได้จากสมการ

$$\text{ความดันใช้งาน ; } \sigma_{all} = \frac{t}{r} \sigma_c n_c \quad (2.16)$$

#### 2. ภาชนะผนังบางรูปทรงกระบอกแบบมีตะเข็บ

ภาชนะผนังบางรูปทรงกระบอกแบบมีตะเข็บเป็นภาชนะทรงกระบอกประกอบด้วยแผ่นโลหะหลายแผ่นต่อกันและมีรอยต่อเป็นจำนวนมาก ซึ่งรอยต่อแต่ละแผ่นอาจไม่สมบูรณ์และมีโอกาสเกิดการวิบัติในตำแหน่งนี้ได้ ดังนั้นความสามารถทนแรงดันของรูปทรงกระบอกชนิดนี้ก็ขึ้นอยู่กับประสิทธิภาพของรอยต่อ ค่าความดันใช้งานหาได้จากสมการ

$$\text{ความดันใช้งานตามแนวยาว ; } \sigma_{L-all} = \frac{t}{r} \sigma_c n_L \quad (2.17)$$

$$\text{ความดันใช้งานตามแนวขวาง ; } \sigma_{C-all} = \frac{2t}{r} \sigma_L n_C \quad (2.18)$$

เมื่อ  $n_L$  เป็นประสิทธิภาพของตะเข็บตามแนวยาว และ  $n_C$  เป็นประสิทธิภาพของตะเข็บตามแนวขวางหรือแนวเส้นรอบวง

### 3. ภาชนะผนังบางรูปทรงกลมแบบมีตะเข็บ

ความดันใช้งานของภาชนะผนังบางรูปทรงกลมแบบมีตะเข็บหาได้จากการวิเคราะห์ลักษณะการวิบัติ แรงดันที่ทำให้รูปทรงกลมลักษณะดังกล่าวจะเป็นความเค้นตามแนวตัดผ่านศูนย์กลาง  $\sigma$  ของรูปทรงกลม ถ้ากำหนดให้  $n_s$  เป็นประสิทธิภาพของตะเข็บตามแนวขวางจะได้ค่าความดันใช้งานดังสมการ

$$\text{ความดันใช้งาน ; } \sigma_{\text{all}} = \frac{2t}{r} \sigma n_s \quad (2.19)$$

**ตัวอย่างที่ 2.6** ภาชนะผนังบางรูปทรงกระบอกมีขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง 6 m ผลิตจากแผ่นโลหะหนา 3 cm สามารถต้านทานความเค้นดึงได้ไม่เกิน  $6,000 \text{ kg/cm}^2$  ถ้าภาชนะนี้มีประสิทธิภาพตามแนวยาว  $n_L = 0.85$  และประสิทธิภาพตามแนวขวาง  $n_C = 0.58$  จงหาความดันใช้งานของภาชนะนี้ถ้ากำหนดให้ค่าความปลอดภัย  $FS = 5$

#### วิธีทำ

พิจารณาหาความเค้นดึงใช้งานของแผ่นโลหะจากค่าความปลอดภัย

$$\text{ความเค้นใช้งานแผ่นโลหะ ; } \sigma_{\text{all}} = \frac{6,000}{5} = 1,200 \text{ kg/cm}^2$$

ทั้งค่าความเค้นตามแนวขวาง  $\sigma_C$  และความเค้นตามแนวแกน  $\sigma_L$  จะต้องมิต่ำไม่เกินค่าความเค้นใช้งาน  $1,200 \text{ kg/cm}^2$  ดังนั้นจะได้ว่า

$$\begin{aligned} \text{ความดันใช้งานตามแนวขวาง ; } P_{C\text{-all}} &= \frac{t}{r} \sigma_C n_C \\ &= \frac{3}{300} \times 1200 \times 0.85 \\ &= 10.20 \text{ kg/cm}^2 \end{aligned}$$

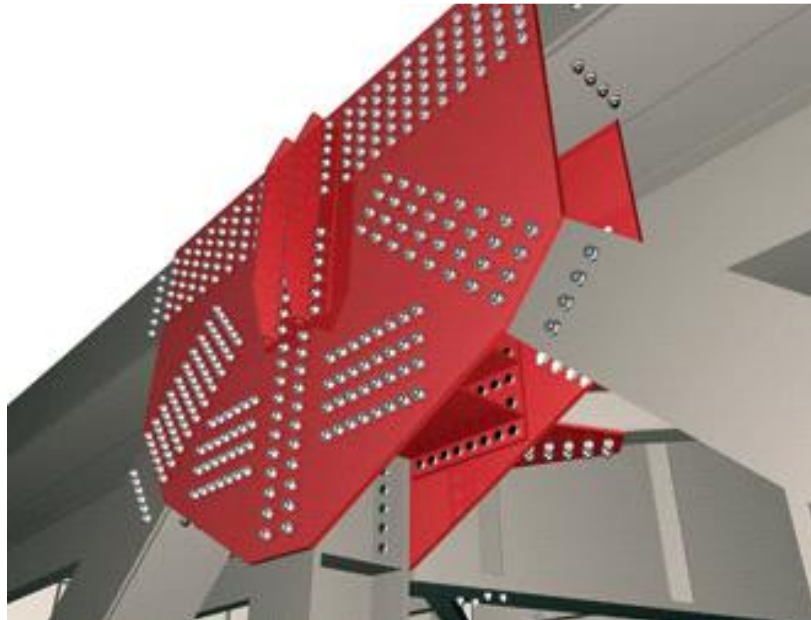
$$\begin{aligned} \text{ความดันใช้งานตามแนวยาว ; } P_{L\text{-all}} &= \frac{2t}{r} \sigma_L n_L \\ &= \frac{2 \times 3}{300} \times 1200 \times 0.85 \\ &= 20.4 \text{ kg/cm}^2 \end{aligned}$$

ดังนั้นค่าความดันใช้งานของภาชนะผนังบางทรงกระบอกนี้คือ  $10.20 \text{ kg/cm}^2$       **ตอบ**



## การต่อโครงสร้างโดยใช้หมุดย้ำ

การต่อวัสดุแผ่น โดยใช้หมุดย้ำหรือสลักเกลียว (Riveted Joints) เป็นวิธีการหนึ่งที่ยอมรับใช้ในการต่อชิ้นส่วน โครงสร้างเข้าด้วยกัน ทั้งนี้ชิ้นส่วนที่นำมาประกอบกันจะต้องมีลักษณะเป็นแผ่นหรือท่อนที่มีผิวเรียบสามารถทาบต่อกันได้ ตัวอย่างจุดต่อโครงสร้างอาคารที่ใช้หมุดย้ำแสดงในภาพที่ 2.13 ทั้งนี้จำนวนหมุดย้ำมีความสัมพันธ์กับแรงภายนอกที่กระทำและรูปแบบการต่อชิ้นงาน ภายหลังจากการคำนวณและออกแบบรอยต่อแล้วตำแหน่งของรูเจาะจะต้องถูกต้องเพื่อป้องกันความเค้นส่วนเกินจากการประกอบชิ้นงาน การเรียงหมุดย้ำจะพิจารณาจากความกว้างและระยะแยกกันของชิ้นงาน นอกจากนี้ในการขันสลักเกลียวจะต้องใช้แรงขันให้ เป็นไปตามข้อกำหนดในมาตรฐานการควบคุมงานเพื่อป้องกันการคลายตัวของสลักเกลียว



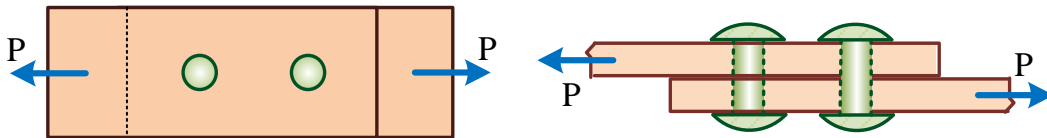
ภาพที่ 2.13 จุดต่อโครงสร้างโดยใช้หมุดย้ำ

ที่มา : Ali H. Abbas, Sajid Abbas and Brian Maroney. 2011

สมโพธิ วิวิธเกยูรวงศ์ (2542 : 7-11, 513-524) และ John Case, et al. (1999 : 76-80) กล่าวว่าในการคำนวณหาความแข็งแรงของรอยต่อโดยใช้หมุดย้ำมีข้อมูลที่ต้องทราบ เช่น ขนาดเส้นผ่าศูนย์กลางหมุดย้ำ ความหนาแผ่นวัสดุที่จะต่อ ระยะห่างหมุดย้ำวัดจากศูนย์กลางของหมุดย้ำ (Pitch) คุณสมบัติของหมุดย้ำ และคุณสมบัติวัสดุแผ่นที่นำมาใช้งาน เป็นต้น โดยทั่วไปการต่อชิ้นงานโดยใช้หมุดย้ำมี 2 รูปแบบคือการต่อแบบปลายแผ่นแยกกันและการต่อแบบปลายแผ่นชนกัน รายละเอียดของการต่อทั้งสองรูปแบบมีดังต่อไปนี้

### 1. การต่อแบบปลายแผ่นเกยกัน

การต่อแบบปลายแผ่นเกยกัน (Lap Joint) เป็นรอยต่อที่นำแผ่นชิ้นงานสองแผ่นมาวางเกยกันหรือซ้อนกันแล้วเจาะรูเพื่อใช้หมุดย้ำหรือสลักเกลียวขันยึดติดกัน จำนวนหมุดย้ำอาจมีมากกว่าหนึ่งตัวก็ได้และการเรียงหมุดย้ำอาจมีมากกว่าหนึ่งแถวก็ได้เช่นกัน ภาพที่ 2.14 เป็นตัวอย่างการต่อแบบปลายแผ่นเกยกันโดยการใช้หมุดย้ำคู่

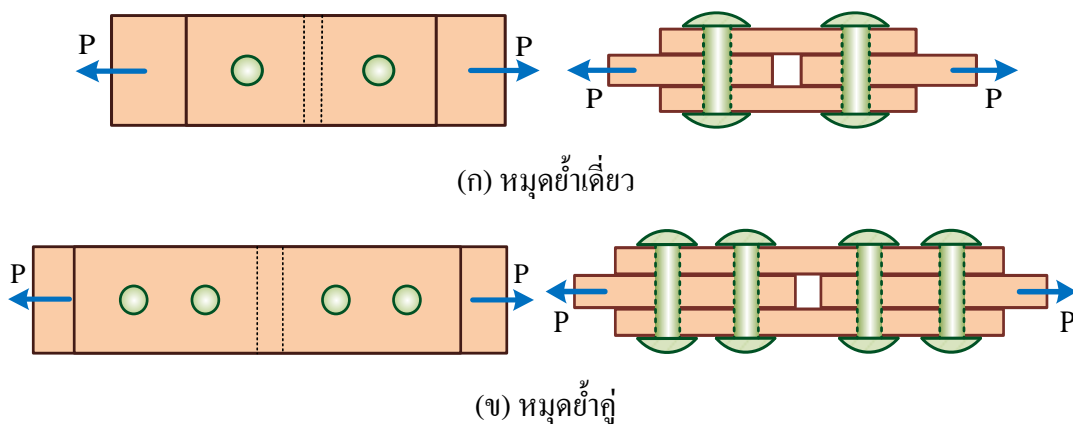


ภาพที่ 2.14 การต่อแบบปลายแผ่นเกยกัน

ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

### 2. การต่อแบบปลายแผ่นชนกัน

การต่อแบบปลายแผ่นชนกัน (Butt Joint) เป็นรอยต่อที่นำแผ่นชิ้นงานสองแผ่นมาวางชนกันและอยู่ในแนวเดียวกัน จากนั้นจะนำแผ่นชิ้นงานอื่นมาวางประกบแต่ละด้าน (Cover Plate or Quesset Plate) อย่งไรก็ตามจำนวนแถวของหมุดย้ำอาจมีมากกว่าหนึ่งแถวหากจำนวนหมุดย้ำที่ใช้มีหลายตัว การจัดกลุ่มจะต้องพิจารณาระยะเรียงระหว่างหมุดย้ำให้เป็นไปข้อกำหนดในการออกแบบรอยต่อ โดยส่วนใหญ่ระยะเรียงระหว่างหมุดย้ำแต่ละตัวจะไม่น้อยกว่าสามเท่าของขนาดเส้นผ่าศูนย์กลางหมุดย้ำ ภาพที่ 2.15 เป็นตัวอย่างการต่อแบบปลายแผ่นชนกันโดยการใช้หมุดย้ำเดี่ยวและหมุดย้ำคู่



(ก) หมุดย้ำเดี่ยว

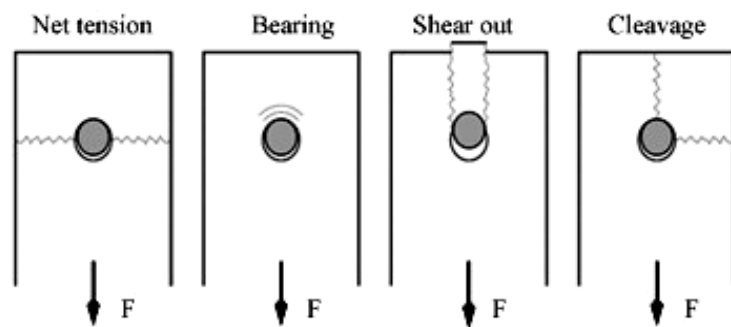
(ข) หมุดย้ำคู่

ภาพที่ 2.15 การต่อแผ่นวัสดุแบบปลายชนกัน

ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

### 3. การคำนวณความแข็งแรงของรอยต่อแบบหมุดย้า

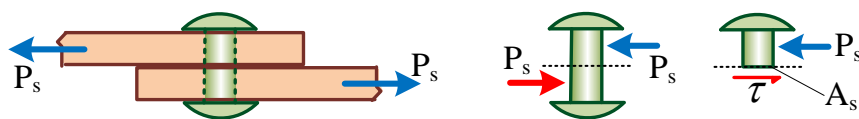
สมโพธิ วิวิธเกยูรวงศ์ (2542 : 7-11, 513-524) [Benoit Vieille](#), et al. (2009) และ John Case, et al. (1999 : 76-80) กล่าวว่า การคำนวณหาความแข็งแรงของรอยต่อแบบหมุดย้าจะพิจารณาจากประเภทการขาดของรอยต่อ โดยทั่วไปการพิจารณาการขาดของรอยต่อจะแบ่งออกเป็นสองประเภทคือ หมุดย้าขาดหรือแผ่นวัสดุขาด ภาพที่ 2.16 แสดงการวิบัติของชิ้นงานภายใต้แรงดึงในลักษณะแตกต่างกันประกอบด้วย แผ่นชิ้นงานขาดเนื่องจากแรงดึง (Net Tension) แผ่นชิ้นงานยุบเนื่องจากแรงเบกทาน (Bearing) แผ่นวัสดุขาดปลายเนื่องจากแรงเฉือน (Shear Out) และแผ่นชิ้นงานขาดออกที่ปลายในลักษณะแผ่นสี่เหลี่ยมเนื่องจากการกระแทะ (Cleavage) ตามลำดับ อนึ่งขนาดของเส้นผ่าศูนย์กลางของหมุดย้า ความหนาของแผ่นชิ้นงานที่จะต่อ ระยะห่างของหมุดย้า คุณสมบัติทางกลของหมุดย้าและแผ่นชิ้นงานจะถูกนำมาใช้ในการคำนวณ การคำนวณหาความแข็งแรงของรอยต่อแบบหมุดย้าสามารถหาได้ดังต่อไปนี้



ภาพที่ 2.16 ลักษณะการขาดของรอยต่อแบบหมุดย้า

ที่มา : [Benoit Vieille](#), et al. 2009

กรณีที่ 1 หมุดย้าขาดเนื่องจากสาเหตุที่หมุดย้าไม่สามารถต้านทานความเค้นเฉือนได้ การวิเคราะห์การขาดในลักษณะนี้จะต้องพิจารณาระนาบที่รับแรงเฉือนของหมุดย้า เช่น แรงเฉือนระนาบเดียว หรือแรงเฉือนสองระนาบ เป็นต้น ทั้งนี้หมุดย้าที่ต้านแรงเฉือนสองระนาบจะสามารถรับแรงได้สูงกว่าแบบระนาบเดียว ภาพที่ 2.17 เป็นตัวอย่างการขาดของหมุดย้าเนื่องจากแรงเฉือนระนาบเดียว



ภาพที่ 2.17 หมุดย้าขาดเนื่องจากแรงเฉือนระนาบเดียว

ที่มา : จีรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

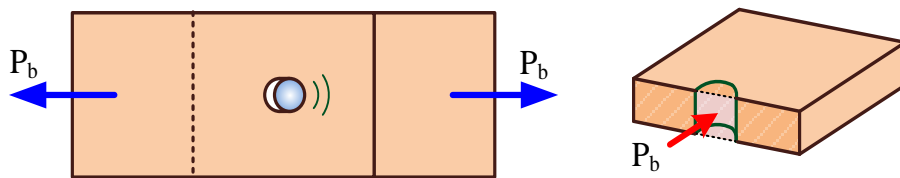
แรงต้านการเฉือนระนาบเดียว  $P_s$  สามารถหาได้จากสมการ

$$P_s = \tau \times A_s \quad (2.20)$$

หรือ 
$$P_s = \tau \times \frac{\pi}{4} d^2 \quad (2.21)$$

เมื่อ  $\tau$  คือความเค้นเฉือนของหมุดย้ำ  $A_s$  คือพื้นที่หน้าตัดที่ถูกเฉือนของหมุดย้ำ และ  $d$  คือขนาดเส้นผ่าศูนย์กลางของหมุดย้ำ ตามลำดับ

กรณีที่ 2 แผ่นวัสดุถูกอัดแตกเนื่องจากสาเหตุที่แผ่นชิ้นงานได้รับแรงอัดจากหมุดย้ำจนเกิดความเค้นแบกทาน (Bearing Stress) ขึ้นภายในแผ่นชิ้นงาน รอยต่ออาจชำรุดเนื่องจากความเค้นแบกทานที่เกิดขึ้นในแผ่นชิ้นงานสูงกว่าความเค้นแบกทานที่รับได้จนทำให้แผ่นชิ้นงานอยู่หรือย่นจนเสียรูปดังแสดงในภาพที่ 2.18



ภาพที่ 2.18 แผ่นชิ้นงานชำรุดเนื่องจากแรงกดที่ส่งผ่านมาจากหมุดย้ำ

ที่มา : จีรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

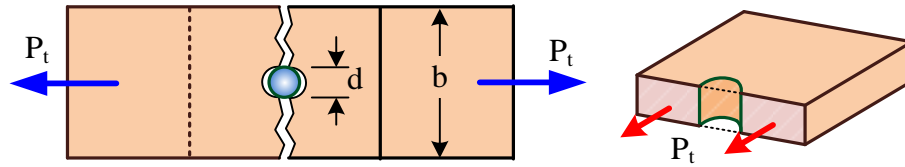
แรงต้านการแบกทานในแผ่นวัสดุ  $P_b$  หาได้จากสมการ

$$P_b = \sigma_b \times A_b \quad (2.22)$$

หรือ 
$$P_b = \sigma_b dt \quad (2.23)$$

เมื่อ  $\sigma_b$  คือความเค้นแบกทานของแผ่นชิ้นงาน  $A_b$  คือพื้นที่แรงอัดในแผ่นชิ้นงาน  $d$  คือเส้นผ่าศูนย์กลางของหมุดย้ำ และ  $t$  คือความหนาของแผ่นชิ้นงาน ตามลำดับ

กรณีที่ 3 แผ่นวัสดุขาดเนื่องจากสาเหตุที่แผ่นชิ้นงานรับแรงดึงจนเกินกว่าค่าความเค้นดึงที่รับได้ ลักษณะการขาดแบบนี้มักจะเกิดขึ้นที่ตำแหน่งรูเจาะดังแสดงในภาพที่ 2.19 เนื่องจากเป็นตำแหน่งที่มีพื้นที่หน้าตัดสุทธิของแผ่นชิ้นงานน้อยที่สุด หากจุดต่อมีจำนวนหมุดย้ำมากกว่าหนึ่งแถวจะต้องพิจารณาพื้นที่หน้าตัดสุทธิน้อยที่สุดที่สัมพันธ์กับตำแหน่งการเจาะหมุดย้ำทั้งในแนวเส้นตรงและแนวทแยงด้วย



ภาพที่ 2.19 แผ่นต่อขาดตามแนวขนานกับตะเข็บ

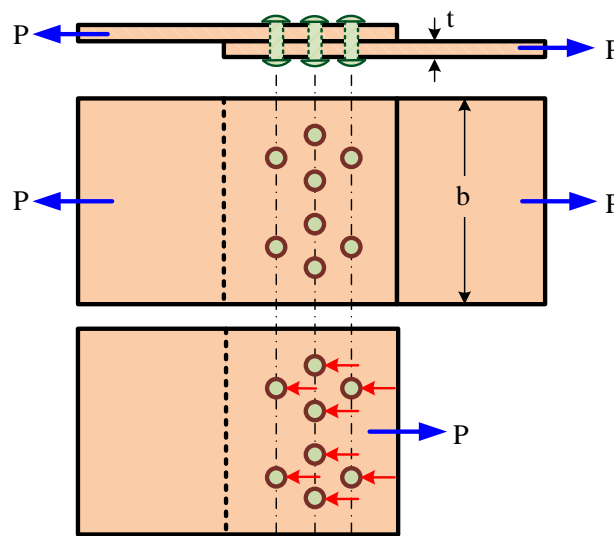
ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

แรงต้านการดึงในแผ่นชิ้นงาน  $P_t$  หาได้จากสมการ

$$P_t = \sigma_t \times A_t \quad (2.24)$$

หรือ 
$$P_t = \sigma_t (b-d)t \quad (2.25)$$

เมื่อ  $\sigma_t$  คือความเค้นดึงของแผ่นชิ้นงาน  $A_t$  คือพื้นที่ที่แผ่นชิ้นงานรับแรงดึง  $d$  คือขนาดเส้นผ่าศูนย์กลางของหมุดย้า  $t$  คือความหนาของแผ่นชิ้นงาน และ  $b$  คือความกว้างของแผ่นชิ้นงาน ตามลำดับ



ภาพที่ 2.20 การต่อเกลยโดยใช้หมุดย้า

ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

กรณีที่ 4 การต่อโดยใช้หมุดย้าหลายตัว เมื่อหมุดย้าหลายตัวอยู่ที่รอยต่อของแผ่นชิ้นงานที่ต่อเข้าด้วยกันดังแสดงในภาพที่ 2.20 ลักษณะการเรียงหมุดจะต้องมีความสัมพันธ์กับแนวแรง กล่าวคือ แรงที่กระทำควรจะผ่านจุดศูนย์กลางถ่วงของกลุ่มหมุดย้าเพื่อความสมดุล หลักการคำนวณ

จะสมมติให้หมุดย้ำแต่ละตัวรับแรงที่กระทำเท่ากันทุกตัว การคำนวณแรงของรอยต่อแบบนี้จะพิจารณาจากแรงเฉือนรวม  $P_s$  ในหมุดย้ำแต่ละตัว และแรงแบกทานรวม  $P_b$  ที่เกิดในแผ่นชิ้นงาน ดังสมการต่อไปนี้

$$P_s = n\tau A_s \quad (2.26)$$

$$P_b = n\sigma_b A_b \quad (2.27)$$

เมื่อ  $n$  คือจำนวนหมุดย้ำของรอยต่อ  $\tau$  คือความเค้นเฉือนของหมุดย้ำ  $\sigma_b$  คือความเค้นแบกทานในแผ่นชิ้นงาน  $A_s$  คือพื้นที่รับแรงเฉือนของกลุ่มหมุดย้ำ และ  $A_b$  คือพื้นที่รับแรงแบกทานในแผ่นชิ้นงาน ตามลำดับ

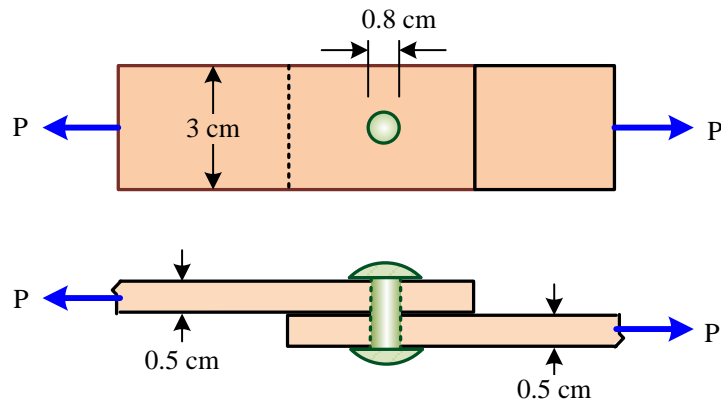
การประเมินประสิทธิภาพของรอยต่อโดยใช้หมุดย้ำจะพิจารณาจากอัตราส่วนระหว่างแรงที่รอยต่อสามารถรับได้เทียบกับแรงที่แผ่นชิ้นงานที่ไม่หักพื้นที่รูเจาะสามารถรับได้ ค่าอัตราส่วนที่ได้จะเป็นค่าร้อยละของประสิทธิภาพรอยต่อ ตัวอย่างผลการวิจัยที่ศึกษาการวิบัติของรอยต่อโดยใช้หมุดย้ำ (T. [Dang Hoang](#), 2012) แสดงในภาพที่ 2.21 จากภาพพบว่ารอยต่อส่วนใหญ่วิบัติจากแผ่นชิ้นงานขาด โดยแผ่นชิ้นงานที่มีความหนาน้อยจะเกิดการย่นหรือเสียรูปก่อนการขาด ส่วนแผ่นชิ้นงานที่มีความหนาจะขาดตามแนวพื้นที่หน้าตัดสุดท้ายที่น้อยที่สุด



ภาพที่ 2.21 การวิบัติของรอยต่อแผ่นวัสดุโดยใช้สลักเกลียว

ที่มา : [T. Dang Hoang](#), et al. 2012

ตัวอย่างที่ 2.7 แผ่นโลหะขนาดกว้าง 3 cm หนา 0.5 cm ต่อเกยกันดังแสดงในภาพที่ 2.22 แผ่นโลหะทั้งสองมีค่าความเค้นแบกทาน  $\sigma_b = 2,500 \text{ kg/cm}^2$  และความเค้นดึง  $\sigma_t = 1,000 \text{ kg/cm}^2$  จงหาแรงสูงสุดและประสิทธิภาพของรอย โดยหมุดยี่มีเส้นผ่าศูนย์กลาง 0.8 cm และสามารถรับความเค้นเฉือน  $\tau = 1,500 \text{ kg/cm}^2$



ภาพที่ 2.22 แผ่นโลหะต่อเกยกัน

ที่มา : จีรวัดน์ วิมุติสุขวิริยา. 2556

### วิธีทำ

$$\begin{aligned} \text{แรงต้านทานเฉือนในหมุดยี่ ; } P_s &= \tau A_s \\ &= 1,500 \times \left( \frac{\pi \times 0.8^2}{4} \right) \\ &= 753.98 \text{ kg} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{แรงต้านการอัดในแผ่นโลหะ ; } P_b &= \sigma_b A_b \\ &= 2,500 \times 0.5 \times 0.8 \\ &= 1,000 \text{ kg} \end{aligned}$$

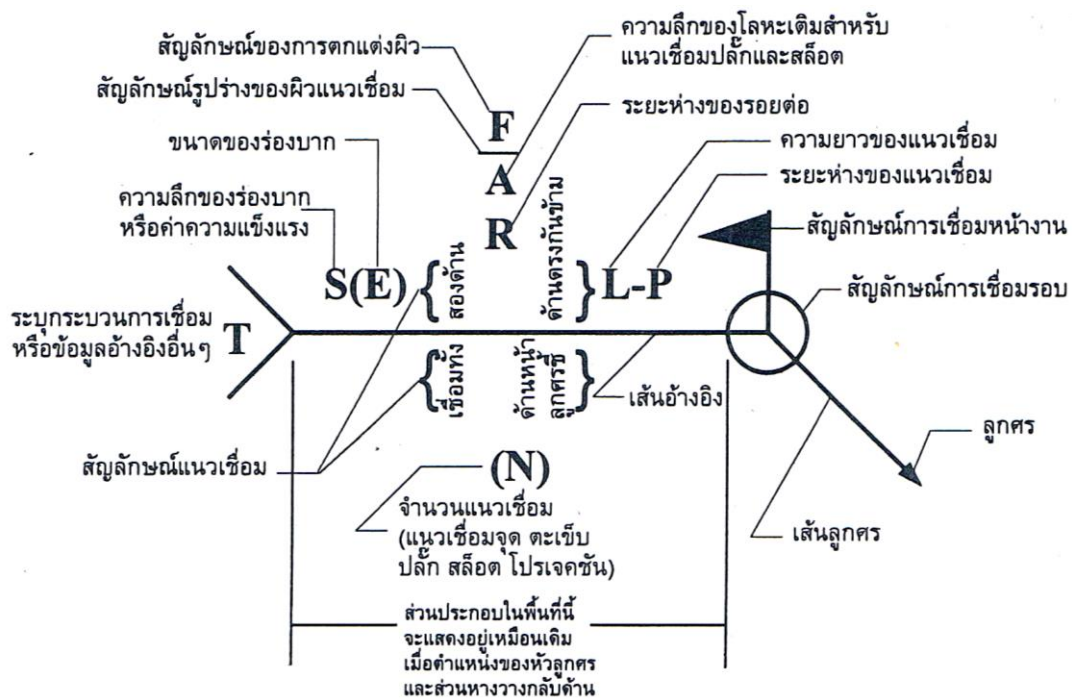
$$\begin{aligned} \text{แรงต้านการดึงในแผ่นโลหะ ; } P_t &= \sigma_t A_t \\ &= 1,000 \times 0.5 \times (3 - 0.8) \\ &= 1,100 \text{ kg} \end{aligned}$$

แรงที่รอยต่อนี้รับได้อย่างปลอดภัยเท่ากับ 753.98 kg ตอบ

$$\begin{aligned} \text{ประสิทธิภาพของรอยต่อ ; } n &= \frac{P_t}{\sigma_t \times A_{\text{steel}}} \times 100 \\ &= \frac{753.98}{1,000 \times (0.5 \times 3)} \times 100 \\ &= 50.27 \% \end{aligned} \quad \text{ตอบ}$$

### การเชื่อม

จรรยา พรมสุทธิ์ และ อำนวย ทองแสน (2547 : 1-3) ประสิทธิ์ เวียงแก้ว และ ฉัตรชัย ลากรังสิรัตน์ (2554 : 99-125) และ John Case, et al. (1999 : 86) กล่าวว่า การเชื่อม (Welding) เป็นวิธีการต่อชิ้นงานที่เป็นโลหะเข้าด้วยกันโดยใช้ความร้อนหรือความดัน การเชื่อมโลหะแผ่นด้วยความร้อนจนกระทั่งอุณหภูมิของโลหะถึงจุดหลอมละลายเรียกวิธีการนี้ว่า การเชื่อมแบบหลอม (Fusion Welding) หากอุณหภูมิที่ใช้เชื่อมไม่ถึงจุดหลอมละลายแต่ใช้ความดันกดลงที่แผ่นโลหะเพื่อช่วยให้แผ่นโลหะติดกันเรียกวิธีการนี้ว่า การเชื่อมอัด (Forge Welding) อนึ่งชนิดของรอยเชื่อมและสัญลักษณ์ที่ใช้อ้างอิงมักเป็นไปตามข้อกำหนดในมาตรฐานสมาคมการเชื่อมแห่งประเทศไทยหรืออเมริกา(American Welding Society : AWS D1.1) ดังแสดงในภาพที่ 2.23 และตารางที่ 2.1 ตามลำดับ สัญลักษณ์การเชื่อมจะบอกรายละเอียดต่าง ๆ เช่น ลักษณะรอยเชื่อม ระยะห่างระหว่างรอยเชื่อม มุมเซาะร่อง และจำนวนรอยเชื่อม เป็นต้น ตัวอย่างการเชื่อมในภาพที่ 2.24 แสดงการเชื่อมโลหะแผ่นที่มีความหนาแตกต่างกัน เช่น หากความหนาชิ้นงานน้อยกว่า 6 mm ขนาดขาเชื่อมจะต้องเติมความหนาของชิ้นงาน หากชิ้นงานหนามากกว่า 6 mm จะต้องให้ขนาดขาเชื่อมเล็กกว่าความหนาชิ้นงาน 2 mm เป็นต้น โดยทั่วไปวิธีการเชื่อมแบบหลอมเป็นที่นิยมเนื่องจากสะดวกในการทำงานในสถานที่ก่อสร้างดังนั้นหัวข้อนี้จึงมุ่งเน้นนำเสนอวิธีการเชื่อมแบบหลอมซึ่งมีรายละเอียดดังนี้











ภาพที่ 2.23 สัญลักษณ์พื้นฐานของงานเชื่อม

ที่มา : จรรยา พรมสุทธิ์ และ อำนวย ทองแสน. 2547 : 2



ตารางที่ 2.1 ชนิดของการเชื่อม

Bead	Fillet	Plug or slot	Groove				
			Square	V	Bevel	U	J
							

ที่มา : [American Welding Society](http://www.aws.org). 2000



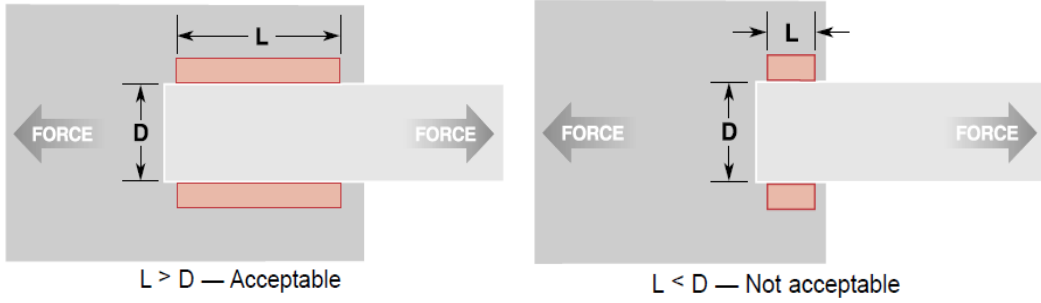
(ก) ความหนาชิ้นงานน้อยกว่า 6 mm

(ข) ความหนาชิ้นงานมากกว่า 6 mm

ภาพที่ 2.24 การเชื่อมพอกโลหะแผ่น

ที่มา : Duane K. Miller. 2001

การต่อโลหะแผ่น โดยวิธีการเชื่อมแบบหลอมที่นิยมทำกันมี 2 วิธีคือ การเชื่อมแบบต่อชนและการเชื่อมแบบต่อเกย มาตรฐาน AWS D1.1 กำหนดให้ความยาวรอยเชื่อมแบบต่อเกยจะต้องสัมพันธ์กับความกว้างของชิ้นงาน (Duane K. Miller. 2001) ยกตัวอย่างเช่นรอยเชื่อม L ควรมีความยาวมากกว่าความกว้างของชิ้นงาน D จึงจะมีความปลอดภัยดังแสดงในภาพที่ 2.25 นอกจากนี้การเชื่อมแบบต่อเกยควรเชื่อมตำแหน่งหัวท้ายชิ้นงานด้วยเพื่อเพิ่มความแข็งแรงให้รับรอยเชื่อม ทั้งนี้ต้องเว้นระยะของรอยเชื่อม ณ ตำแหน่งมุมแต่ละด้านของชิ้นงานดังแสดงในภาพที่ 2.26 การส่งผ่านแรงภายหลังจากเชื่อมชิ้นงานแบบต่อเกยเสร็จแล้วจะมีลักษณะดังนี้คือแรงภายในชิ้นงานจะอยู่ในแนวศูนย์ถ่วงของหน้าตัดชิ้นงานและจะถูกส่งต่อให้แก่กันผ่านรอยเชื่อมในลักษณะเอียงศูนย์ดังแสดงในภาพที่ 2.27 ดังนั้นเมื่อมีแรงมากระทำกับชิ้นงานก็อาจส่งผลทำให้เกิดการเสียรูปจากแรงเอียงศูนย์ คุณสมบัติรอยเชื่อมในโลหะโดยปกติจะสามารถต้านทานแรงดึงและแรงเฉือนได้เป็นอย่างดีดังแสดงในภาพที่ 2.28 รายละเอียดการเชื่อมแบบต่อชนและการเชื่อมแบบต่อเกยมีดังต่อไปนี้

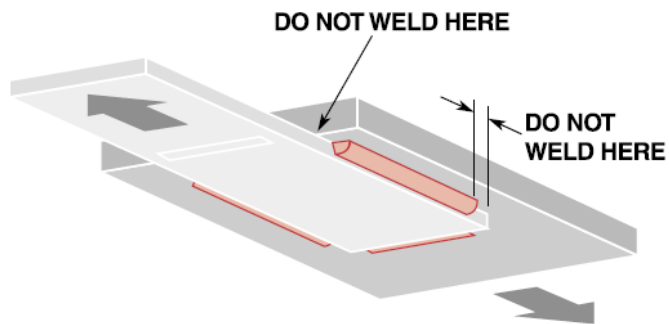


(ก) ระยะ L มากกว่า D เป็นที่ยอมรับ

(ข) ระยะ L น้อยกว่า D ไม่เป็นที่ยอมรับ

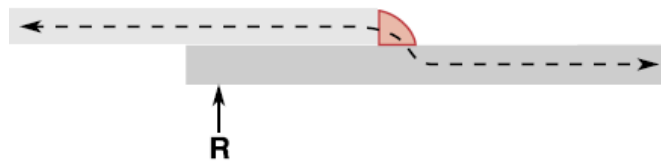
ภาพที่ 2.25 ความยาวรอยเชื่อมกรณีการต่อทาบ

ที่มา : Duane K. Miller. 2001



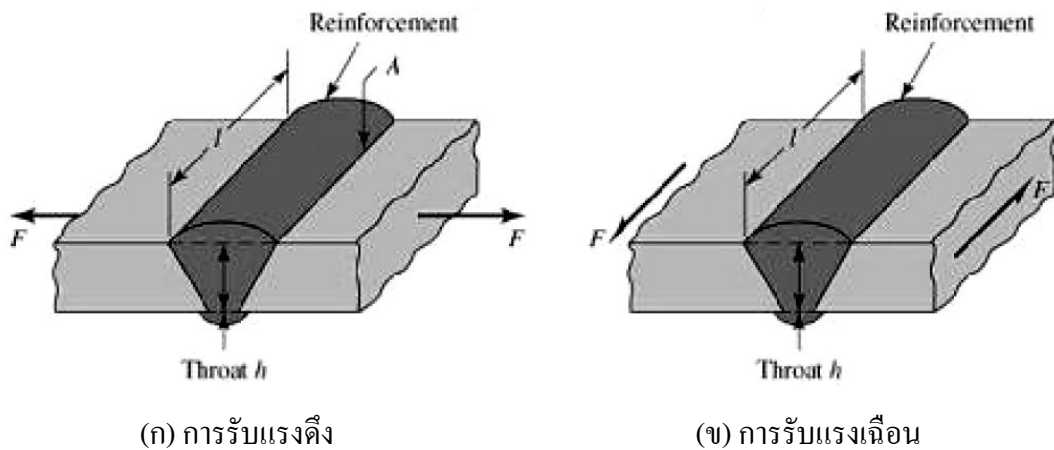
ภาพที่ 2.26 ลักษณะการเชื่อมแบบต่อทาบ

ที่มา : Duane K. Miller. 2001



ภาพที่ 2.27 แรงภายในรอยเชื่อมแบบต่อทาบก่อนการรับแรง

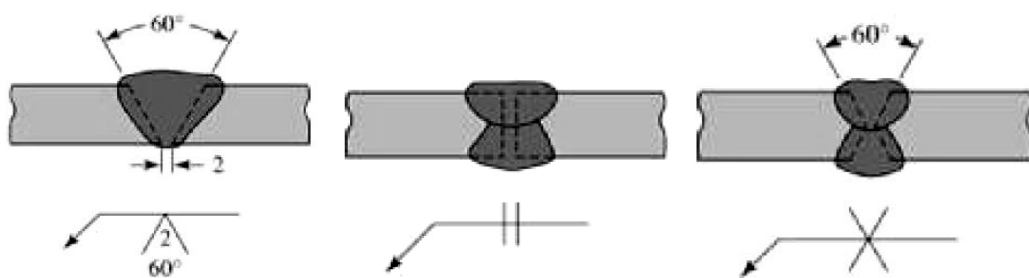
ที่มา : Duane K. Miller. 2001



ภาพที่ 2.28 ลักษณะการรับแรงของจุดเชื่อมต่อตรง  
ที่มา : Essam Al-Bahkali, n.d

1. การเชื่อมแบบต่อชน

การเชื่อมแบบต่อชน (Butt Weld) เป็นวิธีการเชื่อมโดยการนำเอาแผ่นโลหะมาวางชนกัน แล้วจึงทำการเชื่อมด้วยวิธีการหลอม การเชื่อมวิธีนี้อาจมาจากปลายชิ้นงานก่อนทำการเชื่อม เช่น การต่อชนรูปตัววีเดี่ยว (Dingle Vee Butt) และการต่อชนรูปตัววีคู่ (Double Vee Butt) เป็นต้น การบากปลายชิ้นงานและการรับแรงดึงของการเชื่อมแบบต่อชนแสดงในภาพที่ 2.29 ประสิทธิ์ เวียงแก้ว และ ฉัตรชัย ลากริงศิริตัน (2554 : 113-120) และ Duane K. Miller (2001) กล่าวถึงการคำนวณแรงดึง P และรูปแบบของรอยเชื่อมแบบต่อชนไว้ดังต่อไปนี้



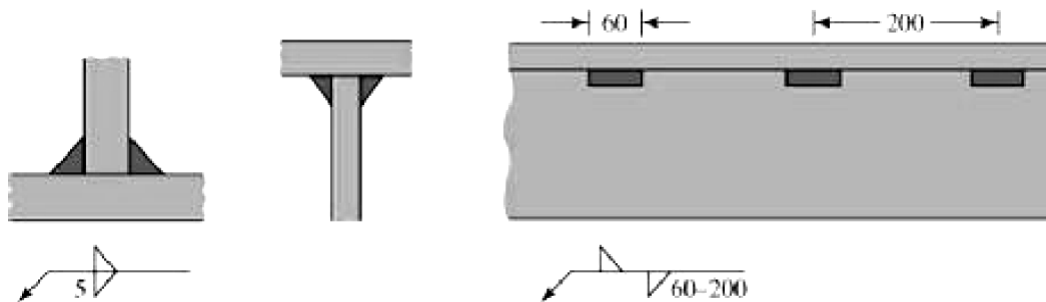
ภาพที่ 2.29 การต่อชนด้วยการเชื่อม  
ที่มา : Essam Al-Bahkali, n.d

$$P = \sigma A \tag{2.28}$$

หรือ  $P = \sigma w t \tag{2.29}$

เมื่อ  $\sigma$  คือความเค้นดึงใช้งาน  $A$  คือพื้นที่หน้าตัดของแผ่น โลหะ  $t$  คือความหนาของแผ่น โลหะ และ  $w$  คือความกว้างของแผ่น โลหะ ตามลำดับ ทั้งนี้ลักษณะการเชื่อมชิ้นงานแบบต่อชน มีรายละเอียดดังต่อไปนี้

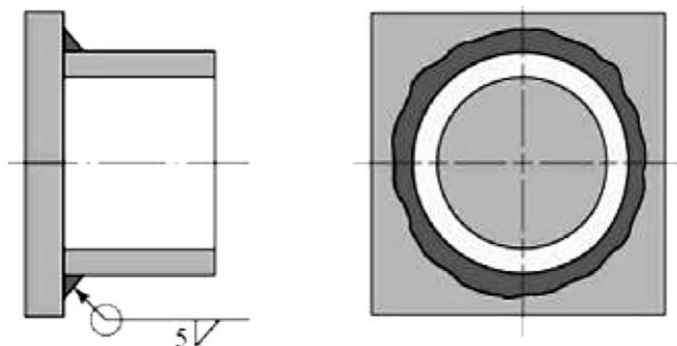
1.1 การต่อชนระหว่างแผ่น โลหะรูปตัวทีเป็นการต่อชนที่ต้องพิจารณาจำนวน จุดเชื่อมให้มีความเหมาะสมกับความยาวและขนาดขาเชื่อม ถ้าชิ้นงานบางควรเชื่อมเพียงด้าน เดียวเพื่อป้องกันชิ้นงานเสียรูป แต่ถ้าชิ้นงานหนาเพียงพอก็ควรเชื่อมทั้งสองด้านเพื่อความมั่นคง แข็งแรง การเชื่อมอาจเชื่อมตลอดความยาวหรือเชื่อมเป็นช่วงก็ได้ดังแสดงในภาพที่ 2.30



ภาพที่ 2.30 จุดต่อตัวทีด้วยการเชื่อมพอก

ที่มา : Essam Al-Bahkali, n.d

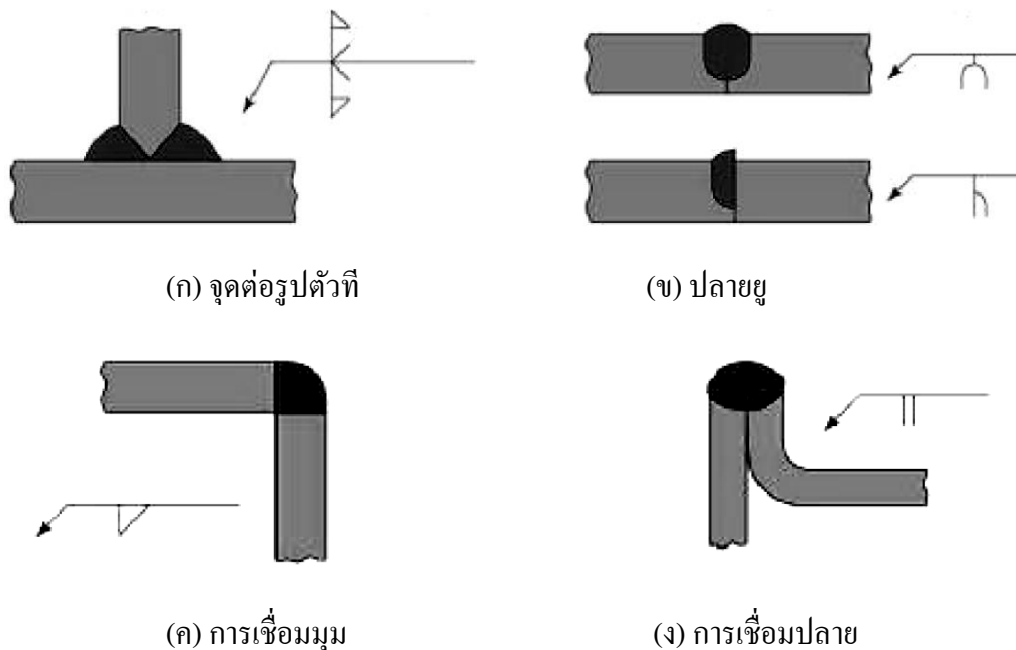
1.2 การเชื่อมปลายท่อกลมกับโลหะแผ่นมักนิยมเชื่อมพอก โดยทำการเชื่อมให้รอบ ท่อกลมเพื่อป้องกันอากาศและความชื้นผ่านเข้าไปภายในดังแสดงในภาพที่ 2.31 ถ้าอากาศและ ความชื้นสามารถผ่านเข้าไปภายในท่อกลมก็จะก่อให้เกิดสนิมและการตรวจสอบทำได้ยาก



ภาพที่ 2.31 จุดต่อปลายท่อกลมด้วยการเชื่อมพอกโดยรอบ

ที่มา : Essam Al-Bahkali, n.d

1.3 การเชื่อมแบบต่อชนกรณีที่ชิ้นงานมีความหนามาก การเซาะร่องหรือบากชิ้นงานมีความจำเป็นสำหรับชิ้นงานที่มีความหนามาก เนื่องจากการหลอมของรอยเชื่อมอาจลึกไม่เพียงพอหากชิ้นงานมีความหนามาก ดังนั้นจึงควรบากชิ้นงานเพื่อให้รอยเชื่อมสามารถแทรกได้เต็มหน้าชิ้นงานดังแสดงในภาพที่ 2.32

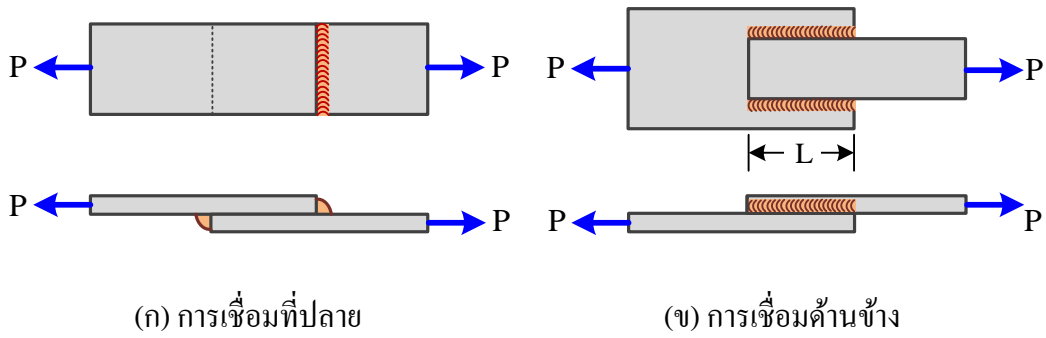


ภาพที่ 2.32 จุดต่อชิ้นงานหนา

ที่มา : Essam Al-Bahkali, n.d

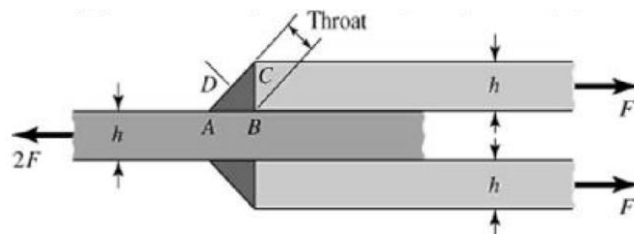
## 2. การเชื่อมแบบต่อเกย

การเชื่อมแบบต่อเกย (Fillet Weld) เป็นวิธีการเชื่อมต่อแผ่นชิ้นงานเข้าด้วยกันในลักษณะที่ชิ้นงานวางเกยกันแล้วทำการเชื่อม ระยะทางระหว่างชิ้นงานทั้งสองแผ่นต้องเหมาะสมกับระยะรอยเชื่อมเพื่อความมั่นคงแข็งแรง เมื่อนำชิ้นงานมาวางทับกันแล้วจึงทำการเชื่อมให้ชิ้นงานทั้งสองยึดติดกัน ตำแหน่งที่จะเชื่อมอาจเป็นบริเวณปลายชิ้นงานหรืออาจเชื่อมบริเวณด้านข้างชิ้นงานก็ได้ดังแสดงในภาพที่ 2.33 การเชื่อมแบบต่อเกยจะทำให้เกิดแรงยึดศูนย์และทำให้ชิ้นงานบิดและเสียรูปได้ ถ้าต้องการหลีกเลี่ยงการเกิดแรงยึดศูนย์สามารถทำได้โดยการประกบชิ้นงานทั้งด้านบนและด้านล่างชิ้นงานหลักแล้วจึงเชื่อมดังแสดงในภาพที่ 2.34 วิธีการนี้จะทำให้อายุต่อมีความแข็งแรงมากขึ้นและแรงภายในยังอยู่ในแนวแกนอีกด้วย



ภาพที่ 2.33 การเชื่อมแบบต่อเกย

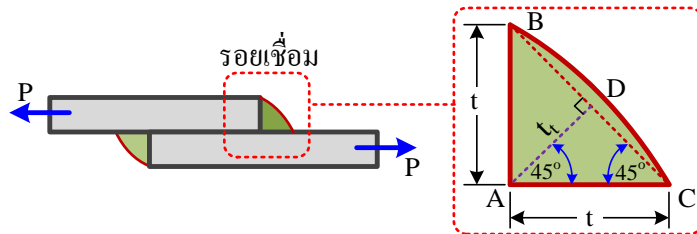
ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556



ภาพที่ 2.34 การเชื่อมแบบต่อเกยสองด้าน

ที่มา : Essam Al-Bahkali. n.d

มนตรี พิรุณเกษตร (2544 : 180-183) และ สมโพธิ์ วิวิธเกยูรวงศ์ (2542 : 536-540) กล่าวถึงการคำนวณแรงดึงสำหรับรอยเชื่อมแบบต่อเกยไว้ดังต่อไปนี้ เมื่อพิจารณารอยเชื่อมดังแสดงในภาพที่ 2.35 พบว่าเมื่อมีแรงกระทำที่ชิ้นงานจะทำให้รอยเชื่อมขาดจากกันในตำแหน่งที่มีความเค้นมากที่สุด โดยทั่วไปการขาดของรอยเชื่อมจะสัมพันธ์กับตำแหน่งที่มีพื้นที่การเชื่อม น้อยที่สุด จากภาพพบว่าระนาบ AD จะมีพื้นที่การเชื่อม น้อยที่สุดซึ่งเรียกว่า ระยะคอเชื่อม (Throat :  $t_t$ ) ถ้าหากขนาดขาเชื่อม  $t$  เท่ากันทั้งสองด้านสามารถหาระยะคอเชื่อมได้จากสมการต่อไปนี้



ภาพที่ 2.35 ระยะคอเชื่อม

ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

$$\text{ระยะคอเชื่อม ; } t_t = t \cos 45^\circ = 0.707 t \quad (2.30)$$

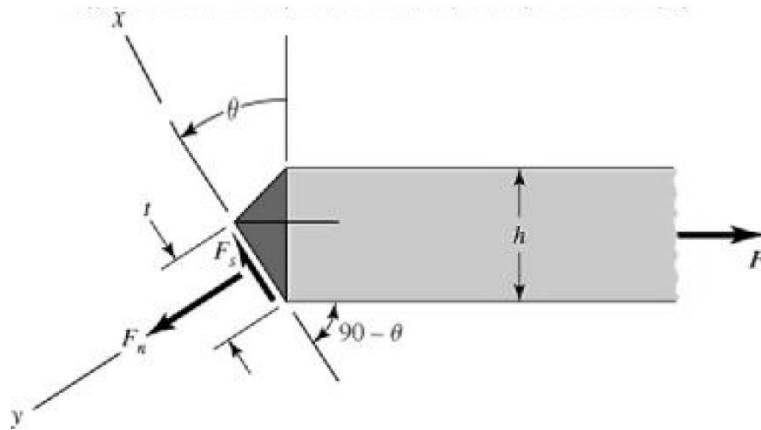
พื้นที่หน้าตัดที่คอเชื่อม ;

$$A = Lt_t = 0.707 Lt \quad (2.31)$$

แรงที่รอยเชื่อมสามารถรับได้ ;

$$P = A \tau = 0.707 Lt \tau \quad (2.32)$$

เมื่อ  $L$  คือความยาวรอยเชื่อม  $t$  คือความกว้างของขาเชื่อม  $A$  คือพื้นที่คอเชื่อมหรือพื้นที่ส่วนที่แคบที่สุด และ  $\tau$  คือหน่วยแรงเฉือนที่ยอมให้ของรอยเชื่อม ตามลำดับ ถ้าหากรอยเชื่อมมีขนาดขาเชื่อมไม่เท่ากันก็จะพบว่าระนาบของคอเชื่อมทำมุม  $\theta$  กับระนาบตั้งดังแสดงในภาพที่ 2.36 ความเค้นที่เกิดขึ้นกับรอยเชื่อมในกรณีนี้สามารถหาได้จากสมการ



ภาพที่ 2.36 แรงภายในรอยเชื่อม

ที่มา : Essam Al-Bahkali, n.d

$$\frac{t}{\sin 45} = \frac{h}{\sin(90 - \theta + 45)} \quad (2.33)$$

$$t = \frac{h}{\cos \theta + \sin \theta} \quad (2.34)$$

$$\sigma = \frac{F_n}{A} = \frac{F \cos \theta (\cos \theta + \sin \theta)}{hl} \quad (2.35)$$

$$\sigma = \frac{F}{hl} (\cos^2 \theta + \sin \theta \cos \theta) \quad (2.36)$$

$$\tau = \frac{F_s}{A} = \frac{F \sin \theta (\cos \theta + \sin \theta)}{hl} \quad (2.37)$$

$$\tau = \frac{F}{hl} (\sin \theta \cos \theta + \sin^2 \theta) \quad (2.38)$$

และความเค้นวอลมิส (Von Mises Stress) ที่มุม  $\theta$  หาได้จากสามการ

$$\sigma' = (\sigma^2 + 3\tau^2)^{0.5} \quad (2.39)$$

$$\sigma' = \frac{F}{hl} ((\cos^2 \theta + \sin \theta \cos \theta)^2 + 3(\sin^2 \theta + \sin \theta \cos \theta)^2)^{0.5} \quad (2.40)$$

**ตัวอย่างที่ 2.8** การต่อแผ่นโลหะหนา 0.6 cm เข้าด้วยกันโดยการเชื่อมแบบต่อชนพบวาร์รอยเชื่อม สามารถรับน้ำหนักได้สูงสุด 2,500 kg จงหาความกว้างของแผ่นโลหะที่สามารถรับรอยเชื่อมนี้ได้อย่างปลอดภัย ถ้ากำหนดให้ความเค้นดึงใช้งานของโลหะเท่ากับ  $1,000 \text{ kg/cm}^2$

**วิธีทำ**

$$\begin{aligned} \text{ความเค้นดึงในแผ่นโลหะ ; } \quad \sigma &= \frac{P}{A} \\ \text{หรือ} \quad A &= \frac{P}{\sigma} \\ &= \frac{2,500}{1,000} = 2.5 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{พื้นที่หน้าตัดแผ่นโลหะ ; } \quad A &= w t \\ \text{ความกว้างของแผ่นโลหะ ; } \quad w &= \frac{A}{t} \\ &= \frac{2.5}{0.6} = 4.17 \text{ cm} \end{aligned}$$

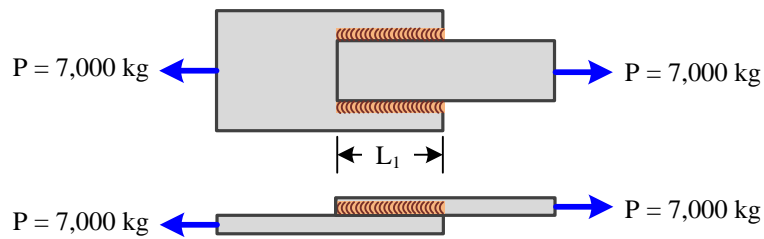
ดังนั้นความกว้างของแผ่นโลหะไม่ควรน้อยกว่า 4.17 cm ตอบ

**ตัวอย่างที่ 2.9** การเชื่อมแผ่นโลหะหนา 1.5 cm เข้าด้วยกันแบบต่อเกยเพื่อรับน้ำหนัก 7,000 kg ดังแสดงในภาพที่ 2.37 จงหาความยาวของรอยเชื่อมแต่ละข้างของแผ่นโลหะ ถ้ากำหนดให้ความเค้นเฉือนที่ยอมให้ของรอยเชื่อมเท่ากับ  $500 \text{ kg/cm}^2$

**วิธีทำ**

$$\begin{aligned} \text{แรงที่รอยเชื่อมรับได้ ; } \quad P &= 0.707 L t \tau \\ \text{ความยาวรอยเชื่อม ; } \quad L &= \frac{P}{0.707 t \tau} \\ &= \frac{7,000}{0.707 \times 1.5 \times 500} = 13.20 \text{ cm} \end{aligned}$$





ภาพที่ 2.37 การเชื่อมแบบเกยกัน

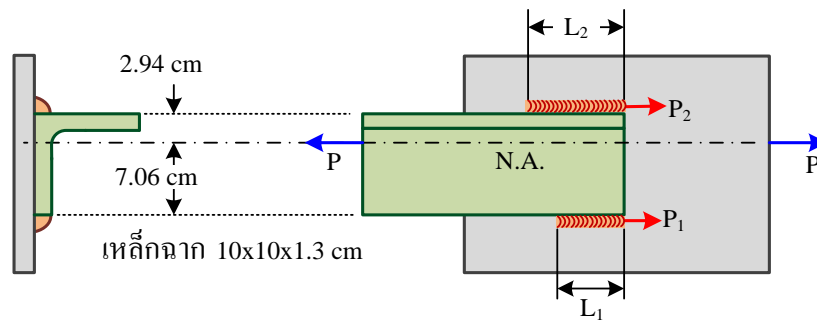
ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

$$\begin{aligned} \text{ความยาวรอยเชื่อมแต่ละด้าน ; } L_1 &= \frac{L}{2} \\ &= \frac{13.20}{2} = 6.6 \text{ cm} \end{aligned}$$

ดังนั้นความยาวรอยเชื่อมแต่ละด้านไม่น้อยกว่า 6.6 cm

ตอบ

ตัวอย่างที่ 2.10 เหล็กฉากขนาด  $10 \times 10$  cm หนา 1.3 cm เชื่อมติดกับแผ่นเหล็กหนา 1.5 cm โดยการเชื่อมแบบต่อเกยเพื่อรับน้ำหนัก 50,000 kg ดังแสดงในภาพที่ 2.38 จงหาระยะรอยเชื่อมแต่ละด้านของเหล็กฉาก ถ้ารอยเชื่อมรับความเค้นดึงได้  $900 \text{ kg/cm}^2$



ภาพที่ 2.38 เหล็กฉากเชื่อมติดกับแผ่นเหล็ก

ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \text{แรงที่รอยเชื่อมด้านบน ; } P_1 &= 900 L_1 \\ \text{แรงที่รอยเชื่อมด้านล่าง ; } P_2 &= 900 L_2 \\ \text{สมดุลของแรงในแนวแกน ; } P_1 + P_2 &= 50,000 \\ 900 L_1 + 900 L_2 &= 50,000 \end{aligned}$$

$$L_1 + L_2 = 55.56 \tag{1}$$

โมเมนต์รอบแกนสะเทิน ;  $7.06 P_1 = 2.94 P_2$

$$7.06 \times 900 L_1 = 2.94 \times 900 L_2$$

$$L_1 = 0.416 L_2 \tag{2}$$

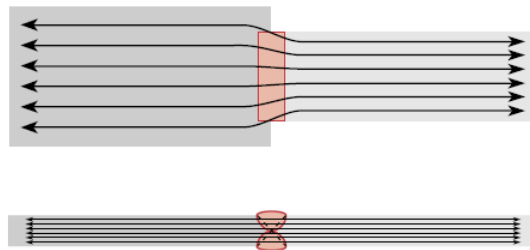
แทน (2) ใน (1) จะได้ ;  $0.416 L_2 + L_2 = 55.56$

ระยะรอยเชื่อมด้านล่าง ;  $L_2 = \frac{55.56}{(0.416+1)} = 39.24 \text{ cm}$       ตอบ

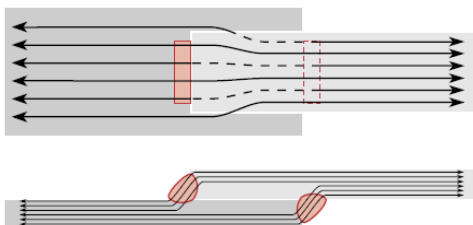
ระยะรอยเชื่อมด้านบน ;  $L_1 = 0.416 \times 39.24 = 16.32 \text{ cm}$       ตอบ

### 3. การกระจายแรงผ่านรอยเชื่อมและมาตรฐานการเชื่อม

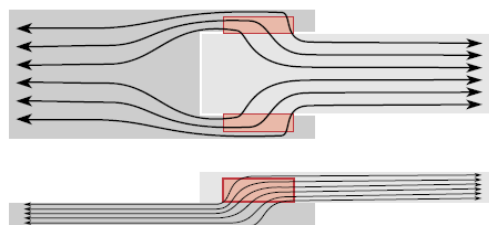
การกระจายแรงในชิ้นงานผ่านรอยเชื่อมแบบต่าง ๆ แสดงในภาพที่ 2.39 (Duane K. Miller. 2001) จากภาพพบว่าแรงจากชิ้นงานกรณีการเชื่อมแบบต่อชนจะกระจายตัวสม่ำเสมอผ่านรอยเชื่อมโดยไม่มีการเยื้องศูนย์ อย่างไรก็ตามประสิทธิภาพของรอยเชื่อมแบบต่อชนจะขึ้นอยู่กับความสมบูรณ์ของรอยเชื่อม ส่วนกรณีการเชื่อมแบบต่อเกลยแรงจากชิ้นงานด้านบนจะกระจายผ่านรอยเชื่อมแต่ละแนวสู่ชิ้นงานด้านล่างในลักษณะเยื้องศูนย์ แรงเยื้องศูนย์ยังทำให้ชิ้นงานเสียรูปดังแสดงในภาพที่ 2.40 รูปร่างชิ้นงานที่เปลี่ยนไปเกิดจากอิทธิพลของแรงที่พยายามทำให้แนวแรงเป็นเส้นตรง



(ก) การเชื่อมแบบต่อชน



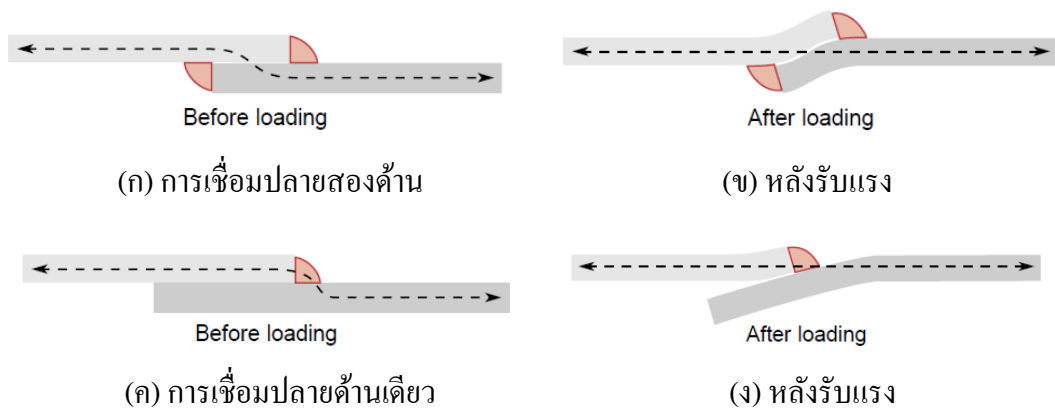
(ข) การต่อเกลยแบบเชื่อมปลาย



(ค) การต่อเกลยแบบเชื่อมด้านข้าง

ภาพที่ 2.39 การกระจายแรงในรอยเชื่อมแบบต่าง ๆ

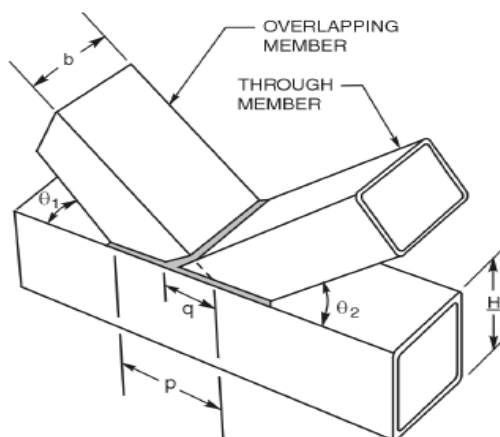
ที่มา : Duane K. Miller. 2001



ภาพที่ 2.40 การเสียรูปของรอยเชื่อมแบบต่อเกลย

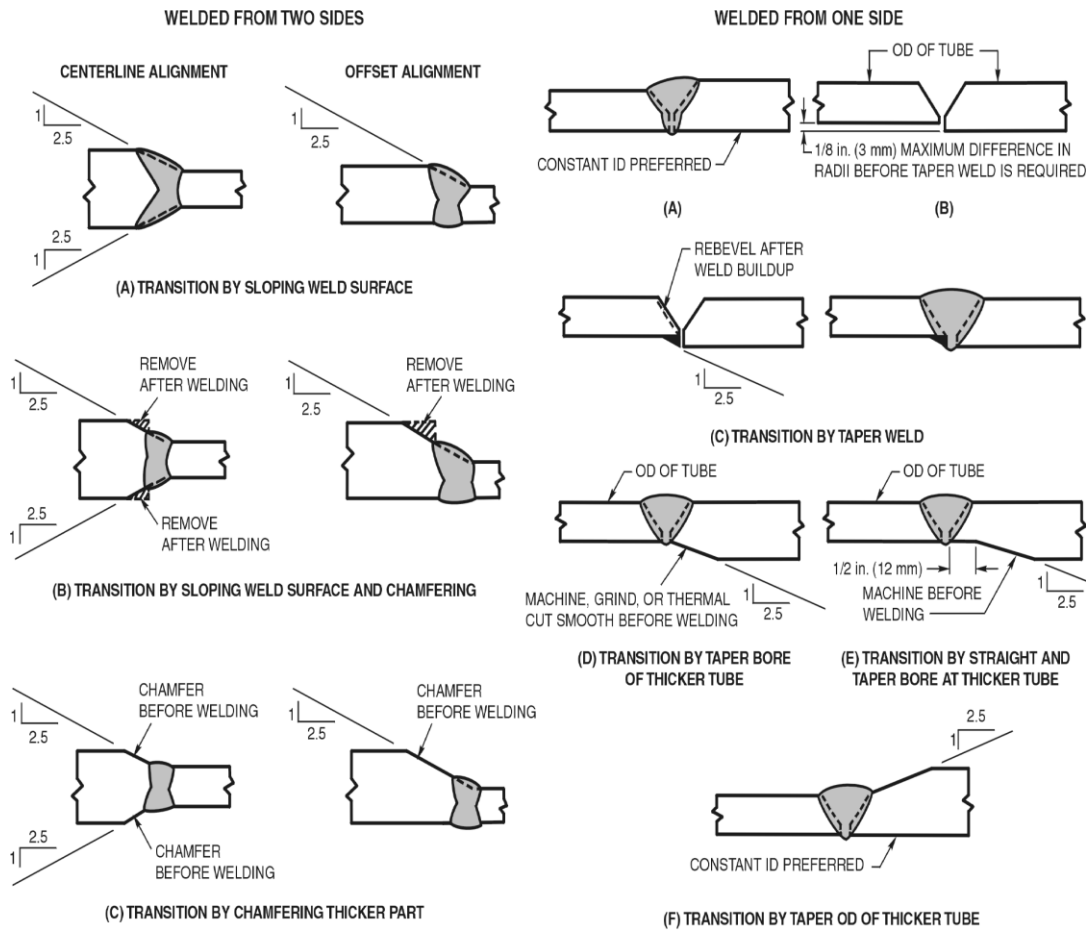
ที่มา : Duane K. Miller. 2001

ตัวอย่างข้อกำหนดในมาตรฐานการเชื่อม AWS D1.1 กล่าวว่า การต่อโครงสร้างตัวเค (K) จะต้องเชื่อมปลายท่อนทแยงให้สัมผัสชิ้นส่วนหลักตลอดแนวเสียก่อน จากนั้นจึงนำท่อนทแยงอีกท่อนมาเชื่อมให้สัมผัสทั้งชิ้นส่วนหลักและท่อนทแยงที่ได้เชื่อมก่อนหน้าดังแสดงในภาพที่ 2.41 การเชื่อมแบบต่อชนกรณีชิ้นงานมีความหนาไม่เท่ากันควรมีการบากปลายชิ้นงานทั้งสองด้านให้เหมาะสมเสียก่อน การบากชิ้นงานจะช่วยเพิ่มผิวสัมผัสของรอยเชื่อมกับชิ้นงานและลดช่องว่างภายในรอยเชื่อม ทั้งนี้สามารถเชื่อมเพียงด้านเดียวหรือเชื่อมสองด้านของชิ้นงานก็ได้ขึ้นอยู่กับความหนาของชิ้นงานดังแสดงในภาพที่ 2.42 สำหรับกรณีที่ต้องการเชื่อมต่อปลายท่อเข้ากับท่อหลักควรเชื่อมให้รอบปลายท่อเพื่อป้องกันความชื้นผ่านเข้าไปภายในรอยเชื่อมดังแสดงในภาพที่ 2.43 ([American Welding Society. 2000](#))



ภาพที่ 2.41 การต่อเชื่อมตัวเคของท่อเหล็กหน้าตัดรูปสี่เหลี่ยม

ที่มา : [American Welding Society. 2000](#)



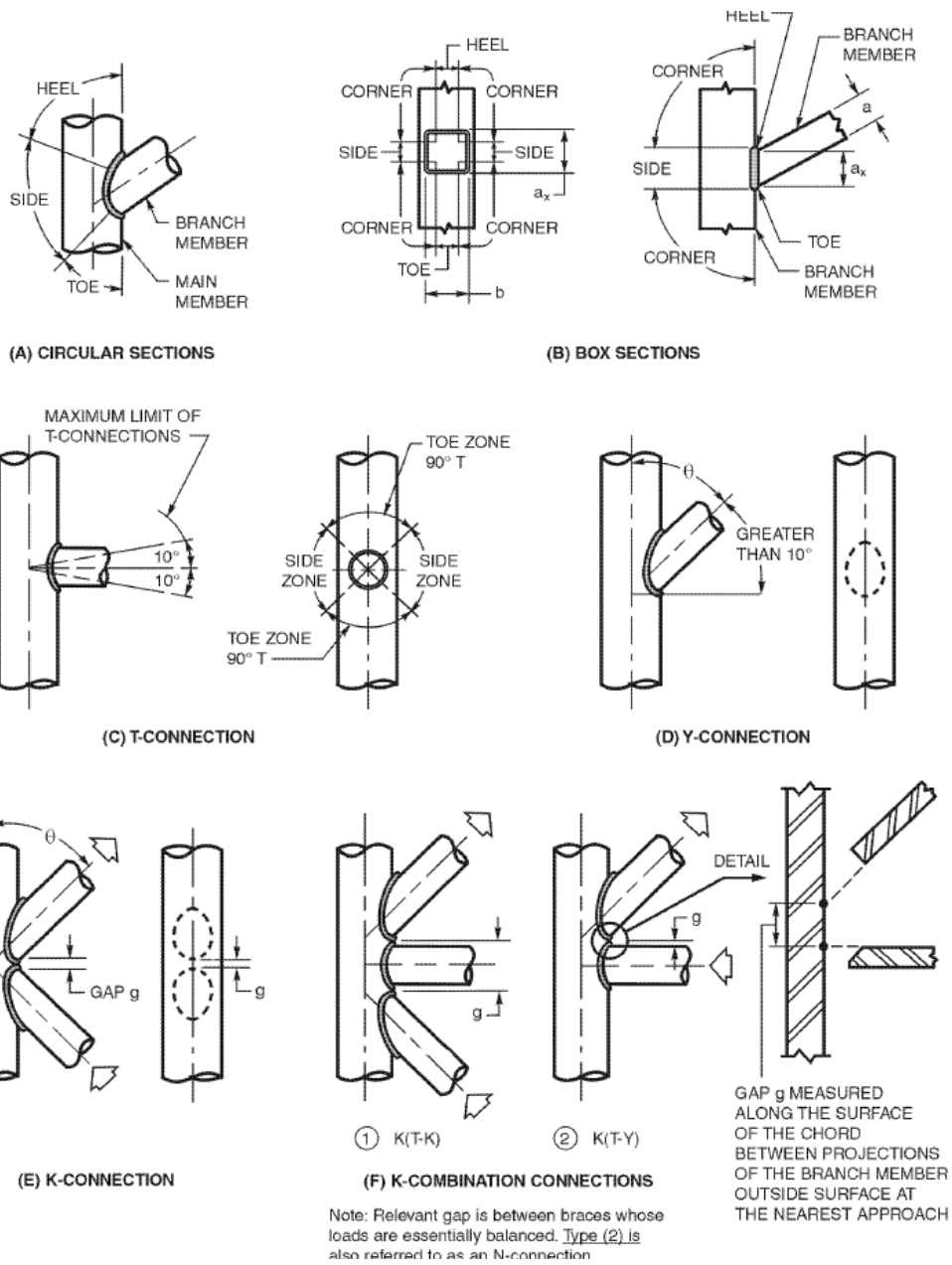
Notes:

- 1. Groove may be of any permitted or qualified type and detail.
- 2. Transition slopes shown are the maximum permitted.

- Note 3: In (B), (D), and (E) groove may be any permitted or qualified type and detail. Transition slopes shown are maximum permitted.

ภาพที่ 2.42 การเชื่อมแบบต่อชนทั้งการเชื่อมด้านเดียวและเชื่อมสองด้าน

ที่มา : [American Welding Society](http://www.americanwelding.com), 2000



ภาพที่ 2.43 การเชื่อมต่อแบบต่าง ๆ

ที่มา : [American Welding Society](http://www.americanwelding.com), 2000

### สรุปท้ายบท

ภาชนะผนังบางรับความดันเป็นภาชนะปิดภายในบรรจุของเหลวหรือแก๊สที่มีความดัน โดยผนังของภาชนะมีความหนาแน่นเมื่อเทียบกับขนาดหรือเส้นผ่าศูนย์กลางภาชนะ การหาความเค้นภายในภาชนะผนังบางมักคิดเพียงความเค้นตามแนวยาวและตามแนวขวาง โดยไม่คำนึงถึงความหนา การคำนวณและออกแบบภาชนะผนังบางรับความดันต้องเป็นไปตาม

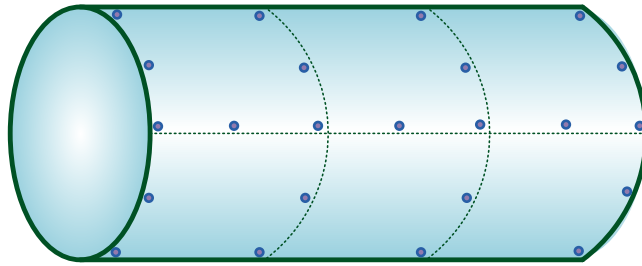
สมมติฐานคือ ภาชนะผนังบางรับความดันควรมีความหนาของผนังสม่ำเสมอ ภาชนะมีรูปร่างสมมาตรและความเค้นภายในจะเกิดขึ้นอย่างอิสระ น้ำหนักบรรทุกรวมถึงน้ำหนักของภาชนะจะต้องถูกกระจายลงสู่ฐานรองรับอย่างสมดุลเพื่อป้องกันการเสีรูปร่างของภาชนะ ความดันภายในภาชนะจะต้องกระจายตัวอย่างสม่ำเสมอ และรัศมีของภาชนะควรมากกว่า 10 เท่าของความหนาภาชนะ ตามลำดับ ในขณะที่ภาชนะผนังบางทรงกลมเป็นภาชนะรับความดันรูปทรงกลมมักเป็นโครงสร้างขนาดใหญ่ใช้บรรจุของเหลวในโรงงานอุตสาหกรรม ในการหาความดันภายในภาชนะทรงกลมจะพิจารณาจากส่วนตัดผ่าศูนย์กลางของทรงกลม จากนั้นจะพิจารณาความดันภายในที่กระทำกับผนังซึ่งเป็นความดันมาตรฐาน โดยความเค้นภายในจะพิจารณาเฉพาะความเค้นดึงเช่นเดียวกับภาชนะผนังบางทรงกระบอก

การต่อวัสดุแผ่นโดยใช้หมุดย้ำเป็นวิธีการหนึ่งที่นิยมใช้ในการต่อชิ้นงาน ทั้งนี้ชิ้นงานจะต้องมีลักษณะเป็นแผ่นหรือท่อนที่มีผิวเรียบสามารถทาบต่อกันได้ จุดต่อโดยใช้หมุดย้ำที่พบบ่อยแบ่งเป็น 2 แบบคือการต่อแบบเกยและการต่อแบบชน จำนวนหมุดย้ำและการเรียงจะมีความสัมพันธ์กับแรงที่กระทำและขนาดหน้าตัดของชิ้นงาน ความแข็งแรงของรอยต่อโดยใช้หมุดย้ำจะขึ้นอยู่กับคุณสมบัติวัสดุที่นำมาใช้และการเรียงหมุดย้ำ หากใช้สลักเกลียวแทนหมุดย้ำจำเป็นจะต้องตรวจสอบแรงบิดที่ใช้ขันสลักเกลียวให้เป็นไปตามข้อกำหนดในมาตรฐานการออกแบบเพื่อป้องกันการคลายตัว โดยทั่วไปการขาดของรอยต่อโดยใช้หมุดย้ำมักแบ่งเป็น 2 ลักษณะคือหมุดย้ำขาดหรือแผ่นชิ้นงานขาด

การเชื่อมเป็นกระบวนการนำโลหะ 2 ชนิดมาต่อกันโดยใช้ความร้อนหรือใช้ความดัน ถ้าหากเชื่อมโลหะสองแผ่นด้วยความร้อนจนกระทั่งอุณหภูมิถึงจุดหลอมละลายจะเรียกว่า การเชื่อมแบบหลอม แต่ถ้าเพิ่มอุณหภูมิให้สูงขึ้นแต่ไม่ถึงจุดหลอมละลายแล้วใช้ความดันกดให้แผ่นโลหะยึดติดกันจะเรียกว่า การเชื่อมอัด ที่พบเห็นทั่วไปตามสถานที่ก่อสร้างมักเป็นการเชื่อมแบบหลอม คุณสมบัติรอยเชื่อมจะสามารถรับแรงดึงและแรงเฉือนได้ดี การนำชิ้นงานมาเชื่อมแบบหลอมที่พบเห็นมากมี 2 แบบคือการเชื่อมแบบต่อชนและการเชื่อมแบบต่อเกย อนึ่งการเชื่อมแบบต่อเกยสามารถทำได้ง่ายกว่าแบบต่อชนแต่ต้องระมัดระวังการเสีรูปร่างของชิ้นงานเพราะจะเกิดแรงเยื้องศูนย์กลาง

## แบบฝึกหัดท้ายบท

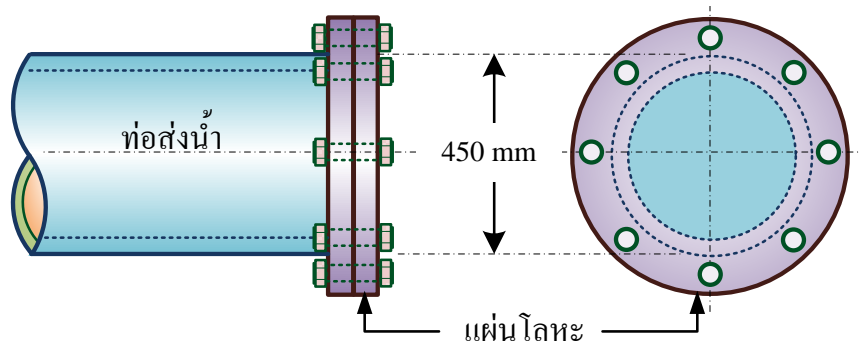
1. ภาชนะผนังบางทรงกระบอกประกอบขึ้นด้วยแผ่นเหล็กหนา 20 mm ภาชนะนี้มีขนาดเส้นผ่าศูนย์กลางกลาง 500 mm และยาว 3 m ดังแสดงในภาพที่ 2.44 จงหาความดันภายในที่ภาชนะนี้สามารถรับได้อย่างปลอดภัย ถ้าความเค้นดึงที่แผ่นเหล็กรับได้อย่างปลอดภัยเท่ากับ 140 MPa



ภาพที่ 2.44 ภาชนะผนังบางรูปทรงกระบอก

ที่มา : จีรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

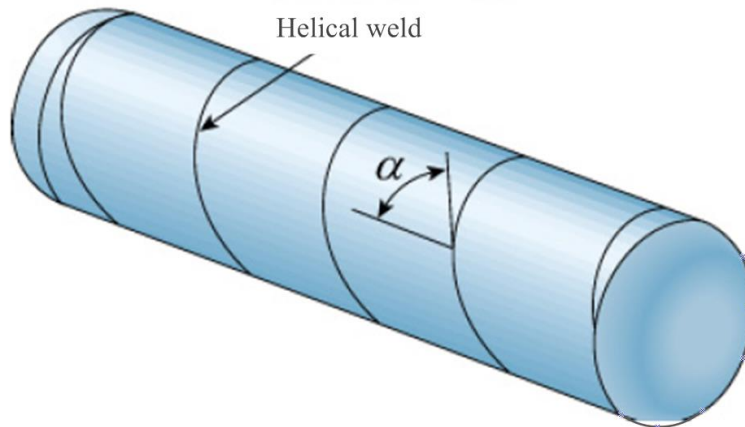
2. ท่อส่งน้ำแห่งหนึ่งมีความดันภายใน 3.5 MPa มีขนาดเส้นผ่าศูนย์กลางภายนอก 450 mm และผนังท่อหนา 10 mm ที่ปลายท่อใส่แผ่นเหล็กยึดด้วยสลักเกลียวดังแสดงในภาพที่ 2.45 จงหาว่า จะต้องใช้สลักเกลียวขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง 40 mm จำนวนกี่ตัวเพื่อยึดแผ่น โลหะปิดปลายท่อ ถ้าความเค้นใช้งานในสลักเกลียวเท่ากับ 80 MPa และความเค้นเริ่มต้น 55 MPa



ภาพที่ 2.45 แผ่นโลหะปิดปลายท่อส่งน้ำยึดด้วยหมุดย้ำ

ที่มา : จีรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

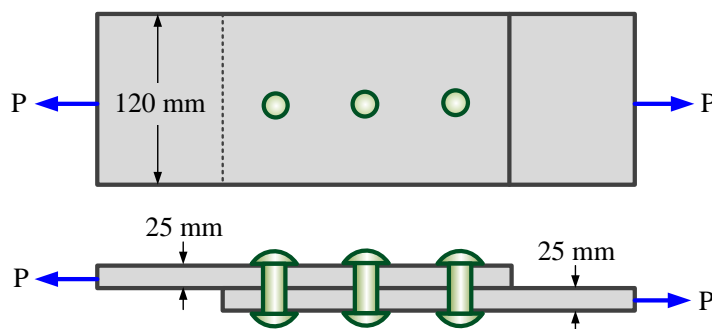
3. ภาชนะผนังบางทรงกระบอกทำจากแผ่นโลหะหนา 15 mm เชื่อมเป็นมุม  $45^\circ$  ดังแสดงในภาพที่ 2.46 ภาชนะนี้มีรัศมีภายใน 1.2 m และมีความดันภายในภาชนะ 550 kPa จงหาความเค้นและความเครียดทั้งในแนวแกนและในแนวรอบวง กำหนดให้แผ่นโลหะมีค่าโมดูลัสยืดหยุ่น  $E = 200 \text{ GPa}$  และอัตราส่วนปัวส์ซอง  $\nu = 0.30$



ภาพที่ 2.46 ภาชนะทรงกระบอกเชื่อมต่อบนแบบเกลียว

ที่มา : Pablo G. Caceres–Valencia. n.d

4. จงหาแรงสูงสุดที่กระทำกับแผ่นชิ้นงานที่ต่อเกยด้วยหมุดย้ำขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง 20 mm จำนวน 3 ตัว ดังแสดงในภาพที่ 2.47 กำหนดให้หมุดย้ำรับความเค้นเฉือนได้ไม่เกิน 60 MPa แผ่นชิ้นงานรับความเค้นอัดได้ไม่เกิน 110 MPa และรับความเค้นดึงได้ไม่เกิน 140 MPa

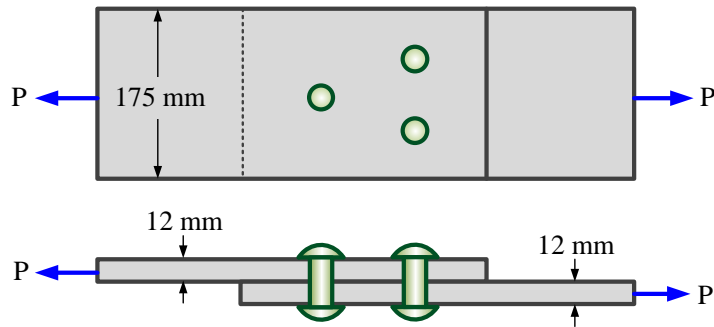


ภาพที่ 2.47 การต่อแผ่นวัสดุแบบเกยกันโดยใช้หมุดย้ำ

ที่มา : จิรวัดณ์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556



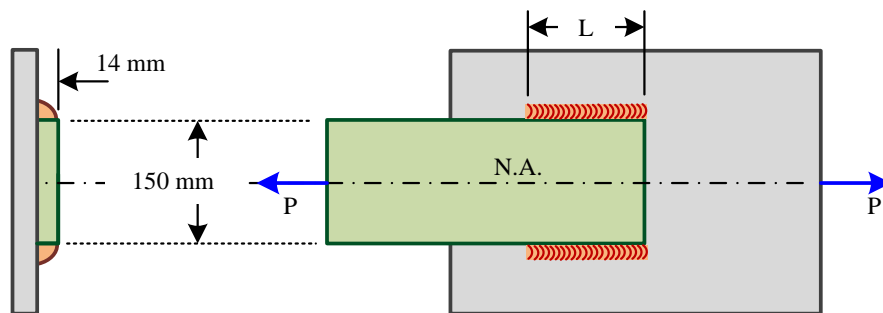
5. รอยต่อเกยดังแสดงในภาพที่ 2.48 มีหมุดย้ำขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง 20 mm จำนวน 3 ตัว แผ่นชิ้นงานทั้งสองเป็นโลหะกว้าง 175 mm และหนา 12 mm จงหาแรงสูงสุดที่รอยต่อนี้สามารถรับได้อย่างปลอดภัย ถ้าแผ่นโลหะรับความเค้นดึงได้ไม่เกิน 100 MPa และรับความเค้นอัดได้ไม่เกิน 140 MPa ส่วนหมุดย้ำรับความเค้นเฉือนได้ไม่เกิน 70 MPa



ภาพที่ 2.48 แผ่นโลหะต่อกันโดยใช้หมุดย้ำ 3 ตัว

ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

6. แผ่นเหล็กกว้าง 150 mm หนา 14 mm เชื่อมต่อแบบเกยดังแสดงในภาพที่ 2.49 โดยมีระยะขาเชื่อมด้านละ 8 mm จงหาความยาวของรอยเชื่อมที่ด้านข้างของแผ่นเหล็กเมื่อมีแรงกระทำบนแผ่นเหล็กจนเกิดความเค้นดึงเท่ากับ 140 MPa กำหนดให้ความเค้นเฉือนใช้งานของรอยเชื่อมเท่ากับ 145 MPa



ภาพที่ 2.49 แผ่นเหล็กต่อกันโดยการเชื่อม

ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

## เอกสารอ้างอิง

- จรรยา พรหมสุทธิ และอำนาจ ทองแสน. (2547). การออกแบบรอยต่องานเชื่อม. กรุงเทพฯ :  
เอมพันธ์.
- ชาญ ถนัดงาน. (2523). กลศาสตร์วัสดุ. กรุงเทพฯ : สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้า วิทยา  
เขตพระนครเหนือ.
- มนตรี พิรุณเกษตร. (2544). กลศาสตร์ของวัสดุ. กรุงเทพฯ : วิทยพัฒน์.
- สมโพธิ วิวิธเกยูรวงศ์. (2542). กลศาสตร์ของวัสดุ. กรุงเทพฯ : ฟิสิกส์เซ็นเตอร์การพิมพ์.
- สิริศักดิ์ ปโยชรสิริ. (2549). กลศาสตร์วัสดุ. กรุงเทพฯ : ว.เพ็ชรสกุล.
- Ali H. Abbas, Sajid Abbas and Brian Maroney. (2011). **San Francisco-Oakland Bay Bridge  
benefits from bridge information modeling.** Retrieved June 20, 2013, from  
[http://cenews.com/article/8351/san\\_francisco\\_oakland\\_bay\\_brid](http://cenews.com/article/8351/san_francisco_oakland_bay_brid).
- American Welding Society. (2000). **AWS D1.1: Structural Welding Code—Steel.**  
Retrieved June 25, 2013, from <http://archive.org/details/gov.law.aws.d1.1.2000>.
- Benoit Vieille, Jérémie Aucher and Lakhdar Taleb. (2009). **Interdisciplinary and  
Integration Aspects in Structural Health Monitoring.** Journal of Materials Science  
and Engineering: A, Vol. 517, pp. 51–60.
- Duane K. Miller. (2001). **Designing Welded Lap Joints.** Welding Innovation: Vol. 18,  
No. 3.
- Essam Al-Bahkali. (n.d). **Mechanical Engineering Design Welding, Bonding and the  
Design of Permanent Joints.** Retrieved June 12, 2013, from  
<http://www.google.co.th/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&frm=1&source=web&cd>.
- Ferdinand P. Beer, Russell Johnston, John T. DeWolf and David F. Mazurek. (2012).  
**Mechanics of Materials.** New York : Mc Graw Hill.
- Hearn E. J. (2000). **Mechanics of Materials 1: An Introduction to the Mechanics of Elastic  
and Plastic Deformation of Solids and Structural Materials.** Oxford : Butterworth-  
Heinemann.
- James M. Gere and Stephen P. Timoshenko. (1991). **Mechanics of Materials.** New York :  
Springer Science Business Media. B.V.

## เอกสารอ้างอิง (ต่อ)

- John Case, Lord Chilver and CarL T. F. Ross. (1999). **Strength of Materials and Structures**.  
London : Arnold.
- Machinio. (2012). **Used Yilteks LPG Storage Tank**. Retrieved April 19, 2013, from  
<http://www.machinio.com/listings/1348593-YILTEKS-LPG-Storage-Tank-Used-gas-tank-for-sale>.
- Pablo G. C. Valencia. (n.d.). **Spherical Pressure Vessels**. Mechanical Metallurgy.  
University of Puerto Rico at Mayaguez: Puerto Rico.
- Russell C. Hibbeller. (2011). **Mechanics of Materials**. New York : Prentice Hall  
International Inc.
- T. Dang Hoang, C. Herbelot and A. Imad. (2012). **On failure mode analysis in a bolted  
single lap joint under tension-shearing**. Journal of Engineering Failure Analysis:  
Vol.24, pp. 9–25.
- Vitor Dias da Silva. (2006). **Mechanics and Strength of Materials**. Heidelberg : Springer-  
Verlag.
- William A. Nash. (1998). **Theory and Problems of Strength of Materials**. New York :  
McGraw-Hill.



## แผนบริหารการสอนประจำบทที่ 3

### การบิดและการรับแรงของสปริง

#### หัวข้อเนื้อหาประจำบท

1. ความเค้นและความเครียดเนื่องจากการบิด
2. การส่งกำลังของเพลลา
3. การต่อเพลลาโดยใช้ประกับหน้างาน
4. การบิดของท่อผนังบาง
5. สปริงขดลวด
  - การรับแรงของสปริงแบบอนุกรม
  - การรับแรงของสปริงแบบขนาน
6. สรุปท้ายบท
7. แบบฝึกหัดท้ายบท

#### วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม

เมื่อนักศึกษาเรียนบทเรียนนี้แล้วสามารถ

1. อธิบายและคำนวณความเค้นเนื่องจากการบิดในเพลลาได้
2. อธิบายและคำนวณความเครียดเนื่องจากการบิดในเพลลาได้
3. อธิบายและคำนวณเพลลาส่งกำลังได้
4. อธิบายและคำนวณการต่อเพลลาโดยใช้ประกับหน้างานได้
5. อธิบายและคำนวณการบิดของท่อผนังบางได้
6. อธิบายและคำนวณสปริงขดได้
7. อธิบายและคำนวณสปริงที่ต่อแบบอนุกรมได้
8. อธิบายและคำนวณสปริงที่ต่อแบบขนานได้

#### วิธีสอนและกิจกรรมการเรียนการสอนประจำบท

1. บรรยายเนื้อหาในเอกสารประกอบคำสอน การถามและตอบในห้องเรียนร่วมกับการใช้สื่อประกอบอื่น เช่น สื่อแผ่นใส สื่อคอมพิวเตอร์ หรือสื่อวีดิทัศน์ เป็นต้น
2. แสดงตัวอย่างชิ้นงานที่ทำจากสปริง เพื่อให้ผู้เรียนทราบลักษณะการยืดหรือการหดเมื่อมีแรงมากระทำ

3. สาธิตขั้นตอนการแก้ปัญหาโจทย์ที่เกี่ยวข้องกับเนื้อหาในการเรียนการสอน เช่น ความเค้น ความเครียด เนื่องจากการบิด การส่งกำลังของเพลลา การต่อเพลลาโดยใช้ประกับหน้างาน การบิดของท่อผนังบาง สปริงขดลวด การรับแรงของสปริงแบบอนุกรม การรับแรงของสปริงแบบขนาน เป็นต้น

#### 4. มอบหมายงาน

4.1 ให้ผู้เรียนแต่ละคนแก้ปัญหาโจทย์ที่เกี่ยวข้องกับเนื้อหา เช่น ความเค้น ความเครียด เนื่องจากการบิด การส่งกำลังของเพลลา การต่อเพลลาโดยใช้ประกับหน้างาน การบิดของท่อผนังบาง สปริงขดลวด การรับแรงของสปริงแบบอนุกรม การรับแรงของสปริงแบบขนาน เป็นต้น

4.2 ให้ผู้เรียนแต่ละกลุ่มศึกษาเพิ่มเติมเกี่ยวกับสาเหตุการวิบัติของเพลลาภายใต้การบิดตลอดจนเทคนิคและวิธีการแก้ใ้ปัญหา

4.3 ให้ผู้เรียนแต่ละคนทำแบบฝึกหัดจากคำถามท้ายบท เพื่อทดสอบความรู้ที่ได้เรียนมา

#### 5. ทำแบบฝึกหัดท้ายบท

### การวัดและประเมินผล

1. การสังเกตความสนใจของผู้เรียน
2. การฝึกปฏิบัติเกี่ยวกับการคำนวณปัญหาโจทย์
3. การทดสอบจากแบบทดสอบ
4. การประเมินผล ผู้เรียนจะต้องได้คะแนนรวมไม่ต่ำกว่าร้อยละ 60 จึงจะผ่านเกณฑ์การเรียนรู้

## บทที่ 3

### การบิดและการรับแรงของสปริง

การบิดเป็นสถานะที่วัตถุมีแรงมากระทำจนเกิดการเปลี่ยนแปลงรูปร่างในลักษณะหมุนรอบแกน บ่อยครั้งที่พบเห็นชิ้นส่วนเครื่องจักรหรือสิ่งก่อสร้างอยู่ภายใต้สภาวะบิด โดยสภาวะบิดสามารถเกิดขึ้นจากหลายสาเหตุ เช่น ชิ้นส่วนเครื่องจักรได้รับโมเมนต์บิดที่ถูกส่งต่อมาจากมอเตอร์ หรือชิ้นส่วนโครงสร้างเชื่อมต่อกันแล้วเกิดแรงเยื้องศูนย์กลางจนเกิดการเปลี่ยนแปลงรูปร่างในลักษณะบิด เป็นต้น ในขณะที่สปริงชนิดต่าง ๆ ที่มีการใช้งานอย่างแพร่หลายก็อยู่ภายใต้สภาวะบิดเช่นกัน เพื่อให้เข้าใจพื้นฐานความรู้ของวัตถุภายใต้สภาวะบิด บทนี้จึงมุ่งเน้นนำเสนอเพลากลมภายใต้การบิด ที่เลือกนำเสนอเพลากลมเนื่องจากมีพฤติกรรมการรับแรงไม่ซับซ้อนเมื่อเปรียบเทียบกับวัตถุรูปทรงอื่น นอกจากนี้ยังนำเสนอพฤติกรรมการรับแรงของสปริงด้วยโดยเลือกอธิบายสปริงม้วนซึ่งเป็นสปริงพื้นฐาน

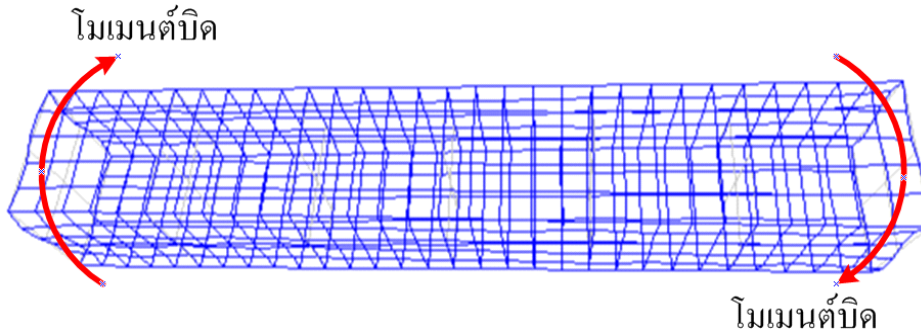
#### ความเค้นและความเครียดเนื่องจากการบิด

การบิด (Torsion) เป็นสถานะที่วัตถุมีแรงมากระทำในทิศทางตั้งฉากกับแนวแกนจนทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงรูปร่างในลักษณะหมุนรอบแกนดังแสดงในภาพที่ 3.1 แรงที่กระทำนี้เรียกว่า แรงบิด (Twisting Forces) ซึ่งทำให้เกิดโมเมนต์บิด (Twisting Moment หรือ Torque) ค่าโมเมนต์บิดนี้สามารถหาได้จากผลคูณระหว่างแรงบิดกับระยะตั้งฉากจากแรงบิดถึงศูนย์กลางวงพื้นที่หน้าตัดของวัตถุที่ถูกแรงกระทำ ความเค้นจากการบิด (Torsional Stress) และความเครียดจากการบิด (Torsional Strain) เป็นสถานะที่ชิ้นงานเกิดแรงต้านภายในเนื่องจากมีโมเมนต์บิดมากระทำจนมีการเปลี่ยนแปลงรูปร่างในลักษณะบิดตามทิศทางของโมเมนต์ที่กระทำ การวิบัติของวัตถุภายใต้การบิดจะมีลักษณะเป็นรอยร้าวเนื่องจากแรงเฉือนเป็นมุมเฉียงกับแนวแกนดังแสดงในภาพที่ 3.2 ชาญ อดุลงาน (2523 : 205-212) ลีริศศักดิ์ ปโยธรศิริ (2549 : 99-102) Hearn E. J. (2000 : 176-185) และ James M. Gere and Stephen P. Timoshenko (1991 : 158-162) กล่าวถึงการหาความเค้นและความเครียดของเพลากลมภายใต้การบิดไว้ดังต่อไปนี้

สมมติฐานในการสามารถคำนวณเพลากลมภายใต้การบิดคือ

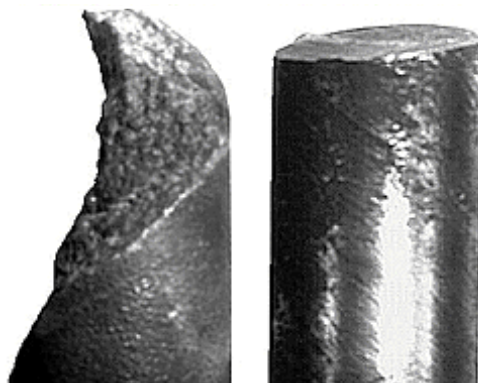
1. เพลที่รับการบิดจะมีหน้าตัดเท่ากันตลอดความยาว
2. หน้าตัดของเพลาก่อนและหลังการบิดจะยังคงเป็นหน้าตัดรูปวงกลมตลอดความยาวของเพล
3. ระบายตามแนวยาวของเพลาก่อนบิดและหลังบิดยังคงรักษาความเป็นระนาบเช่นเดิม

4. ความเค้นและความเครียดภายในวัสดุที่นำมาทำเป็นเพลจะต้องมีคุณสมบัติอยู่ในสภาวะยืดหยุ่น



ภาพที่ 3.1 การบิดของวัสดุ

ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556



ภาพที่ 3.2 การวิบัติของชิ้นงานเนื่องจากการบิด

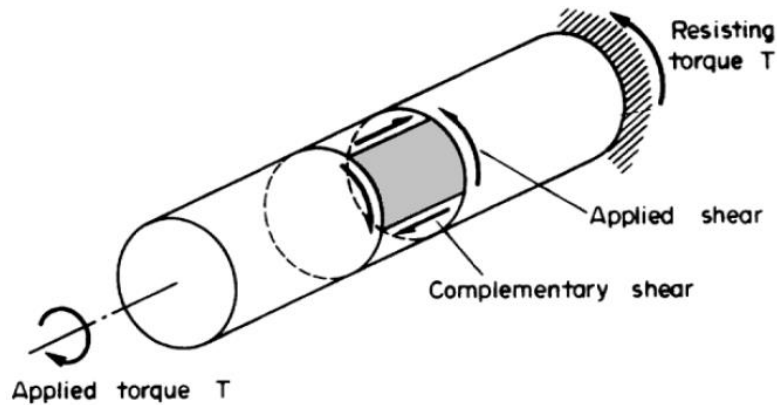
ที่มา : Civil Architectural and Environmental Engineering. 1997

เมื่อเพลากลมที่มีความยาว  $L$  และฐานถูกยึดแน่นที่จุด  $A$  ส่วนปลายอิสระมีโมเมนต์บิดหรือทอร์ก  $T$  กระทำก็จะเกิดการเปลี่ยนแปลงรูปร่าง เมื่อพิจารณาการเปลี่ยนแปลงรูปร่างที่ผิวภายนอกของเพลากลมภายใต้การบิดพบว่ารูปร่างเปลี่ยนไปในลักษณะเอียงเป็นมุมเฉียงเนื่องจากแรงเฉือนดังแสดงในภาพที่ 3.3 และเมื่อพิจารณาดำแหน่งตามแนวรัศมีของหน้าตัดเพลพบว่ามีการเปลี่ยนตำแหน่งไปตามทิศทางที่โมเมนต์บิดกระทำดังแสดงในภาพที่ 3.4 โดยแนวเส้นตรง  $AB$  จากฐานเพลไปยังปลายเพลจะเปลี่ยนตำแหน่งเป็นแนว  $AB'$  เมื่อ  $B'$  เป็นตำแหน่งผิวด้านนอกของปลายเพลที่เปลี่ยนไปจากตำแหน่งเดิม ถ้าการเปลี่ยนแปลงรูปร่างดังกล่าวมีค่าไม่มากและอยู่ในช่วงยืดหยุ่นก็สามารถสมมติให้แนว  $AB'$  ยังคงเป็นเส้นตรง โดยให้



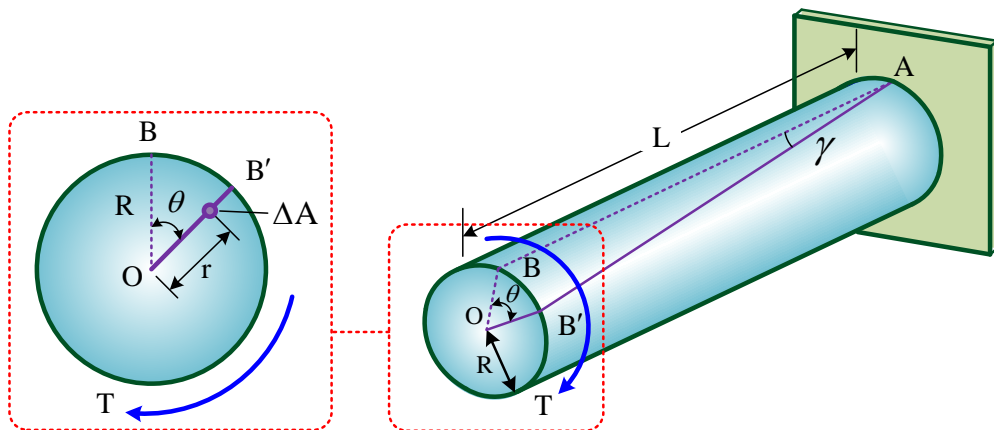
มุมบิดระหว่างแนว AB และ AB' จะเอียงเป็นมุม  $\gamma$  หรือเรียกว่า ความเครียดจากการบิด และหน้าตัดที่ตำแหน่งปลายเพลลาหมุนรอบจุดศูนย์กลางไปเป็นมุมบิด  $\theta$  ความสัมพันธ์ระหว่างมุมทั้งสองสามารถหาได้จากสมการต่อไปนี้

$$\text{ความเครียด } \gamma = \frac{BB'}{L} = \frac{R\theta}{L} \quad (3.1)$$



ภาพที่ 3.3 แรงต้านการบิดของเพลลากลม

ที่มา : Hearn E. J. 2000 : 177

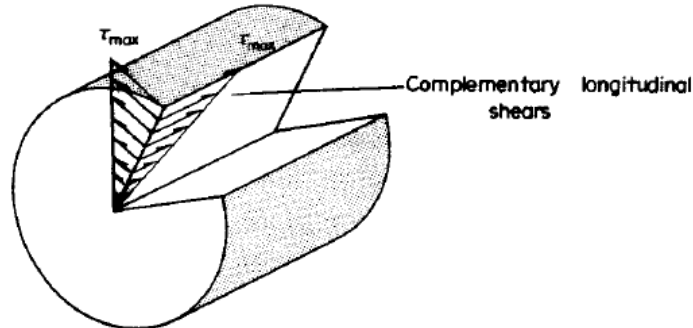


ภาพที่ 3.4 การเปลี่ยนแปลงรูปร่างของเพลลาภายใต้การบิด

ที่มา : จีรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

ในขณะที่มีโมเมนต์บิดกระทำต่อเพลลาให้เสียรูปร่าง เพลลาที่จะออกแรงต้านจนเกิดเป็นความเค้นขึ้นภายในเพื่อรักษาภาวะสมดุล ความเค้นดังกล่าวคือความเค้นเฉือน  $\tau$  หรืออาจเรียกว่าความเค้นบิด ความเค้นเฉือนที่เกิดขึ้นจะกระจายตัวในลักษณะเชิงเส้นดังแสดงในภาพที่ 3.5 โดยที่ความเค้นจะเป็นศูนย์ที่จุดศูนย์กลางของเพลลาและจะค่อย ๆ เพิ่มขึ้นจนกระทั่งเกิดความ

เค้นเฉือนสูงสุดที่ผิวด้านนอกของเพลลา หรืออาจกล่าวได้ว่าความเค้นที่เกิดขึ้นบนหน้าตัดเพลลา จะแปรผันตรงกับระยะรัศมีดังสมการ



ภาพที่ 3.5 การกระจายความเค้นภายในเพลลากลม

ที่มา : Hearn E. J. 2000 : 181

$$\tau_r = \frac{\tau r}{R} \quad (3.2)$$

เมื่อพิจารณาพื้นที่  $\Delta A$  ซึ่งห่างจากจุดศูนย์กลางเป็นระยะ  $r$  จะได้ค่าความเค้นเฉือนดังสมการ

$$\Delta A = \frac{\tau r}{R} \Delta A \quad (3.3)$$

โมเมนต์บิดจากแรงเฉือนของพื้นที่  $\Delta A$  รอบจุดศูนย์กลางมีค่าเท่ากับ

$$T = \left( \frac{\tau r}{R} \Delta A \right) r = \frac{\tau r^2}{R} \Delta A \quad (3.4)$$

ดังนั้น โมเมนต์บิดจากแรงเฉือนของพื้นที่หน้าตัดเพลลาทั้งหมดจะมีค่าเท่ากับ

$$T = \sum \frac{\tau r^2}{R} \Delta A \quad (3.5)$$

เมื่อเทอม  $\sum r^2 \Delta A$  เป็นค่าโมเมนต์ความเฉื่อยเชิงขั้ว (Polar Moment of Inertia :  $J$ ) ของหน้าตัดเพลลา ฉะนั้น โมเมนต์บิดจะมีค่าเท่ากับ

$$T = \frac{\tau J}{R} \quad (3.6)$$

จากกฎของฮุกครณีวัตอยู่ภายใต้ความเค้นเฉือนพบว่าค่าโมดูลัสความคงรูปเป็นอัตราส่วนระหว่างความเค้นและความเครียดเฉือนดังสมการ

$$G = \frac{\tau}{\gamma} \quad (3.7)$$

แทนค่ามุม  $\gamma$  ในเทอมของโมดูลัสความคงรูปและความเค้นเฉือนจะได้

$$\tau = \frac{GR\theta}{L} \quad (3.8)$$

ดังนั้นโมเมนต์บิด  $T$  และมุมบิด  $\theta$  ที่ได้จากการแทนด้วยความเค้นเฉือนจึงมีค่าเท่ากับ

$$T = \frac{G\theta J}{L} \quad (3.9)$$

$$\theta = \frac{TL}{GJ} \quad (3.10)$$

จะเห็นว่ามุมบิด  $\theta$  ของเพลามีความสัมพันธ์กับโมเมนต์บิด ความยาวของเพล โมดูลัสความคงรูป และโมเมนต์ความเฉื่อยรอบจุดศูนย์กลาง และสามารถเขียนอยู่ในรูปสมการได้อีก  
 อย่างคือ

$$\frac{\tau}{R} = \frac{T}{J} = \frac{G\theta}{L} \quad (3.11)$$

เมื่อ  $R$  คือรัศมีของเพลากลม และ  $\theta$  คือมุมบิดของเพลที่เปลี่ยนแปลงไปโดยมีหน่วยเป็นเรเดียน (Radian : rad) ตามลำดับ ในกรณีของเพลากลมตัน (Solid Shafts) ดังแสดงในภาพที่ 3.6 โมเมนต์ความเฉื่อยเชิงขั้ว  $J$  ของเพลสามารถหาได้จากสมการ

$$J = \frac{\pi D^4}{32} \quad (3.12)$$

หรือ  $J = \frac{\pi R^4}{2}$  (3.13)

ส่งผลให้มุมบิด  $\theta$  ของเพลากลมตันหาได้จากสมการ

$$\theta = \frac{TL}{G} \times \frac{32}{\pi D^4} \quad (3.14)$$

หรือ  $\theta = \frac{TL}{G} \times \frac{2}{\pi R^4}$  (3.15)

และความเค้นเฉือนสูงสุดที่บริเวณผิวด้านนอกของเพลากลมตันหาได้จากสมการ

$$\tau_{\max} = \frac{16T}{\pi D^3} = \frac{2T}{\pi R^3} \quad (3.16)$$

กรณีเพลากลมกลวง (Hollow Shafts) ดังแสดงในภาพที่ 3.6 ค่าโมเมนต์ความเฉื่อยเชิงขั้ว  $J$  ของเพลสามารถหาได้จากสมการ

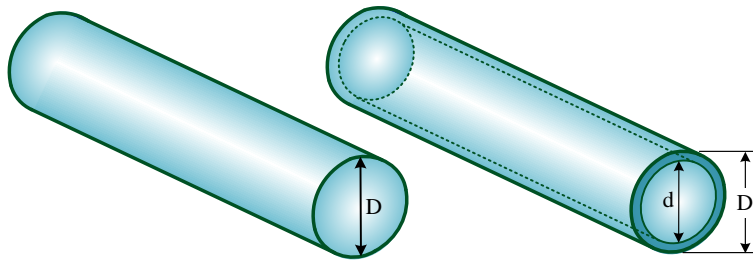
$$J = \frac{\pi}{32}(D^4 - d^4) = \frac{\pi}{2}(R^4 - r^4) \quad (3.17)$$

ส่งผลให้มุมบิด  $\theta$  ของเพลากลมกลวงหาได้จากสมการ

$$\theta = \frac{TL}{G} \times \frac{32}{\pi(D^4 - d^4)} = \frac{TL}{G} \times \frac{2}{\pi(R^4 - r^4)} \quad (3.18)$$

และความเค้นเฉือนสูงสุดที่บริเวณผิวด้านนอกของเพลากลมกลวงหาได้จากสมการ

$$\tau_{(\max)} = \frac{16TD}{\pi(D^4 - d^4)} = \frac{2TR}{\pi(R^4 - r^4)} \quad (3.19)$$



ภาพที่ 3.6 หน้าตัดของเพลากลมตันและเพลากลมกลวง

ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

ตัวอย่างที่ 3.1 เพลากลมยาว 20 m มีขนาดเส้นผ่าศูนย์กลางภายนอก 8 cm และเส้นผ่าศูนย์กลางภายใน 6 cm จงคำนวณหาความเค้นเฉือนสูงสุดและมุมบิดที่เกิดขึ้นถ้าเพลานี้รับโมเมนต์บิด 150 kg-m กำหนดให้เหล็กมีค่าโมดูลัสความคงรูป  $G = 8.5 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \text{ความเค้นเฉือนสูงสุด ;} \quad \tau_{\max} &= \frac{2TR}{\pi(R^4 - r^4)} \\ &= \frac{2 \times 15,000 \times 4}{\pi(4^4 - 3^4)} \\ &= 218.27 \text{ kg/cm}^2 \end{aligned}$$

ความเค้นเฉือนสูงสุดในเพลามีค่าเท่ากับ 218.27 kg/cm<sup>2</sup>

ตอบ

มุมบิดที่เกิดขึ้นเนื่องจากความเค้นเฉือนสูงสุด

$$\begin{aligned} \text{มุมบิด ;} \quad \theta &= \frac{TL}{G} \times \frac{2}{\pi(R^4 - r^4)} \\ &= \frac{15,000 \times 2,000}{8.5 \times 10^5} \times \frac{2}{\pi(4^4 - 3^4)} \\ &= 0.128 \text{ rad} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{หรือ} \quad \theta &= 0.128 \times \frac{180}{\pi} \\ &= 7.33^\circ \end{aligned}$$

มุมบิดสูงสุดที่เกิดขึ้นในเพลามีค่าเท่ากับ  $7.33^\circ$  ตอบ

**ตัวอย่างที่ 3.2** จงคำนวณ โมเมนต์บิดที่เกิดขึ้นในเพลาลูกดันขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง 15 cm กำหนดให้เหล็กมีความเค้นเฉือนได้ไม่เกิน  $400 \text{ kg/cm}^2$  และมีค่าโมดูลัสความคงรูป  $G = 8.5 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$  โดยทุกระยะ 1 m เพลานี้จะเกิดมุมบิดได้ไม่เกิน  $0.5^\circ$

#### วิธีทำ

กรณีที่ 1 หาโมเมนต์บิดที่เกิดขึ้นเมื่อเพลาก่อเกิดความเค้นเฉือนสูงสุด

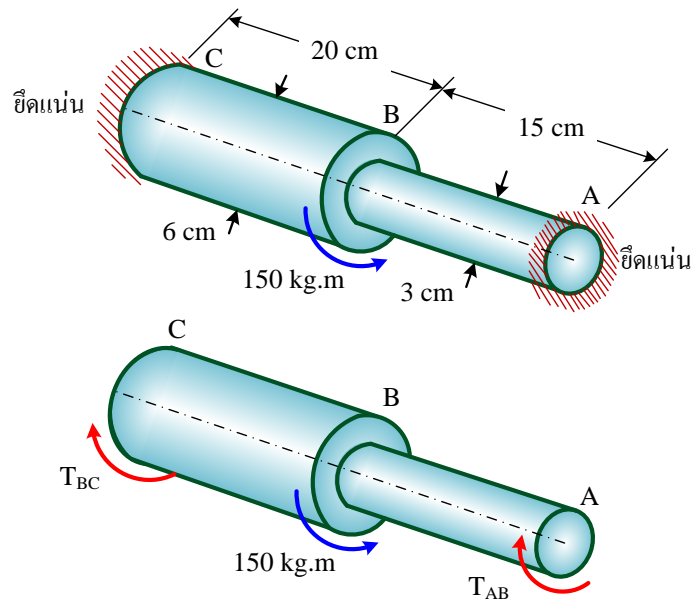
$$\begin{aligned} \text{ความเค้นเฉือนสูงสุด ;} \quad \tau_{\max} &= \frac{2T}{\pi R^3} \\ \text{โมเมนต์บิด ;} \quad T &= \frac{\pi R^3}{2} \tau_{\max} \\ &= \frac{\pi (7.5^3)}{2} \times 400 \\ &= 265,071.88 \text{ kg-cm หรือ } 2,650.72 \text{ kg-m} \end{aligned}$$

กรณีที่ 2 หาโมเมนต์บิดที่เกิดขึ้นเมื่อเพลาก่อมุมบิด  $0.5^\circ$  หรือ  $0.0087 \text{ rad}$

$$\begin{aligned} \text{มุมบิด ;} \quad \theta &= \frac{TL}{G} \times \frac{2}{\pi R^4} \\ \text{โมเมนต์บิด ;} \quad T &= \frac{G\theta}{L} \times \frac{\pi R^4}{2} \\ &= \frac{8.5 \times 10^5 \times 0.0087}{100} \times \frac{\pi (7.5^4)}{2} \\ &= 367,538.73 \text{ kg-cm หรือ } 3,675.39 \text{ kg-m} \end{aligned}$$

โมเมนต์บิดที่เพลานี้สามารถรับได้อย่างปลอดภัยคือ  $3,675.39 \text{ kg-m}$  ตอบ

**ตัวอย่างที่ 3.3** เพลาลูก AB ขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง 3 cm ยาว 15 cm ต่อกับเพลาทองเหลือง BC ขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง 6 cm ยาว 20 cm ดังแสดงในภาพที่ 3.7 ปลายเพลาทองเหลือง BC ข้างยึดแน่น จงคำนวณหาโมเมนต์บิดที่เกิดขึ้นในเพลาลูกแต่ละอันเมื่อมีโมเมนต์บิดกระทำที่จุดต่อ  $150 \text{ kg-m}$  กำหนดให้โมดูลัสความคงรูปของเหล็ก  $G_s = 8.5 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$  และโมดูลัสความคงรูปของทองเหลือง  $G_{ab} = 4.5 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$



ภาพที่ 3.7 เพลลาเหล็กต่อกับเพลาทองเหลือง

ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

### วิธีทำ

หาสมการสมดุลของโมเมนต์บิดในเพลทั้งสอง

$$T_{AB} + T_{BC} = 150$$

หาสมการสมดุลของมุมบิดที่เกิดขึ้นกับเพลที่จุดเชื่อมต่อ

$$\begin{aligned} \theta_{AB} &= \theta_{BC} \\ \left[ \frac{TL}{G} \times \frac{2}{\pi R^4} \right]_{AB} &= \left[ \frac{TL}{G} \times \frac{2}{\pi R^4} \right]_{BC} \\ \frac{T_{AB} \times 15}{8.5 \times 10^5} \times \frac{2}{\pi (1.5)^4} &= \frac{T_{BC} \times 20}{4.5 \times 10^5} \times \frac{2}{\pi (3)^4} \\ 2.219 \times 10^{-6} T_{AB} &= 0.349 \times 10^{-6} T_{BC} \\ T_{AB} &= \left( \frac{0.349 \times 10^{-6}}{2.219 \times 10^{-6}} \right) T_{BC} \\ T_{AB} &= (0.157) T_{BC} \end{aligned}$$

นำสมการทั้งสองมาสัมพันธ์กันจะได้

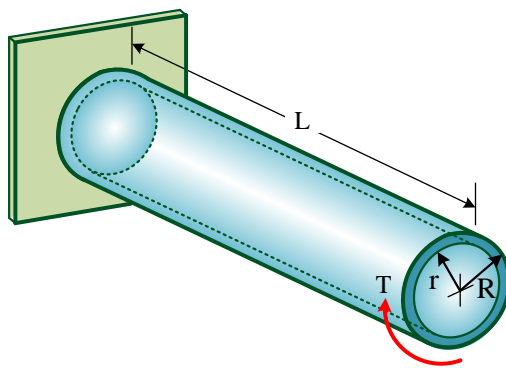
$$\begin{aligned} (0.157) T_{BC} + T_{BC} &= 150 \\ T_{BC} &= \frac{150}{(0.157 + 1)} \end{aligned}$$

โมเมนต์บิดในท่อนทองเหลือง ;  $T_{BC} = 129.65 \text{ kg-m}$

ตอบ

$$\begin{aligned} \text{แทนค่า } T_{BC} ; \quad T_{AB} &= (0.157) \times 129.65 \\ \text{โมเมนต์บิดในท่อนเหล็ก ; } T_{AB} &= 20.36 \text{ kg-m} \end{aligned} \quad \text{ตอบ}$$

ตัวอย่างที่ 3.4 เฟลากรวงทำด้วยเหล็กกล้ายาว 1.5 m มีขนาดเส้นผ่าศูนย์กลางภายใน 40 mm และขนาดเส้นผ่าศูนย์กลางภายนอก 60 mm ดังแสดงในภาพที่ 3.8 จงหาโมเมนต์บิดสูงสุดที่เฟลานี้สามารถรับได้อย่างปลอดภัย ถ้ากำหนดให้เหล็กกล้าสามารถรับความเค้นเฉือนได้ไม่เกิน 120 MPa

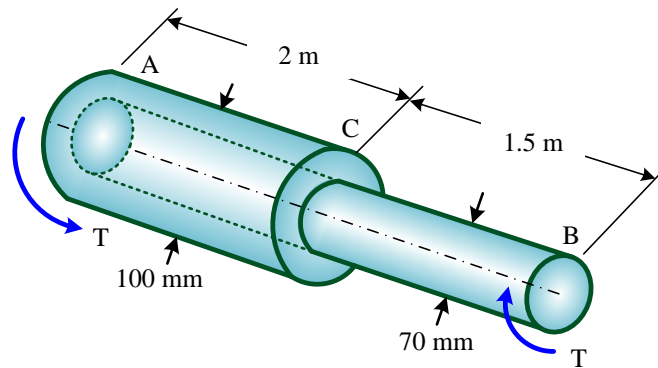


ภาพที่ 3.8 เฟลาหน้าตัดรูปวงแหวน  
ที่มา : จีรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

#### วิธีทำ

$$\begin{aligned} \text{ความเค้นเฉือนสูงสุด ; } \tau_{\max} &= 120 \text{ MPa} \\ \text{รัศมีภายในท่อ ; } r &= \frac{40}{2,000} = 0.02 \text{ m} \\ \text{รัศมีภายนอกท่อ ; } R &= \frac{60}{2,000} = 0.03 \text{ m} \\ \text{โมเมนต์ความเฉื่อยเชิงขั้ว ; } J &= \frac{\pi}{2}(R^4 - r^4) \\ &= \frac{\pi}{2}(0.03^4 - 0.02^4) \\ &= 1.021 \times 10^{-6} \text{ m}^4 \\ \text{โมเมนต์บิด ; } T &= \frac{J\tau_{\max}}{R} \\ &= \frac{(1.021 \times 10^{-6})(120 \times 10^6)}{0.03} \\ &= 4,084 \text{ N-m} \end{aligned} \quad \text{ตอบ}$$

ตัวอย่างที่ 3.5 เพลาลเหล็กกล้าสองช่วงประกอบด้วยเพลากลวงยาว 2 m มีขนาดเส้นผ่าศูนย์กลางภายใน 70 mm และเส้นผ่าศูนย์กลางภายนอก 100 mm ส่วนเพล่อีกช่วงเป็นเพลาดันยาว 1.5 m มีขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง 70 mm ดังแสดงในภาพที่ 3.9 จงหาโมเมนต์บิดสูงสุดที่เพลานี้สามารถรับได้อย่างปลอดภัย กำหนดให้เหล็กกล้าสามารถรับความเค้นเฉือนได้ไม่เกิน 70 MPa และมีค่าโมดูลัสความคงรูป  $G = 83 \text{ GPa}$  โดยเพลาทองช่วงสามารถบิดได้ไม่เกิน  $2.5^\circ$



ภาพที่ 3.9 เพลาสองช่วงทำจากเหล็กกล้า

ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

### วิธีทำ

กรณีที่ 1 หาโมเมนต์บิดที่เกิดขึ้นเมื่อเพลากเกิดความเค้นเฉือนสูงสุดซึ่งเกิดกับเพล AC

$$\begin{aligned}
 \text{ความเค้นเฉือนเพล AC ;} \quad \tau_{\max} &= \frac{2Tr_0}{\pi(r_0^4 - r_1^4)} \\
 &= \frac{16Td_0}{\pi(d_0^4 - d_1^4)} \\
 \text{โมเมนต์บิด;} \quad T &= \frac{\tau_{\max} \pi(d_0^4 - d_1^4)}{16d_0} \\
 &= \frac{(70 \times 10^6) \pi(0.1^4 - 0.07^4)}{16 \times 0.1} \\
 &= 10,444.42 \text{ N-m}
 \end{aligned}$$

กรณีที่ 2 หาโมเมนต์บิดที่เกิดขึ้นเมื่อเพลาทองช่วงเกิดมุมบิด  $2.5^\circ$  หรือ  $0.0436 \text{ rad}$

$$\text{มุมบิดรวม ;} \quad \theta_{B/A} = \theta_{B/C} + \theta_{C/A}$$

$$\text{มุมบิดเพล BC ;} \quad \theta_{B/C} = \left( \frac{TL}{JG} \right)_{BC}$$

$$\text{มุมบิดเพล AC ;} \quad \theta_{C/A} = \left( \frac{TL}{JG} \right)_{AC}$$



$$0.0436 = \left( \frac{(T \times 1.5)}{\left( \frac{\pi \times 0.07^4}{32} \right) \times (83 \times 10^9)} \right) + \frac{(T \times 2)}{\left( \frac{\pi \times (0.1^4 - 0.07^4)}{32} \right) \times (83 \times 10^9)}$$

$$\begin{aligned} \text{โมเมนต์บิด;} \quad T &= \frac{0.0436}{(7.667 + 3.23) \times 10^{-6}} \\ &= 4,001.1 \text{ N-m} \end{aligned}$$

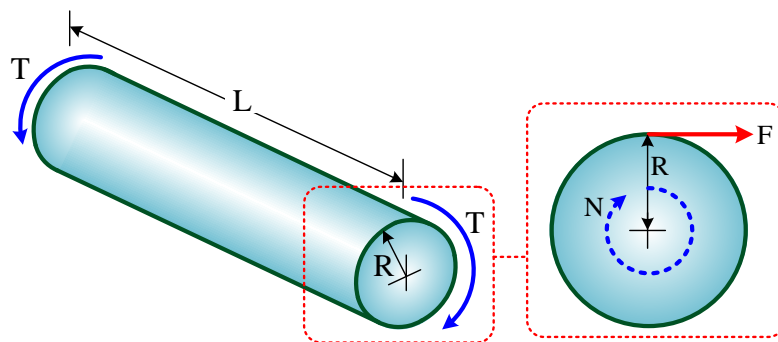
โมเมนต์บิดสูงสุดที่เพลาสารารถรับได้คือ 4,001.1 N-m

ตอบ

### การส่งกำลังของเพลลา

การส่งกำลังของเพลลา (Power Transmission by Shafts) เป็นการส่งถ่ายการหมุนจากแหล่งกำเนิดผ่านเพลลาไปยังอุปกรณ์อื่น แหล่งกำเนิดกำลังที่พบเห็นทั่วไป เช่น เครื่องยนต์ หรือมอเตอร์ไฟฟ้า เป็นต้น ประสิทธิภาพของการส่งกำลังของเพลลามีความสัมพันธ์กับโมเมนต์บิดและความเร็วในการหมุน เมื่อเกิดโมเมนต์บิดขึ้นย่อมทำให้เพลลานั้นเกิดความเค้นและความเครียดตามมา หรืออาจกล่าวได้ว่าถ้ามอเตอร์ไฟฟ้ามีกำลังสูงแสดงว่ามอเตอร์นั้นสามารถทำให้เกิดโมเมนต์บิดในเพลลามากด้วย ถ้าสมมติให้เพลลากลมยาว  $L$  รับโมเมนต์บิด  $T$  และเกิดการหมุนด้วยความเร็วเชิงมุม  $\omega$  มีหน่วยเป็นเรเดียนต่อหน่วยเวลาดังแสดงในภาพที่ 3.10 กำลังที่เกิดกับเพลลาจะสามารถหาได้จากสมการต่อไปนี้ (สิริศักดิ์ ปโยชรสิริ, 2549 : 108-109 และ James M. Gere and Barry J. Goodno, 2012 : 202-203)

$$P = T\omega \quad (3.20)$$



ภาพที่ 3.10 แรงกระทำกับเพลลาหมุน

ที่มา : จีระวัฒน์ วิมุตติสุขวิริยา, 2556

เมื่อพิจารณาเพลลาที่โมเมนต์บิด  $T$  เกิดจากแรง  $F$  กระทำกับที่รัศมี  $R$  แล้วทำให้เพลลาหมุนด้วยความเร็ว  $N$  รอบต่อนาที พบว่ากำลังที่เกิดขึ้นเมื่อเพลลาหมุนไป 1 รอบซึ่งทำให้แรง  $F$

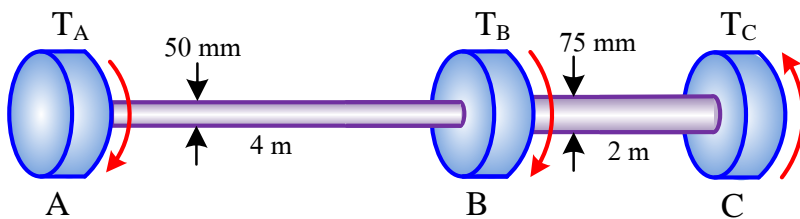
เคลื่อนที่ไปเป็นระยะทาง  $2\pi R$  จะมีค่าเท่ากับ  $2\pi R\omega$  เมื่อ  $\omega$  เท่ากับ  $2\pi N$  และถ้าเพลามี  $N$  รอบต่อวินาทีก็จะได้อัตรากำลังสมการต่อไปนี้

$$P = 2\pi RFN = 2\pi TN \quad (3.21)$$

หน่วยของกำลังที่ได้จากสมการข้างต้นนิยมทำให้อยู่ในรูปของกำลังม้า (Horse Power) ซึ่งมีความสัมพันธ์กับหน่วยอื่นดังต่อไปนี้

$$1 \text{ กำลังม้า} = 550 \text{ ft-lb/s} = 76.06 \text{ kg-m/s} = 746 \text{ watts}$$

**ตัวอย่างที่ 3.6** เพลาส่งกำลังทำจากเหล็กกล้าดังแสดงในภาพที่ 3.11 หมุนด้วยความเร็ว 3 รอบต่อวินาที จงหาความเค้นเฉือนสูงสุดที่เกิดขึ้นในเพลลา ถ้าเฟือง A วัดกำลังได้เท่ากับ 30 kw เฟือง B วัดกำลังได้เท่ากับ 15 kw และเฟือง C วัดกำลังได้เท่ากับ 45 kw กำหนดให้เหล็กกล้ามีค่าโมดูลัสความเค้นรูป  $G = 83 \text{ GPa}$



**ภาพที่ 3.11** เพลาส่งกำลังทำจากเหล็กกล้า

ที่มา : จีรวัดณ์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

**วิธีทำ**

อัตราเร็วเชิงมุม ;  $\omega = 2\pi N = 2 \times \pi \times 3 = 18.85 \text{ rad/วินาที}$

โมเมนต์บิดจากกำลังขับที่เฟือง ;  $T = \frac{P}{\omega}$

โมเมนต์บิดจากเฟือง A ;  $T_A = \frac{30 \times 10^3}{18.85} = 1,591.51 \text{ N-m}$

โมเมนต์บิดจากเฟือง B ;  $T_B = \frac{15 \times 10^3}{18.85} = 795.76 \text{ N-m}$

โมเมนต์บิดจากเฟือง C ;  $T_C = \frac{45 \times 10^3}{18.85} = 2,387.27 \text{ N-m}$

ความเค้นเฉือนในเพลาดัน ;  $\tau = \frac{Tr}{J} = \frac{16T}{\pi d^3}$

$$\text{ความเค้นเฉือนของเพลลา AB ; } \tau_{AB} = \frac{16 \times 1,592.51}{\pi \times 0.05^3}$$

$$= 64,884.69 \text{ N/m}^2 \text{ หรือ } 64.88 \text{ kPa}$$

$$\text{ความเค้นเฉือนของเพลลา BC ; } \tau_{BC} = \frac{16 \times 2,387.27}{\pi \times 0.075^3}$$

$$= 28,819.59 \text{ N/m}^2 \text{ หรือ } 28.82 \text{ kPa}$$

ความเค้นเฉือนสูงสุดที่เกิดในเพลลาเท่ากับ 64.88 kPa

ตอบ

**ตัวอย่างที่ 3.7** จงหาขนาดของเพลลาตันที่สามารถส่งกำลัง 300 แรงม้า ด้วยความเร็ว 2,000 รอบต่อชั่วโมง ถ้ากำหนดให้เพลลาสามารถรับความเค้นเฉือนได้ไม่เกิน  $400 \text{ kg/cm}^2$

**วิธีทำ**

ความเร็วในการหมุน 2,000 รอบต่อชั่วโมงเท่ากับ 33.33 รอบต่อนาที

$$\text{โมเมนต์บิดจากกำลังขับ ; } T = \frac{P}{2\pi N}$$

$$= \frac{300 \times 746}{2\pi \times 33.33}$$

$$= 1,068.67 \text{ N-m หรือ } 108.94 \text{ kg-m}$$

$$\text{ความเค้นเฉือนในเพลลา ; } \tau = \frac{16T}{\pi D^3}$$

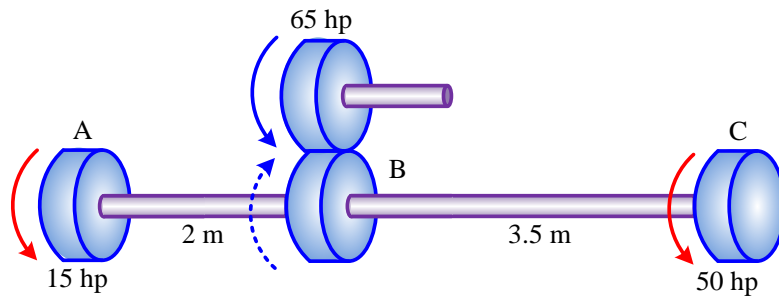
$$\text{ขนาดเส้นผ่าศูนย์กลางเพลลา ; } D = \left( \frac{16T}{\pi \tau} \right)^{1/3}$$

$$= \left( \frac{16 \times 108.94 \times 100}{\pi \times 400} \right)^{1/3}$$

$$= 6.13 \text{ cm}$$

ตอบ

**ตัวอย่างที่ 3.8** เพลลาเหล็กขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง 4 cm ดังแสดงในภาพที่ 3.12 ช่วง AB ยาว 2 m และช่วง BC ยาว 3.5 m ส่งกำลัง 65 แรงม้า จากมอเตอร์ไฟฟ้าที่จุด B เมื่อเพลลาหมุนด้วยความเร็ว 300 รอบต่อชั่วโมง ทำให้เกิดกำลังส่งไปที่จุด A เท่ากับ 15 แรงม้า และที่จุด C เท่ากับ 50 แรงม้า จงคำนวณหาโมเมนต์บิดระหว่างจุด A และจุด C ถ้ากำหนดให้เหล็กมีค่าโมดูลัสความคงรูป  $G = 8.5 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$



ภาพที่ 3.12 เฟลาเหล็กใช้สำหรับส่งกำลัง

ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิทยา. 2556

### วิธีทำ

$$\begin{aligned} \text{ความเร็วในการหมุน ; } N &= 300 \text{ รอบต่อชั่วโมง} \\ &= \frac{300}{60} = 5 \text{ รอบต่อนาที} \end{aligned}$$

$$\text{โมเมนต์บิดจากกำลังขับ ; } T = \frac{P}{2\pi N}$$

$$\text{โมเมนต์บิดในเฟลา AB ; } T_{AB} = \frac{15 \times 746}{2\pi \times 5 \times 9.81} = 36.31 \text{ kg-m}$$

$$\text{โมเมนต์บิดในเฟลา BC ; } T_{BC} = \frac{50 \times 746}{2\pi \times 5 \times 9.81} = 121.03 \text{ kg-m}$$

$$\begin{aligned} \text{มุมบิดที่จุด C เทียบกับ B ; } \theta_{CB} &= \left[ \frac{TL}{G} \times \frac{2}{\pi R^4} \right]_{CB} \\ &= \frac{(121.03 \times 100)(3.5 \times 100) \times 2}{8.5 \times 10^5 \times \pi \times 2^4} \\ &= 0.198 \text{ rad} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{มุมบิดที่จุด A เทียบกับ B ; } \theta_{AB} &= \left[ \frac{TL}{G} \times \frac{2}{\pi R^4} \right]_{AB} \\ &= \frac{(36.31 \times 100)(2 \times 100) \times 2}{8.5 \times 10^5 \times \pi \times 2^4} \\ &= 0.034 \text{ rad} \end{aligned}$$

เมื่อเฟลาหมุนจะทำให้เกิดมุมบิดระหว่างจุด A และจุด C โดยอ้างอิงจากจุด B

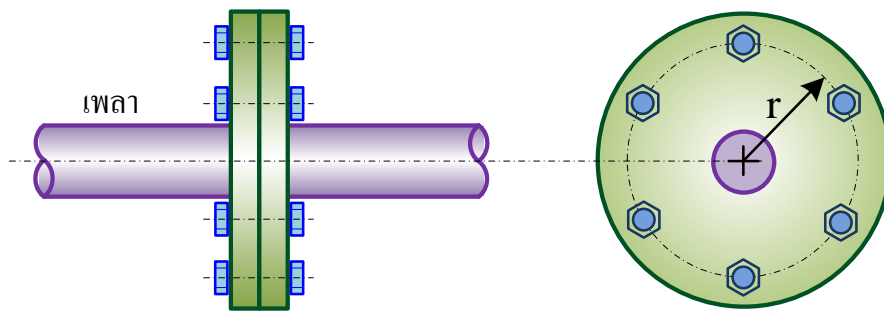
$$\begin{aligned} \text{มุมบิดที่จุด A เทียบกับ C ; } \theta_{CA} &= \theta_{CB} - \theta_{AB} \\ &= 0.198 - 0.034 \\ &= 0.164 \text{ rad หรือ } 9.4^\circ \end{aligned}$$

ตอบ

### การต่อเพลาโดยใช้ประกับหน้างาน

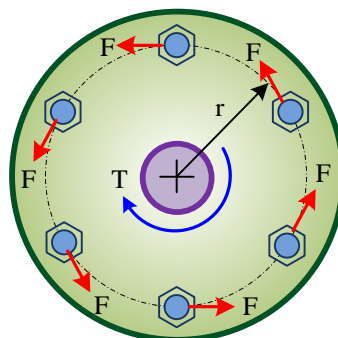
มนตรี พิรุณเกษตร (2544 : 222-224) และ สมโพธิ์ วิวิธเกยูรวงศ์ (2542 : 96-101) กล่าวว่า การต่อเพลาเพื่อส่งถ่ายกำลังสามารถกระทำได้ด้วยการใช้สลักเกลียวยึดประกับหน้างาน (Shaft Couplings) ดังแสดงในภาพที่ 3.13 โดยประกับหน้างานแต่ละด้านจะยึดแน่นกับเพลา และมีรูสำหรับขันสลักเกลียว สลักเกลียวแต่ละตัวจะต้องมีความแข็งแรงเพียงพอที่จะต้านทานความเค้นเฉือนที่เกิดขึ้นเนื่องจากโมเมนต์บิดได้ ความเค้นเฉือนในสลักเกลียวจะมีความสัมพันธ์กับจำนวนและตำแหน่งยึดบนประกับหน้างาน ถ้าพิจารณาเพลาที่ยึดด้วยสลักเกลียว  $n$  ตัว และสลักเกลียวแต่ละตัวห่างจากศูนย์กลางเพลาเป็นระยะรัศมี  $r$  ดังแสดงในภาพที่ 3.14 ดังนั้นความเค้นเฉือนที่เกิดในสลักเกลียวแต่ละตัวจะมีค่าเท่ากันทุกตัว ซึ่งสามารถนำความเค้นเฉือนดังกล่าวไปหาค่าโมเมนต์บิด  $T$  ได้จากผลรวมของแรงเฉือนในสลักเกลียวแต่ละตัวคูณด้วยรัศมีดังสมการต่อไปนี้

$$T = nFr = n\tau Ar \quad (3.22)$$



ภาพที่ 3.13 การต่อเพลาด้วยประกับหน้างาน

ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556



ภาพที่ 3.14 แรงที่เกิดในสลักเกลียว

ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

เมื่อพื้นที่หน้าตัดสลักเกลียวแต่ละตัวเท่ากับ  $A$  ดังนั้นสลักเกลียวแต่ละตัวรับแรงเฉือน

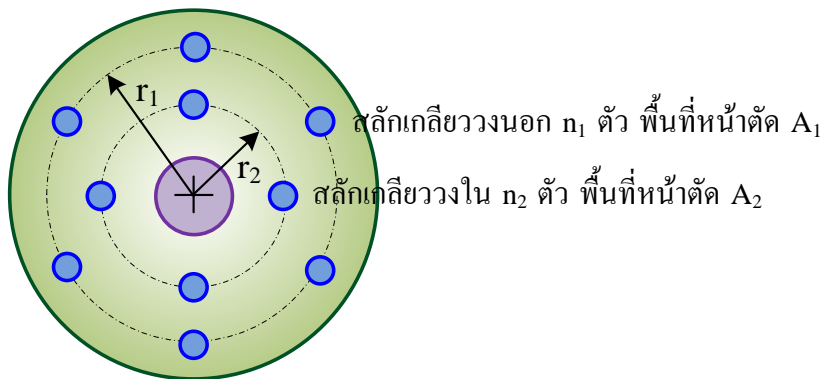
$$F = \tau A \quad (3.23)$$

และความเค้นเฉือนในสลักเกลียวสามารถหาได้จากสมการ

$$\tau = \frac{T}{rAn} \quad (3.24)$$

ในกรณีที่ประกบหน้างานยึดเพลลาโดยใช้สลักเกลียว 2 แถวดังแสดงในภาพที่ 3.15 ถ้าหากให้สลักเกลียวที่ยึดวงนอกมีจำนวน  $n_1$  ตัว แต่ละตัวมีพื้นที่หน้าตัด  $A_1$  รับความเค้นเฉือน  $\tau_1$  และมีระยะห่างจากจุดศูนย์กลางเพลลาเป็นระยะรัศมี  $r_1$  สำหรับวงในมีสลักเกลียวจำนวน  $n_2$  ตัว แต่ละตัวมีพื้นที่หน้าตัด  $A_2$  รับความเค้นเฉือน  $\tau_2$  และมีระยะห่างจากจุดศูนย์กลางเพลลาเป็นระยะรัศมี  $r_2$  ตามลำดับ เมื่อเพลลาส่งถ่ายโมเมนต์บิดไปยังประกบหน้างานก็จะทำให้เกิดแรงต้านขึ้นในสลักเกลียวแต่ละตัวและมีทิศทางตรงกันข้ามเพื่อให้เกิดการสมดุลดังแสดงในภาพที่ 3.15 จากความสัมพันธ์ดังกล่าวสามารถหาโมเมนต์บิด  $T$  ได้จากสมการต่อไปนี้

$$T = r_1 n_1 A_1 \tau_1 + r_2 n_2 A_2 \tau_2 \quad (3.25)$$



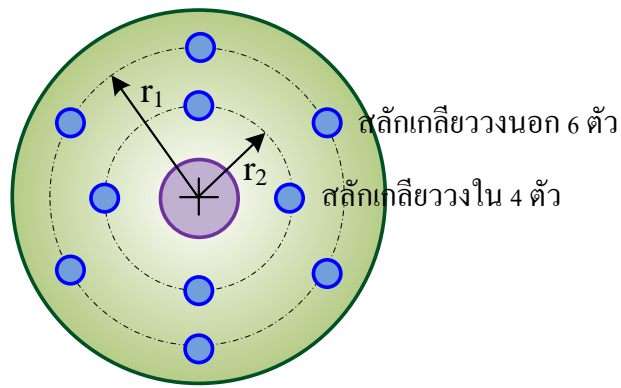
ภาพที่ 3.15 สลักเกลียวยึดประกบหน้างาน 2 แถว

ที่มา : จีรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

เมื่อพิจารณาความเค้นเฉือนที่เกิดขึ้นในสลักเกลียวแต่ละวงพบว่ามีความสัมพันธ์กับระยะรัศมีเช่นเดียวกับที่เกิดขึ้นในเพลลากลมรับโมเมนต์บิดที่กล่าวมาแล้วในหัวข้อก่อนหน้า ถ้ากำหนดให้ความเค้นเฉือน  $\tau_1$  เป็นความเค้นที่เกิดขึ้นในสลักเกลียววงนอกที่มีรัศมี  $r_1$  และความเค้นเฉือน  $\tau_2$  เป็นความเค้นที่เกิดขึ้นในสลักเกลียววงในที่มีรัศมี  $r_2$  แล้วจะสามารถสร้างความสัมพันธ์ระหว่างรัศมีและความเค้นเฉือนได้ดังสมการต่อไปนี้

$$\frac{\tau_1}{r_1} = \frac{\tau_2}{r_2} \quad (3.26)$$

ตัวอย่างที่ 3.9 ประกับหน้างานถูกยึดด้วยสลักเกลียวขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง 1.5 cm แบ่งเป็น 2 วง จากภาพที่ 3.16 โดยมีจำนวนสลักเกลียววงนอกจำนวน 6 ตัว และวงในจำนวน 4 ตัว ยึดห่างจาก จุดศูนย์กลางเพลามีรัศมีวงนอกเท่ากับ 20 cm และรัศมีวงในเท่ากับ 10 cm ถ้าสลักเกลียวแต่ละตัวสามารถรับความเค้นเฉือนได้ไม่เกิน  $350 \text{ kg/cm}^2$  จงหาค่าลึงสูงสุดที่ประกับหน้างานนี้สามารถรับได้เมื่อหมุนด้วยความเร็ว 315 รอบต่อชั่วโมง



ภาพที่ 3.16 สลักเกลียวยึดประกับหน้างานจำนวน 2 แถว

ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

#### วิธีทำ

ความเค้นเฉือนสลักเกลียววงนอก ;

$$\tau_1 = 350 \text{ kg/cm}^2$$

ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นเฉือนในสลักเกลียววงนอก  $\tau_1$  และวงใน  $\tau_2$

$$\begin{aligned} \tau_2 &= \frac{r_2}{r_1} \tau_1 \\ &= \frac{10}{20} \times 350 \\ &= 175 \text{ kg/cm}^2 \end{aligned}$$

โมเมนต์บิดที่เกิดขึ้น ;

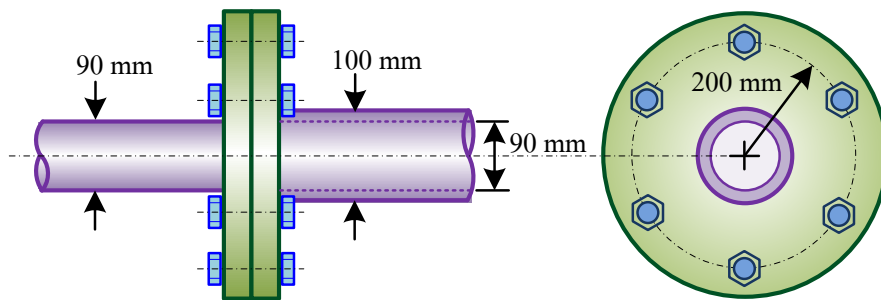
$$\begin{aligned} T &= r_1 n_1 A_1 \tau_1 + r_2 n_2 A_2 \tau_2 \\ &= \left\{ 20 \times 6 \left[ \frac{\pi}{4} \times (1.5)^2 \right] 350 \right\} + \left\{ 10 \times 4 \left[ \frac{\pi}{4} \times (1.5)^2 \right] 175 \right\} \\ &= 86,590.15 \text{ kg-cm หรือ } 865.9 \text{ kg-m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{หมุนด้วยความเร็ว ; } N &= \frac{315}{60} = 5.25 \text{ รอบต่อนาที} \\ \text{กำลังม้า ; } P_{\text{Power}} &= 0.0826 \text{ TN} \\ &= 0.0826 \times 865.9 \times 5.25 \\ &= 375.5 \text{ แรงม้า} \end{aligned}$$

ประกบหน้างานสามารถส่งกำลังได้ 375.5 แรงม้า

ตอบ

**ตัวอย่างที่ 3.10** ประกบหน้างานเชื่อมต่อเพลาดันที่มีขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง 90 mm เข้ากับเพลากลวงที่มีขนาดเส้นผ่าศูนย์กลางภายใน 90 mm และภายนอก 100 mm ดังแสดงในภาพที่ 3.17 จงหาว่าต้องใช้สลักเกลียวขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง 10 mm จำนวนกี่ตัวในการยึดประกบหน้างาน กำหนดให้ความเค้นเฉือนของเพลาดันและสลักเกลียวรับได้ไม่เกิน 60 MPa และแนวยึดสลักเกลียวห่างจากศูนย์กลาง 200 mm



**ภาพที่ 3.17** ประกบหน้างานเชื่อมต่อเพลาดันและเพลากลวง  
ที่มา : จีรวัดน์ วิมุตติสุขวิทยา. 2556

**วิธีทำ**

$$\begin{aligned} \text{ความเค้นเฉือนในเพลาดัน ; } \tau &= \frac{Tr}{J} \\ \text{หรือ} \quad \tau &= \frac{16T}{\pi d^3} \\ \text{โมเมนต์บิดที่เพลาดันรับได้ ; } T &= \frac{\tau \pi d^3}{16} \\ &= \frac{(60 \times 10^6) \times \pi \times 0.09^3}{16} \\ &= 8,588.33 \text{ N-m} \\ \text{ความเค้นเฉือนในเพลากลวง ; } \tau &= \frac{16Td_0}{\pi(d_0^4 - d_1^4)} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \text{โมเมนต์บิดที่เพลากลางรับได้ ; } T &= \frac{\tau\pi(d_o^4 - d_i^4)}{16d_o} \\
 &= \frac{(60 \times 10^6) \times \pi \times (0.1^4 - 0.09^4)}{16 \times 0.1} \\
 &= 4,051.48 \text{ N-m}
 \end{aligned}$$

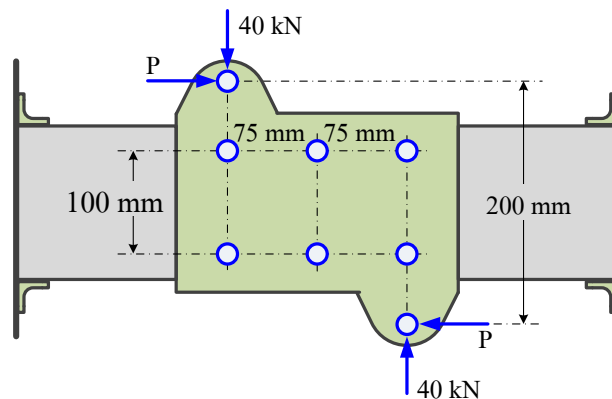
โมเมนต์บิดที่เพลากลางรับได้น้อยกว่าเพลาดันจึงใช้โมเมนต์บิดของเพลากลางในการออกแบบสลักเกลียวที่ยึดกับประกับหน้างาน

$$\begin{aligned}
 \text{โมเมนต์บิดที่ประกับหน้างาน ; } T &= PRn \\
 &= \frac{\pi}{4} d^2 \tau R n \\
 \text{จำนวนสลักเกลียว ; } n &= \frac{4T}{\pi d^2 \tau R} \\
 &= \frac{4 \times 4,051.48}{\pi \times 0.01^2 \times (60 \times 10^6) \times 0.1} \\
 n &= 8.6 \text{ ตัว}
 \end{aligned}$$

ใช้สลักเกลียวยึดประกับหน้างานจำนวน 9 ตัว

ตอบ

ตัวอย่างที่ 3.11 หมุดย้ำขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง 20 mm จำนวน 6 ตัว ยึดแผ่นโลหะเข้ากับคาน ยึดแน่นดังแสดงในภาพที่ 3.18 จงคำนวณหาความเค้นเฉือนในหมุดย้ำภายใต้แรงคู่ควบ 40 kN และจงหาแรงคู่ควบ P ที่ทำให้ความเค้นเฉือนในหมุดย้ำเท่ากับ 60 MPa



ภาพที่ 3.18 หมุดย้ำยึดแผ่นโลหะติดกับคาน

ที่มา : จีรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา, 2556

## วิธีทำ

$$\begin{aligned} \text{รัศมีสลักเกลียวแฉวนอก ; } R_1 &= \frac{1}{2} \sqrt{150^2 + 100^2} \\ &= 90.14 \text{ mm} \end{aligned}$$

$$\text{รัศมีสลักเกลียวแฉวใน ; } R_2 = 50 \text{ mm}$$

ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นเฉือนและรัศมี

$$\begin{aligned} \frac{\tau_1}{R_1} &= \frac{\tau_2}{R_2} \\ \tau_1 &= \frac{R_1}{R_2} \tau_2 \\ &= \left( \frac{90.14}{50} \right) \tau_2 \\ &= 1.803 \tau_2 \end{aligned}$$

$$\text{หรือ } \tau_2 = 0.555 \tau_1$$

ความเค้นเฉือนสูงสุดเกิดขึ้นที่สลักเกลียววงนอกระยะยาว 40 kN หาได้จาก

$$\begin{aligned} T &= P_1 R_1 n_1 + P_2 R_2 n_2 \\ &= \frac{\pi}{4} d^2 \tau_1 R_1 n_1 + \frac{\pi}{4} d^2 \tau_2 R_2 n_2 \\ (40 \times 10^3)(0.075) &= \frac{\pi}{4} (0.02^2) \tau_1 (0.09014)(4) + \frac{\pi}{4} (0.02^2) \left( \frac{\tau_1}{1.803} \right) (0.05)(2) \\ \tau_1 &= 22.949 \times 10^6 \text{ N/m}^2 \text{ หรือ } 22.95 \text{ MPa} \end{aligned}$$

ความเค้นเฉือนในสลักเกลียวระยะยาว 40 kN เท่ากับ 22.95 MPa      ตอบ

แรงคู่ควบ P และแรงคู่ควบ 40 kN ที่ทำให้สลักเกลียวที่มีรัศมีห่างจากจุดศูนย์กลางวงกลุ่มสลักเกลียวมากที่สุดจนเกิดความเค้นเฉือน  $\tau_1 = 60 \times 10^6 \text{ N/m}^2$  หาได้จากสมการ

โมเมนต์บิดจากแรงคู่ควบรอบจุดศูนย์กลางวงกลุ่มสลักเกลียว ;

$$T = P(0.1) - (40 \times 10^3)(0.075)$$

โมเมนต์บิดจากสลักเกลียวรอบจุดศูนย์กลางวงกลุ่มสลักเกลียว ;

$$\begin{aligned} T &= P_1 R_1 n_1 + P_2 R_2 n_2 \\ T &= \frac{\pi}{4} d^2 \tau_1 R_1 n_1 + \frac{\pi}{4} d^2 \left( \frac{\tau_1}{1.803} \right) R_2 n_2 \end{aligned}$$

หาแรง P จากการนำสมการ โมเมนต์บิดจากแรงคู่ควบมาเท่ากับ โมเมนต์บิดจากสลักเกลียว

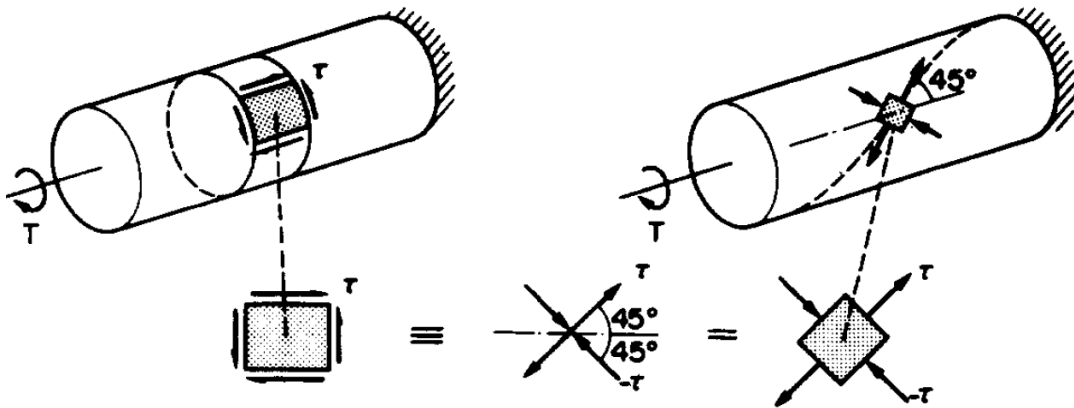
$$\begin{aligned} P(0.1) - (40 \times 10^3)(0.075) &= \frac{\pi}{4} (0.02^2) (60 \times 10^6) (0.09014)(4) + \frac{\pi}{4} (0.02^2) \left( \frac{60 \times 10^6}{1.803} \right) (0.05)(2) \\ P &= 108,418.60 \text{ N} \end{aligned}$$

แรงคู่ควบ  $P$  ที่ทำให้เกิดความเค้นเฉือน  $60 \times 10^6 \text{ N/m}^2$  คือ 108.42 kN

ตอบ

### การบิดของท่อผนังบาง

การบิดของท่อผนังบาง (Torsion of Thin-Walled Tubed) คือการเปลี่ยนแปลงที่เกิดขึ้นกับท่อผนังบางเมื่อมีโมเมนต์บิดมากระทำ สิริศักดิ์ ปโยธรสิริ (2549 : 103, 113-114) Hearn E. J. (2000 : 184) และ James M. Gere and Stephen P. Timoshenko (1991 : 163-164) กล่าวว่าถ้าท่อผนังบางหรือเพลากลวงถูกบิดด้วยโมเมนต์บิด  $T$  จนผนังท่อเกิดการเสียรูปโดยเกิดความเค้นเฉือนรอบชิ้นส่วนขนาดเล็ก  $A$  ความเค้นเฉือนที่เกิดขึ้นส่วน  $A$  สามารถแปลงให้เป็นความเค้นดึงและความเค้นอัดที่กระทำกับชิ้นส่วน  $B$  ได้ดังแสดงในภาพที่ 3.19 แต่ทิศทางของความเค้นดึงและความเค้นอัดจะเอียงจากแนวเดิม 45 องศา ในการคำนวณหาความเค้นเฉือนที่เกิดขึ้นในท่อผนังบางจะใช้หลักการเดียวกับการบิดของเพลหรือท่อกลม กรณีของท่อผนังบางที่มีความหนาผนังท่อ  $t$  และมีรัศมีเฉลี่ย  $r$  สามารถคำนวณความเค้นเฉือนได้จากสมการต่อไปนี้



ภาพที่ 3.19 ท่อผนังบางหรือเพลากลวงภายใต้การบิด

ที่มา : Hearn E. J. 2000 : 184

$$\text{ความเค้นเฉือนจากการบิด ; } \tau = \frac{Tr}{J} \quad (3.27)$$

$$\text{โมเมนต์ความเฉื่อยเชิงขั้ว ; } J = 2\pi r^3 t \quad (3.28)$$

$$\text{จะได้ว่า ; } \tau = \frac{T}{2\pi r^2 t} \quad (3.29)$$

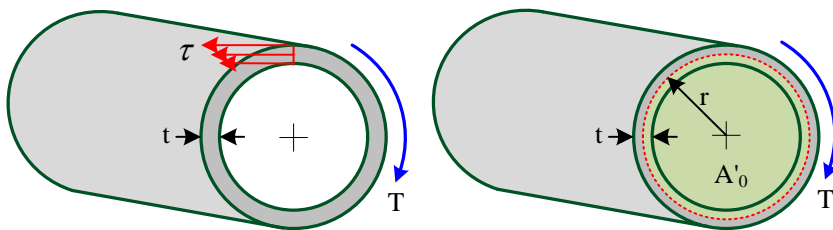
$$\text{มุมบิด ; } \theta = \frac{TL}{GJ} = \frac{TL}{2\pi r^3 t G} \quad (3.30)$$

ถ้ากำหนดให้  $A_0$  คือพื้นที่หน้าตัดภายในรัศมีเฉลี่ยของท่อผนังบางมีค่าเท่ากับ  $\pi r^2$  และ  $S$  คือความยาวเส้นรอบวงของหน้าตัดที่ระยะรัศมีเฉลี่ยมีค่าเท่ากับ  $2\pi r$  ดังแสดงในภาพที่ 3.20 สมการความเค้นเฉือนและมุมบิดสามารถเขียนใหม่ได้ดังต่อไปนี้

$$\tau = \frac{T}{2A_0 t} \tag{3.31}$$

และ  $\theta = \frac{\tau S L}{2A_0 t} \tag{3.32}$

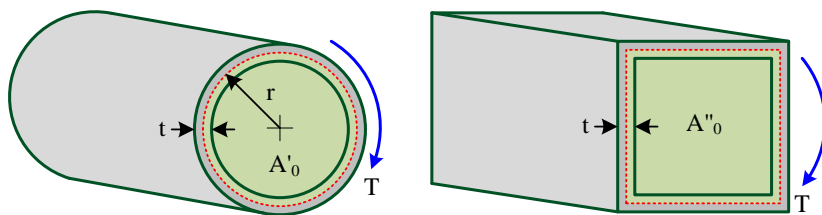
อย่างไรก็ตามความเค้นเฉือนและมุมบิดของท่อผนังบางที่แสดงข้างต้นจะใช้ได้ก็ต่อเมื่อท่อนั้นมีอัตราส่วนระหว่างความหนาต่อรัศมีระหว่าง  $1/10 - 1/60$  ในกรณีที่ต้องการใช้ท่อผนังบางรับโมเมนต์บิดแล้วไม่ให้เกิดการโก่งค้ำข้างควรใช้ท่อที่มีอัตราส่วนระหว่างความหนาต่อรัศมีมากกว่า  $1/60$



ภาพที่ 3.20 ท่อผนังบางภายใต้การบิด

ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

ตัวอย่างที่ 3.12 ท่อผนังบางหน้าตัดรูปวงกลมและรูปสี่เหลี่ยมดังแสดงในภาพที่ 3.21 ท่อทั้งสองผลิตจากวัสดุชนิดเดียวกันโดยมีความหนาของผนังท่อเท่ากัน น้ำหนักต่อความยาวเท่ากัน และความยาวเส้นรอบวงของหน้าตัดที่ระยะรัศมีเฉลี่ยเท่ากัน จงหาอัตราส่วนระหว่างความเค้นเฉือนที่เกิดขึ้นกับท่อทั้งสองและจงหาอัตราส่วนระหว่างมุมบิดที่เกิดขึ้นกับท่อทั้งสองเมื่อมีโมเมนต์บิดกระทำเท่ากัน



ภาพที่ 3.21 ท่อผนังบางทรงกลมและท่อผนังบางทรงสี่เหลี่ยม

ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

**วิธีทำ**

พื้นที่หน้าตัดภายในรัศมีเฉลี่ยของท่อผนังบางหน้าตัดรูปวงกลม ;

$$A'_0 = \frac{S^2}{4\pi}$$

พื้นที่หน้าตัดภายในรัศมีเฉลี่ยของท่อผนังบางหน้าตัดรูปสี่เหลี่ยม ;

$$A''_0 = \frac{S^2}{16}$$

ความเค้นเฉือนที่เกิดขึ้นในท่อผนังบางหน้าตัดรูปวงกลม ;

$$\tau' = \frac{T}{2A'_0 t}$$

ความเค้นเฉือนที่เกิดขึ้นในท่อผนังบางหน้าตัดรูปสี่เหลี่ยม ;

$$\tau'' = \frac{T}{2A''_0 t}$$

$$\begin{aligned} \text{อัตราส่วนระหว่างความเค้นเฉือน; } \frac{\tau'}{\tau''} &= \frac{A''_0}{A'_0} \\ &= \frac{S^2}{16} \times \frac{4\pi}{S^2} \\ &= \frac{4\pi}{16} = 0.785 \end{aligned}$$

อัตราส่วนระหว่าง  $\tau'$  และ  $\tau''$  เท่ากับ 0.785

ตอบ

มุมบิดที่เกิดขึ้นในท่อผนังบางหน้าตัดรูปวงกลม ;

$$\theta' = \frac{\tau' SL}{2A'_0 G}$$

มุมบิดที่เกิดขึ้นในท่อผนังบางหน้าตัดรูปสี่เหลี่ยม ;

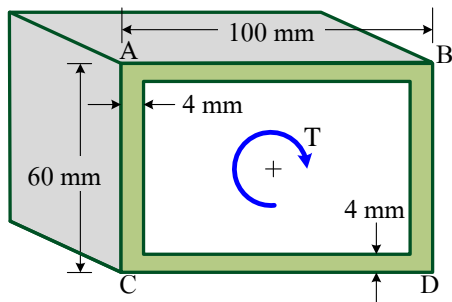
$$\theta'' = \frac{\tau'' SL}{2A''_0 G}$$

$$\begin{aligned} \text{อัตราส่วนระหว่างมุมบิด; } \frac{\theta'}{\theta''} &= \frac{\tau'}{\tau''} \times \frac{A''_0}{A'_0} \\ &= 0.785 \times 0.785 = 0.616 \end{aligned}$$

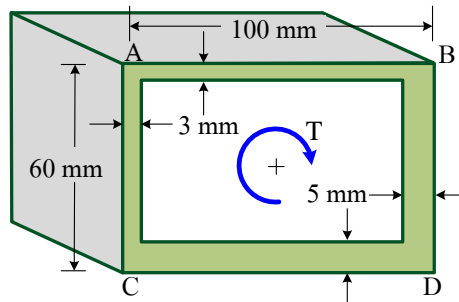
อัตราส่วนระหว่าง  $\theta'$  และ  $\theta''$  เท่ากับ 0.616

ตอบ

**ตัวอย่างที่ 3.13** ท่อกลวงทำจากอะลูมิเนียมมีหน้าตัดรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากขนาด  $60 \times 100$  mm ดังแสดงในภาพที่ 3.22 จงหาความเค้นเฉือนของท่อกลวงภายใต้โมเมนต์บิด 3 kN-m เมื่อท่อมีความหนาสม่ำเสมอ 4 mm และจงหาความเค้นเฉือนของท่อกลวงภายใต้โมเมนต์บิด 3 kN-m เมื่อมีผนังด้าน AB และ AC หนา 3 mm และผนังด้าน BD และ CD หนา 5 mm



(ก) ท่อกลวงมีความหนาสม่ำเสมอ



(ข) ท่อกลวงมีความหนาไม่สม่ำเสมอ

ภาพที่ 3.22 ท่อกลวงทำจากอะลูมิเนียมหน้าตัดสี่เหลี่ยม

ที่มา : จีรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

**วิธีทำ**

กรณีท่อผนังบางมีความหนาสม่ำเสมอ

พื้นที่หน้าตัดภายในรัศมีเฉลี่ย ;  $A = \left(\frac{100-4}{1,000}\right)\left(\frac{60-4}{1,000}\right)$   
 $= 5.376 \times 10^{-3} \text{ m}^2$

ความเค้นเฉือน ;  $\tau = \frac{T}{2At}$   
 $= \frac{3 \times 10^3}{2(5.376 \times 10^{-3})(4 \times 10^{-3})}$   
 $= 69.754 \times 10^6 \text{ N/m}^2$  หรือ 69.75 MPa

ความเค้นเฉือนที่เกิดขึ้นกับผนังทุกด้านเท่ากับ 69.75 MPa ตอบ

กรณีท่อกลวงที่มีความหนาไม่สม่ำเสมอ

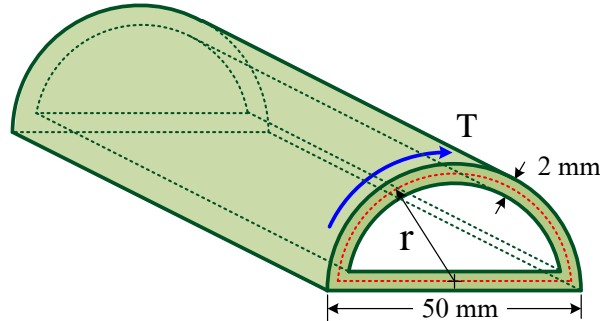
ความเค้นเฉือน AB และ BC ;  $\tau_{AB} = \tau_{AC} = \frac{T}{2At}$   
 $= \frac{3 \times 10^3}{2(5.376 \times 10^{-3})(3 \times 10^{-3})}$   
 $= 93.006 \times 10^6 \text{ N/m}^2$  หรือ 93.01 MPa

ความเค้นเฉือนที่เกิดกับผนัง AB และ BC เท่ากับ 93.01 MPa ตอบ

ความเค้นเฉือน BD และ CD ;  $\tau_{BD} = \tau_{CD} = \frac{T}{2At}$   
 $= \frac{3 \times 10^3}{2(5.376 \times 10^{-3})(5 \times 10^{-3})}$   
 $= 55.804 \times 10^6 \text{ N/m}^2$  หรือ 55.80 MPa

ความเค้นเฉือนที่เกิดกับผนัง BD และ CD เท่ากับ 55.80 MPa ตอบ

ตัวอย่างที่ 3.14 ท่อกลวงหน้าตัดรูปครึ่งวงกลมดังแสดงในภาพที่ 3.23 จงหาโมเมนต์บิดที่ทำให้เกิดความเค้นเฉือนภายในท่อไม่เกิน 40 MPa กำหนดให้ไม่คิดผลของความเค้นหนาแน่นที่มุมท่อ



ภาพที่ 3.23 ท่อกลวงหน้าตัดรูปครึ่งวงกลม

ที่มา : จิรวัดน์ วิมุติสุขวิริยา. 2556

#### วิธีทำ

รัศมีที่กึ่งกลางความหนา ;  $r = 0.025 \text{ m}$

โมเมนต์บิด ;  $T = 2At\tau$

$$= 2\left(\frac{\pi}{2}\right)r^2t\tau$$

$$= 2\left(\frac{\pi}{2}\right)(0.025^2)(0.002)(40 \times 10^6)$$

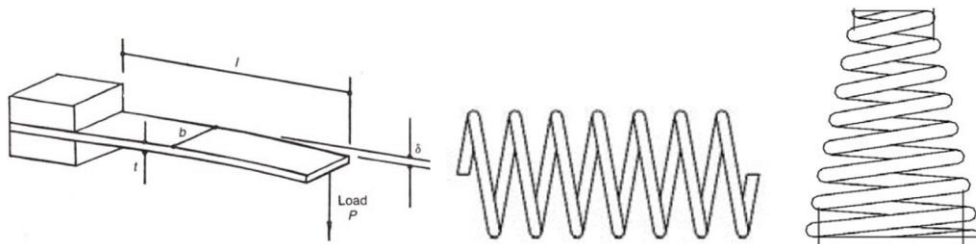
$$= 157.08 \text{ N-m}$$

ตอบ

#### สปริงขดลวด

สปริง (Springs) เป็นชิ้นส่วนหนึ่งที่มีการใช้งานอย่างแพร่หลายในการผลิตเครื่องจักรกล สปริงแต่ละชนิดมีการใช้งานแตกต่างกันดังแสดงในภาพที่ 3.24 เช่น สปริงขดในแนวแกน (Coil Springs) สปริงขดเป็นวงในแนวราบ (Spiral Torsion Springs) สปริงแผ่นเรียบ (Flat Springs) สปริงทรงกรวย (Conical Springs) สปริงแผ่นพับร่องตามยาว (Sulcated Springs) และสปริงแผ่นจาน (Disc Springs) เป็นต้น สปริงส่วนใหญ่ทำมาจากลวดโลหะขดเป็นวง (Helical Spring) ซึ่งมีลักษณะแตกต่างกันไปตามรูปร่างของฐานรองรับดังแสดงในภาพที่ 3.25 สปริงทั่วไปเป็นลวดโลหะที่สามารถเก็บและปล่อยพลังงานได้ในช่วงที่ความเค้นของสปริงอยู่ในช่วงยืดหยุ่น หากพิจารณาสปริงทำด้วยเส้นลวดที่มีขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง  $d$  นำมาขดเป็นเป็นวงรูปสปริงมีขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง  $D$  เมื่อถูกแรงดึง  $P$  กระทำก็จะเกิดการยืดออกดังแสดงในภาพที่ 3.26(ก) เมื่อเขียนรูปแสดงการสมดุลของแรงโดยตัดขดสปริงออกดังแสดงในภาพที่ 3.26(ข) แรงที่เกิดขึ้นที่

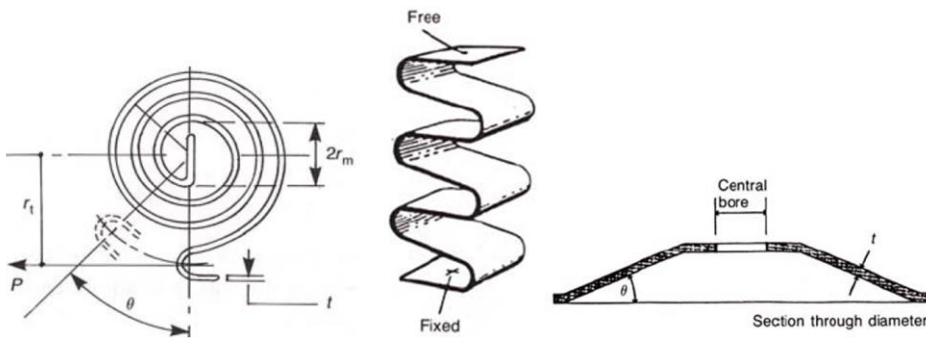
รอยตัดของสปริงจะมีแรงเฉือน  $P$  และ โมเมนต์บิด  $T$  มีค่าเท่ากับ  $P \times R$  เพื่อให้ส่วนตัดของสปริงอยู่ในลักษณะสมดุล โดย  $R$  เป็นรัศมีเฉลี่ยจากจุดศูนย์กลางของวงสปริงถึงจุดศูนย์กลางของเส้นลวดสปริง และค่า  $R$  เท่ากับระยะ  $D-d/2$  ดังนั้นทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับการบิดสามารถนำมาใช้ในการคำนวณและออกแบบสปริงได้ด้วย (P.L. Hurricks, 2011)



(ก) สปริงแผ่นเรียบ

(ข) สปริงขดในแนวแกน

(ค) สปริงทรงกรวย



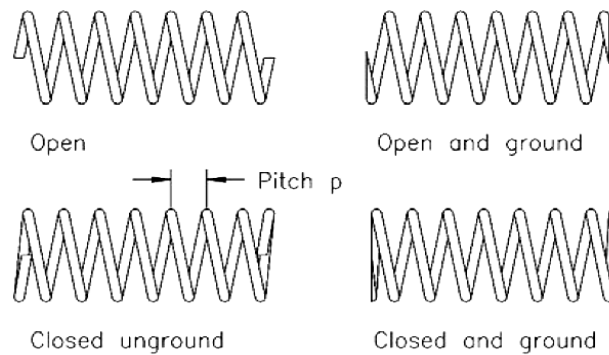
(ง) สปริงขดในแนวราบ

(จ) สปริงแผ่นพับ

(ฉ) สปริงแผ่นจาน

ภาพที่ 3.24 สปริงชนิดต่าง ๆ

ที่มา : P.L. Hurricks, 2011



ภาพที่ 3.25 สปริงขดในแนวแกนที่มีลักษณะปลายแตกต่างกัน

ที่มา : P.L.Hurricks, 2011

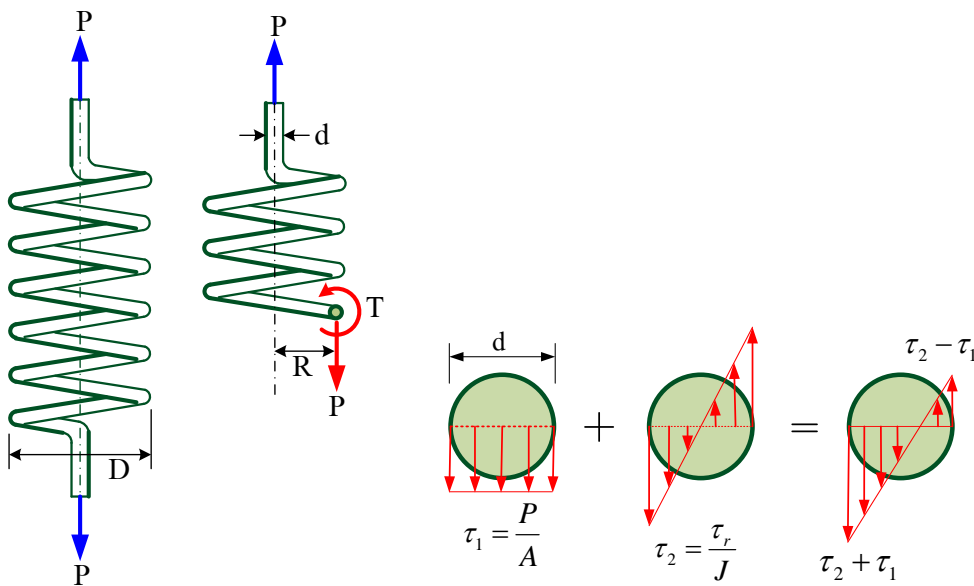


สมโพธิ วิวิธเกียรรวงศ์ (2542 : 106-110) และ Hearn E. J. (2000 : 297-307) กล่าวถึงการเกิดความเค้นและวิธีการหาความเค้นในสปริงไว้ดังต่อไปนี้ ความเค้นที่เกิดขึ้นในเส้นลวดสปริงประกอบด้วย 2 ส่วนหลักคือ ความเค้นเฉือน  $\tau_1$  ที่เกิดจากแรง  $P$  ทำให้เกิดความเค้นเท่ากับ  $P/A$  และความเค้นเฉือน  $\tau_2$  ที่เกิดจากโมเมนต์บิด  $T$  ทำให้เกิดความเค้นเท่ากับ  $Tr/J$  โดยที่ความเค้นเฉือน  $\tau_2$  จะมีค่ามากหรือน้อยขึ้นอยู่กับรัศมี  $r$  ของขนาดเส้นลวดสปริงดังแสดงในภาพที่ 3.26(ค) และ 3.26(ง) เมื่อรวมความเค้นทั้งสองเข้าด้วยกันก็จะได้ความเค้นเฉือนสูงสุดเกิดขึ้นที่ด้านในของสปริงดังแสดงในภาพที่ 3.26(จ) ค่าความเค้นเฉือนสูงสุดในสปริงหาสามารถหาได้จากสมการดังต่อไปนี้

$$\tau_{\max} = \tau_1 + \tau_2 = \frac{P}{A} + \frac{Tr}{J} \quad (3.33)$$

$$\tau_{\max} = \frac{P}{\pi d^2/4} + \frac{Prd/2}{\pi d^4/32} = \frac{4P}{\pi d^2} + \frac{16Pr}{\pi d^3} \quad (3.34)$$

$$\tau_{\max} = \frac{16Pr}{\pi d^3} \left[ 1 + \frac{d}{4R} \right] \quad (3.35)$$



(ก) สมดุลแรง (ข) รอยตัดสปริง (ค) แรงเฉือน (ง) โมเมนต์บิด (จ) ความเค้นเฉือนรวม

ภาพที่ 3.26 สปริงทำด้วยเส้นลวดและแรงภายใน

ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิทยา. 2556

กรณีเส้นลวดที่ใช้ทำสปริงมีขนาดเล็กและวงขดสปริงมีรัศมีใหญ่ค่า  $d/4R$  จะมีค่าน้อยมากซึ่งไม่จำเป็นต้องนำมาพิจารณาก็ได้ ในกรณีนี้ค่าความเค้นเฉือนจะเกิดจากแรงบิดที่กระทำต่อสปริงเป็นส่วนใหญ่ แต่กรณีที่สปริงใช้เส้นลวดขนาดใหญ่มาขดเป็นวงขนาดเล็กค่า  $d/4R$  ไม่สามารถจะตัดทิ้งได้ อย่างไรก็ตามในขณะที่สปริงขดเป็นวงกลมก็จะทำให้ค่าความเค้นเฉือนที่คำนวณได้มีความคลาดเคลื่อนไปจากความเค้นเฉือนจริงไปบ้าง ถ้าต้องการจะได้ค่าความเค้นเฉือนที่คำนวณได้มีค่าใกล้เคียงกับความเป็นจริงจะต้องใช้ค่าสัมประสิทธิ์  $k$  ช่วยในการปรับแก้เมื่อค่า  $k$  เป็นค่าที่ได้จากการทดลองในห้องปฏิบัติการและมีความสัมพันธ์กับอัตราส่วนระหว่าง  $2R/d$  โดยความเค้นเฉือนที่มีค่า  $k$  ช่วยในการปรับแก้สามารถหาได้จากสมการดังต่อไปนี้

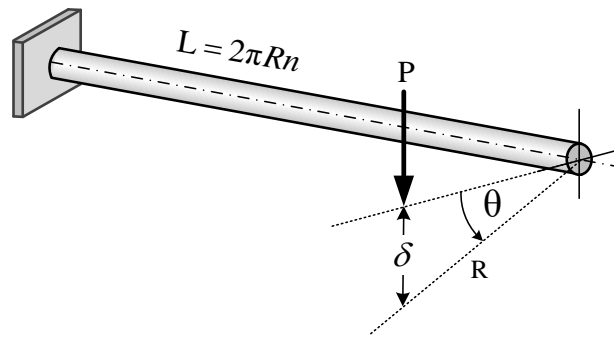
$$\tau_{\max} = k \left[ \frac{16PR}{\pi d^3} \right] \quad (3.36)$$

การยืดหรือการหดของขดสปริงส่วนใหญ่มักเกิดจากการบิดมากกว่าแรงเฉือน เมื่อสปริงเกิดการยืดหรือหดเนื่องจากแรงกระทำซ้ำ ๆ ก็จะทำให้การวิบัติจากแรงเฉือนดังแสดงในภาพที่ 3.27 ดังนั้นเพื่อเป็นการลดความยุ่งยากในการคำนวณระยะยืดหรือหดของสปริงจึงมักพิจารณาจากการบิดของเส้นลวดเพียงอย่างเดียว การคำนวณหาระยะยืดหรือหดของขดสปริงเมื่อถูกแรงกระทำสามารถหาได้โดยการพิจารณาให้ขดลวดสปริงยืดออกเป็นเส้นตรงเสียก่อน การหาความยาวสปริงสามารถทำได้โดยนำจำนวนขดลวด  $n$  วงมาคูณด้วยระยะขดซึ่งมีความสัมพันธ์กับระยะรัศมีของวงสปริง  $R$  โดยความยาวของลวดสปริงเมื่อยืดออกเป็นเส้นตรงแล้วจะได้ความยาว  $2\pi Rn$  เมื่อมีแรง  $P$  มากระทำห่างจุดศูนย์กลางเส้นลวดสปริงเป็นระยะเท่ากับรัศมี  $R$  จะทำให้เกิดการบิดในเส้นลวดสปริง ส่งผลทำให้แรง  $P$  เปลี่ยนตำแหน่งไปจากเดิมเป็นระยะ  $\delta$  และเกิดมุมบิด  $\theta$  ดังแสดงในภาพที่ 3.28



ภาพที่ 3.27 การวิบัติของขดสปริงเนื่องจากการบิด

ที่มา : *G.M. Goodrich*, 2013



ภาพที่ 3.28 การบิดของขดสปริง

ที่มา : จีรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

พิจารณาค่าความสัมพันธ์ระหว่างระยะ  $\delta$  และมุมบิด  $\theta$  จะได้

$$\delta = \theta R \quad (3.37)$$

หรือ

$$\theta = \frac{TL}{GJ} \quad (3.38)$$

ดังนั้น

$$\delta = R \times \frac{TL}{GJ} = \frac{RPR \times 2\pi Rn}{(G\pi d^4)/32} \quad (3.39)$$

$$\delta = \frac{64PR^3n}{Gd^4} \quad (3.40)$$

กำหนดให้ค่า  $k$  เป็นค่าสัมประสิทธิ์ของสปริงสามารถเขียนในเทอมของแรง  $P$  และส่วนยืด  $\delta$  ได้ดังสมการต่อไปนี้

$$k = \frac{P}{\delta} \quad (3.41)$$

แทนค่า  $\delta$  ในสมการจะได้

$$k = \frac{Gd^4}{64R^3n} \quad (3.42)$$

เมื่อค่าสัมประสิทธิ์ของสปริง  $k$  มีหน่วยเป็น kg/cm โมดูลัสความคงรูปของสปริง  $G$  มีหน่วยเป็น kg/cm<sup>2</sup> ขนาดเส้นผ่าศูนย์กลางลวดสปริง  $D$  มีหน่วยเป็น cm รัศมีของวงขดสปริง  $R$  มีหน่วยเป็น cm และจำนวนขดลวดสปริง  $n$  มีหน่วยเป็นรอบ

### 1. การรับแรงของสปริงแบบอนุกรม

ระบบสปริงแบบอนุกรม (Series Spring System) เป็นการนำสปริงหลายตัวมาต่อกันในลักษณะหัวต่อหางไปเรื่อย ๆ เรียกการต่อกันนั้นว่าการต่อแบบอนุกรม การพิจารณาการยืดหรือ

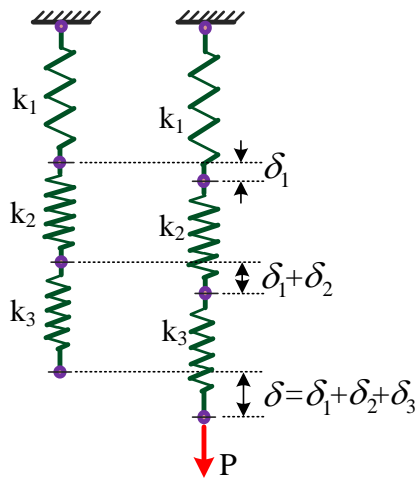
หคของสปริงระบบนี้เกิดจากผลรวมของสปริงแต่ละตัวเมื่อมีแรงกระทำ ยกตัวอย่างเช่น กำหนดให้สปริง 3 ตัวต่อกันแบบอนุกรมดังแสดงในภาพที่ 3.29 ซึ่งสปริงแต่ละตัวมีค่าสัมประสิทธิ์เป็น  $k_1$   $k_2$  และ  $k_3$  ตามลำดับ สปริงตัวที่หนึ่งยึดแน่นกับผนังต่อด้วยตัวที่ 2 และ 3 เมื่อมีแรง  $F$  กระทำที่ปลายสปริงตัวที่ 3 จะทำให้สปริงทั้งสามตัวยืดออกเป็นระยะรวมกันเท่ากับ  $\delta$  และสปริงแต่ละตัวยืดออกเป็นระยะ  $\delta_1$   $\delta_2$  และ  $\delta_3$  ตามลำดับ ผลรวมระยะยืดทั้งหมดหาได้จากสมการดังต่อไปนี้

$$\text{ระยะยืดรวม ; } \delta = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 \quad (3.43)$$

$$\text{ระยะยืดสปริงขดที่ 1 ; } \delta_1 = \frac{F}{k_1} \quad (3.44)$$

$$\text{ระยะยืดสปริงขดที่ 2 ; } \delta_2 = \frac{F}{k_2} \quad (3.45)$$

$$\text{ระยะยืดสปริงขดที่ 3 ; } \delta_3 = \frac{F}{k_3} \quad (3.46)$$



ภาพที่ 3.29 การต่อสปริงแบบอนุกรม

ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิทยา. 2556

เพราะฉะนั้นจะได้ว่า

$$\delta = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2} + \frac{F}{k_3} \quad (3.47)$$

$$\frac{F}{\delta} = \frac{1}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3}} \quad (3.48)$$

กำหนดให้ค่า  $k_s$  เป็นค่าสัมประสิทธิ์รวมของสปริงทั้งระบบที่ต่อกันแบบอนุกรมจะได้ว่า

$$k_s = \frac{1}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3}} \quad (3.49)$$

เพราะฉะนั้น  $\frac{F}{\delta} = k_s \quad (3.50)$

## 2. การรับแรงของสปริงแบบขนาน

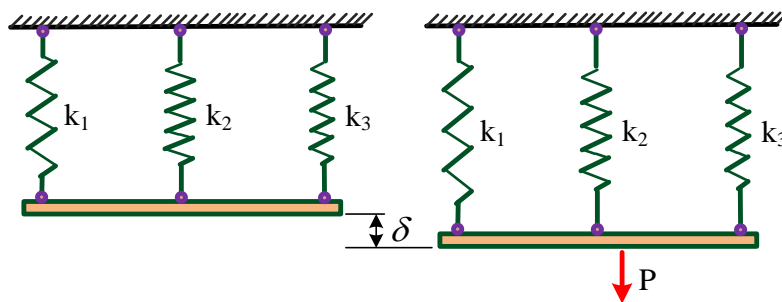
ระบบสปริงแบบขนาน (Parallel System) เป็นการนำสปริงหลายตัวมาต่อกันในลักษณะที่สปริงแต่ละตัวจะช่วยกันรับแรง ยกตัวอย่างเช่น ปลายสปริงแต่ละตัวยึดแน่นกับผนังและปลายอีกด้านยึดติดกับแผ่นแข็งเกร็งดังแสดงในภาพที่ 3.30 จากภาพสปริงทั้ง 3 ตัวที่นำมาต่อกันแบบขนานมีค่าสัมประสิทธิ์เป็น  $k_1$ ,  $k_2$  และ  $k_3$  ตามลำดับ เมื่อมีแรง  $F$  กระทำผ่านแผ่นแข็งเกร็ง ณ ตำแหน่งจุดศูนย์กลางของสปริงทั้งสามก็จะทำให้สปริงยืดออกเป็นระยะ  $\delta$  เท่ากันทั้ง 3 ตัว โดยสปริงแต่ละตัวจะออกแรงต้านแรง  $F$  ด้วยแรงที่ไม่เท่ากันคือ  $F_1$ ,  $F_2$  และ  $F_3$  ตามลำดับ สมการความสมดุลของแรงกระทำและแรงต้านในสปริงหาได้จาก

$$F = F_1 + F_2 + F_3 = k_1\delta + k_2\delta + k_3\delta \quad (3.51)$$

$$\frac{F}{\delta} = k_1 + k_2 + k_3 \quad (3.52)$$

กำหนดให้  $k_p$  เป็นค่าสัมประสิทธิ์รวมของสปริงทั้งระบบที่นำมาต่อกันแบบขนานจะได้ว่า

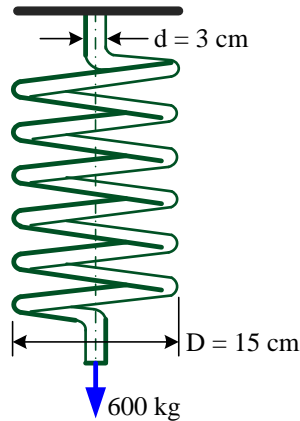
$$k_p = k_1 + k_2 + k_3 \quad (3.53)$$



ภาพที่ 3.30 การต่อสปริงแบบขนาน

ที่มา : จีรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

ตัวอย่างที่ 3.15 สปริงทำด้วยลวดเหล็กกล้าขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง 3 cm ขดเป็นวงที่มีขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง 15 cm จำนวน 8 รอบดังแสดงในภาพที่ 3.31 จงคำนวณหาความเค้นเฉือนสูงสุดและระยะยืดที่เกิดขึ้นในลวดเหล็กกล้าเมื่อถูกกระทำด้วยแรง 600 kg ถ้ากำหนดให้ค่าสัมประสิทธิ์สปริง  $k = 1.25$  และลวดเหล็กกล้ามีค่าโมดูลัสความคงรูป  $G = 8.5 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$



ภาพที่ 3.31 สปริงทำด้วยเส้นลวดเหล็ก

ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

### วิธีทำ

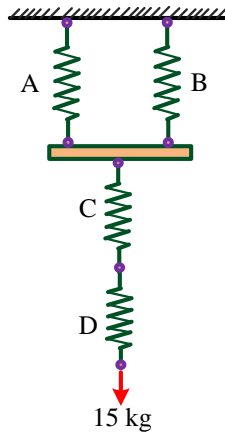
ความเค้นเฉือนสูงสุดเกิดขึ้นด้านในของขดสปริง

$$\begin{aligned} \text{ความเค้นเฉือน ; } \tau_{\max} &= k \left[ \frac{16PR}{\pi d^3} \right] \\ &= \frac{1.25(16 \times 600 \times 7.5)}{\pi \times 3^3} \\ &= 1,061.03 \text{ kg/cm}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ระยะยืดของสปริง ; } \delta &= \frac{64PR^3 n}{Gd^4} \\ &= \frac{64 \times 600 \times 7.5^3 \times 8}{8.5 \times 10^5 \times 3^4} \\ &= 1.88 \text{ cm} \end{aligned}$$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 3.16 สปริงขดในแนวแกนจำนวน 4 ตัวต่อกันดังภาพที่ 3.32 สปริงแต่ละตัวทำจากลวดเหล็กกล้าขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง 1 cm มีรัศมีวงสปริงเฉลี่ย 5.5 cm และขดเป็นวงจำนวน 10 รอบ จงคำนวณหาส่วนยืดของสปริงทั้งหมดเมื่อมีน้ำหนักมากระทำ 15 kg กำหนดให้โมดูลัสความคงรูปของลวดเหล็กกล้า  $G = 8.5 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$



ภาพที่ 3.32 สปริง 4 ตัวต่อกัน

ที่มา : จีรวัดน์ วิมุติสุขวิทยา. 2556

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \text{ค่าสัมประสิทธิ์สปริงแต่ละตัว ; } k &= \frac{Gd^4}{64R^3n} \\ &= \frac{8.5 \times 10^5 \times 1^4}{64 \times 5.5^3 \times 10} \\ &= 7.98 \text{ kg/cm} \end{aligned}$$

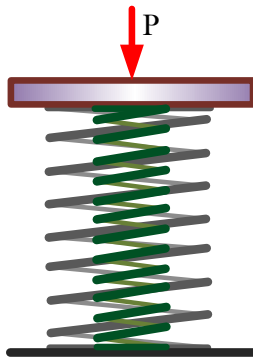
สปริง A และ B ต่อขนานกัน จากนั้นจึงต่อแบบอนุกรมกับสปริง C และ D

$$\begin{aligned} \text{ค่าสัมประสิทธิ์สปริงรวม ; } k_e &= \frac{1}{\frac{1}{k+k} + \frac{1}{k} + \frac{1}{k}} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{2k} + \frac{2}{k}} \\ &= \frac{2}{5}(7.98) \\ &= 3.192 \text{ kg/cm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ระยะยืดทั้งหมด ; } \delta &= \frac{F}{k_e} \\ &= \frac{15}{3.192} \\ &= 4.699 \text{ cm} \end{aligned}$$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 3.17 สปริงขดในแนวแกนจำนวน 2 ตัวรับแรงร่วมกันดังแสดงในภาพที่ 3.33 สปริงแต่ละตัวทำจากลวดเหล็กกล้าและมีจุดศูนย์กลางร่วมกัน โดยสปริงตัวในใช้ลวดเหล็กกล้าขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง 20 mm ขดเป็นวงจำนวน 30 รอบ มีเส้นผ่าศูนย์กลางวง 150 mm ส่วนสปริงตัวนอกใช้ลวดเหล็กกล้าขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง 30 mm ขดเป็นวงจำนวน 20 รอบ มีเส้นผ่าศูนย์กลางวง 200 mm จงคำนวณหาแรงกดที่สปริงจะสามารถรับได้อย่างปลอดภัยถ้าความเค้นเฉือนสูงสุดที่สปริงรับได้ไม่เกิน 140 MPa และโมดูลัสความคงรูปของลวดเหล็กกล้า  $G = 83 \text{ GPa}$



ภาพที่ 3.33 สปริงขดในแนวแกนจำนวน 2 ตัวมีจุดศูนย์กลางร่วมกัน  
ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

#### วิธีทำ

กำหนดให้  $P_1$  เป็นแรงที่สปริงตัวในรับ และ  $P_2$  เป็นแรงที่สปริงตัวนอกรับ

$$\text{สมดุลของแรง ;} \quad P = P_1 + P_2$$

$$\text{ความเค้นเฉือนสูงสุดในสปริง ;} \quad \tau_{\max} = \frac{16PR}{\pi d^3} \left( 1 + \frac{d}{4R} \right)$$

แทนค่าเพื่อหาแรง  $P_1$  กระทำต่อสปริงตัวในเมื่อ  $D_1 = 150 \text{ mm}$   $n_1 = 30$  รอบ และ  $d_1 = 20 \text{ mm}$

$$140 \times 10^6 = \frac{16P_1(0.075)}{\pi(0.020^3)} \left( 1 + \frac{0.020}{4(0.075)} \right)$$

$$\text{แรงกระทำต่อสปริงตัวใน ;} \quad P_1 = 2,748.81 \text{ N หรือ } 2.749 \text{ kN}$$

แทนค่าเพื่อหาแรง  $P_2$  กระทำต่อสปริงตัวนอกเมื่อ  $D_2 = 200 \text{ mm}$   $n_2 = 20$  รอบ และ  $d_2 = 30 \text{ mm}$

$$140 \times 10^6 = \frac{16P_2(0.100)}{\pi(0.030^3)} \left( 1 + \frac{0.030}{4(0.100)} \right)$$

$$\text{แรงกระทำต่อสปริงตัวนอก ;} \quad P_2 = 6,904.20 \text{ N หรือ } 6.904 \text{ kN}$$



ระยะหดของสปริง ;

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \delta_2 \\ \frac{P_1 R_1^3 n_1}{G d_1^4} &= \frac{P_2 R_2^3 n_2}{G d_2^4} \\ \frac{P_1 (75^3)(30)}{20^4} &= \frac{P_2 (100^3)(200)}{30^4} \\ P_1 &= 3.121 P_2 \end{aligned}$$

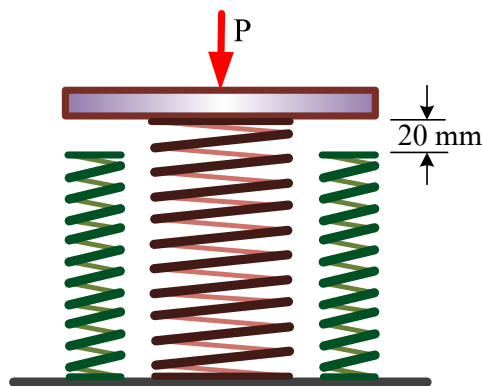
จากสมการความสัมพันธ์ระหว่าง  $P_1$  และ  $P_2$  ข้างต้น ถ้าแทน  $P_1$  เท่ากับ 2.749 kN ก็จะได้  $P_2$  ที่สอดคล้องคือ  $2.749/3.121 = 0.8808$  kN ซึ่งน้อยกว่า 6.904 kN ถือว่าระบบปลอดภัย ดังนั้นผลรวมของแรง  $P_1$  และ  $P_2$  นี้จึงเป็นแรงทั้งหมดที่สปริงรับได้

$$\begin{aligned} \text{แรงทั้งหมดที่สปริงรับได้ ; } P &= P_1 + P_2 \\ &= 2.749 + 0.8808 \\ &= 3.63 \text{ kN} \end{aligned}$$

แรงที่สปริงจะสามารถรับได้อย่างปลอดภัยคือ 3.63 kN

ตอบ

ตัวอย่างที่ 3.18 เป็นเครื่องน้ำหนักเบาวางบนสปริงขดในแนวแกน 3 ตัวดังแสดงในภาพที่ 3.34 สปริงตัวในอยู่สูงกว่าสปริงตัวนอกเป็นระยะ 20 mm จงหาความเค้นเฉือนในสปริงแต่ละตัวเมื่อมีแรงกดกระทำ 5 kN กำหนดให้โดยสปริงตัวในใช้ลวดเหล็กกล้าขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง 20 mm ขดเป็นวงจำนวน 24 รอบ มีเส้นผ่าศูนย์กลางวง 150 mm ส่วนสปริงตัวนอกใช้ลวดเหล็กกล้าขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง 10 mm ขดเป็นวงจำนวน 18 รอบ มีเส้นผ่าศูนย์กลางวง 100 mm และโมดูลัสความคงรูปของลวดเหล็กกล้า  $G = 83$  GPa



ภาพที่ 3.34 เป็นวางบนสปริงขดเกลียวตัวกลาง

ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

### วิธีทำ

กำหนดให้  $P_1$  เป็นแรงที่สปริงตัวในรับ และ  $P_2$  เป็นแรงที่สปริงตัวนอกรับ

$$\text{สมมูลของแรง ; } P_1 + 2P_2 = 5 \times 10^3$$

$$\text{ระยะหดของสปริง ; } \delta_1 = \delta_2 + 0.02$$

$$\frac{64P_1R_1^3n_1}{Gd_1^4} = 2\left(\frac{64P_2R_2^3n_2}{Gd_2^4}\right) + 0.02$$

$$\frac{64 \times P_1 \times 0.075^3 \times 24}{83 \times 10^6 \times 0.02^4} = \left(\frac{2 \times 64 \times P_2 \times 0.05^3 \times 18}{83 \times 10^6 \times 0.01^4}\right) + 0.02$$

$$0.0488P_1 = 0.347P_2 + 0.02$$

ความสัมพันธ์ของแรง  $P_1$  และ  $P_2$  จากสมการสมมูลของแรงและระยะหดของสปริง สามารถแก้สมการเพื่อหาแรงที่สปริงแต่ละตัวรับดังนี้

$$\text{แรงที่สปริงตัวในรับ ; } P_1 = 3,902.48 \text{ N}$$

$$\text{แรงที่สปริงตัวนอกรับ ; } P_2 = 548.76 \text{ N}$$

$$\text{ความเค้นเฉือนสูงสุดในสปริง ; } \tau_{\max} = \frac{16PR}{\pi d^3} \left(1 + \frac{d}{4R}\right)$$

แทนค่าเพื่อหาแรง  $P_1$  กระทำต่อสปริงตัวในเมื่อ  $D_1 = 150 \text{ mm}$   $n_1 = 24$  รอบ และ  $d_1 = 20 \text{ mm}$

$$\begin{aligned} \text{ความเค้นเฉือนสปริงตัวใน ; } \tau_1 &= \frac{16 \times 3,902.48 \times 0.075}{\pi \times 0.02^3} \left(1 + \frac{0.02}{(4 \times 0.075)}\right) \\ &= 198.752 \times 10^6 \text{ N/m}^2 \quad \text{ตอบ} \end{aligned}$$

แทนค่าเพื่อหาแรง  $P_2$  กระทำต่อสปริงตัวนอกเมื่อ  $D_2 = 100 \text{ mm}$   $n_2 = 18$  รอบ และ  $d_2 = 10 \text{ mm}$

$$\begin{aligned} \text{ความเค้นเฉือนสปริงตัวนอก ; } \tau_2 &= \frac{16 \times 548.76 \times 0.05}{\pi \times 0.01^3} \left(1 + \frac{0.01}{(4 \times 0.05)}\right) \\ &= 146.728 \times 10^6 \text{ N/m}^2 \quad \text{ตอบ} \end{aligned}$$

### สรุปท้ายบท

ความเค้นและความเครียดจากการบิดเป็นสถานะที่ชิ้นงานเกิดแรงต้านภายในเนื่องจากมีโมเมนต์บิดมากระทำจนมีการเปลี่ยนแปลงรูปร่างในลักษณะบิดตามทิศทางของโมเมนต์ที่กระทำ เมื่อพิจารณาการเปลี่ยนแปลงรูปร่างที่ผิวภายนอกของชิ้นงานพบว่ามีความเค้นเฉือนจนเป็นมุมเฉียงกับแนวแกน ในกรณีของเพลากลมขณะที่มีโมเมนต์บิดกระทำเพลาก็จะออกแรงต้านเพื่อรักษาภาวะสมดุล เมื่อวัสดุอยู่ในสถานะยึดหยุ่นความเค้นที่เกิดขึ้นเป็นความเค้นเฉือนที่กระจายตัวแบบเชิงเส้นไปตามแนวรัศมีของเพลลา โดยที่ความเค้นเฉือนสูงสุดที่ผิวภายนอกของเพลลาและเป็นศูนย์ที่จุดศูนย์กลางของเพลลา ในขณะที่เพลลาหมุนก็จะเกิดการส่งกำลังจากแหล่งต้นกำเนิดไปยังชิ้นส่วนต่างๆ ของเครื่องจักร กำลังม้าที่ได้จากการหมุนของเพลลาสัมพันธ์

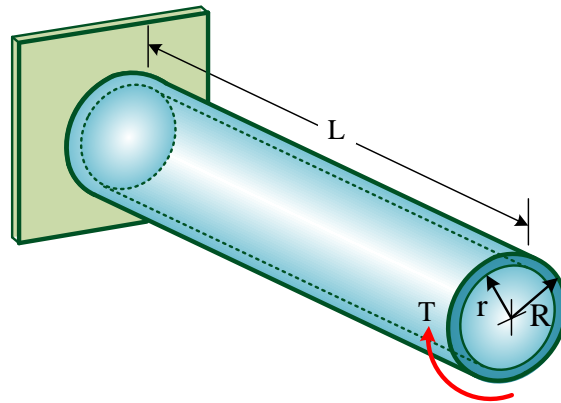
กับโมเมนต์บิดที่เกิดขึ้นในเพลลา การต่อเพลลาเพื่อส่งถ่ายกำลังสามารถกระทำได้ด้วยการใช้  
 ประกับหน้างานยึดด้วยสลักเกลียว จำนวนสลักเกลียวที่ใช้ยึดประกับหน้างานจะต้องสามารถ  
 ด้านทานความเค้นเฉือนที่เกิดขึ้นเนื่องจากโมเมนต์บิดได้อย่างปลอดภัย ความเค้นเฉือนในสลัก  
 เกลียวแต่ละตัวจะมีความสัมพันธ์กับตำแหน่งและจำนวนของสลักเกลียวที่ยึด ในกรณีที่ใช้ประกับ  
 หน้างานยึดด้วยสลักเกลียวมากกว่าหนึ่งแถวความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นเฉือนและระยะรัศมี  
 การยึดจะมีความสัมพันธ์เช่นเดียวกับความเค้นเฉือนที่เกิดในเกลากลมรับโมเมนต์บิด สำหรับ  
 ท่อผนังบางหรือเพลลาทวงที่มีขนาดเส้นผ่าศูนย์กลางภายในและภายนอกใกล้เคียงกันภายใต้  
 โมเมนต์บิดจะเกิดความเค้นเฉือนขึ้นเช่นเดียวกับเพลลาตัน แต่ความเค้นเฉือนในท่อผนังบาง  
 สามารถหาได้โดยการใช้รัศมีเฉลี่ยซึ่งเป็นรัศมีที่คิดระหว่างจุดศูนย์กลางท่อบังคับกึ่งกลางความ  
 หนาของท่อในการคำนวณ อย่างไรก็ตามสมการที่ใช้จะให้ผลใกล้เคียงกับความเป็นจริงเมื่อท่อ  
 ผนังบางนั้นมีอัตราส่วนระหว่างความหนาต่อรัศมีระหว่าง  $1/10 - 1/60$  ในกรณีที่ไม่ต้องการให้  
 เกิดการโก่งด้านข้างควรใช้ท่อผนังบางที่มีอัตราส่วนระหว่างความหนาต่อรัศมีมากกว่า  $1/60$

สปริงที่พบเห็น โดยทั่วไปเป็นสปริงขดลวดในแนวแกนที่สามารถเก็บและปล่อย  
 พลังงานได้ในช่วงที่ความเค้นของสปริงยังอยู่ในช่วงยืดหยุ่น ทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับการบิดใน  
 เพลลาสามารถนำมาประยุกต์ใช้ในการคำนวณและออกแบบสปริงขดลวดได้ ความเค้นเฉือนที่  
 เกิดขึ้นในเส้นลวดสปริงจะประกอบด้วยสองส่วนสำคัญคือ ส่วนที่เกิดจากแรงเฉือนทำให้เกิด  
 ความเค้นเฉือนและส่วนที่เกิดจากโมเมนต์บิด แต่ที่มีผลต่อสปริงมากคือความเค้นเฉือนจาก  
 โมเมนต์บิดมากกว่าแรงเฉือน ดังนั้นเพื่อเป็นการลดความยุ่งยากในการคำนวณระยะยืดหรือหด  
 ของสปริงจึงมักพิจารณาผลจากการบิดของเส้นลวดเพียงอย่างเดียว ในการคำนวณหาระยะยืด  
 ของขดสปริงเมื่อถูกแรงกระทำอาจจะหาได้โดยนำขดลวดสปริงมายืดออกเป็นเส้นตรงเสียก่อน  
 จากนั้นจึงพิจารณาเช่นเดียวกับเพลากลม อย่างไรก็ตามผลการคำนวณความเค้นเฉือนที่ได้จะมี  
 ความคลาดเคลื่อนจากความเป็นจริงอยู่บ้าง ดังนั้นเพื่อให้ผลการคำนวณมีค่าใกล้เคียงกับความ  
 เป็นจริงจึงนิยมนำค่าสัมประสิทธิ์ของสปริงซึ่งเป็นค่าที่ได้จากการทดลองมาใช้ประกอบในการ  
 คำนวณด้วย

### แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 3

1. เพลาเหล็กกลวงยาว 15 m มีขนาดเส้นผ่าศูนย์กลางภายนอก 6 cm และขนาดเส้นผ่าศูนย์กลางภายใน 5 cm จงคำนวณหาความเค้นเฉือนสูงสุดและมุมบิดที่เกิดขึ้นในเพลาถ้าโมเมนต์บิดที่กระทำกับเพลาถ่วงนี้มีค่า 120 kg-m กำหนดให้โมดูลัสความคงรูปของเหล็ก  $G = 8.5 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$

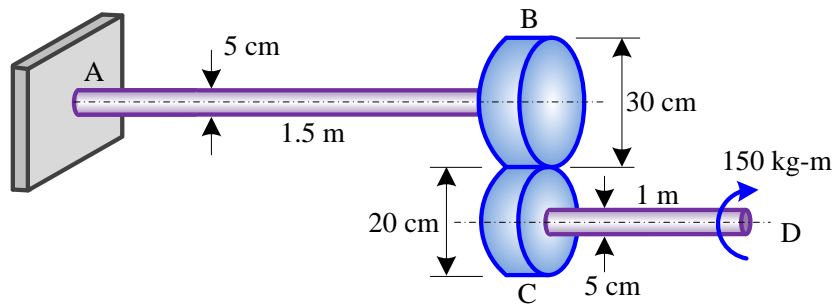
2. เพลาถ่วงหน้าตัดรูปวงแหวนทำด้วยเหล็กกล้ายาว 1.5 m มีขนาดเส้นผ่าศูนย์กลางภายใน 40 mm และขนาดเส้นผ่าศูนย์กลางภายนอก 60 mm ดังแสดงในภาพที่ 3.35 จงหาโมเมนต์บิดสูงสุดที่เพลาถ่วงนี้สามารถรับได้อย่างปลอดภัย ถ้ากำหนดให้ความเค้นเฉือนที่เหล็กกล้าสามารถรับได้ไม่เกิน 150 MPa



ภาพที่ 3.35 เพลาถ่วง

ที่มา : จีรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

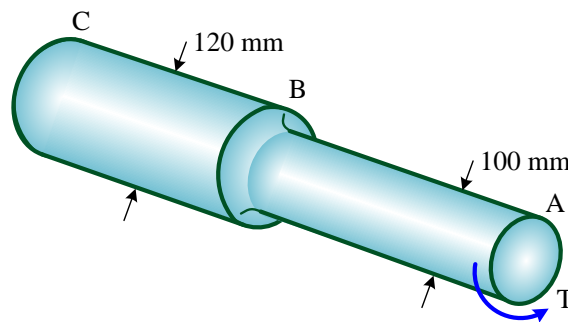
3. เพลาเหล็ก AB ยาว 1.5 m ขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง 5 cm ที่ปลาย B ยึดกับเกียร์ขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง 30 cm และเพลาเหล็ก CD ยาว 1.0 m ขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง 5 cm ที่ปลาย C ยึดกับเกียร์ขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง 20 cm ดังแสดงในภาพที่ 3.36 จงหามุมบิดที่ปลายเพลา D เมื่อมีโมเมนต์บิดกระทำที่ปลายเพลา D เท่ากับ 150 kg-m กำหนดให้ค่าโมดูลัสความคงรูปของเหล็ก  $G = 8.5 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$



ภาพที่ 3.36 เพลาเหล็กต่อกันด้วยเกียร์

ที่มา : จีรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

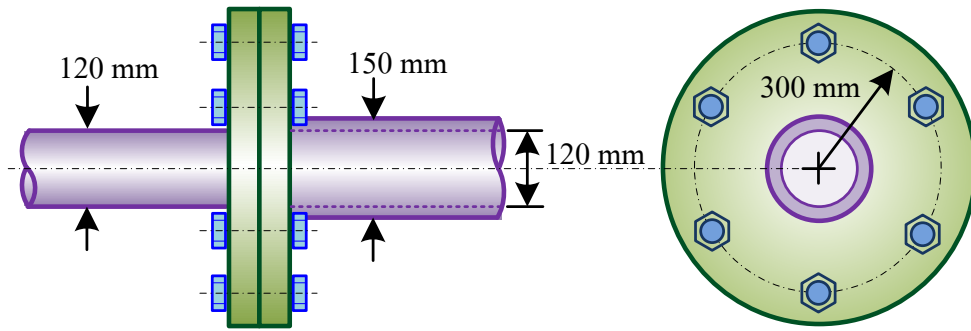
4. เพลากลมตันทำด้วยเหล็กกล้าสองช่วงต่อกันดังแสดงในภาพที่ 3.37 เพลาดังกล่าวหมุนด้วยความเร็ว 900 รอบต่อชั่วโมง จงหาค่าลึงสูงสุดที่เพลาสามารถรับได้อย่างปลอดภัย กำหนดให้เหล็กกล้าที่ใช้ทำเพลามีความเค้นเฉือนใช้งาน 55 MPa



ภาพที่ 3.37 เพลากลมตันสองขนาดต่อกัน

ที่มา : จีรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

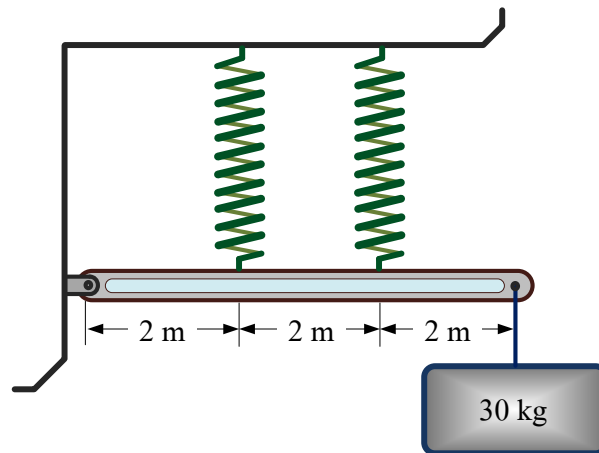
5. ประกับหน้าจานเชื่อมต่อเพลาตันที่มีขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง 120 mm เข้ากับเพลาโค้งที่มีขนาดเส้นผ่าศูนย์กลางภายใน 120 mm และภายนอก 150 mm ดังแสดงในภาพที่ 3.38 จงหาว่า จะต้องใช้สลักเกลียวขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง 15 mm จำนวนกี่ตัวในการยึดประกับหน้าจาน กำหนดให้ความเค้นเฉือนของเพลาและสลักเกลียวรับได้ไม่เกิน 60 MPa และแนวยึดสลักเกลียวห่างจากศูนย์กลาง 300 mm



ภาพที่ 3.38 ประกับน้ำงานเชื่อมต่อเพลา

ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

6. กานแข็งเกร็งปลายด้านหนึ่งยึดติดกับกำแพงด้วยสลักเกลียวและยึดไว้กับสปริงขดในแนวแกน จำนวน 2 ตัวที่ระยะห่างเท่ากันดังแสดงในภาพที่ 3.39 สปริงแต่ละตัวทำจากลวดเหล็กกล้าขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง 10 mm ขดเป็นวงจำนวน 20 รอบ มีเส้นผ่าศูนย์กลางวง 150 mm จงหาความเค้นเฉือนสูงสุดที่เกิดกับสปริง ถ้าแขวนน้ำหนัก 30 kg ไว้ที่ปลายกาน



ภาพที่ 3.39 กานยึดด้วยสลักเกลียวและสปริง

ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

## เอกสารอ้างอิง

- ชาญ ถนัดงาน. (2523). **กลศาสตร์วัสดุ**. กรุงเทพฯ : สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้า  
วิทยาเขตพระนครเหนือ.
- มนตรี พิรุณเกษตร. (2544). **กลศาสตร์ของวัสดุ**. กรุงเทพฯ : วิทยพัฒน์.
- วินิต ช่อวิเชียร วรนิติ ช่อวิเชียร และวรสวรรษ ช่อวิเชียร. (2548). **กำลังวัสดุ/กลศาสตร์วัสดุ**.  
กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- สมโพธิ วิวิธเกียรรวงศ์. (2542). **กลศาสตร์ของวัสดุ**. กรุงเทพฯ : ฟิสิกส์เซ็นเตอร์การพิมพ์.
- สุกิจ นามพิชญ์. (2541). **ความแข็งแรงของวัสดุ**. กรุงเทพฯ : ซีเอ็ดดูเคชั่น.
- สิริศักดิ์ ปโยธรสิริ. (2549). **กลศาสตร์วัสดุ**. กรุงเทพฯ : ว.เพ็ชรสกุล.
- Civil Architectural and Environmental Engineering. (1997). **Direct Shear, Torsion  
Testing**. Missouri University of Science & Technology. Retrieved June 5, 2013,  
from <http://classes.mst.edu/civeng120/lessons/torsion/fracture/index.html>.
- David Roylance. (2000). **Shear and Torsion**. Department of Materials Science and  
Engineering: Massachusetts Institute of Technology : Cambridge, MA 02139.
- Ferdinand P. Beer, Russell Johnston, John T. DeWolf and David F. Mazurek. (2012).  
**Mechanics of Materials**. New York : Mc Graw Hill.
- G.M. Goodrich*. (2013). **Toolbox Case Study 1: Valve Spring Failure**. [Element Materials  
Technology](#). Retrieved June 25, 2013, from  
<https://www.element.com/information/resources/articles-index>.
- Hearn E. J. (2000). **Mechanics of Materials 1: An Introduction to the Mechanics of Elastic  
and Plastic Deformation of Solids and Structural Materials**. Oxford : Butterworth-  
Heinemann.
- James M. Gere and Barry J. Goodno. (2012). **Mechanics of Materials**. Stamford : Cengage  
Learning.
- James M. Gere and Stephen P. Timoshenko. (1991). **Mechanics of Materials**. New York :  
Springer Science Business Media. B.V.
- James O. Smith. (1939). **The Effect of Range of Stress on the Torsional Fatigue  
Strength of Steel**. The University of Illinoisurbana, Engineering Experiment  
Station Bulletin Series No. 316.

## เอกสารอ้างอิง (ต่อ)

- John Case, Lord Chilver and Carl T. F. Ross. (1999). **Strength of Materials and Structures**. London : Arnold.
- P.L. Hurricks. (2011). **Springs**. Retrieved June 25, 2013, from <http://www.data4design.co.uk/PDF's/Springs%20text.pdf>.
- Russell C. Hibbeler. (2011). **Mechanics of Materials**. New York : Prentice Hall International Inc.
- Vitor Dias da Silva. (2006). **Mechanics and Strength of Materials**. Heidelberg : Springer-Verlag.
- William A. Nash. (1998). **Theory and Problems of Strength of Materials**. New York : McGraw-Hill.



## แผนบริหารการสอนประจำบทที่ 4

### แรงเหวี่ยงและโมเมนต์ตัดในคาน

#### หัวข้อเนื้อหาประจำบท

1. ประเภทของคานตามลักษณะฐานรองรับ
  - คานช่วงเดียวธรรมดา
  - คานยื่น
  - คานยื่นจากคานหลัก
  - คานยื่นที่ปลายด้านหนึ่งวางอยู่บนฐานรองรับ
  - คานปลายยึดทั้งสองข้าง
  - คานต่อเนื่อง
2. น้ำหนักที่กระทำบนคาน
3. สมการความสมดุล
4. แผนภาพแรงเหวี่ยงและแผนภาพโมเมนต์ตัด
  - แผนภาพแรงเหวี่ยง
  - แผนภาพโมเมนต์ตัด
5. จุดตัดกลับ
6. การเขียนแผนภาพแรงเหวี่ยงและโมเมนต์ตัด
7. การสร้างแผนภาพแรงเหวี่ยงและแผนภาพโมเมนต์ตัดวิธีซูเปอร์โพลีชั่น
8. สรุปรายบท
9. แบบฝึกหัดท้ายบท

#### วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม

เมื่อนักศึกษาเรียนบทเรียนนี้แล้วสามารถ

1. อธิบายประเภทของคานตามลักษณะฐานรองรับได้
2. อธิบายประเภทของน้ำหนักกระทำบนคานได้
3. อธิบายสมการความสมดุลได้
4. อธิบายและสร้างแผนภาพแรงเหวี่ยงของคานรูปแบบต่าง ๆ ได้
5. อธิบายและสร้างแผนภาพโมเมนต์ตัดของคานรูปแบบต่าง ๆ ได้
6. อธิบายและหาระยะที่เกิดการตัดกลับของคานได้

## 7. อธิบายและสร้างแผนภาพแรงเฉือนและแผนภาพโมเมนต์คัตวิชิซูเปอร์โพลีชัน

### วิธีสอนและกิจกรรมการเรียนการสอนประจำบท

1. บรรยายเนื้อหาในเอกสารประกอบคำสอน การถามและตอบในห้องเรียนร่วมกับการใช้สื่อประกอบอื่น เช่น สื่อแผ่นใส สื่อคอมพิวเตอร์ หรือสื่อวีดิทัศน์ เป็นต้น

2. แสดงตัวอย่างการสร้างแบบจำลองชิ้นงาน โดยใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำเร็จรูป รวมถึงการสร้างแผนภาพแรงเฉือนและแผนภาพโมเมนต์คัต

3. สาธิตขั้นตอนการแก้ปัญหาโจทย์ที่เกี่ยวข้องกับเนื้อหาในการเรียนการสอน เช่น คานช่วงเดียว ทรรรดาคานยื่น คานยื่นจากคานหลัก คานยื่นที่ปลายด้านหนึ่งวางอยู่บนฐานรองรับ คานปลายยึดทั้งสองข้าง คานต่อเนื่อง แผนภาพแรงเฉือนและแผนภาพโมเมนต์คัตจุดคัตกลับ การสร้างแผนภาพแรงเฉือนและแผนภาพโมเมนต์คัตวิชิซูเปอร์โพลีชัน เป็นต้น

#### 4. มอบหมายงาน

4.1 ให้ผู้เรียนแต่ละคนแก้ปัญหาโจทย์ที่เกี่ยวข้องกับเนื้อหา เช่น คานช่วงเดียว ทรรรดาคานยื่น คานยื่นจากคานหลัก คานยื่นที่ปลายด้านหนึ่งวางอยู่บนฐานรองรับ คานปลายยึดทั้งสองข้าง คานต่อเนื่อง แผนภาพแรงเฉือนและแผนภาพโมเมนต์คัตจุดคัตกลับ การสร้างแผนภาพแรงเฉือนและแผนภาพโมเมนต์คัตวิชิซูเปอร์โพลีชัน

4.2 ให้ผู้เรียนแต่ละกลุ่มศึกษาเพิ่มเติมและยกตัวอย่างโครงสร้างจริงในชุมชนที่มีรูปร่างและพฤติกรรมกรรับน้ำหนักสอดคล้องกับเนื้อหาที่เรียน

4.3 ให้ผู้เรียนแต่ละคนทำแบบฝึกหัดจากคำถามท้ายบท เพื่อทดสอบความรู้ที่ได้เรียนมา

#### 5. ทำแบบฝึกหัดท้ายบท

### การวัดและประเมินผล

1. การสังเกตความสนใจของผู้เรียน
2. การฝึกปฏิบัติเกี่ยวกับการคำนวณปัญหาโจทย์
3. การทดสอบจากแบบทดสอบ
4. การประเมินผล ผู้เรียนจะต้องได้คะแนนรวมไม่ต่ำกว่าร้อยละ 60 จึงจะผ่านเกณฑ์การเรียนรู้

## บทที่ 4

### แรงเฉือนและโมเมนต์คัตในคาน

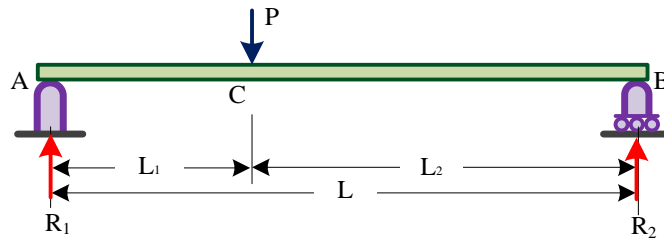
คาน (Beam) เป็นชิ้นส่วนของโครงสร้างที่รับแรงที่กระทำในแนวตั้งฉากกับแกนของโครงสร้าง คานสามารถพบเห็นได้ทั่วไปในงานก่อสร้างในลักษณะชิ้นส่วนโครงสร้างท่อนยาววางในแนวราบบนฐานรองรับ อย่างไรก็ตามคานอาจวางตัวอยู่ในลักษณะอื่นก็ได้แต่ต้องอยู่บนสมมติฐานการรับแรงที่ได้กล่าวแล้วข้างต้น ในบางครั้งคานอาจรับโมเมนต์คัตร่วมกับแรงในแนวแกนได้เช่นกัน แรงที่มักเกิดกับคานคือแรงเฉือนและโมเมนต์คัตดังนั้นวัสดุที่ใช้ทำคานจะต้องมีคุณสมบัติต้านทานแรงเฉือนและโมเมนต์คัตได้ดี สำหรับวัสดุที่ได้ทำคานมีหลายชนิด เช่น ไม้ คอนกรีต และเหล็ก เป็นต้น คานไม่มีน้ำหนักเบาแต่มีอายุการใช้งานจำกัด คานคอนกรีตเสริมเหล็กมีน้ำหนักมากแต่เป็นที่นิยมเนื่องจากสะดวกในการก่อสร้างและรับแรงได้ดี ส่วนคานเหล็กเป็นมีความแข็งแรงและมีน้ำหนักเบานิยมใช้ในการก่อสร้างโรงงานอุตสาหกรรม ขนาดหน้าตัดของคานจะสัมพันธ์กับแรงที่เกิดขึ้นภายในคาน ดังนั้นในบทนี้จึงขออธิบายแรงที่เกิดขึ้นในคาน โดยมุ่งเน้นที่แรงเฉือนและโมเมนต์คัตซึ่งเป็นแรงที่มักเกิดกับคานทั่วไป

#### ประเภทของคานตามลักษณะฐานรองรับ

แรงที่เกิดกับคานจะมีความสัมพันธ์กับลักษณะของน้ำหนักบรรทุกและฐานรองรับ คานที่วางบนฐานรองรับที่แตกต่างกันจะมีพฤติกรรมการรับแรงที่แตกต่างกัน ตัวอย่างฐานรองรับที่มักพบเห็น เช่น ฐานสั้นคม ฐานบานพับ ฐานเคลื่อนที่ได้ในแนวระนาบหรือแนวตั้ง ฐานสปริง และฐานยึดแน่น เป็นต้น ลีริสกี (2549 : 177-179) สิทธิชัย แสงอาทิตย์ (2549 : 6-1-6-2) และ James M. Gere and Barry J. Goodno (2012 : 232-239) กล่าวถึงการจำแนกคานตามลักษณะฐานรองรับซึ่งมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

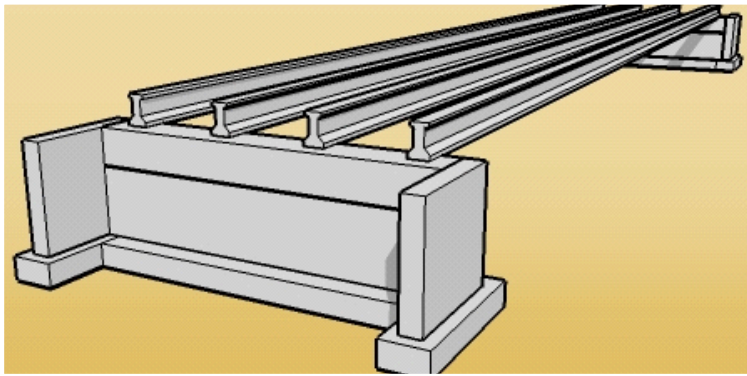
##### 1. คานช่วงเดียวธรรมดา

คานช่วงเดียวธรรมดา (Simple Beam) คือคานที่ปลายด้านหนึ่งวางอยู่บนฐานรองรับที่มีลักษณะคล้ายสั้นคมหรือบานพับ (Pin) ส่วนปลายอีกด้านวางอยู่บนฐานรองรับแบบลูกกลิ้ง (Roller) ซึ่งเป็นฐานรองรับที่สามารถขยับตัวในแนวราบได้อย่างอิสระดังแสดงในภาพที่ 4.1 คานช่วงเดียวธรรมดาพบได้ทั่วไปในงานก่อสร้างทั้งอาคารและสะพานเนื่องจากคานชนิดนี้มีขั้นตอนการคำนวณไม่ซับซ้อนและมีความปลอดภัยสูง ตัวอย่างคานช่วงเดียวที่มักพบเห็นคือคานรับพื้นทางที่วางบนคอสสะพานดังแสดงในภาพที่ 4.2



ภาพที่ 4.1 คานช่วงเดียวธรรมดา

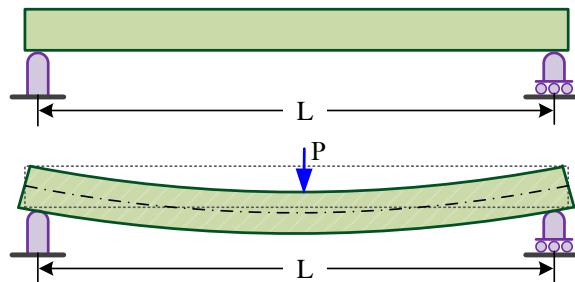
ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556



ภาพที่ 4.2 ตัวอย่างคานช่วงเดียวธรรมดา

ที่มา : Engineering Visualization. 2009

จากภาพที่ 4.1 จุด A เป็นฐานรองรับแบบสันคมซึ่งมีคุณสมบัติให้คานหมุนรอบฐานได้ แต่ไม่สามารถเคลื่อนที่ในแนวราบและแนวตั้ง จุด B เป็นฐานรองรับแบบลูกกลิ้งซึ่งมีคุณสมบัติให้คานเคลื่อนที่ในแนวราบได้แต่เคลื่อนที่ในแนวตั้งไม่ได้ คานช่วงเดียวธรรมดาเมื่อมีน้ำหนักมากระทำก็จะเกิดการแอ่นตัว (Deflection) โดยจุดรองรับแบบลูกกลิ้งขยับตัวในแนวราบ จนกระทั่งโครงสร้างอยู่ในสภาวะสมดุลดังแสดงในภาพที่ 4.3

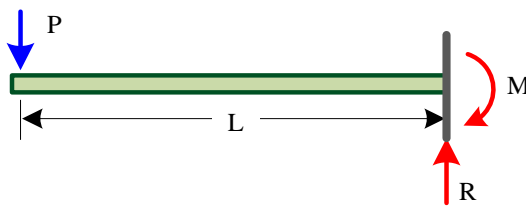


ภาพที่ 4.3 การโก่งของคานเมื่อรับน้ำหนัก

ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

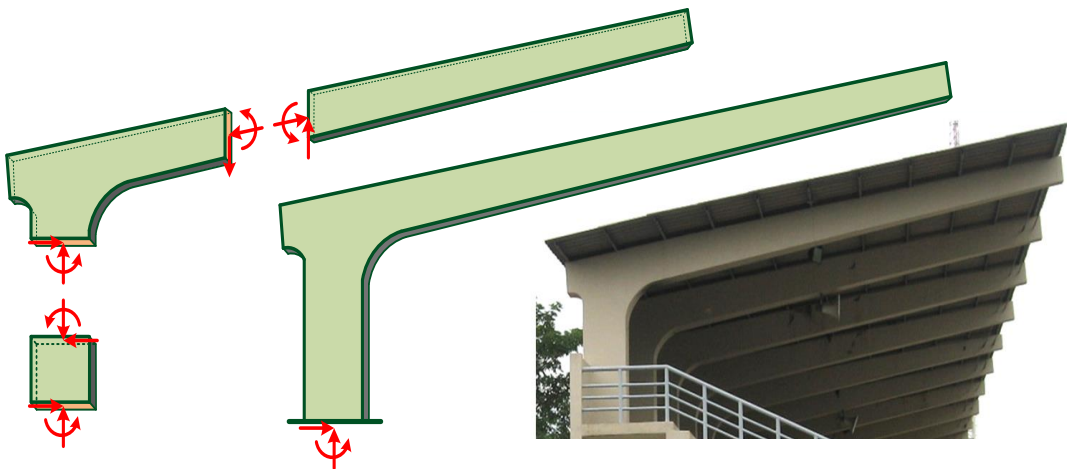
## 2. คานยื่น

คานยื่น (Cantilever Beam) คือคานที่มีปลายด้านหนึ่งยึดแน่นติดกับผนังและปลายอีกด้านหนึ่งยื่นอย่างอิสระดังแสดงในภาพที่ 4.4 คานยื่นจะมีแรงภายในเกิดขึ้นมากที่บริเวณฐานยึดแน่น แรงภายในที่เกิดขึ้นมีทั้งแรงเฉือนและโมเมนต์ดัด โดยโมเมนต์ดัดที่เกิดส่วนใหญ่เป็นโมเมนต์ลบเนื่องจากน้ำหนักบรรทุกทุกจากแรงดึงดูดโลกซึ่งจะทำให้ส่วนบนของคานฉีกขาด แรงที่เกิดขึ้นที่ฐานรองรับ ตัวอย่างคานยื่น เช่น โครงสร้างหลังคาอิมจินทร์สนามกีฬาแสดงในภาพที่ 4.5 เป็นต้น



ภาพที่ 4.4 แรงที่เกิดขึ้นที่จุดยึดของคานยื่น

ที่มา : จิรวัดน์ วิศวกรรมศาสตรบัณฑิต. 2556



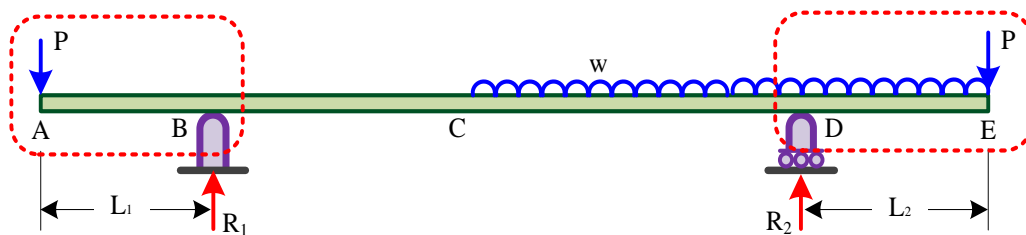
ภาพที่ 4.5 คานยื่น

ที่มา : จิรวัดน์ วิศวกรรมศาสตรบัณฑิต. 2556

จากภาพที่ 4.4 เมื่อมีน้ำหนักกระทำที่ปลายคานจะทำให้คานเกิดการแอ่นลง โดยปลายคานจะเกิดการแอ่นตัวมากที่สุดและการแอ่นตัวจะค่อย ๆ ลดลงจนเป็นไม่เกิดการเปลี่ยนแปลงบริเวณฐานยึดแน่น อย่างไรก็ตามการแอ่นตัวของคานยื่นจะมากหรือน้อยขึ้นอยู่กับน้ำหนักที่กระทำและระยะยื่นของคาน

### 3. คานยื่นจากคานหลัก

คานยื่นจากคานหลัก (Overhanging Beam) คือคานที่ยื่นเลยออกมาจากฐานรองรับโดยคานที่ยื่นนั้นเป็นส่วนหนึ่งของคานหลักดังแสดงในภาพที่ 4.6 จากภาพเป็นตัวอย่างคานยื่นจากคานหลักที่เป็นธรรมชาติโดยมีจุดรองรับเป็นสันคมและลูกกลิ้งตามลำดับ คานบริเวณส่วนที่ยื่นจะมีพฤติกรรมการรับแรงเช่นเดียวกับคานยื่นทั่วไป อย่างไรก็ตามกรณีที่คานยื่นมีขนาดแตกต่างจากคานหลักจะต้องทำการเชื่อมแน่นติดกันอย่างมั่นคงแข็งแรง การแอมตัวของคานทั้งระบบจะขึ้นอยู่กับน้ำหนักที่กระทำและขนาดของคาน

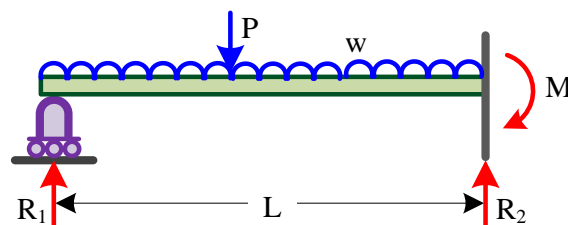


ภาพที่ 4.6 คานยื่นภายนอกฐานรองรับ

ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

### 4. คานยื่นวางอยู่บนฐานรองรับ

คานยื่นที่ปลายหนึ่งวางอยู่บนฐานรองรับ (Propped Beam) คือคานช่วงเดียวที่ปลายด้านหนึ่งยึดแน่นส่วนปลายที่ด้านหนึ่งวางอยู่บนฐานรองรับดังแสดงในภาพที่ 4.7 คานชนิดนี้จะมีขนาดเล็กเมื่อเทียบกับคานยื่นทั่วไปเนื่องจากฐานรองรับที่ตำแหน่งปลายอิสระจะช่วยรับแรงได้เป็นอย่างดี แต่คานชนิดนี้มีความยุ่งยากในการหาค่าแรงที่เกิดกับคานกล่าวคือไม่สามารถใช้สมการสมดุลของแรงได้เพียงอย่างเดียวต้องใช้ความสัมพันธ์การเสถียรประกอบกรคำนวณด้วย

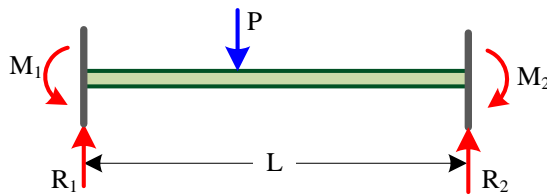


ภาพที่ 4.7 คานยื่นที่ปลายด้านหนึ่งวางอยู่บนฐานรองรับ

ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

## 5. คานปลายยึดแน่นทั้งสองข้าง

คานปลายยึดแน่นทั้งสองข้าง (Fixed Beam) คือคานช่วงเดียวที่ปลายทั้งสองข้างถูกยึดติดกับผนังดังแสดงในภาพที่ 4.8 โดยผนังต้องมีความแข็งแรงเพียงพอที่จะทำให้คานสามารถรับได้ทั้งแรงในแนวราบ แรงในแนวตั้ง และ โมเมนต์คัต คานชนิดนี้มีความแข็งแรงมากเนื่องจากผนังมีส่วนร่วมในการรับแรง อย่างไรก็ตามการหาแรงที่เกิดกับคานชนิดนี้มีขั้นตอนที่ซับซ้อนจึงมักพบเห็นคานชนิดนี้ไม่บ่อยนัก เช่น คานที่มีระยะห่างระหว่างฐานรองรับมาก เป็นต้น

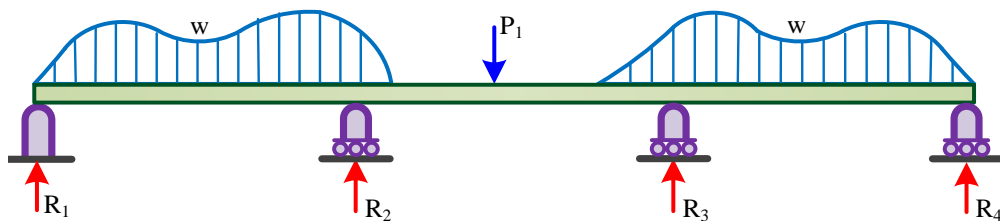


ภาพที่ 4.8 คานปลายยึดแน่นทั้งสองข้าง

ที่มา : จีรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

## 6. คานต่อเนื่อง

คานต่อเนื่อง (Continuous Beam) คือคานที่วางบนฐานรองรับมากกว่าหนึ่งช่วงโดยคานแต่ละช่วงมีการเชื่อมต่อกันจนสามารถถ่ายเทแรงระหว่างกันได้ดังแสดงในภาพที่ 4.9 เมื่อคานช่วงใดมีน้ำหนักกระทำจะทำให้คานช่วงนั้นเกิดการเสียรูปและดึงรั้งคานข้างเคียงจนเกิดการถ่ายเทแรง คานชนิดนี้พบเห็นทั่วไปในการก่อสร้างอาคารเพราะประหยัดค่าใช้จ่ายในการก่อสร้าง นอกจากนั้นการแอ่นตัวของคานแต่ละช่วงจะมีความสัมพันธ์กับคานข้างเคียง



ภาพที่ 4.9 คานต่อเนื่อง

ที่มา : จีรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

เมื่อพิจารณาคานทุกชนิดที่กล่าวมาแล้วข้างต้นพบว่า คานช่วงเดียวธรรมดา คานยื่นและคานยื่นจากคานหลักสามารถคำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่ฐานรองรับได้โดยตรงด้วยการคำนวณจากสมการสมดุลของแรง (Statically Determinate Beams) โดยที่ผลรวมระหว่างแรงในแนวตั้งต้อง

อยู่ในสภาวะสมดุล ผลรวมระหว่างแรงในแนวราบต้องอยู่ในสภาวะสมดุล และผลรวมระหว่างโมเมนต์คัตต้องอยู่ในสภาวะสมดุลด้วยเช่นกันดังแสดงในสมการต่อไปนี้

$$\text{ผลรวมของแรงในแนวตั้ง ; } \quad \sum V = 0 \quad (4.1)$$

$$\text{ผลรวมของแรงในแนวราบ ; } \quad \sum H = 0 \quad (4.2)$$

$$\text{ผลรวมของโมเมนต์คัต ; } \quad \sum M = 0 \quad (4.3)$$

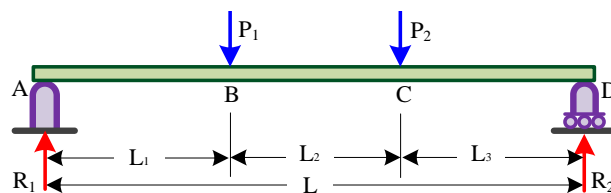
สำหรับคานชนิดอื่นไม่สามารถคำนวณด้วยสมการข้างต้นได้แต่ต้องใช้สมการอื่นร่วมด้วยเนื่องจากแรงปฏิกิริยาที่ฐานรองรับมีมากกว่าคานธรรมดาทั่วไป ดังนั้นจึงเรียกคานเหล่านี้ว่า คานที่มีความซับซ้อนในการคำนวณ (Statically Indeterminate Beams) อย่างไรก็ตามบทนี้จะอธิบายเฉพาะคานที่สามารถวิเคราะห์ได้ด้วยสมการสมดุลเพียงอย่างเดียวเพื่อใช้เป็นพื้นฐานในการเรียนในระดับสูงต่อไป

## น้ำหนักที่กระทำบนคาน

มนตรี พิรุณเกษตร (2541 : 11-12, 260-264) และ James M. Gere and Barry J. Goodno (2012 : 239-241) กล่าวว่าน้ำหนัก (Load) หรืออาจเรียกว่า ภาระ คือแรงหรือน้ำหนักที่กระทำบนคานจนทำให้คานนั้นเกิดแรงภายในและอยู่ในสภาวะสมดุล น้ำหนักมีลักษณะแตกต่างกันตามรูปร่าง ขนาด และทิศทางซึ่งสามารถแบ่งออกได้เป็น 4 ประเภทดังต่อไปนี้

### 1. น้ำหนักกระทำเป็นจุด

น้ำหนักกระทำเป็นจุด (Point Load หรือ Concentrated Load) คือแรงหรือน้ำหนักที่กระทำในลักษณะที่พื้นที่รองรับมีขนาดเล็ก เมื่อเปรียบเทียบกับพื้นที่ที่รับแรงกับขนาดคานพบว่ามีความแตกต่างกันมากจนอาจกล่าวได้ว่ามีลักษณะเป็นจุดดังแสดงในภาพที่ 4.10



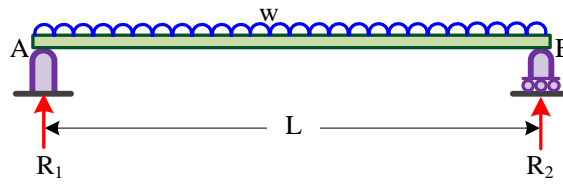
ภาพที่ 4.10 น้ำหนักกระทำเป็นจุด

ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

### 2. น้ำหนักแผ่กระจายสม่ำเสมอ

น้ำหนักแผ่กระจายสม่ำเสมอ (Distributed Load) คือแรงหรือน้ำหนักที่กระทำบนคานในลักษณะแผ่กระจายอย่างสม่ำเสมอไปตามความยาวคานมีลักษณะดังภาพที่ 4.11



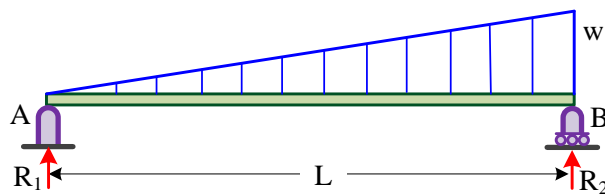


ภาพที่ 4.11 น้ำหนักแผ่กระจายสม่ำเสมอ

ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

### 3. น้ำหนักกระจายเพิ่มขึ้นอย่างต่อเนื่อง

น้ำหนักกระจายเพิ่มขึ้นอย่างต่อเนื่อง (Niformly Varying Distributed Load) คือแรงหรือน้ำหนักที่กระทำบนคานในลักษณะเพิ่มขึ้นอย่างต่อเนื่องแบบเชิงเส้น เมื่อพิจารณารูปร่างของน้ำหนักที่กระทำจะมีลักษณะเป็นรูปสามเหลี่ยมดังแสดงในภาพที่ 4.12

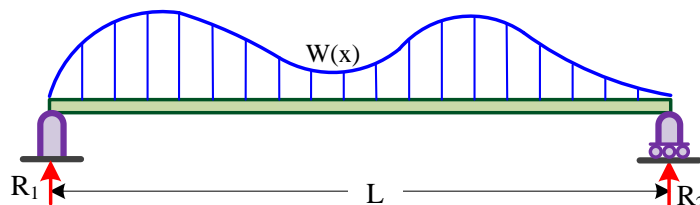


ภาพที่ 4.12 แรงกระทำเพิ่มขึ้นตลอดแนวความยาว

ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

### 4. น้ำหนักกระจายไม่สม่ำเสมอ

น้ำหนักกระจายไม่สม่ำเสมอ (Non Uniform Distributed Load) คือแรงหรือน้ำหนักที่กระทำบนคานในรูปแบบที่ไม่แน่นอนดังแสดงในภาพที่ 4.13 น้ำหนักในลักษณะนี้มักจะเกิดขึ้นจริงในสภาวะธรรมชาติและมีความยุ่งยากในการคำนวณแรงปฏิกิริยาหรือแรงภายใน



ภาพที่ 4.13 แรงกระทำที่ไม่สม่ำเสมอ

ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

### สมการความสมดุล

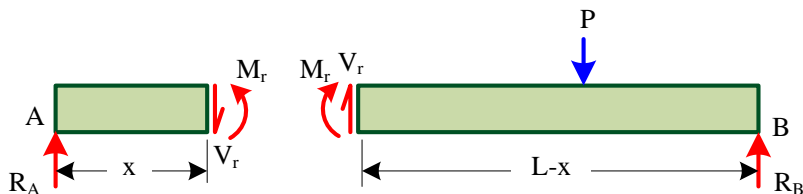
การคำนวณหาแรงที่เกิดกับคานเมื่อมีน้ำหนักกระทำมีความแตกต่างกันขึ้นอยู่กับชนิดของฐานรองรับและชนิดของน้ำหนัก สมโพธิ์ วิวิธเกยูรวงศ์ (2542 : 131-133) James M. Gere and Barry J. Goodno (2012 : 239-241) และ Russell C. Hibbeler (2011 : 242-245) กล่าวว่าในการหาแรงที่เกิดกับคานเมื่อมีน้ำหนักมากระทำสามารถทำได้โดยใช้สมการสมดุลของแรงในการแก้ปัญหา เมื่อพิจารณาคานน้ำหนักเบาช่วงเดียวธรรมดาที่รับน้ำหนักบรรทุกทุกแบบจุด P กระทำที่ระยะใด ๆ บนคานดังแสดงในภาพที่ 4.14 พบว่า ในสภาวะสมดุลจะมีแรงปฏิกิริยา  $R_A$  และ  $R_B$  เกิดขึ้นที่ฐานรองรับในปริมาณรวมกันเท่ากับน้ำหนัก P เพื่อรักษาเสถียรภาพของโครงสร้าง หากพิจารณาชิ้นส่วนด้านซ้ายมือที่ภาคตัดขวางของหน้าตัดคานแนว a-a ซึ่งอยู่ห่างจากปลายคาน A เป็นระยะ  $x$  พบว่าเกิดแรงเฉือน  $V_r$  และ โมเมนต์ดัด  $M_r$  ซึ่งเป็นแรงต้านภายในคานของชิ้นส่วนดังกล่าว ในขณะที่หน้าตัดคานของชิ้นส่วนด้านขวาก็จะเกิดแรงเฉือนและโมเมนต์ดัดในปริมาณเท่ากันแต่มีทิศตรงข้าม หากจัดหมวดหมู่แรงในแนวราบ ในแนวตั้ง และโมเมนต์ดัดพบว่า

แนวราบ ไม่มีน้ำหนักใด ๆ มากระทำจึงไม่ต้องพิจารณาเพราะคานมีความสมดุลกันอยู่แล้ว หรือผลรวมแรงในแนวราบมีค่าเป็นศูนย์ หรือ  $\sum H = 0$

จากสมดุลของแรงในแนวตั้ง  $\sum V = 0$  ซึ่งจะได้ว่าคานด้านซ้ายมือของแรง P มีแรงต้านในแนวตั้ง  $V_r$  เท่ากับแรงปฏิกิริยาที่ฐานรองรับ  $R_A$  แรงต้านในแนวตั้งนี้เรียกว่า แรงเฉือนต้าน (Resisting Shearing Force) แต่ถ้าหากมีน้ำหนักอื่นนอกเหนือจากน้ำหนัก P มากระทำกับคานก็จะสามารถหาแรงเฉือนต้านได้จากผลรวมของแรงทั้งหมดในแนวตั้ง โดยเขียนเป็นสมการได้ดังต่อไปนี้

$$V = \sum V_x \quad (4.4)$$

เมื่อ  $x$  เป็นระยะที่คิดผลรวมของแรงในแนวตั้งทางด้านซ้ายมือของหน้าตัดคาน



ภาพที่ 4.14 คานช่วงเดียว

ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

พิจารณาผลรวมของโมเมนต์ตัดและโมเมนต์จากแรงคู่ควบที่เกิดขึ้นกับคานจากสมการสมดุล  $\sum M = 0$  พบว่า ผลรวมทางพีชคณิตของโมเมนต์ตัดที่เกิดจากแรงคู่ควบภายนอกที่กระทำรอบแกนสะเทินของหน้าตัดคานจะอยู่ในรูปของสมการดังต่อไปนี้

$$M = (\sum M)_L = (\sum M)_R \quad (4.5)$$

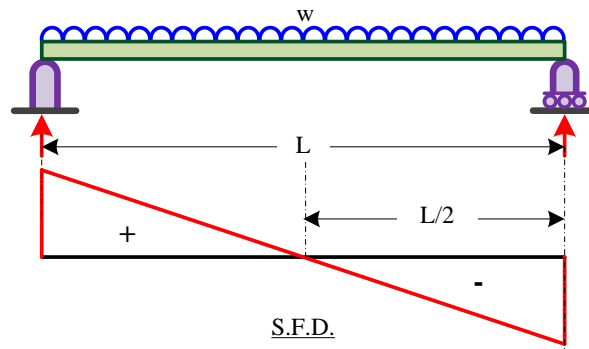
เมื่อสัญลักษณ์ L ใช้แสดงโมเมนต์ที่ได้จากแรงกระทำทางซ้ายของหน้าตัดและ R ใช้แสดงโมเมนต์ที่ได้จากแรงกระทำทางขวาของหน้าตัด ตามลำดับ โดยค่าโมเมนต์ที่คานต้านโมเมนต์ตัดที่เกิดจากแรงภายนอกเรียกว่า โมเมนต์ต้าน (Resisting Moment) ซึ่งมีค่าเท่ากับโมเมนต์ที่มากระทำแต่มีทิศตรงกันข้าม

### แผนภาพแรงเฉือนและแผนภาพโมเมนต์ตัด

แรงที่เกิดขึ้นกับคานเมื่อมีน้ำหนักมากระทำสามารถหาได้จากสมการสมดุลของแรงดังที่ได้กล่าวมาแล้วข้างต้น แรงที่เกิดขึ้นกับคานประกอบด้วยแรงในแนวราบ แรงในแนวตั้งและโมเมนต์ตัด โดยที่แรงในแนวตั้งและโมเมนต์ตัดมักเกิดขึ้นและส่งผลกระทบต่อคานจึงทำให้แรงทั้งสองมีความสำคัญ ดังนั้นในการนำเสนอแรงที่เกิดขึ้นกับคานจึงมักนำเสนอแรงทั้งสองในรูปของแผนภาพเพื่อความสะดวกในการวิเคราะห์คานทั้งระบบ ชาญ อด่งงาน (2523 : 68-80) สิริศักดิ์ ปโยธรสิริ (2549 : 183-185) Ferdinand P. Beer, et al. (2012 : 360-362) James M. Gere and Barry J. Goodno (2012 : 246-256) และ Russell C. Hibbeler (2011 : 329-331) กล่าวถึงรายละเอียดการสร้างแผนภาพแรงเฉือนและแผนภาพโมเมนต์ตัดไว้ดังต่อไปนี้

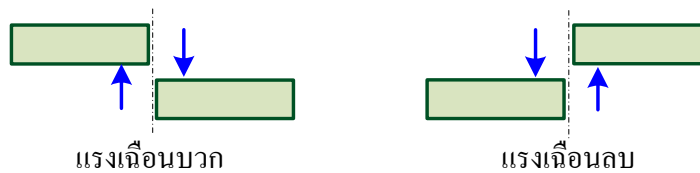
#### 1. แผนภาพแรงเฉือน

แผนภาพแรงเฉือน (Shear Force Diagram : S.F.D.) คือภาพที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างแรงเฉือนและระยะทางในแนวราบไปตามแนวยาวของคาน การเขียนแผนภาพเกิดจากการหาแรงที่ตั้งฉากกับคานไปตามระยะทางในแนวราบของคาน โดยทั่วไปมักกำหนดทิศทางของแรงเฉือนบวกอยู่ด้านบนและแรงเฉือนลบจะอยู่ฝั่งตรงข้ามดังแสดงในภาพที่ 4.15 การสร้างแผนภาพแรงเฉือนของคานช่วงเดี่ยวยุทธมดาจะใช้สมการสมดุลของแรงในแนวตั้งเพื่อคำนวณแรงที่เกิดขึ้นกับคาน การนำเสนอแผนภาพโดยทั่วไปมักแสดงแรงเฉือนของคานทั้งระบบที่วางตัวในแนวราบ แต่กรณีของโครงข้อแข็งมักเขียนภาพแรงเฉือนตามรูปร่างของโครงสร้างเพื่อความสะดวกในการใช้งาน การกำหนดเครื่องหมายแรงเฉือน (Sign of Shear) โดยทั่วไปจะกำหนดให้แรงเฉือนเป็นบวกเมื่อคานด้านซ้ายถูกกระทำให้เคลื่อนที่ขึ้นจากซีกขวาหรือเอนวัสดูตามเข็มนาฬิกาหากพิจารณาจากแนวตัด สำหรับการกำหนดแรงเฉือนลบเมื่อคานด้านซ้ายถูกกระทำให้เคลื่อนที่ลงหรือเอนวัสดูตามเข็มนาฬิกาแสดงในภาพที่ 4.16



ภาพที่ 4.15 แผนภาพแรงเฉือนของคานช่วงเดียว

ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556



ภาพที่ 4.16 การกำหนดเครื่องหมายแรงเฉือน

ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

คานที่รับน้ำหนักจนกระทั่งวิบัติด้วยแรงเฉือนสามารถสังเกตได้จากลักษณะการวิบัติหรือการแตกร้าว เช่น คานที่ขาดจากกันในแนวตั้งจากความเค้นเฉือนที่เกิดจากแรงในทิศทางตรงกันข้ามดังแสดงในภาพที่ 4.16 คานไม้ที่รับน้ำหนักทั่วไปอาจเกิดรอยแตกร้าวในแนวระนาบที่ปลายคานเนื่องจากความเค้นเฉือน หรือคานคอนกรีตเสริมเหล็กเกิดรอยแตกร้าวในแนวทแยงและมักขาดเป็นมุมเฉียงเนื่องจากความเค้นเฉือนดังแสดงในภาพที่ 4.17 เป็นต้น

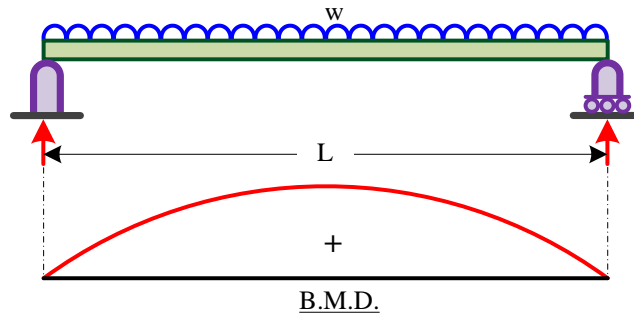


ภาพที่ 4.17 การวิบัติของคานคอนกรีตเสริมเหล็กเนื่องจากแรงเฉือน

ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

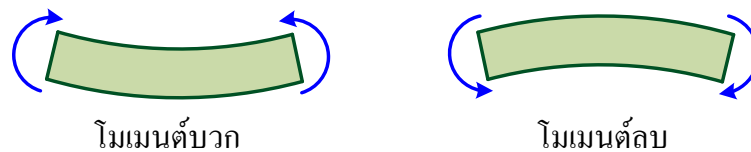
## 2. แผนภาพโมเมนต์ดัด

แผนภาพ โมเมนต์ดัด (Bending Moment Diagram : B.M.D.) คือภาพที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ดัดของภาคตัดขวางที่สอดคล้องกับระยะทางในแนวราบของคานาดังแสดงในภาพที่ 4.18 ขั้นตอนการเขียนแผนภาพก็เป็นไปในทำนองเดียวกับแผนภาพแรงเฉือน โดยอาศัยสมการสมดุลของแรง



ภาพที่ 4.18 แผนภาพโมเมนต์ดัดคานาช่วงเดียว

ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556



ภาพที่ 4.19 การกำหนดเครื่องหมายโมเมนต์ดัด

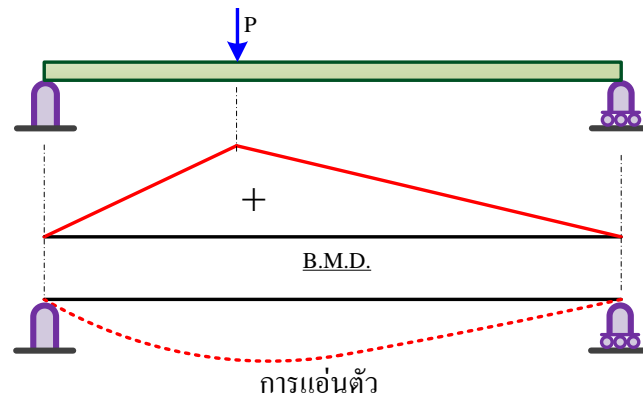
ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

การกำหนดเครื่องหมายโมเมนต์ดัด (Sign of Bending Moment) โดยทั่วไปมักกำหนดให้โมเมนต์ดัดเป็นบวกเมื่อส่วนบนของคานารับแรงอัดและส่วนล่างรับแรงดึงเมื่อพิจารณาจากแนวแกนสะเทิน (Neutral Axis) ของหน้าตัดคานา ในทางตรงกันข้ามเครื่องหมายโมเมนต์จะเป็นลบถ้าส่วนบนของคานารับแรงดึงและตอนล่างรับแรงอัดดังแสดงในภาพที่ 4.19 กรณีของคานาช่วงเดียวธรรมชาติการสร้างแผนภาพโมเมนต์ดัดจะใช้สมการสมดุลของแรงคู่ควบหรือโมเมนต์ที่ตำแหน่งจุดตัดของคานา โดยสมการที่ได้จะมีความสัมพันธ์กับระยะทาง

### จุดดัดกลับ

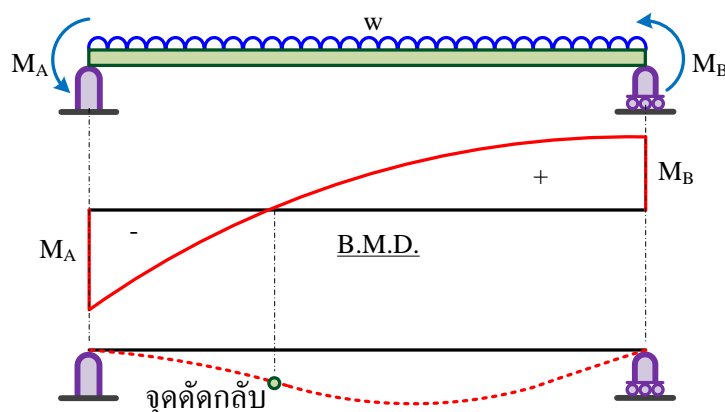
ภายหลังจากคานารับน้ำหนักจะเกิดการแอ่นตัวหรือโก่งตัวซึ่งจะสัมพันธ์กับชนิดของฐานรองรับและน้ำหนักที่กระทำ นอกจากนี้ลักษณะของการแอ่นตัวยังสามารถคาดคะเนได้

จากแผนภาพโมเมนต์ดัดด้วย ถ้าคานบริเวณใดเกิดโมเมนต์ดัดมากก็จะทำให้เกิดการแอ่นตัวมากตามไปด้วย ตรงจุดที่แผนภาพโมเมนต์ดัดมีค่าเป็นศูนย์จะแสดงให้เห็นจุดดัดกลับ (Contra Flexure) หรือจุดเปลี่ยนกลับ (Point of Inflection) เมื่อจุดดัดกลับคือจุดที่การแอ่นตัวของคานจะเปลี่ยนไป เช่น จากโค้งคว่ำเป็น โค้งหงาย หรือจากโค้งหงายเป็น โค้งคว่ำ เป็นต้น ยกตัวอย่างเช่น คานช่วงเดียวธรรมดาที่เกิดโมเมนต์ดัดบวกหรือลบตลอดความยาวคานจะไม่มีจุดดัดกลับดังแสดงในภาพที่ 4.20 สำหรับคานช่วงเดียวธรรมดาที่มีแผนภาพโมเมนต์ดัดเกิดจุดตัดกับแกนราบจนมีค่าเป็นศูนย์ดังแสดงในภาพที่ 4.21 จะมีจุดดัดกลับหนึ่งจุด และคานสองช่วงที่มีแผนภาพโมเมนต์ดัดเกิดจุดตัดกับแกนราบจนมีค่าเป็นศูนย์มากกว่าหนึ่งจุดดังแสดงในภาพที่ 4.22 ก็จะมีจุดดัดกลับ 2 จุด เป็นต้น (ชาญ อดุลงาน. 2523 : 80-82, สมโพธิ วิวิธเกยูรวงศ์. 2542 : 139 และ สิริศักดิ์ ปโยธรสิริ. 2549 : 196-197)



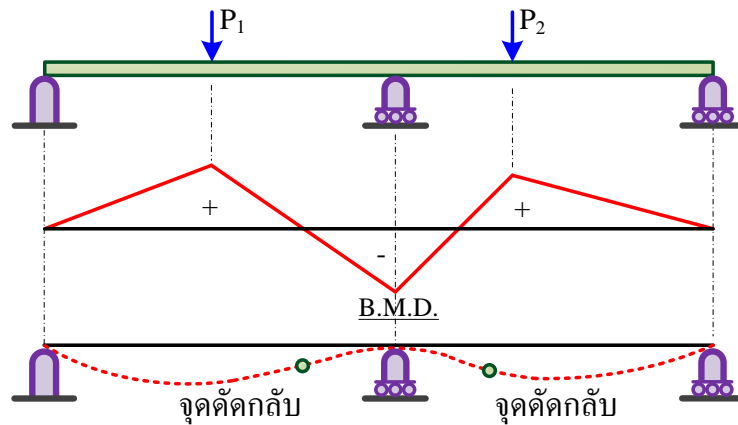
ภาพที่ 4.20 การแอ่นตัวของคานที่ไม่มีจุดดัดกลับ

ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556



ภาพที่ 4.21 การแอ่นตัวของคานที่มีจุดดัดกลับ

ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556



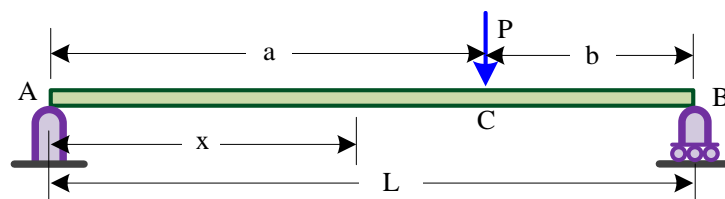
ภาพที่ 4.22 การแอ่นตัวของคานที่มีจุดตัดกลับมากกว่าหนึ่งจุด  
ที่มา : จีรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

**การเขียนแผนภาพแรงเฉือนและโมเมนต์ตัด**

ชาญ ถนัดงาน (2523 : 68-87) สมโพธิ์ วิวิธเกษรวงษ์ (2542 : 134-140) James M. Gere and Barry J. Goodno (2012 : 246-256) และ Russell C. Hibbeler (2011 : 329-331) กล่าวว่าเนื่องจากแรงที่เกิดกับคานแปรเปลี่ยนไปตามรูปร่างหน้าหน้าที่กระทำและลักษณะฐานรองรับคาน ดังนั้นในการสร้างแผนภาพแรงเฉือนและแผนภาพโมเมนต์ตัดของคานจึงต้องคำนึงถึงปัจจัยทั้งสองโดยมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

**1. คานช่วงเดียวธรรมดารับน้ำหนักแบบจุด**

การเขียนแผนภาพแรงเฉือนและโมเมนต์ตัดของคานช่วงเดียวธรรมดาที่มีน้ำหนัก P กระทำแบบจุดดังแสดงในภาพที่ 4.23 มีขั้นตอนดังต่อไปนี้



ภาพที่ 4.23 คานที่มีแรงกระทำแบบจุด  
ที่มา : จีรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

หาแรงปฏิกิริยาที่จุด A ;  $R_A = \frac{Pb}{L}$  (4.6)

หาแรงปฏิกิริยาที่จุด B ;  $R_B = \frac{Pa}{L}$  (4.7)

$$\text{แรงเฉือนช่วง AC } (x < a); \quad V = +\frac{Pb}{L} \quad (4.8)$$

$$\text{แรงเฉือนช่วง CB } (x < b); \quad V = \frac{+Pb}{L} - P = \frac{P(b-L)}{L} \quad (4.9)$$

$$V = \frac{-Pa}{L} \quad (4.10)$$

$$\text{โมเมนต์คัตช่วง AC } (x < a); \quad M_x = R_A x = \frac{Pbx}{L} \quad (4.11)$$

$$\text{โมเมนต์คัตที่จุด A } (x = 0); \quad M_A = 0 \quad (4.12)$$

$$\text{โมเมนต์คัตที่จุด C } (x = a); \quad M_C = \frac{Pab}{L} \quad (4.13)$$

$$\text{โมเมนต์คัตช่วง CB } (x > a); \quad M_x = R_A x - P(x-a) \quad (4.14)$$

$$M_x = \frac{Pbx}{L} - P(x-a) \quad (4.15)$$

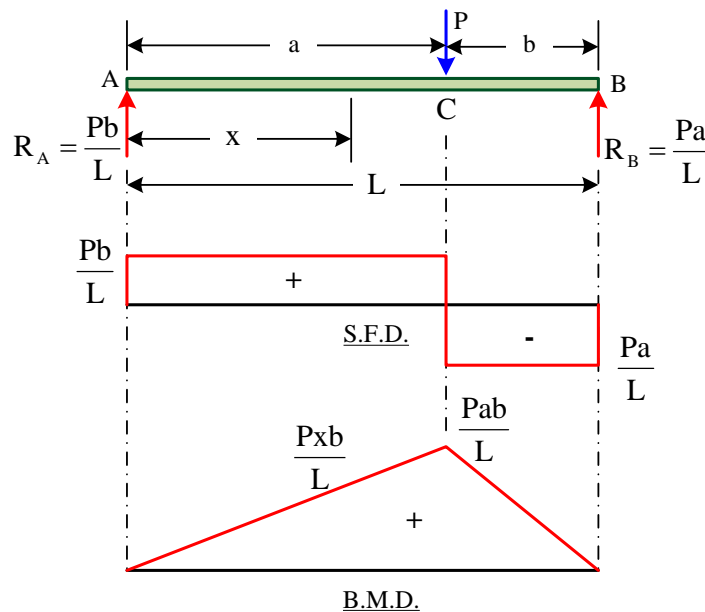
$$M_x = Px \frac{(b-L)}{L} + Pa \quad (4.16)$$

$$M_x = Pa - \frac{Pxa}{L} = \frac{Pa}{L}(L-x) \quad (4.17)$$

$$\text{โมเมนต์คัตที่จุด C } (x = a); \quad M_C = \frac{Pa}{L}(L-a) = \frac{Pab}{L} \quad (4.18)$$

$$\text{โมเมนต์คัตที่จุด B } (x = L); \quad M_B = 0 \quad (4.19)$$

เขียนแผนภาพแรงเฉือนและแผนภาพโมเมนต์คัตให้สอดคล้องกับสมการดังแสดงในภาพที่ 4.24

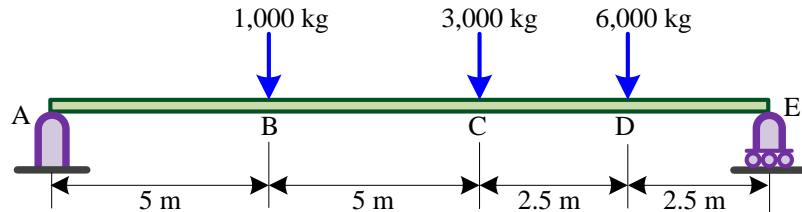


ภาพที่ 4.24 แผนภาพแรงเฉือนและโมเมนต์คัตของคานที่มีแรงกระทำแบบจุด

ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556



ตัวอย่างที่ 4.1 คานช่วงเดียวธรรมดา ยาว 15 m มีน้ำหนักกระทำแบบจุดดังแสดงในภาพที่ 4.25 จงเขียนแผนภาพแรงเฉือนและแผนภาพโมเมนต์คัตของคานนี้



ภาพที่ 4.25 คานช่วงเดียวรับน้ำหนักกระทำแบบจุด

ที่มา : จีรวัดณ์ วิมุติสุขวิริยา. 2556

### วิธีทำ

$$\text{แรงปฏิกิริยาที่ฐานรองรับ A ; } 15 R_A = (6,000 \times 2.5) + (3,000 \times 5) + (1,000 \times 10)$$

$$R_A = 2,666.67 \text{ kg}$$

$$\text{สมดุลแรงในแนวดิ่ง ; } R_E = 1,000 + 3,000 + 6,000 - R_A$$

$$= 7,333.33 \text{ kg}$$

$$\text{แรงเฉือนช่วง AB ; } V_{AB} = 2,666.67$$

$$\text{แรงเฉือนช่วง BC ; } V_{BC} = 2,666.67 - 1,000 = 1,666.67 \text{ kg}$$

$$\text{แรงเฉือนช่วง CD ; } V_{CD} = 2,666.67 - 1,000 - 3,000$$

$$= -1,333.33 \text{ kg}$$

$$\text{แรงเฉือนช่วง DE ; } V_{DE} = 2,666.67 - 1,000 - 3,000 - 6,000$$

$$= -7,333.33 \text{ kg}$$

เขียนแผนภาพแรงเฉือน S.F.D. ให้สอดคล้องกับสมการดังแสดงในภาพที่ 4.26

$$\text{โมเมนต์คัตช่วง AB ; } M_A = 0$$

$$M_B = 2,666.67 \times 5 = 13,333.35 \text{ kg-m}$$

$$\text{โมเมนต์คัตช่วง BC ; } M_B = 13,333.35 \text{ kg-m}$$

$$M_C = (2,666.67 \times 10) - (1,000 \times 5)$$

$$= 21,666.7 \text{ kg-m}$$

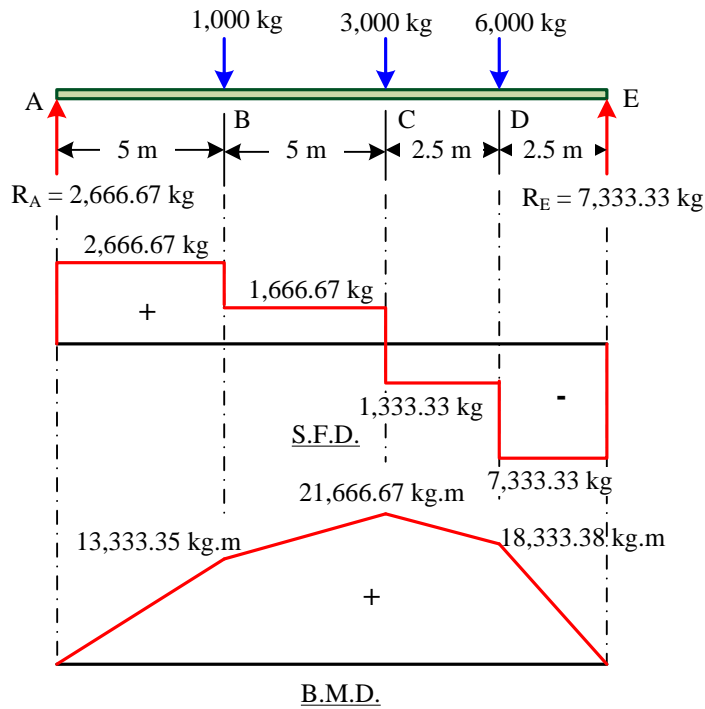
$$\text{โมเมนต์คัตช่วง CD ; } M_C = 21,666.7 \text{ kg-m}$$

$$M_D = (2,666.67 \times 12.5) - (1,000 \times 7.5) - (3,000 \times 2.5)$$

$$= 18,333.375 \text{ kg-m}$$

โมเมนต์คัตช่วง DE ;  $M_E = (2,666.67 \times 15) - (1,000 \times 10) - (3,000 \times 5) - (6,000 \times 2.5) = 0 \text{ kg-m}$

เขียนแผนภาพโมเมนต์คัต B.M.D. ให้สอดคล้องกับสมการดังแสดงในภาพที่ 4.26

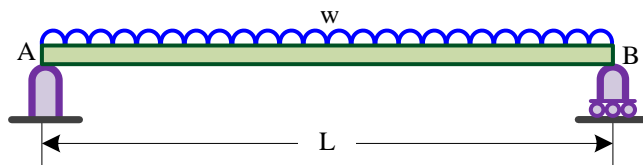


ภาพที่ 4.26 แผนภาพแรงเฉือนและโมเมนต์คัต

ที่มา : จีรวัดน์ วิมุติสุขวิริยา. 2556

2. คานช่วงเดียวธรรมดารับน้ำหนักแผ่กระจายสม่ำเสมอ

การเขียนแผนภาพแรงเฉือนและโมเมนต์คัตของคานช่วงเดียวธรรมดาที่มีน้ำหนักกระทำแบบแผ่กระจายสม่ำเสมอแสดงในภาพที่ 4.27 มีขั้นตอนดังต่อไปนี้



ภาพที่ 4.27 คานที่มีแรงกระทำแผ่กระจายสม่ำเสมอ

ที่มา : จีรวัดน์ วิมุติสุขวิริยา. 2556

$$\text{หาแรงปฏิกิริยาที่ฐานรองรับ A ; } R_A = \frac{wL}{2} \quad (4.20)$$

$$\text{หาแรงปฏิกิริยาที่ฐานรองรับ B ; } R_B = \frac{wL}{2} \quad (4.21)$$

$$\text{แรงเฉือนที่ระยะ } x ; \quad V_x = \frac{wL}{2} - wx \quad (4.22)$$

$$\text{แรงเฉือนที่จุด A ( } x = 0 \text{ ) ; } \quad V_A = \frac{wL}{2} \quad (4.23)$$

$$\text{แรงเฉือนที่จุด C ( } x = \frac{L}{2} \text{ ) ; } \quad V_C = \frac{wL}{2} - \frac{wL}{2} = 0 \quad (4.24)$$

$$\text{แรงเฉือนที่จุด B ( } x = L \text{ ) ; } \quad V_B = \frac{wL}{2} - wL = \frac{-wL}{2} \quad (4.25)$$

$$\text{โมเมนต์คัตที่ระยะ } x ; \quad M_x = \frac{wLx}{2} - wx \left[ \frac{x}{2} \right] \quad (4.26)$$

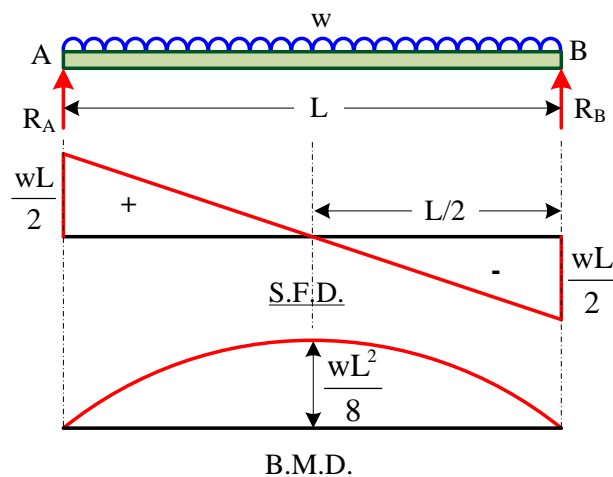
$$M_x = \frac{wx}{2}(L-x) \quad (4.27)$$

$$\text{โมเมนต์คัตที่จุด } x = 0 ; \quad M_A = 0 \quad (4.28)$$

$$\text{โมเมนต์คัตที่จุด } x = \frac{L}{2} ; \quad M_C = \frac{wL}{4} \left[ L - \frac{L}{2} \right] = \frac{wL^2}{8} \quad (4.29)$$

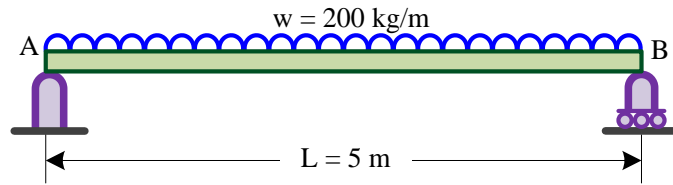
$$\text{โมเมนต์คัตที่จุด } x = L ; \quad M_B = \frac{wL}{2}(L-L) = 0 \quad (4.30)$$

เขียนแผนภาพแรงเฉือนและแผนภาพโมเมนต์คัตให้สอดคล้องกับสมการดังแสดงในภาพที่ 4.28



ภาพที่ 4.28 แผนภาพแรงเฉือนและโมเมนต์คัตของคานที่มีแรงกระทำแผ่กระจายสม่ำเสมอ  
ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

ตัวอย่างที่ 4.2 คานช่วงเดียวธรรมดา AB ยาว 5 m รับน้ำหนักแผ่กระจายสม่ำเสมอ 200 kg/m ดังแสดงในภาพที่ 4.29 จงเขียนแผนภาพแรงเฉือนและแผนภาพโมเมนต์คัตของคานนี้



ภาพที่ 4.29 คานรับน้ำหนักแผ่กระจายสม่ำเสมอ

ที่มา : จีรวัดน์ วิมุตติสุขวิทยา. 2556

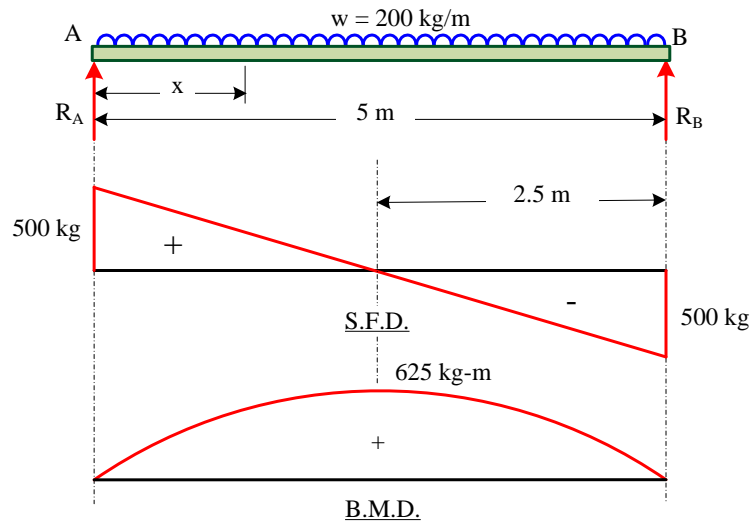
วิธีทำ

แรงปฏิกิริยา ;	$R_A = R_B = 500 \text{ kg}$
แรงเฉือนที่ระยะ $x$ ;	$V_x = \frac{\omega L}{2} - \omega x$
แรงเฉือนที่ $x = 0$ ;	$V_A = \frac{\omega L}{2} = 500 \text{ kg}$
แรงเฉือนที่ $x = \frac{L}{4}$ ;	$V_{L/4} = \frac{\omega L}{2} - \frac{\omega L}{4} = \frac{\omega L}{4} = 250 \text{ kg}$
แรงเฉือนที่ $x = \frac{L}{2}$ ;	$V_{L/2} = \frac{\omega L}{2} - \frac{\omega L}{2} = 0 \text{ kg}$
แรงเฉือนที่ $x = \frac{3L}{4}$ ;	$V_{3L/4} = \frac{\omega L}{2} - \frac{3\omega L}{4} = \frac{-\omega L}{4} = -250 \text{ kg}$
แรงเฉือนที่ $x = L$ ;	$V_B = \frac{\omega L}{2} - \omega L = \frac{-\omega L}{2} = -500 \text{ kg}$

เขียนแผนภาพแรงเฉือน S.F.D. ให้สอดคล้องกับสมการดังแสดงในภาพที่ 4.30

โมเมนต์คัตที่ระยะ $x$ ;	$M_x = \frac{\omega L x}{2} - \frac{\omega x^2}{2}$
โมเมนต์คัตที่ $x = 0$ ;	$M_A = 0 \text{ kg-m}$
โมเมนต์คัตที่ $x = \frac{L}{4}$ ;	$M_{L/4} = \frac{\omega L^2}{8} - \frac{\omega L^2}{32} = \frac{3\omega L^2}{32} = 468.75 \text{ kg-m}$
โมเมนต์คัตที่ $x = \frac{L}{2}$ ;	$M_{L/2} = \frac{\omega L^2}{4} - \frac{\omega L^2}{8} = \frac{\omega L^2}{8} = 625 \text{ kg-m}$
โมเมนต์คัตที่ $x = \frac{3L}{4}$ ;	$M_{3L/4} = \frac{3\omega L^2}{8} - \frac{9\omega L^2}{32} = \frac{3\omega L^2}{32} = 468.75 \text{ kg-m}$
โมเมนต์คัตที่ $x = L$ ;	$M_B = \frac{\omega L^2}{2} - \frac{\omega L^2}{2} = 0 \text{ kg-m}$

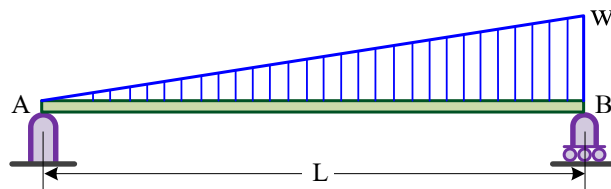
เขียนแผนภาพโมเมนต์คัต B.M.D. ให้สอดคล้องกับสมการดังแสดงในภาพที่ 4.30



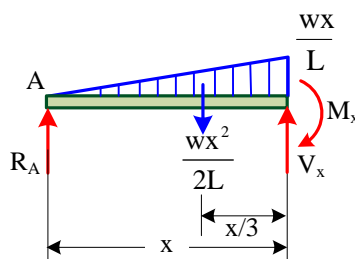
ภาพที่ 4.30 แผนภาพแรงเฉือนและโมเมนต์ค้ดของคานรับน้ำหนักแผ่สม่ำเสมอ  
 ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

3. คานช่วงเดียวขรรคคานรับน้ำหนักกระจายเพิ่มขึ้นอย่างต่อเนื่อง

การเขียนแผนภาพแรงเฉือนและโมเมนต์ค้ดของคานช่วงเดียวขรรคคานที่มีน้ำหนักกระจายเพิ่มขึ้นอย่างต่อเนื่องดังแสดงในภาพที่ 4.31 มีขั้นตอนดังต่อไปนี้



ภาพที่ 4.31 คานที่มีน้ำหนักกระจายเพิ่มขึ้นอย่างต่อเนื่อง  
 ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556



ภาพที่ 4.32 ชิ้นส่วนคานรับน้ำหนักกระจายเพิ่มขึ้นอย่างต่อเนื่อง  
 ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

หาแรงปฏิกิริยาที่ฐานรองรับโดยพิจารณาจากน้ำหนักรวมตลอดความยาวคาน  $W$  จะมีค่าเท่ากับพื้นที่สามเหลี่ยมของน้ำหนักที่กระทำ ซึ่งน้ำหนักรวม  $W$  จะกระทำ ณ จุดศูนย์กลางของสามเหลี่ยมเป็นระยะ  $L/3$  จากจุด B

$$W = \frac{1}{2} \times L \times w = \frac{wL}{2} \quad (4.31)$$

$$\text{แรงปฏิกิริยาที่ฐานรองรับ A ; } R_A L = \left[ \frac{wL}{2} \right] \left[ \frac{1}{3} \right] L \quad (4.32)$$

$$R_A = \frac{wL}{6} \quad (4.33)$$

$$\text{แรงปฏิกิริยาที่ฐานรองรับ B ; } R_B L = \left[ \frac{wL}{2} \right] \left[ \frac{2L}{3} \right] \quad (4.34)$$

$$R_B = \frac{wL}{3} \quad (4.35)$$

$$\text{แรงเฉือนที่ระยะ } x ; \quad V_x = \frac{wL}{6} - \frac{wx^2}{2L} \quad (4.36)$$

$$\text{แรงเฉือนที่ A (x = 0) ; } V_A = \frac{wL}{6} \quad (4.37)$$

$$\text{แรงเฉือนที่ B (x = L) ; } V_B = \frac{wL}{6} - \frac{wL^2}{2L} = \frac{-wL}{3} \quad (4.38)$$

$$V_x = \frac{wL}{6} - \frac{wx^2}{2L} \quad (4.39)$$

$$0 = \frac{wL}{6} - \frac{wx^2}{2L} \quad (4.40)$$

$$\text{ระยะที่แรงเฉือนเป็นศูนย์ ; } x = \frac{L}{\sqrt{3}} \quad (4.41)$$

$$\text{โมเมนต์คัตที่ระยะ } x ; \quad M_x = \left[ \frac{wL}{6} \right] \times \left[ \frac{wx^2}{2L} \right] \times \left[ \frac{x}{3} \right] \quad (4.42)$$

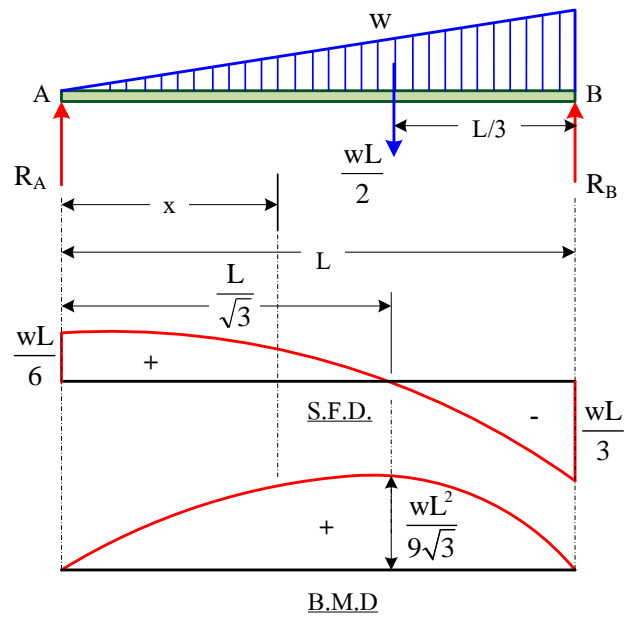
$$M_x = \frac{wLx}{6} - \frac{wx^3}{6L} \quad (4.43)$$

เขียนแผนภาพแรงเฉือนและแผนภาพโมเมนต์คัตให้สอดคล้องกับสมการดังแสดงในภาพที่ 4.33

โมเมนต์คัตสูงสุดเกิดขึ้นที่ระยะ  $x = L/\sqrt{3}$  ;

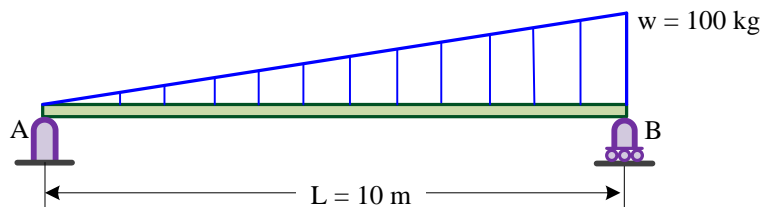
$$\text{โมเมนต์คัตมากที่สุด ; } M_{\max} = \left[ \frac{wL}{6} \right] \frac{L}{\sqrt{3}} - \frac{w}{6L} \left[ \frac{L}{\sqrt{3}} \right]^3 \quad (4.44)$$

$$= \frac{wL^2}{9\sqrt{3}} \quad (4.45)$$



ภาพที่ 4.33 แผนภาพแรงเฉือนและโมเมนต์ค้ดัดของคานรับน้ำหนักกระจายเพิ่มขึ้นอย่างต่อเนื่อง  
ที่มา : จิรวัดณ์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

ตัวอย่างที่ 4.3 จงเขียนแผนภาพแรงเฉือนของคาน AB ซึ่งเป็นคานช่วงเดียวยาว 10 m รับน้ำหนักกระจายเพิ่มขึ้นอย่างต่อเนื่องดังแสดงในภาพที่ 4.34 พร้อมทั้งคำนวณค่าโมเมนต์ค้ดสูงสุดที่เกิดขึ้นในคาน



ภาพที่ 4.34 คานช่วงเดียวรับน้ำหนักกระจายเพิ่มขึ้นอย่างต่อเนื่อง  
ที่มา : จิรวัดณ์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

วิธีทำ

น้ำหนักรวมที่กระทำกับคานหาได้จาก  $\frac{1}{2}\omega L$  หรือมีค่าเท่ากับ 500 kg น้ำหนักรวมดังกล่าว

กระทำผ่านจุดศูนย์กลางห่างจากปลาย A เป็นระยะ  $\frac{2L}{3}$  หรือ 6.67 m

แรงปฏิกิริยาที่ฐานรองรับ A ;  $R_A L = \left(\frac{1}{2}\omega L\right)\left(\frac{L}{3}\right)$

$$R_A = \frac{\omega L}{6} = \frac{100 \times 10}{6} = 166.67 \text{ kg}$$

แรงปฏิกิริยาที่ฐานรองรับ B ;  $R_B = 500 - 166.67 = 333.33 \text{ kg}$

แรงเฉือนที่ระยะ x ;  $V_x = \frac{wL}{6} - \frac{wx^2}{2L} = 166.67 - \left(\frac{100x^2}{2 \times 10}\right)$

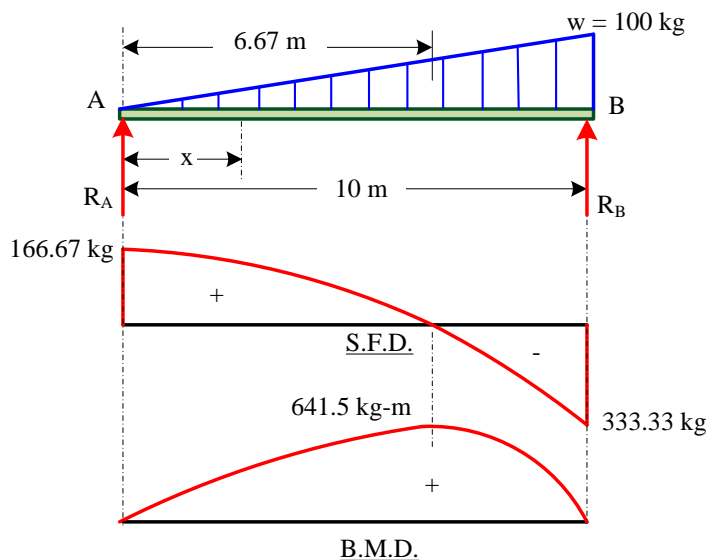
$$V_x = 166.67 - 5x^2$$

โมเมนต์ค้ดที่ระยะ x ;  $M_x = \frac{\omega Lx}{6} - \frac{\omega x^3}{6L} = 166.67x - 1.67x^3$

โมเมนต์ค้ดสูงสุด ;  $M_{\max} = \frac{\omega L^2}{9\sqrt{3}} = \frac{100 \times 10^2}{9\sqrt{3}} = 641.5 \text{ kg-m}$

ตอบ

นำสมการแรงเฉือนและ โมเมนต์ค้ดไปเขียนแผนภาพดังแสดงในภาพที่ 4.35



ภาพที่ 4.35 แผนภาพแรงเฉือนและ โมเมนต์ค้ดคานรับน้ำหนักกระจายเพิ่มขึ้นอย่างต่อเนื่อง  
ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

#### 4. คานช่วงเดียวธรรมดาที่มีโมเมนต์ค้ดที่ปลายคาน

การเขียนแผนภาพแรงเฉือนและ โมเมนต์ค้ดของคานช่วงเดียวธรรมดาที่มีโมเมนต์ค้ดที่ปลายคานทั้งสองข้างโดยที่ภายในช่วงคานไม่มีน้ำหนักกระทำดังแสดงในภาพที่ 4.36 มีขั้นตอนดังต่อไปนี้





ภาพที่ 4.36 คานรับ โมเมนต์ค้ำที่ปลายคานทั้งสองข้าง

ที่มา : จีรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

$$\text{หาแรงปฏิกิริยาที่ A ; } R_A L + M_A - M_B = 0 \quad (4.46)$$

$$R_A = \frac{M_A - M_B}{L} \quad (4.47)$$

$$\text{หาแรงปฏิกิริยาที่ B ; } R_B L + M_B - M_A = 0 \quad (4.48)$$

$$R_B = \frac{M_A - M_B}{L} \quad (4.49)$$

$$R_B = -\frac{(M_B - M_A)}{L} \quad (4.50)$$

$$\text{แรงเฉือนที่ระยะ x ; } V_x = \frac{M_A - M_B}{L} \quad (4.51)$$

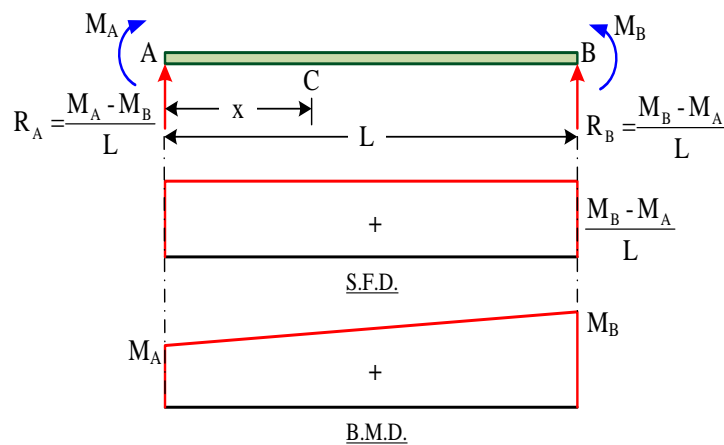
$$\text{โมเมนต์ค้ำที่ระยะ x ; } M_x = M_A + R_A(x) \quad (4.52)$$

$$M_x = M_A + \left[ \frac{M_B - M_A}{L} \right] x \quad (4.53)$$

$$\text{โมเมนต์ค้ำที่จุด A (x = 0) ; } M_A = M_A \quad (4.54)$$

$$\text{โมเมนต์ค้ำที่จุด B (x = L) ; } M_B = M_B \quad (4.55)$$

เขียนแผนภาพแรงเฉือนและแผนภาพโมเมนต์ค้ำให้สอดคล้องกับสมการดังแสดงในภาพที่ 4.37

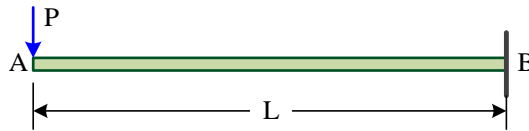


ภาพที่ 4.37 แผนภาพแรงเฉือนและ โมเมนต์ค้ำของคานรับ โมเมนต์ค้ำที่ปลายคานทั้งสองข้าง

ที่มา : จีรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

### 5. คานยื่นรับน้ำหนักกระทำแบบจุด

การเขียนแผนภาพแรงเฉือนและโมเมนต์ตัดของคานยื่นที่ปลายด้านหนึ่งยึดแน่นส่วนปลายอีกด้านรับน้ำหนักกระทำแบบจุดดังแสดงในภาพที่ 4.38 มีขั้นตอนดังต่อไปนี้



ภาพที่ 4.38 คานยื่นรับน้ำหนักแบบจุด

ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

$$\text{หาแรงปฏิกิริยาที่ฐานรองรับ ; } R_B = P \quad (4.56)$$

$$\text{แรงเฉือนที่ระยะ } x ; \quad V_x = (\sum V)L \quad (4.57)$$

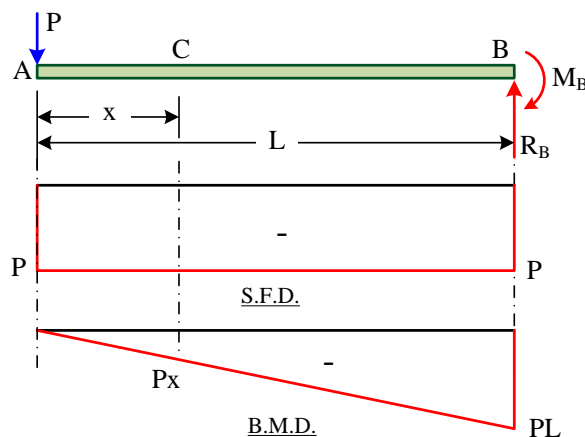
$$V_x = -P \quad (4.58)$$

$$\text{โมเมนต์ตัดที่ระยะ } x ; \quad M_x = -Px \quad (4.59)$$

$$\text{โมเมนต์ตัดที่จุด A (x = 0) ; } M_A = 0 \quad (4.60)$$

$$\text{โมเมนต์ตัดที่จุด B (x = L) ; } M_B = -PL \quad (4.61)$$

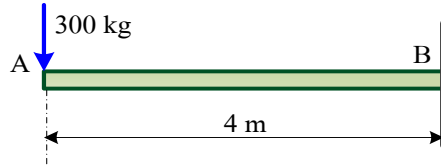
นำสมการที่ได้จากแรงเฉือนและโมเมนต์ตัดไปเขียนแผนภาพดังแสดงในภาพที่ 4.39



ภาพที่ 4.39 แผนภาพแรงเฉือนและโมเมนต์ตัดของคานยื่นรับน้ำหนักแบบจุด

ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

ตัวอย่างที่ 4.4 คานยื่น AB ยาว 4 m และที่ปลายอิสระมีน้ำหนักกระทำ 300 kg ดังแสดงในภาพที่ 4.40 จงเขียนแผนภาพแรงเฉือนและแผนภาพโมเมนต์ค้ำของยื่นนี้



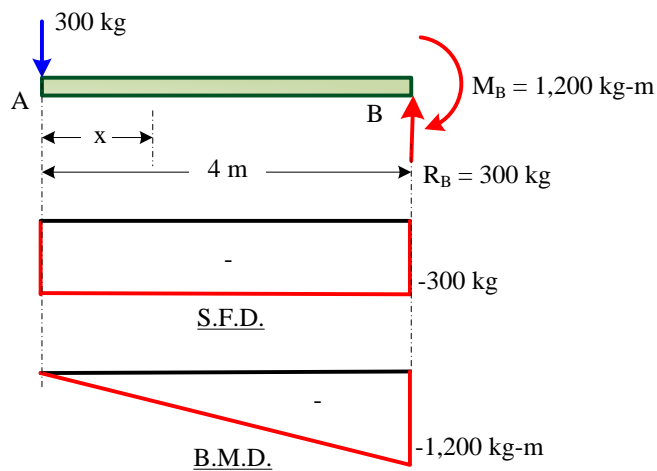
ภาพที่ 4.40 คานยื่นรับน้ำหนักแบบจุด

ที่มา : จีรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

**วิธีทำ**

แรงปฏิกิริยาที่ฐานรองรับ B ;  $R_B = 300 \text{ kg}$   
 แรงเฉือนที่ระยะ x ;  $V_x = -P$   
 $= -300 \text{ kg}$   
 โมเมนต์ค้ำที่ระยะ x ;  $M_x = -Px$   
 โมเมนต์ค้ำที่จุด A (x = 0) ;  $M_A = 0$   
 โมเมนต์ค้ำที่จุด B (x = L) ;  $M_B = -PL$   
 $= -300 \times 4$   
 $= -1,200 \text{ kg-m}$

นำสมการที่ได้จากแรงเฉือนและโมเมนต์ค้ำไปเขียนแผนภาพดังแสดงในภาพที่ 4.41

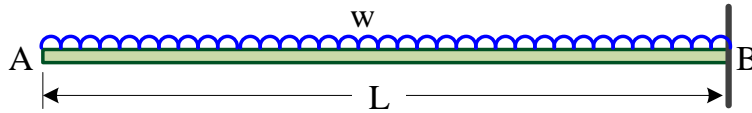


ภาพที่ 4.41 แผนภาพแรงเฉือนและโมเมนต์ค้ำของคานยื่นรับน้ำหนักแบบจุด

ที่มา : จีรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

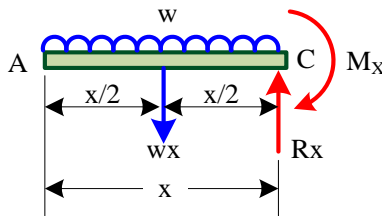
## 6. คานยื่นรับน้ำหนักกระทำแผ่กระจายสม่ำเสมอ

การเขียนแผนภาพแรงเฉือนและโมเมนต์คัตของคานยื่นที่มีน้ำหนักกระทำแบบแผ่กระจายสม่ำเสมอตลอดความยาวคานดังแสดงในภาพที่ 4.42 มีขั้นตอนดังต่อไปนี้



ภาพที่ 4.42 คานยื่นที่มีน้ำหนักกระทำแผ่กระจายสม่ำเสมอ

ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556



ภาพที่ 4.43 ชิ้นส่วนคานยื่นที่มีน้ำหนักกระทำแผ่กระจายสม่ำเสมอ

ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

$$\text{แรงปฏิกิริยาที่ฐานรองรับ B ; } R_B = wL \quad (4.62)$$

$$\text{แรงเฉือนที่ระยะ x ; } V_x = -wx \quad (4.63)$$

$$\text{แรงเฉือนที่จุด A (x = 0) ; } V_A = 0 \quad (4.64)$$

$$\text{แรงเฉือนที่จุด B (x = L) ; } V_B = -wL \quad (4.65)$$

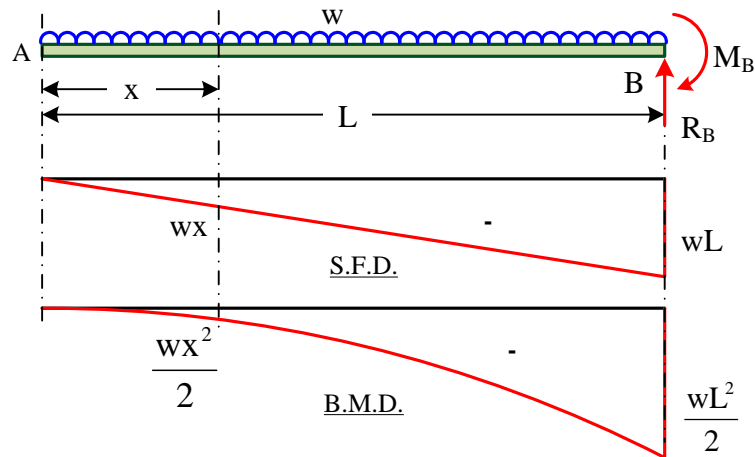
เขียนแผนภาพแรงเฉือน S.F.D. ให้สอดคล้องกับสมการดังแสดงในภาพที่ 4.44

$$\text{โมเมนต์คัตที่ระยะ x ; } M_x = -wx \left[ \frac{x}{2} \right] = \frac{-wx^2}{2} \quad (4.66)$$

$$\text{โมเมนต์คัตที่จุด A (x = 0) ; } M_A = 0 \quad (4.67)$$

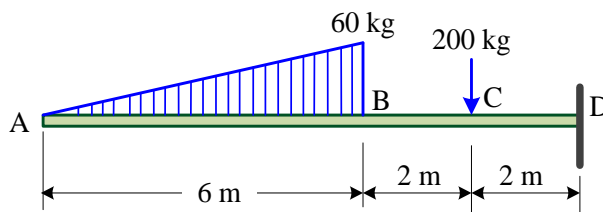
$$\text{โมเมนต์คัตที่จุด B (x = L) ; } M_B = \frac{-wx^2}{2} \quad (4.68)$$

เขียนแผนภาพโมเมนต์คัต B.M.D. ให้สอดคล้องกับสมการดังแสดงในภาพที่ 4.44



ภาพที่ 4.44 แผนภาพแรงเฉือนและ โมเมนต์ค้ดคานขึ้นที่มีน้ำหนักแผ่กระจายสม่ำเสมอ  
ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

ตัวอย่างที่ 4.5 จงเขียนแผนภาพแรงเฉือนและ โมเมนต์ค้ดคานของคานที่รับน้ำหนักกระทำดังแสดงในภาพที่ 4.45 และจงหา โมเมนต์ค้ดสูงสุดที่เกิดขึ้นกับคานนี้



ภาพที่ 4.45 คานขึ้นรับน้ำหนักแบบจุดและน้ำหนักเพิ่มสม่ำเสมอ  
ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

วิธีทำ

แรงปฏิกิริยาที่ฐานรองรับ D ;  $R_D = 200 + (60 \times 6)/2 = 380 \text{ kg}$

แรงเฉือนที่ระยะ  $0 < x < 6$  จาก A ;  $V_x = -\frac{1}{2} \times \left[ \frac{60}{6} \right] x = -5x^2 \text{ kg}$

แรงเฉือนที่จุด A ( $x = 0$ ) ;  $V_A = 0$

แรงเฉือนที่จุด B ( $x = 6$ ) ;  $V_B = -5(6)^2 = -180 \text{ kg}$

แรงเฉือนที่ระยะ  $6 < x < 8$  จาก A ;  $V_x = -180 \text{ kg}$

แรงเฉือนที่จุด C ( $x = 8$ ) ;  $V_C = -180 \text{ kg}$

แรงเฉือนที่ระยะ  $8 < x < 10$  จาก A ;  $V_x = -180 - 200 = -380 \text{ kg}$

แรงเฉือนที่จุด D ( $x = 10$ );  $V_D = -380 \text{ kg}$

เขียนแผนภาพแรงเฉือน S.F.D. ให้สอดคล้องกับสมการดังแสดงในภาพที่ 4.46

โมเมนต์ที่ระยะ  $0 < x < 6$  จาก A;  $M_x = -5x^2 \left[ \frac{x}{3} \right] = -\frac{5x^3}{3}$

โมเมนต์คัตที่จุด A ( $x = 0$ );  $M_A = 0$

โมเมนต์คัตที่จุด B ( $x = 6$ );  $M_B = -\frac{5}{3}(6)^3 = -360 \text{ kg-m}$

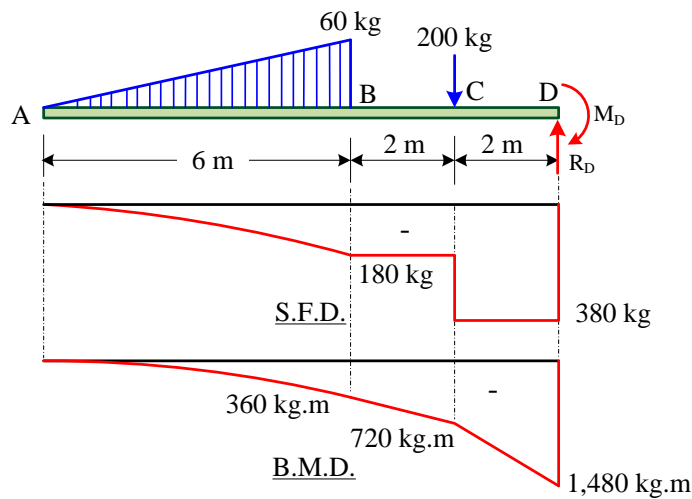
โมเมนต์ที่ระยะ  $6 < x < 8$  จาก A;  $M_x = -180(x - \frac{2}{3} \times 6)$   
 $= -(180x) + 720$

โมเมนต์คัตที่จุด C ( $x = 8$ );  $M_C = -(180 \times 8) + 270$   
 $= -720 \text{ kg-m}$

โมเมนต์ระยะ  $8 < x < 10$  จาก A;  $M_x = -80(x - 4) - 200(x - 8)$   
 $= -(380x) + 2,320$

โมเมนต์คัตที่จุด D ( $x = 10$ );  $M_D = -(380 \times 10) + 2,320$   
 $= -1,480 \text{ kg-m}$  (โมเมนต์มากที่สุด)

เขียนแผนภาพโมเมนต์คัต B.M.D. ให้สอดคล้องกับสมการดังแสดงในภาพที่ 4.46

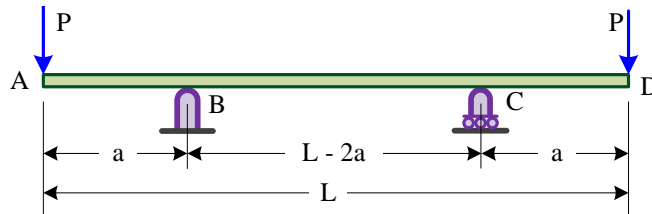


ภาพที่ 4.46 แผนภาพแรงเฉือนและ โมเมนต์คัตของคานยื่นรับน้ำหนัก

ที่มา : จีรวัดน์ วิมุติสุขวิริยา. 2556

### 7. คานช่วงเดียวที่มีคานยื่นจากคานหลัก

การเขียนแผนภาพแรงเฉือนและโมเมนต์คัตของคานช่วงเดียวที่มีคานยื่นจากคานหลัก ดังแสดงในภาพที่ 4.47 มีขั้นตอนดังต่อไปนี้



ภาพที่ 4.47 คานช่วงเดียวที่มีคานยื่นจากคานหลัก

ที่มา : จีรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

$$\text{หาแรงปฏิกิริยาที่ฐานรองรับ B ; } R_B = \frac{P(L-a-a)}{L-2a} = P \quad (4.69)$$

$$\text{หาแรงปฏิกิริยาที่ฐานรองรับ C ; } R_C = P \quad (4.70)$$

$$\text{แรงเฉือนที่ระยะ x ช่วง AB ; } V_x = -P \quad (4.71)$$

$$\text{แรงเฉือนที่ระยะ x ช่วง BC ; } V_x = -P+P = 0 \quad (4.72)$$

$$\text{แรงเฉือนที่ระยะ x ช่วง CD ; } V_x = -P+P+P = P \quad (4.73)$$

$$\text{โมเมนต์ที่ระยะ x ช่วง AB ; } M_x = -Px \quad (4.74)$$

$$\text{โมเมนต์คัตที่จุด A (x = 0) ; } M_A = 0 \quad (4.75)$$

$$\text{โมเมนต์คัตที่จุด B (x = a) ; } M_B = -Pa \quad (4.76)$$

$$\text{โมเมนต์คัตช่วง BC ; } M_x = -Px+R_B(x-a) \quad (4.77)$$

$$M_x = P(x-a)-Px \quad (4.78)$$

$$M_x = -Pa \quad (4.79)$$

$$\text{โมเมนต์คัตช่วง CD ; } M_x = -Px+R_B(x-a)+R_C[x-a-(L-2a)] \quad (4.80)$$

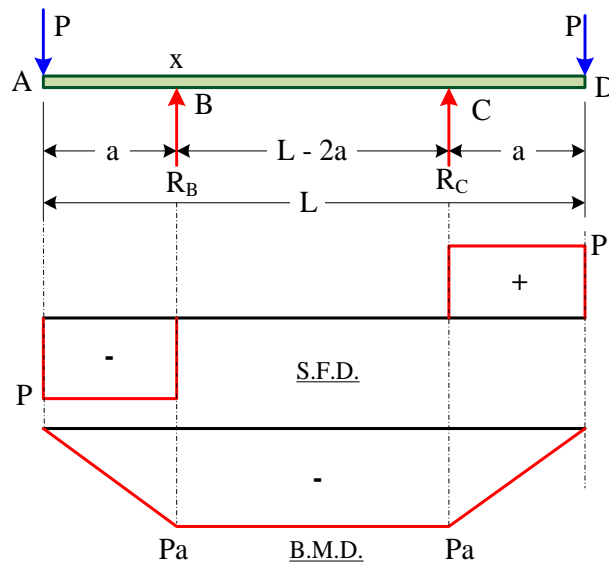
$$M_x = -Px+P(x-a)+P[x-a-L+2a] \quad (4.81)$$

$$M_x = P(x-L) \quad (4.82)$$

$$\text{โมเมนต์คัตที่จุด C (x = L-a) ; } M_C = P(L-a-L) = -Pa \quad (4.83)$$

$$\text{โมเมนต์คัตที่จุด D (x = L) ; } M_D = P(L-L) = 0 \quad (4.84)$$

เขียนแผนภาพแรงเฉือนและแผนภาพโมเมนต์คัตให้สอดคล้องกับสมการดังแสดงในภาพที่ 4.48

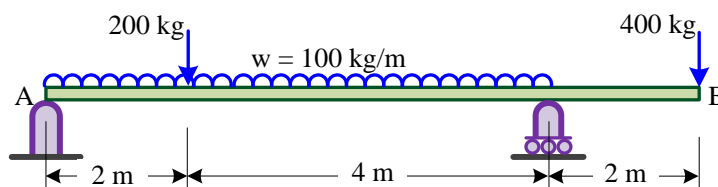


ภาพที่ 4.48 แผนภาพแรงเฉือนและ โมเมนต์ดัดของคานช่วงเดียวที่มีคานยื่นจากคานหลัก  
ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

### การสร้างแผนภาพแรงเฉือนและแผนภาพโมเมนต์ดัดวิธีซูเปอร์โพสิชัน

การสร้างแผนภาพแรงเฉือนและ โมเมนต์ดัดวิธีซูเปอร์โพสิชัน (Superposition) เป็นการสร้างแผนภาพแรงเฉือนและโมเมนต์ดัดในกรณีที่มีน้ำหนักหลายรูปแบบกระทำกับคาน ถ้าต้องการหาแรงต่าง ๆ ที่เกิดกับคานโดยวิธีทั่วไปจะมีความซับซ้อน ดังนั้นเพื่อให้การคำนวณหาแรงเฉือนและโมเมนต์ดัดทำได้ง่ายขึ้นจึงทำการแยกพิจารณาจากน้ำหนักแต่ละอันที่กระทำกับคาน หลังจากนั้นจึงนำแรงเฉือนและ โมเมนต์ดัดที่ได้จากการแยกพิจารณารวมเข้าด้วยกันโดยมีความสอดคล้องกับระยะทางในแนวราบของคาน (สิริศักดิ์ ปโยธรสิริ. 2549 : 195)

ตัวอย่างที่ 4.6 จงเขียนแผนภาพแรงเฉือนและ โมเมนต์ดัดของคานเมื่อน้ำหนักกระทำดังแสดงในภาพที่ 4.49 กำหนดให้คำนวณด้วยวิธีซูเปอร์โพสิชัน



ภาพที่ 4.49 คานช่วงเดียวรับน้ำหนักหลายรูปแบบ

ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

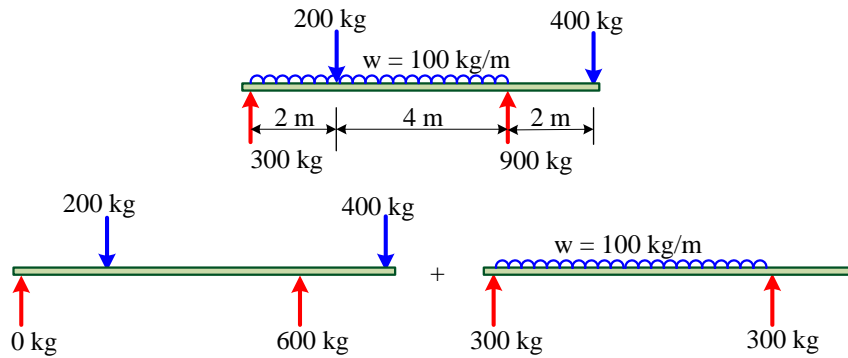


**วิธีทำ**

แรงปฏิกิริยาที่ฐานรองรับ A ;  $R_A = 300 \text{ kg}$

แรงปฏิกิริยาที่ฐานรองรับ B ;  $R_B = 900 \text{ kg}$

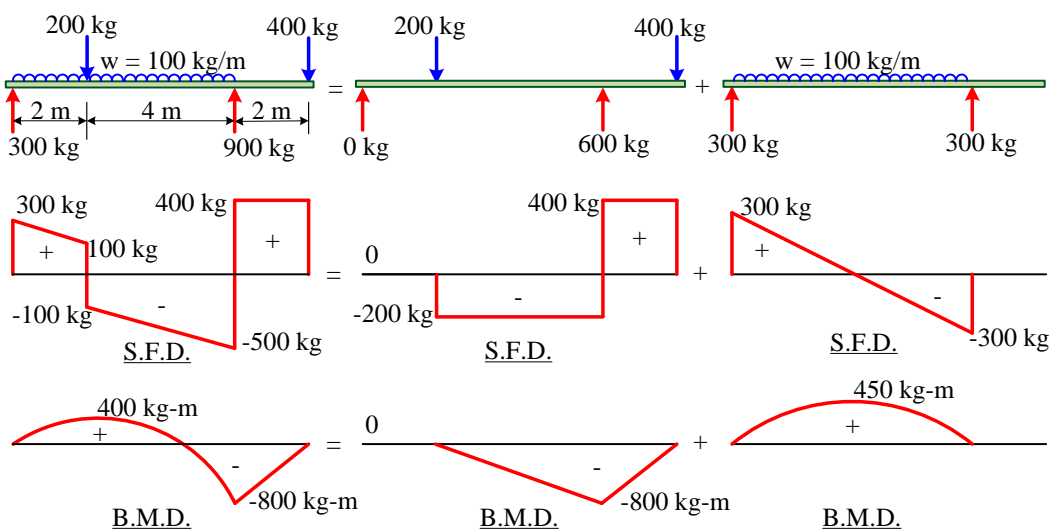
การหาแรงเฉือนและโมเมนต์ตัดจะแยกคานออกเป็น 2 กรณีคือ คานที่มีน้ำหนักกระทำ เป็นจุดและคานที่มีน้ำหนักกระทำแบบแผ่กระจายสม่ำเสมอแสดงในภาพที่ 4.50



**ภาพที่ 4.50** การแยกพิจารณาคานตามรูปแบบน้ำหนักที่กระทำ

ที่มา : จีรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

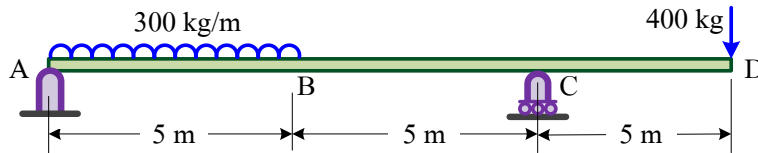
เมื่อแยกคานออกเป็นสองกรณีแล้วจึงทำการวิเคราะห์คานแต่ละกรณี จากนั้นจึงนำแรงเฉือนและโมเมนต์ตัดที่ได้มารวมเข้าด้วยกัน โดยมีความสอดคล้องกับระยะทางในแนวราบของคานดังแสดงในภาพที่ 4.51



**ภาพที่ 4.51** แผนภาพแรงเฉือนและโมเมนต์ตัดของคานช่วงเดียวรับน้ำหนักหลายรูปแบบ

ที่มา : จีรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

ตัวอย่างที่ 4.7 จงเขียนแผนภาพแรงเฉือนและโมเมนต์คัตของคานที่รับน้ำหนักดังแสดงในภาพที่ 4.52 พร้อมทั้งแสดงการเอนตัวของคานขณะรับน้ำหนัก



ภาพที่ 4.52 คานช่วงเดียวรับน้ำหนัก

ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \text{แรงปฏิกิริยาที่ A ; } 10R_A + (400 \times 5) &= 300 \times 5 \times 7.5 \\ R_A &= 925 \text{ kg} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{แรงปฏิกิริยาที่ C ; } R_C &= (300 \times 5) + 400 - 925 \\ &= 975 \text{ kg} \end{aligned}$$

$$\text{แรงเฉือนที่ระยะ } x \text{ ช่วง AB ; } V_x = 925 - 300x$$

$$\text{แรงเฉือนที่จุด A (x = 0) ; } V_A = 925 \text{ kg}$$

$$\text{แรงเฉือนที่จุด B (x = 5) ; } V_B = 925 - 300 \times 5 = -575 \text{ kg}$$

$$\text{แรงเฉือนในช่วง BC ; } V_x = -575 \text{ kg}$$

$$\text{แรงเฉือนในช่วง CD ; } V_x = 925 - (300 \times 5) + 975 = 400 \text{ kg}$$

เขียนแผนภาพแรงเฉือน S.F.D. ให้สอดคล้องกับสมการดังแสดงในภาพที่ 4.53

$$\begin{aligned} \text{โมเมนต์คัตที่ระยะ } x \text{ ช่วง AB ; } M_x &= 925x - (300x) \frac{x}{2} \\ &= 925x - 150x^2 \end{aligned}$$

$$\text{โมเมนต์คัตที่จุด A (x = 0) ; } M_A = 0 \text{ kg-m}$$

$$\text{โมเมนต์คัตที่จุด B (x = 5) ; } M_B = 925 \times 5 - (300 \times 5) \frac{5}{2} = 875 \text{ kg-m}$$

$$\text{เมื่อ ; } V_{AB} = 0$$

$$V_{AB} = 925 - 300x$$

$$\text{ระยะที่โมเมนต์คัตสูงสุด ; } x = 3.08 \text{ m}$$

แทนค่า x เพื่อหาค่าโมเมนต์คัตสูงสุดในช่วง AB

$$\begin{aligned} (M_{AB})_{\max} &= 925 \times 3.08 - 150(3.08)^2 \\ &= 1,426.04 \text{ kg-m} \end{aligned}$$

โมเมนต์คัตช่วง BC ;  $M_x = 925x - 1,500(x - 2.5)$   
 $= -575x + 3,750$

โมเมนต์คัตที่จุด C (x = 10) ;  $M_C = (-575 \times 10) + 3,750$   
 $= -2,000 \text{ kg-m}$

เมื่อ  $M_{BC} = 0$  จะได้ ;  $0 = -575x + 3,750$

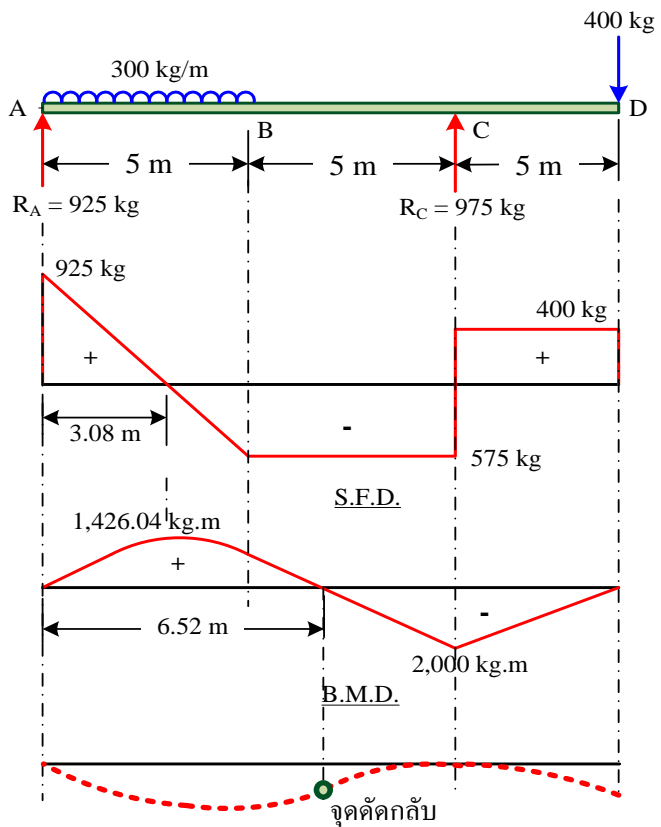
ระยะที่เป็นจุดคัตกลับ ;  $x = \frac{3,750}{575} = 6.52 \text{ m}$

โมเมนต์คัตช่วง CD ;  $M_x = 925x - 1,500(x - 2.5) + 975(x - 10)$   
 $= 400x - 13,500$

โมเมนต์คัตที่จุด C (x = 10) ;  $M_C = 400 - 13,500 = -13,100 \text{ kg-m}$

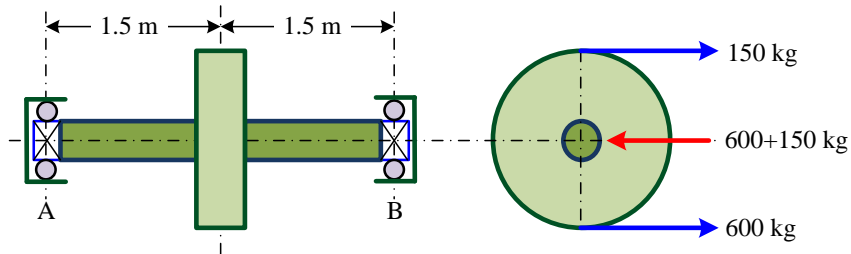
โมเมนต์คัตที่จุด D (x = 15) ;  $M_D = (300 \times 15) - 4,200$   
 $= 0 \text{ kg-m}$

เขียนแผนภาพ โมเมนต์คัต B.M.D. ให้สอดคล้องกับสมการดังแสดงในภาพที่ 4.53



ภาพที่ 4.53 แผนภาพแรงเฉือน แผนภาพโมเมนต์คัตและจุดคัตกลับ  
 ที่มา : จีรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

ตัวอย่างที่ 4.8 เพลามีฐานรองรับเป็นตลับลูกปืนทั้งสองด้านและมีเกียร์ใช้ส่งกำลังไปยังสายพาน ดังแสดงในภาพที่ 4.54 จงเขียนแผนภาพแรงเฉือนและแผนภาพ โมเมนต์คัตของเพลานี้ กำหนดให้น้ำหนักเกียร์น้อยมาก



ภาพที่ 4.54 เพลามอนอยู่บนตลับลูกปืน

ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิทยา. 2556

#### วิธีทำ

$$\text{แรงปฏิกิริยาที่ฐานรองรับ A ; } R_A = 375 \text{ kg}$$

$$\text{แรงปฏิกิริยาที่ฐานรองรับ B ; } R_B = 375 \text{ kg}$$

$$\text{แรงเฉือนที่ระยะ x ช่วง AC ; } V_{AC} = -375 \text{ kg}$$

$$\begin{aligned} \text{แรงเฉือนที่ฐานรองรับช่วง CB ; } V_{CB} &= -375 + 750 \\ &= 375 \text{ kg} \end{aligned}$$

$$\text{โมเมนต์คัตที่ระยะ x ช่วง AC ; } M_{AC} = -375x$$

$$\begin{aligned} \text{โมเมนต์คัตที่จุด A (x = 0) ; } M_A &= -375 \times 0 \\ &= 0 \text{ kg-m} \end{aligned}$$

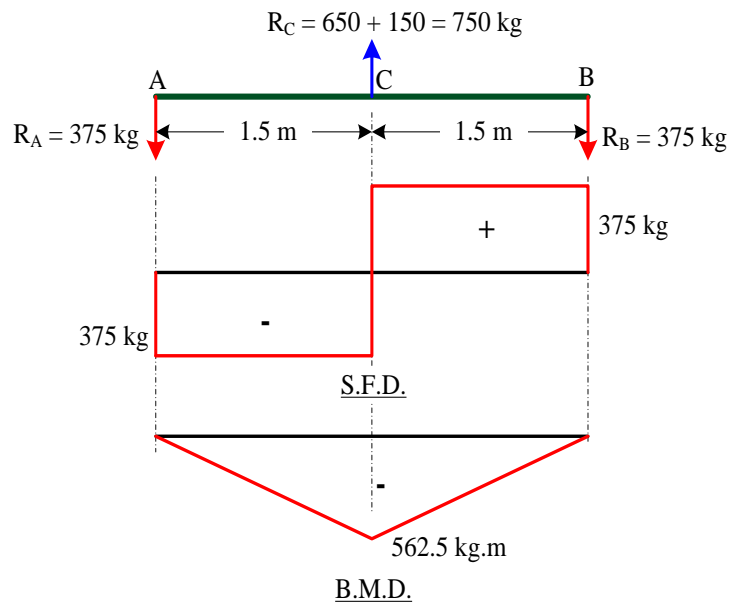
$$\begin{aligned} \text{โมเมนต์คัตที่จุด C (x = 1.5) ; } M_C &= -375 \times 1.5 \\ &= -562.5 \text{ kg-m} \end{aligned}$$

$$\text{โมเมนต์คัตช่วง CB ; } M_{CB} = -375x + 750(x - 1.5)$$

$$\begin{aligned} \text{โมเมนต์คัตที่จุด C (x = 1.5) ; } M_C &= -375 \times 1.5 \\ &= -562.5 \text{ kg-m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{โมเมนต์คัตที่จุด B (x = 3) ; } M_B &= -(375 \times 3) + 750 \times (3 - 1.5) \\ &= 0 \text{ kg-m} \end{aligned}$$

นำสมการที่ได้จากแรงเฉือนและโมเมนต์คัตไปเขียนแผนภาพดังแสดงในภาพที่ 4.55



ภาพที่ 4.55 แผนภาพแรงเฉือนและโมเมนต์ค้ดของเพลาหมุน

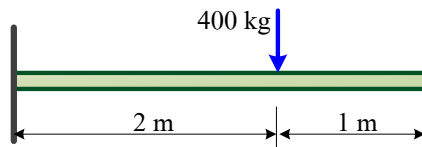
ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

### สรุปท้ายบท

คานเป็นชิ้นส่วนของโครงสร้างที่รับแรงที่กระทำในแนวตั้งฉากกับแกน คานมักพบเห็นทั่วไปในลักษณะชิ้นส่วน โครงสร้างที่เป็นท่อนยาววางตัวในแนวอนบนฐานรองรับ คานแบ่งได้หลายประเภท เช่น คานช่วงเดียวธรรมดา คานยื่น คานยื่นจากคานหลัก คานยื่นที่ปลายหนึ่งวางอยู่บนฐานรองรับ คานปลายยึดทั้งสองข้าง และคานต่อเนื่อง เป็นต้น คานแต่ละประเภทจะมีพฤติกรรมการรับน้ำหนักที่แตกต่างกัน นอกจากนั้นลักษณะของฐานรองรับและน้ำหนักที่แตกต่างกันจะทำให้เกิดแรงภายในคานแตกต่างกันด้วย แรงภายในที่แตกต่างกันนี้จะส่งผลต่อการแอ่นตัวของคานด้วยเช่นกัน โดยส่วนใหญ่แรงที่เกิดกับคานมักเป็นแรงเฉือนและโมเมนต์ค้ด ในการนำเสนอแรงที่เกิดกับคานนิยมแสดงเป็นแผนภาพซึ่งประกอบด้วยแผนภาพแรงเฉือนและแผนภาพโมเมนต์ค้ด แผนภาพดังกล่าวเกิดจากการพิจารณาแรงที่เกิดกับชิ้นส่วนคานตามระยะทางในแนวราบของคาน การคำนวณแรงที่เกิดกับคานทั่วไปจะอาศัยสมการสมดุลของแรงซึ่งประกอบด้วย สมดุลของแรงในแนวตั้ง สมดุลของแรงในแนวราบ และสมดุลของโมเมนต์ค้ดตามลำดับ ในกรณีที่คานมีน้ำหนักกระทำหลายรูปแบบอาจแยกพิจารณาจากน้ำหนักแต่ละรูปแบบจากนั้นจึงนำมารวมกันก็ได้เพื่อลดความซับซ้อนในการคำนวณ วิธีการแยกพิจารณานี้เรียกว่า วิธีซูเปอร์โพสิชัน

## แบบฝึกหัดท้ายบท

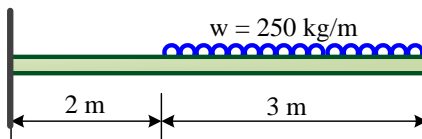
1. จงเขียนแผนภาพแรงเฉือนและแผนภาพโมเมนต์คัตของคานยื่นยาว 3 m รั้งน้ำหนัก 400 kg กระทำดังแสดงในภาพที่ 4.56



ภาพที่ 4.56 คานยื่นรั้งน้ำหนักกระทำแบบจุด

ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

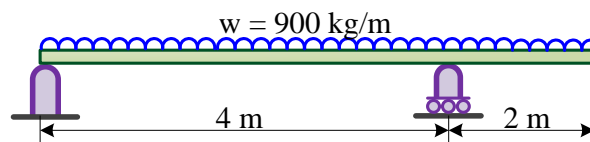
2. จงเขียนแผนภาพแรงเฉือนและแผนภาพโมเมนต์คัตของคานยื่นรับยาว 5 m รั้งน้ำหนักแผ่กระจายสม่ำเสมอแสดงในภาพที่ 4.57



ภาพที่ 4.57 คานยื่นรั้งน้ำหนักแผ่กระจายสม่ำเสมอ

ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

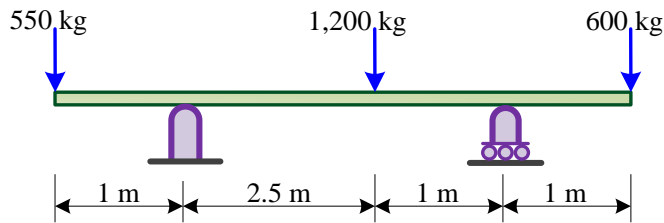
3. จงเขียนแผนภาพแรงเฉือนและแผนภาพโมเมนต์คัตของคานช่วงเดียวและมีปลายยื่นดังแสดงในภาพที่ 4.58 คานดังกล่าวมีน้ำหนักกระจายสม่ำเสมอตลอดความยาวคาน



ภาพที่ 4.58 คานรับน้ำหนักแผ่กระจายสม่ำเสมอและมีปลายยื่นหนึ่งด้าน

ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

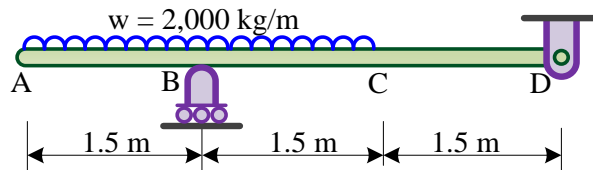
4. คานช่วงเดียวที่มีปลายคานยื่นทั้งสองด้านรับน้ำหนักดังแสดงในภาพที่ 4.59 จงเขียนแผนภาพแรงเฉือน แผนภาพโมเมนต์คัต และจงหาจุดคัตกลับพร้อมทั้งบอกตำแหน่งของจุดคัตกลับ



ภาพที่ 4.59 คานรับน้ำหนักแบบจุดและมีปลายยื่นสองด้าน

ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

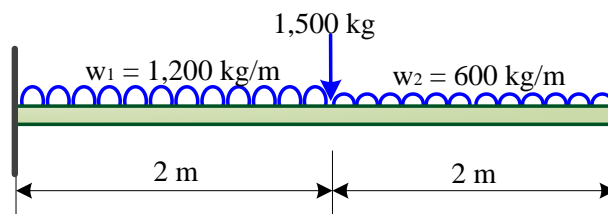
5. คานช่วงเดียวที่มีปลายคานยื่นหนึ่งด้านรับน้ำหนักดังแสดงในภาพที่ 4.60 จงเขียนแผนภาพแรงเฉือน แผนภาพโมเมนต์คัต และจงหาจุดคัตกลับพร้อมทั้งบอกตำแหน่งของจุดคัตกลับ



ภาพที่ 4.60 คานรับน้ำหนักแผ่กระจายสม่ำเสมอ

ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

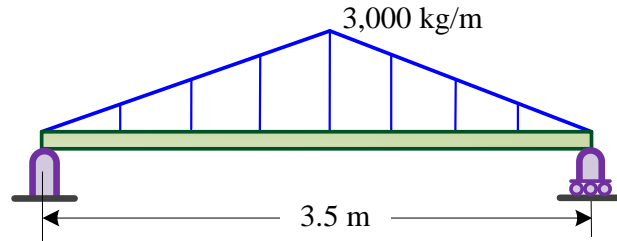
6. จงเขียนแผนภาพแรงเฉือนและแผนภาพโมเมนต์คัตของคานยื่นยาว 4 m รับน้ำหนักแผ่กระจายสม่ำเสมอและน้ำหนักกระทำแบบจุดดังแสดงในภาพที่ 4.61



ภาพที่ 4.61 คานยื่นรับน้ำหนักแผ่กระจายสม่ำเสมอและน้ำหนักกระทำแบบจุด

ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

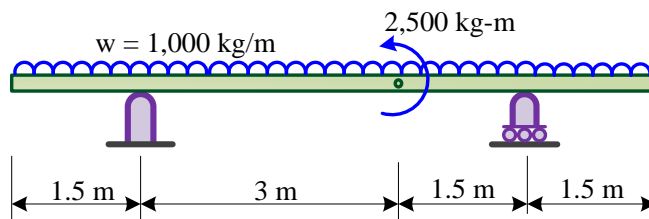
7. จงเขียนแผนภาพแรงเฉือนและแผนภาพโมเมนต์คัตของคานช่วงเดียวธรรมดาที่มีความยาว 3.5 m และมีน้ำหนักเพิ่มขึ้นอย่างต่อเนื่องดังแสดงในภาพที่ 4.62



ภาพที่ 4.62 คานรับน้ำหนักรูปสามเหลี่ยม

ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

8. จงเขียนแผนภาพแรงเฉือนและแผนภาพโมเมนต์คัตของคานช่วงเดียวที่มีปลายยื่นทั้งสองด้าน ดังแสดงในภาพที่ 4.63 กำหนดให้คำนวณโดยวิธีซูเปอร์พอสิชั่น



ภาพที่ 4.63 คานรับน้ำหนักแผ่กระจายสม่ำเสมอและโมเมนต์คัต

ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556



## เอกสารอ้างอิง

- ชาญ ถนัดงาน. (2523). **กลศาสตร์วัสดุ**. กรุงเทพฯ : สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้า  
วิทยาเขตพระนครเหนือ.
- ชาญชัย จารุจินดา. (ม.ป.ป.). **ทฤษฎีโครงสร้าง**. กรุงเทพฯ : บุญเลิศการพิมพ์.
- มนตรี พิรุณเกษตร. (2544). **กลศาสตร์ของวัสดุ**. กรุงเทพฯ : วิทยพัฒน์.
- รุ่งพีวีวิศวกรรม. (2541). **ความแข็งแรงของวัสดุ**. กรุงเทพฯ : สถาบันเทคโนโลยีราชมงคล.
- วินิต ช่อวิเชียร วรนิติ ช่อวิเชียร และวารเศรษฐ์ ช่อวิเชียร. (2548). **กำลังวัสดุ/กลศาสตร์วัสดุ**.  
กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- สมโพธิ วิวิธเกตุรงค์. (2542). **กลศาสตร์ของวัสดุ**. กรุงเทพฯ : ฟิสิกส์เซ็นเตอร์การพิมพ์.
- สุกิจ นามพิชญ์. (2541). **ความแข็งแรงของวัสดุ**. กรุงเทพฯ : ซีเอ็ดยูเคชั่น.
- สิทธิชัย แสงอาทิตย์. (2549). **กลศาสตร์ของวัสดุ**. นครราชสีมา : สาขาวิชาวิศวกรรมโยธา  
สำนักวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี.
- สิริศักดิ์ ปโยธรสิริ. (2549). **กลศาสตร์วัสดุ**. กรุงเทพฯ : ว.เพ็ชรสกุล.
- Engineering Visualization. (2009). **ABC bridges on 3D Google (Sketchup) Warehouse**.  
Retrieved June 25, 2013, from <http://www.tallbridgeguy.com/2009/07>.
- Ferdinand P. Beer, Russell Johnston, John T. DeWolf and David F. Mazurek. (2012).  
**Mechanics of Materials**. New York : Mc Graw Hill.
- Hearn E. J. (2000). **Mechanics of Materials 1: An Introduction to the Mechanics of Elastic  
and Plastic Deformation of Solids and Structural Materials**. Oxford : Butterworth-  
Heinemann.
- James M. Gere and Barry J. Goodno. (2012). **Mechanics of Materials**. Stamford : Cengage  
Learning.
- John Case, Lord Chilver and Carl T. F. Ross. (1999). **Strength of Materials and Structures**.  
London : Arnold.
- Joseph E. Shigley. (2004). **Mechanical Engineering Design**. New York : McGraw-Hill.
- Russell C. Hibbeler. (2011). **Mechanics of Materials**. New York : Prentice Hall  
International Inc.
- Vitor Dias da Silva. (2006). **Mechanics and Strength of Materials**. Heidelberg : Springer-  
Verlag.

**เอกสารอ้างอิง (ต่อ)**

William A. Nash. (1998). **Theory and Problems of Strength of Materials**. New York :  
McGraw-Hill.

## แผนบริหารการสอนประจำบทที่ 5

### ความเค้นในคาน

#### หัวข้อเนื้อหาประจำบท

1. ความเค้นเนื่องจากโมเมนต์ดัด
  - ความเค้นดึง
  - ความเค้นอัด
2. ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและโมเมนต์ดัด
3. โมดูลัสของหน้าตัด
4. ความเค้นเฉือนแนวราบในคาน
5. สูตรถ่ายบท
6. แบบฝึกหัดถ่ายบท

#### วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม

เมื่อนักศึกษาเรียนบทเรียนนี้แล้วสามารถ

1. อธิบายและคำนวณความเค้นดึงและความเค้นอัดเนื่องจากโมเมนต์ดัดในคานได้
2. อธิบายและคำนวณความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและโมเมนต์ดัดในคานได้
3. อธิบายโมดูลัสของหน้าตัดได้
4. อธิบายและคำนวณความเค้นเฉือนแนวราบในคานได้
5. อธิบายการเลือกหน้าตัดของคานให้เหมาะสมกับขนาดโมเมนต์ดัดและแรงเฉือนใน

คานได้

#### วิธีสอนและกิจกรรมการเรียนการสอนประจำบท

1. บรรยายเนื้อหาในเอกสารประกอบคำสอน การถามและตอบในห้องเรียนร่วมกับการใช้สื่อประกอบอื่น เช่น สื่อแผ่นใส สื่อคอมพิวเตอร์ หรือสื่อวีดิทัศน์ เป็นต้น

2. แสดงตัวอย่างแบบจำลองคานที่มีฐานรองรับแบบต่าง ๆ และสาธิตให้ผู้เรียนเห็นถึงการเปลี่ยนแปลงรูปร่างคานเมื่อรับน้ำหนัก

3. สาธิตขั้นตอนการแก้ปัญหาโจทย์ที่เกี่ยวข้องกับเนื้อหาในการเรียนการสอน เช่น ความเค้นดึงและความเค้นอัดเนื่องจากโมเมนต์ดัด ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและโมเมนต์ดัด โมดูลัสของหน้าตัดความเค้นเฉือนในแนวราบ เป็นต้น

#### 4. มอบหมายงาน

4.1 ให้ผู้เรียนแต่ละคนแก้ปัญหาโจทย์ที่เกี่ยวข้องกับเนื้อหา เช่น ความเค้นดึงและความเค้นอัดเนื่องจากโมเมนต์ดัด ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและโมเมนต์ดัด โมดูลัสของหน้าตัด และความเค้นเฉือนในแนวราบ เป็นต้น

4.2 ให้ผู้เรียนแต่ละกลุ่มศึกษาเพิ่มเติมเกี่ยวกับความเค้นในคานที่มีหน้าตัดรูปแบบต่าง ๆ รวมถึงคานที่ทำจากวัสดุวิศวกรรมสมัยใหม่และวัสดุในท้องถิ่น

4.3 ให้ผู้เรียนแต่ละคนทำแบบฝึกหัดจากคำถามท้ายบท เพื่อทดสอบความรู้ที่ได้เรียนมา

#### 5. ทำแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

#### การวัดและประเมินผล

1. การสังเกตความสนใจของผู้เรียน
2. การฝึกปฏิบัติเกี่ยวกับการคำนวณปัญหาโจทย์
3. การทดสอบจากแบบทดสอบ
4. การประเมินผล ผู้เรียนจะต้องได้คะแนนรวมไม่ต่ำกว่าร้อยละ 60 จึงจะผ่านเกณฑ์การเรียนรู้

## บทที่ 5

### ความเค้นในคาน

คานเมื่อมีน้ำหนักหรือภาระมากระทำในแนวตั้งฉากกับแนวแกนจะทำให้เกิดแรงภายในขึ้น แรงภายในที่สำคัญประกอบด้วยแรงเฉือนและ โมเมนต์ดัดคั้งที่ได้กล่าวมาแล้วในบทก่อนหน้านี้ ทั้งแรงเฉือนและโมเมนต์ดัดจะทำให้เกิดความเค้นขึ้นภายในคาน ยกตัวอย่างเช่นคานช่วงเดียวธรรมดาเมื่อมีน้ำหนักมากระทำก็จะเกิดการแอ่นตัว สิ่งที่ตามมาคือด้านบนของคานจะเกิดการหดตัวเป็นความเค้นอัดและด้านล่างของคานจะเกิดการยืดตัวเป็นความเค้นดึง ความเค้นทั้งสองที่เกิดขึ้นในคานจะมีความสัมพันธ์กับโมเมนต์ดัดจึงเรียกความเค้นนี้ว่าความเค้นดัด ในขณะที่ความเค้นเฉือนที่เกิดขึ้นในคานจะส่งผลทำให้คานขาดออกจากกันในแนวราบ เรียกความเค้นนี้ว่า ความเค้นเฉือนในแนวราบ อนึ่งความเค้นดัดและความเค้นเฉือนในแนวราบต่างมีความสำคัญต่อการคำนวณและออกแบบคานดังนั้นบทนี้จึงนำเสนอเนื้อหาของความเค้นทั้งสอง

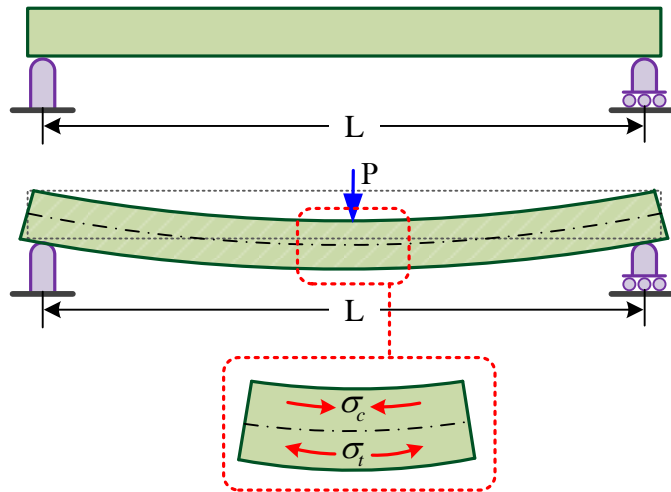
### ความเค้นดัดในคาน

บรรจบ อรรถ (2542 : 5-1-5-5) และ James M. Gere and Stephen P. Timoshenko (1991 : 250-256) กล่าวว่า ความเค้นดัด (Bending Stress) คือความเค้นดึงหรือความเค้นอัดที่เกิดขึ้นบนพื้นที่หน้าตัดคานรอบแกนสะเทินเนื่องจากโมเมนต์ดัดคั้งแสดงในภาพที่ 5.1 หากพิจารณาคานช่วงเดียวธรรมดาที่วางตัวในแนวราบบนฐานรองรับพบว่าเมื่อมีน้ำหนักมากระทำจะทำให้คานเกิดการแอ่นตัวลง สิ่งที่ตามมาคือส่วนบนของคานจะหดลงและส่วนล่างของคานจะยืดออกเป็นเหตุให้เกิดความเค้น เมื่อพิจารณาบริเวณกึ่งกลางคานพบว่าด้านบนของคานจะเกิดการหดตัวเป็นความเค้นอัดและด้านล่างของคานจะเกิดการยืดตัวเป็นความเค้นดึง ภาพที่ 5.2 เป็นตัวอย่างคานไม้ที่วิบัติเนื่องจากความเค้นดัด การหาความเค้นดัดที่เกิดขึ้นในคานขณะรับน้ำหนักจะต้องอยู่บนสมมติฐานดังต่อไปนี้

1. คานก่อนการรับน้ำหนักจะวางตัวบนฐานรองรับในแนวเส้นตรงหรือมีการแอ่นตัวน้อยมาก และคานมีพื้นที่หน้าตัดเท่ากันตลอดความยาว
2. วัสดุที่ใช้ทำคานจะมีค่าโมดูลัสยืดหยุ่นเท่ากันทั้งกรณีวัสดุนั้นอยู่ภายใต้ความเค้นอัดหรือความเค้นดึง
3. คานทำจากวัสดุที่มีคุณสมบัติทางกลเหมือนกันทุกทิศทาง (Homogeneous Materials) และเป็นวัสดุเดียวกันตลอดความยาวคาน

4. ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นคดและโมเมนต์คดที่เกิดขึ้นในคานเป็นไปตามกฎของฮุกซึ่งเป็นความสัมพันธ์เชิงเส้น

5. พื้นที่หน้าตัดของคานมีการเปลี่ยนแปลงน้อยมากทั้งก่อนและหลังการแอ่นตัว โดยคานยังคงรักษาสภาพพื้นที่หน้าตัดในแนวระนาบทั้งก่อนและหลังการแอ่นตัว



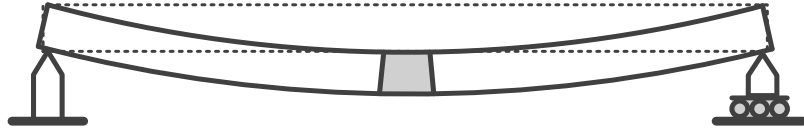
ภาพที่ 5.1 คานช่วงเดียวรับน้ำหนักและเกิดความเค้นอัดและความเค้นดึงในคาน  
ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556



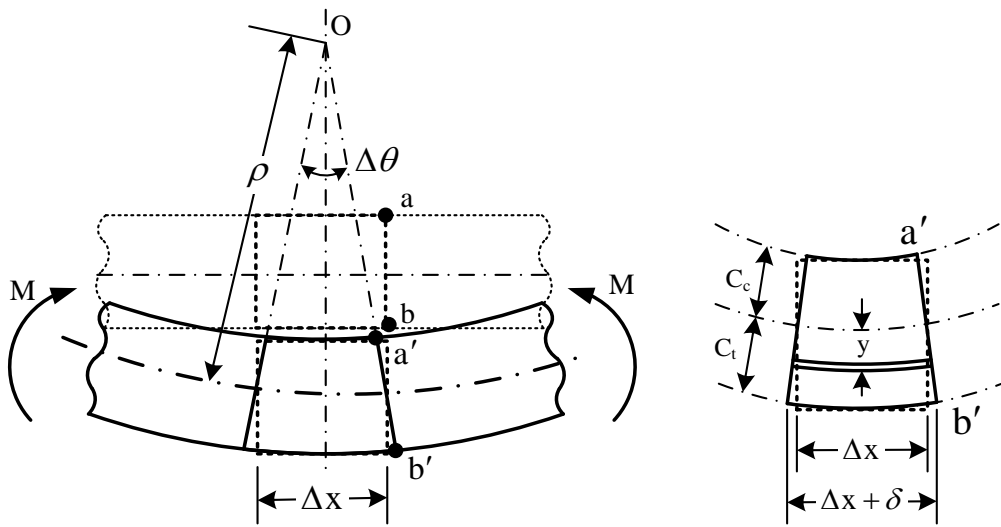
ภาพที่ 5.2 การวิบัติของคานไม้เนื่องจากโมเมนต์คด  
ที่มา : Construction with Bamboo. 2005

การหาค่าความเค้นคดเริ่มต้นจากการพิจารณาชิ้นส่วนขนาดเล็กของคานที่ระยะใด ๆ ไปตามแนวราบดังแสดงในภาพที่ 5.3 เมื่อคานเกิดการแอ่นตัวเนื่องจากโมเมนต์คดส่วนบนของคานจะหดสั้นลงและส่วนล่างจะยืดออก แต่จะไม่มี การเปลี่ยนแปลงรูปร่างที่ระนาบสะเทิน (Neutral Plane) ความเค้นที่เกิดขึ้นด้านบนเป็นความเค้นอัดและความเค้นที่เกิดขึ้นด้านล่างเป็น

ความเค้นดึงแสดงในภาพที่ 5.4 โดยความเค้นที่เกิดขึ้นจะมีค่ามากที่สุดที่ขอบบนและขอบล่างของคาน



(ก) การแอ่นตัวของคาน

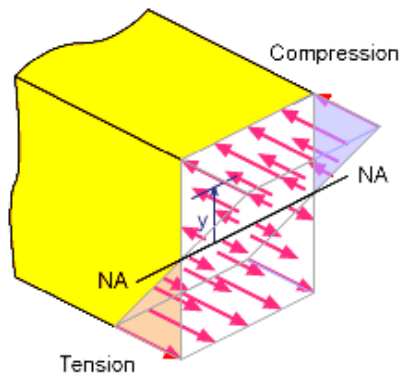


(ข) พฤติกรรมการแอ่นตัวเนื่องจากโมเมนต์ดัด

(ค) การเปลี่ยนแปลงรูปร่างในคาน

ภาพที่ 5.3 การเปลี่ยนแปลงรูปร่างของชิ้นส่วนเล็กในคานเนื่องจากโมเมนต์ดัด

ที่มา : สิริศักดิ์ ปโยธรสิริ. 2549 : 208 และ มนตรี พิรุณเกษตร. 2544 : 320



ภาพที่ 5.4 ความเค้นดึงและความเค้นอัดในคานเนื่องจากโมเมนต์ดัด

ที่มา : Kurt Gramoll. n.d.

มนตรี พิรุณเกษตร (2544 : 319-325) สิริศักดิ์ ปโยชรสิริ (2549 : 205-210) กล่าวว่าเมื่อพิจารณาชิ้นส่วนขนาดเล็กของคานตามระยะในแนวราบจะสามารถสร้างสมการความสัมพันธ์ระหว่างรัศมีโค้งและมุมเอียงที่หน้าตัดได้ดังสมการต่อไปนี้

$$\Delta x = \rho \Delta \theta \quad (5.1)$$

เมื่อ  $\Delta x$  คือความยาวของชิ้นส่วนคานขนาดเล็กที่ระยะในแนวระนาบสะท้อน  $\rho$  คือรัศมีความโค้งของคาน (Radius of Curvature) และ  $\Delta \theta$  คือมุมที่พื้นที่หน้าตัดชิ้นส่วนขนาดเล็ก  $\Delta x$  เอียงทำมุมต่อกันเมื่อมีการโค้งงอ ส่วนที่ยึดออก  $\delta$  จากระนาบสะท้อนสามารถคำนวณได้จากสมการต่อไปนี้

$$\delta = y \Delta \theta \quad (5.2)$$

หากพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างระยะยึดและความเครียดจะได้ว่า

$$\varepsilon = \frac{\delta}{\Delta x} = \frac{y \Delta \theta}{\rho \Delta \theta} \quad (5.3)$$

หรือ 
$$\varepsilon = \frac{y}{\rho} \quad (5.4)$$

พิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดจะได้

$$\sigma = \varepsilon E \quad (5.5)$$

$$\sigma = \frac{E y}{\rho} \quad (5.6)$$

จากสมการด้านบนพบว่าความเค้นเนื่องจากโมเมนต์คัตเป็นสัดส่วนโดยตรงกับระยะห่างบนพื้นที่หน้าตัดคานจากระนาบสะท้อนดังแสดงในภาพที่ 5.4 ส่งผลทำให้ทราบว่าความเค้นดึง  $\sigma_t$  เนื่องจากโมเมนต์คัตจะมีค่าสูงที่สุด ณ ตำแหน่งด้านล่างของหน้าตัดคานเป็นระยะ  $C_t$  จะระนาบสะท้อน โดยความเค้นดึงสูงสุดหาได้จากสมการดังต่อไปนี้

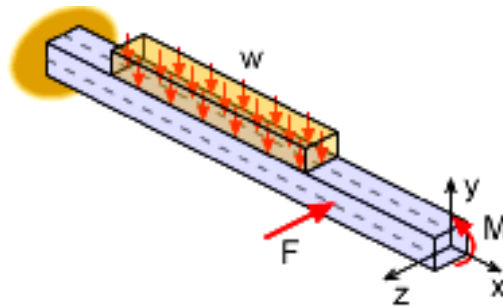
$$\sigma_t = \frac{E C_t}{\rho} \quad (5.7)$$

ในทำนองเดียวกันความเค้นอัด  $\sigma_c$  เนื่องจากโมเมนต์คัตจะมีค่าสูงที่สุด ณ ตำแหน่งด้านบนสุดของหน้าตัดคานห่างจากระนาบแกนสะท้อนเป็นระยะ  $C_c$  โดยความเค้นอัดสูงสุดหาได้จากสมการดังต่อไปนี้

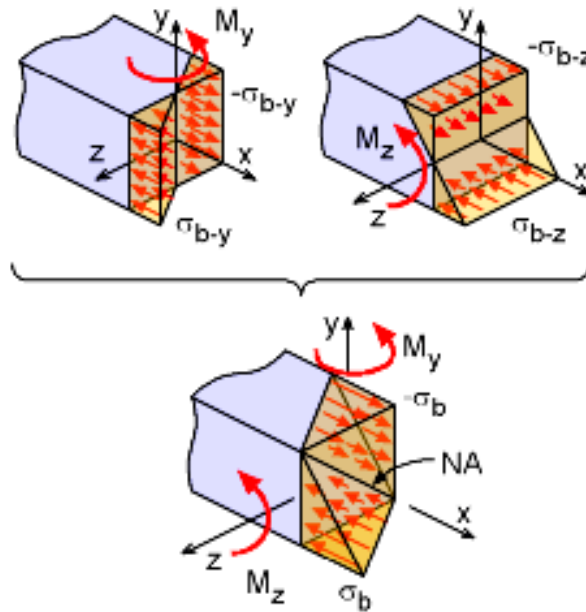
$$\sigma_c = \frac{E C_c}{\rho} \quad (5.8)$$



กรณีที่คานรับน้ำหนักกระทำสองแกนประกอบด้วยน้ำหนักแผ่กระจายในแนวแกน  $y$  และน้ำหนักกระทำเป็นจุดในแนวแกน  $z$  ดังแสดงในภาพที่ 5.5 ก็จะเกิดโมเมนต์คดและแรงเฉือนทั้งในแนวแกน  $y$  และ  $z$  ตามลำดับ ในการพิจารณาความเค้นที่เกิดขึ้นกับคานสามารถแยกพิจารณา น้ำหนักที่กระทำในแต่ละแกน จากนั้นจึงนำความเค้นที่คำนวณได้ในแต่ละด้านมารวมกันด้วยวิธีซูเปอร์โพสิชันก็ได้ดังแสดงในภาพที่ 5.5 (เกรียงศักดิ์ อุดมสิน โรจน์. 2540 : 8-6, Hearn E. J. 2000 : 73-76 และ Kurt Gramoll. n.d.)



(ก) คานรับน้ำหนักสองแกน



(ข) ความเค้นที่เกิดขึ้นในคาน

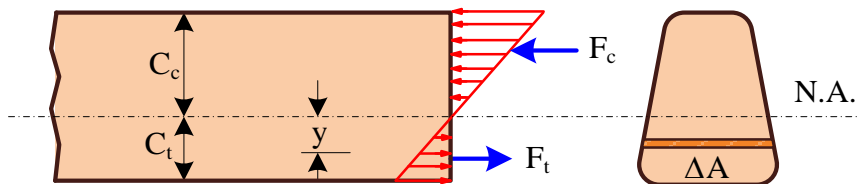
ภาพที่ 5.5 ความเค้นผสมที่เกิดขึ้นในคาน

ที่มา : Kurt Gramoll. n.d.

หากพิจารณาสมการความเค้นดัดซึ่งประกอบไปด้วยความเค้นดึงและความเค้นอัดที่ได้กล่าวมาแล้วข้างต้นพบว่า รัศมีความโค้งของคานาหลังจากการรับน้ำหนักมีความซับซ้อนในการคำนวณ ดังนั้นจึงอาจแปลงรัศมีความโค้งไปเป็นความสัมพันธ์ระหว่างคุณสมบัติหน้าตัดคานากับโมเมนต์ดัดก็ได้

### ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและโมเมนต์ดัด

คานาเมื่อรับน้ำหนักกระทำก็จะเกิดการแอ่นตัวและเกิดความเค้นดัด ความเค้นดัดดังกล่าวประกอบด้วยความเค้นดึงและความเค้นอัด การหาค่าความเค้นดัดโดยใช้รัศมีความโค้งของคานาในการคำนวณมีความซับซ้อน ดังนั้นการแปลงรัศมีความโค้งให้อยู่ในรูปความสัมพันธ์ระหว่างคุณสมบัติหน้าตัดคานากับโมเมนต์ดัดจะช่วยให้การคำนวณสะดวกยิ่งขึ้น บรรจบ อรรถ (2542 : 6-1-6-5) สิริศักดิ์ ปโยธรศิริ (2549 : 206-210) James M. Gere and Barry J. Goodno (2012 : 282-285, 287-292) กล่าวว่าความสัมพันธ์ดังกล่าวสามารถหาได้จากการพิจารณาสมดุลของแรงที่หน้าตัดคานาดังแสดงในภาพที่ 5.6 การกระจายความเค้นดัด  $\sigma$  บนหน้าตัดคานาจะแปรเปลี่ยนไปตามระยะทางจากระนาบสะเทิน ผลรวมของแรงในแนวราบบนพื้นที่หน้าตัดคานา  $\Delta A$  ห่างจากระนาบสะเทินเป็นระยะ  $y$  เมื่ออยู่ในสภาวะสมดุลจะมีค่าเท่ากับศูนย์ดังสมการต่อไปนี้



ภาพที่ 5.6 การกระจายความเค้นดัดบนหน้าตัดคานา

ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

$$\sum \sigma \Delta A = 0 \quad (5.9)$$

แทนค่าความเค้น  $\sigma = E y / \rho$  ลงในสมการจะได้

$$\frac{\sum E y}{\rho} \Delta A = 0 \quad (5.10)$$

$$\frac{E}{\rho} \sum y \Delta A = 0 \quad (5.11)$$

$$\frac{E\bar{y}A}{\rho} = 0 \quad (5.12)$$

จากสมการด้านบนพบว่า  $\bar{y}$  เป็นระยะจากจุดศูนย์กลางวงแรงบนพื้นที่หน้าตัดคานถึงระนาบสะเทิน นอกจากนี้ผลรวมของโมเมนต์ตัดรอบระนาบสะเทินของหน้าตัดคานยังมีค่าเท่ากับเมื่ออยู่ในสภาวะสมดุล สมการสมดุลของโมเมนต์ตัดรอบหน้าตัดคานสามารถเขียนได้ดังต่อไปนี้

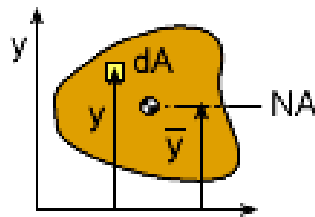
$$M = \sum \sigma y \Delta A \quad (5.13)$$

$$M = \frac{\sum E y}{\rho} \times y \Delta A = \frac{E}{\rho} \sum y^2 \Delta A \quad (5.14)$$

$$M = \frac{EI}{\rho} \quad (5.15)$$

กำหนดให้  $I$  เป็นโมเมนต์ความเฉื่อยของพื้นที่หน้าตัดคานรอบระนาบสะเทินดังแสดงในภาพที่ 5.7 ค่าโมเมนต์ความเฉื่อยสามารถคำนวณได้จากสมการดังต่อไปนี้

$$I = \sum y^2 A \quad (5.16)$$



ภาพที่ 5.7 โมเมนต์ความเฉื่อยรอบแกนสะเทินของหน้าตัดใดๆ

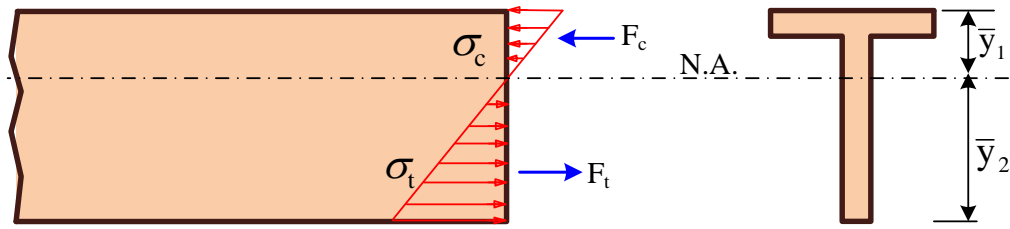
ที่มา : Kurt Gramoll. n.d.

ดังนั้นความเค้นในคานที่ระยะใด ๆ จากระนาบสะเทินสามารถหาได้จากสมการ

$$\rho = \frac{My}{I} \quad (5.17)$$

กรณีที่หน้าตัดคานเป็นรูปตัวทีดังแสดงในภาพที่ 5.8 ซึ่งมีระยะ  $C_t$  เท่ากับ  $\bar{y}_1$  และระยะ  $C_b$  เท่ากับ  $\bar{y}_2$  จากระนาบสะเทิน ความเค้นดึงสูงสุดที่เกิดขึ้นที่ด้านล่างของหน้าตัดสามารถหาได้จากสมการต่อไปนี้

$$\sigma_t = \frac{MC_t}{I} \quad (5.18)$$



ภาพที่ 5.8 การกระจายความเค้นดัดของคานหน้าตัดรูปตัวที

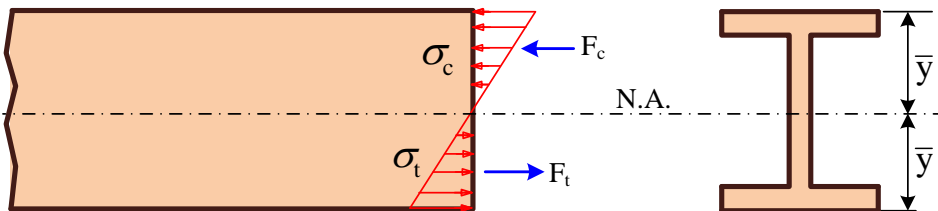
ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

ในการทำงานเดียวกันความเค้นอัดสูงสุดที่เกิดขึ้นด้านบนของหน้าตัดคานรูปตัวทีสามารถหาได้จากสมการต่อไปนี้

$$\sigma_c = \frac{MC_c}{I} \quad (5.19)$$

สำหรับคานที่มีพื้นที่หน้าตัดรูปตัวไอดังแสดงในภาพที่ 5.9 ซึ่งมีระยะ  $C_c$  เท่ากับ  $C_t$  และมีค่าเท่ากับ  $C$  จะได้สมการความเค้นดัดดังต่อไปนี้

$$\sigma = \frac{Mc}{I} \quad (5.20)$$



ภาพที่ 5.9 การกระจายความเค้นดัดของคานหน้าตัดรูปตัวไอ

ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

### โมดูลัสของหน้าตัด

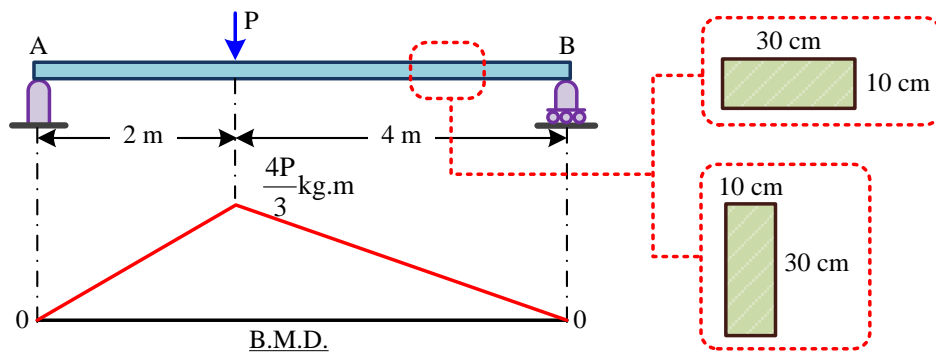
โมดูลัสของหน้าตัด (Section Modulus :  $Z$ ) คืออัตราส่วนระหว่างโมเมนต์ความเฉื่อย  $I$  รอบระนาบสะเทินกับระยะ  $c$  จากระนาบสะเทินถึงผิวนอกของพื้นที่หน้าตัดคาน โดยค่าโมดูลัสของหน้าตัดสามารถบ่งบอกถึงคุณสมบัติหน้าตัดคานและความแข็งแรงของคานได้อีกด้วย ถ้าหน้าตัดคานมีค่าโมดูลัสของหน้าตัดมากก็แสดงว่าคานนั้นสามารถรับโมเมนต์ดัดได้มากด้วย

ความเค้นดัดที่คำนวณโดยใช้ค่าโมเมนต์ของหน้าตัดสามารถหาได้จากสมการดังต่อไปนี้ (สิริศักดิ์ ปโยชรศิริ, 2549 : 212-213 และ James M. Gere and Barry J. Goodno, 2012 : 300-303)

$$\text{จาก} \quad \sigma = \frac{Mc}{I} = \frac{M}{I/c} \quad (5.21)$$

$$\sigma = \frac{M}{Z} \quad (5.22)$$

ตัวอย่างที่ 5.1 คานช่วงเดียวธรรมดาความยาว 6 m มีน้ำหนัก  $P$  กระทำดังแสดงในภาพที่ 5.10 คานมีขนาดหน้าตัดกว้าง 10 cm และลึก 30 cm จงหาน้ำหนัก  $P$  ที่กระทำกับคานเมื่อวางด้าน 30 cm รับน้ำหนักและจงหาน้ำหนัก  $P$  ที่กระทำกับคานเมื่อวางด้าน 10 cm รับน้ำหนัก กำหนดให้ไม้สามารถรับความเค้นดัดได้ไม่เกิน  $200 \text{ kg/cm}^2$



ภาพที่ 5.10 คานช่วงเดียวมีแรงมากกระทำแบบจุด

ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา, 2556

วิธีทำ

$$\text{หาแรงปฏิกิริยาที่ฐาน A ;} \quad R_A = \frac{2P}{3}$$

$$\text{หาแรงปฏิกิริยาที่ฐาน B ;} \quad R_B = \frac{P}{3}$$

เขียนแผนภาพ โมเมนต์ดัดเพื่อหาตำแหน่งที่เกิดโมเมนต์ดัดสูงสุดซึ่งมีค่าเท่ากับ  $\frac{4P}{3} \text{ kg.m}$

พิจารณาคุณสมบัติหน้าตัดคานเมื่อวางด้าน 30 cm ในแนวนอนเพื่อรับน้ำหนัก

$$\begin{aligned} \text{โมเมนต์ความเฉื่อยหน้าตัดคาน ;} \quad I &= \frac{1}{12} bh^3 \\ &= \frac{1}{12} \times 30 \times (10)^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2,500 \text{ cm}^4 \\
 \text{ความเค้นดัดในคาน ; } \quad \sigma &= \frac{Mc}{I} \\
 200 &= \frac{4P \times 5}{3 \times 2,500} \\
 \text{น้ำหนักที่รับได้ ; } \quad P &= \frac{200 \times 3 \times 2,500}{4 \times 5} \\
 &= 75,000 \text{ kg}
 \end{aligned}$$

น้ำหนักที่คานรับได้มีค่าไม่เกิน 75,000 kg

ตอบ

พิจารณาคุณสมบัติหน้าตัดคานเมื่อวางด้าน 10 cm ในแนวนอนเพื่อรับน้ำหนัก

$$\begin{aligned}
 \text{โมเมนต์ความเฉื่อยหน้าตัดคาน ; } I &= \frac{1}{12} bh^3 \\
 &= \frac{1}{12} \times 10 \times (30)^3 = 22,500 \text{ cm}^4
 \end{aligned}$$

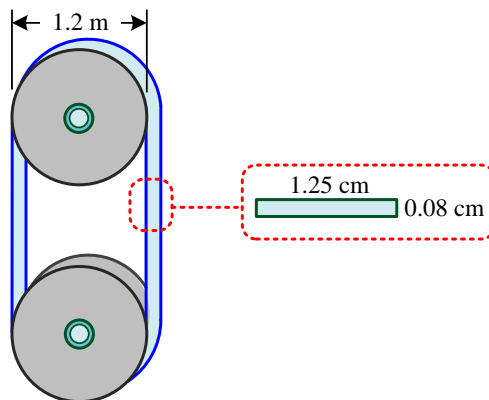
$$\begin{aligned}
 \text{ความเค้นดัดในคาน ; } \quad \sigma &= \frac{Mc}{I} \\
 200 &= \frac{(4P/3)15 \times 100}{22,500}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{น้ำหนักที่รับได้ ; } \quad P &= \frac{200 \times 22,500 \times 3}{4 \times 15 \times 100} = 2,250 \text{ kg}
 \end{aligned}$$

น้ำหนักที่คานรับได้มีค่าไม่เกิน 2,250 kg

ตอบ

**ตัวอย่างที่ 5.2** สายพานทำด้วยเหล็กขนาดกว้าง 1.25 cm หนา 0.08 cm ถูกขับเคลื่อนด้วยพูลเลย์ ขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง 1.2 m ดังแสดงในภาพที่ 5.11 จงคำนวณหาความเค้นสูงสุดและขนาดของโมเมนต์ที่เกิดขึ้นในสายพาน กำหนดให้เหล็กมีค่าโมดูลัสยืดหยุ่น  $E_s = 210 \times 10^8 \text{ kg/m}^2$



ภาพที่ 5.11 สายพานถูกขับเคลื่อนด้วยพูลเลย์

ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิทยา. 2556

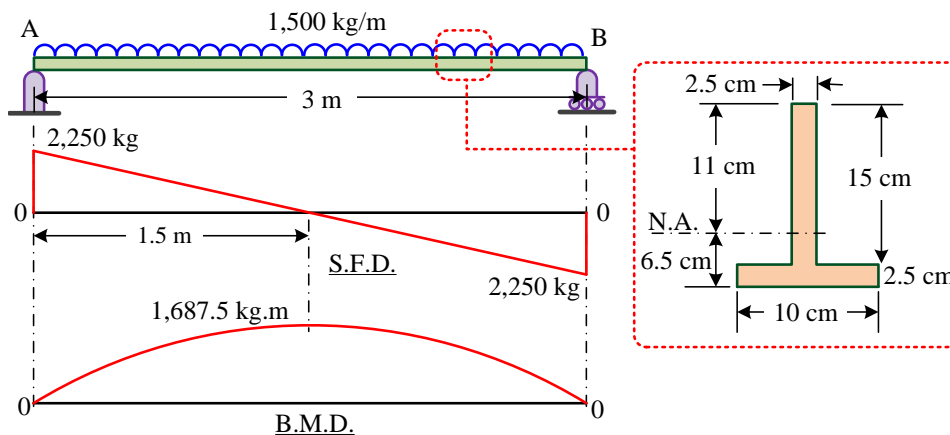
**วิธีทำ**

ความเค้นสูงสุดในสายพาน ;  $\sigma = \frac{Ec}{r} = \frac{210 \times 10^6 \times 0.04}{0.6} = 14 \times 10^6 \text{ kg/m}^2$  ตอบ

โมเมนต์ความเฉื่อยสายพาน ;  $I = \frac{1}{12}bh^3 = \frac{1}{12} \times 1.25 \times (0.08)^3 = 0.000053 \text{ cm}^4$

โมเมนต์ค้ดสูงสุด ;  $M = \frac{\sigma I}{c} = \frac{(14 \times 10^2)(53 \times 10^{-6})}{0.04} = 1.855 \text{ kg-cm}$  ตอบ

ตัวอย่างที่ 5.3 คานช่วงเดียวธรรมดาที่มีพื้นที่หน้าตัดรูปตัวทีและมีน้ำหนักแผ่กระจายสม่ำเสมอ ขนาด 1,500 kg/m กระทำตลอดความยาว 3 m ดังแสดงในภาพที่ 5.12 จงหาความเค้นดึงและความเค้นอัดสูงสุดที่เกิดขึ้นในคานเนื่องจากโมเมนต์ค้ด



ภาพที่ 5.12 คานช่วงเดียวรับน้ำหนักแผ่กระจายสม่ำเสมอ

ที่มา : จีรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

**วิธีทำ**

แรงปฏิกิริยาที่ฐานรองรับ A ;  $R_A = 2,250 \text{ kg}$

แรงปฏิกิริยาที่ฐานรองรับ B ;  $R_B = 2,250 \text{ kg}$

เขียนแผนภาพ โมเมนต์ค้ดเพื่อหาค่าโมเมนต์มากที่สุดซึ่งมีค่าเท่ากับ 1687.5 kg-m

$$\begin{aligned} \text{จุดศูนย์กลางหน้าตัดรูปตัวที ; } \quad A \bar{y} &= A_1 Y_1 + A_2 Y_2 \\ \bar{y} &= \frac{(10 \times 2.5)(2.5/2) + (15 \times 2.5)(7.5 + 2.5)}{(15 \times 2.5) + (2.5 \times 10)} \\ &= 6.5 \text{ cm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{โมเมนต์ความเฉื่อยหน้าตัดคาน ; } I_{N-A} &= I_1 + I_2 = (\bar{I} + Ad^2)_1 + (\bar{I} + Ad^2)_2 \\ &= \left(\frac{1}{12} \times 10 \times 2.5^3 + (10 \times 2.5)(6.5 - 1.25)^2\right) + \left(\frac{1}{2} \times 2.5 \times 15^3 + (15 \times 2.5)(10 - 6.5)^2\right) \\ &= 1,864.53 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

ความเค้นดึงสูงสุดเกิดที่ด้านล่างของพื้นที่หน้าตัดคาน

$$\begin{aligned} \text{ความเค้นดึงสูงสุด ; } \quad \sigma_t &= \frac{MC_t}{I_{N-A}} \\ &= \frac{(1,687.5 \times 100) \times 6.5}{1,864.53} \\ &= 588.28 \text{ kg/cm}^2 \quad \text{ตอบ} \end{aligned}$$

ความเค้นอัดสูงสุดเกิดที่ด้านบนของพื้นที่หน้าตัดคาน

$$\begin{aligned} \text{ความเค้นอัดสูงสุด ; } \quad \sigma_c &= \frac{MC_c}{I_{N-A}} \\ &= \frac{(1,687.5 \times 100) \times 11}{1,864.53} \\ &= 995.56 \text{ kg/cm}^2 \quad \text{ตอบ} \end{aligned}$$

### ความเค้นเฉือนแนวราบในคาน

โมเมนต์คัตนอกจากจะทำให้เกิดความเค้นดัดในคานแล้วยังทำให้เกิดความเค้นเฉือนในแนวราบ (Shearing Stress in Horizontal Direction) อีกด้วย การทดลองที่แสดงให้เห็นถึงการเกิดแรงเฉือนในแนวราบทำได้โดยการเอาคานแผ่นบางมาวางซ้อนกันดังแสดงในภาพที่ 5.13 ถ้าคานแผ่นบางวางซ้อนกันอย่างอิสระเมื่อมีน้ำหนักกระทำก็จะทำให้คานแผ่นบางด้านบนเลื่อนออกจากคานแผ่นบางด้านล่าง การเลื่อนออกจากกันนี้สามารถสังเกตได้ที่ปลายคาน แต่ถ้าคานแผ่นบางทั้งสองถูกยึดติดจนเป็นเนื้อเดียวกันเมื่อมีน้ำหนักกระทำก็จะทำให้คานแผ่นบางทั้งสองแอนตัวไปด้วยกัน ในขณะที่คานแอนตัวไปด้วยกันก็จะเกิดแรงต้านการเลื่อนในแนวราบ แรงต้านนี้ทำให้เกิดความเค้นขึ้นภายในคานซึ่งความเค้นนี้ก็คือความเค้นเฉือนในแนวราบ ตัวอย่างคานไม้ประกอบที่วิบัติจากความเค้นเฉือนในแนวระนาบแสดงในภาพที่ 5.14

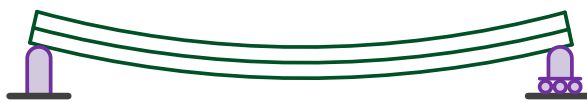




(ก) แผ่นวัสดุบางซ้อนกันก่อนการโค้งตัว



(ข) แผ่นวัสดุบางซ้อนกันแอ่นตัว



(ค) แผ่นวัสดุบางที่เป็นเนื้อเดียวกันแอ่นตัว

ภาพที่ 5.13 การเกิดความเค้นเฉือนแนวราบในคานบางวางซ้อนกัน

ที่มา : จีรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

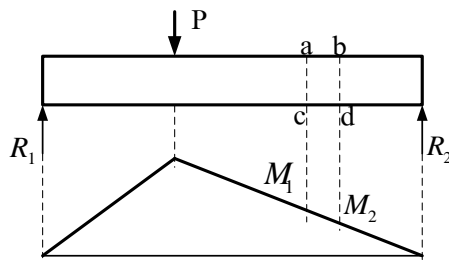


ภาพที่ 5.14 การบิดของคานไม้เนื่องจากความเค้นเฉือนแนวราบ

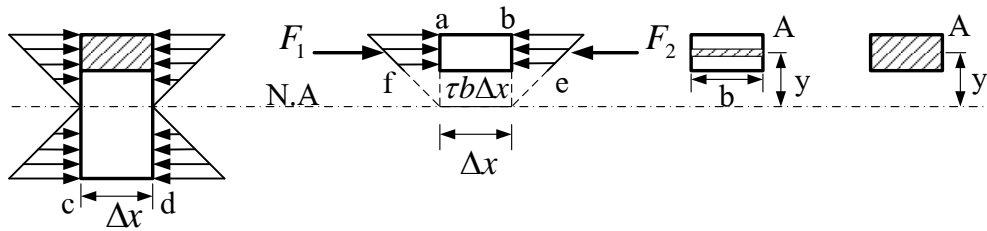
ที่มา : Construction with Bamboo. 2005

บรรจบ อรชร (2542 : 7-1-7-5) สมโพธิ์ วิวิธเกียรังศ์ (2542 : 189-194) และ James M. Gere and Barry J. Goodno (2012 : 309-315) กล่าวถึงการเกิดความเค้นเฉือนแนวราบในคานไว้ดังต่อไปนี้ เมื่อคานแอ่นตัวจากการรับน้ำหนักจนเกิดโมเมนต์คัตและความเค้นคัตในคาน ในขณะที่เดียวกันก็เกิดความเค้นอัดและความเค้นดึงในหน้าตัดคานรอบระนาบสะเทิน เมื่อพิจารณา

ชิ้นส่วนขนาดเล็กของคานพบว่าความเค้นอัดหรือความเค้นดึงในแต่ละด้านของชิ้นส่วนนั้นมีค่าแตกต่างกัน เมื่อพิจารณาสมดุลของแรงในแนวราบของชิ้นส่วนขนาดเล็กเนื่องจากความเค้นดังกล่าวพบว่าจะมีแรงเฉือนทำให้คานขาดออกจากกันในแนวราบดังแสดงในภาพที่ 5.15 จากภาพสมมติให้  $b$  เป็นความกว้างของหน้าตัดคานตลอดความยาวและ  $\tau$  เป็นความเค้นเฉือนแนวราบที่แนว  $ef$  ซึ่งห่างจากระนาบสะเทินเป็นระยะใดๆ เมื่อพิจารณาชิ้นส่วน  $abcd$  ของคานพบว่าโมเมนต์ดัด  $M_1$  ของแนว  $ac$  มีค่ามากกว่าโมเมนต์ดัด  $M_2$  ของแนว  $bd$  ส่งผลทำให้ชิ้นส่วน  $abef$  ที่อยู่ด้านบนของระนาบสะเทินเกิดความเค้นอัด  $\sigma_1$  ของแนว  $af$  มีค่ามากกว่าความเค้นอัด  $\sigma_2$  ของแนว  $be$  ด้วย และแรงในแนวราบ  $F_1$  เนื่องจากความเค้นอัดของแนว  $af$  มีค่ามากกว่าแรง  $F_2$  ของแนว  $be$  ด้วยพิจารณาชิ้นส่วน  $abef$  ของคานด้านบนหรือด้านล่างก็ได้เมื่อมีแรงกระทำ  $F_1$  มากกว่า  $F_2$  ของแนว  $be$  ด้วย ถ้าจะให้ชิ้นส่วน  $abef$  อยู่ในสภาวะสมดุลจะต้องมีแรง  $\tau b \Delta x$  กระทำในทิศทางเดียวกับ  $F_2$  ดังสมการต่อไปนี้



(ก) น้ำหนักที่กระทำกับคาน



(ข) ความเค้นที่เกิดกับคาน

ภาพที่ 5.15 ความเค้นเฉือนแนวราบในคาน

ที่มา : James M. Gere and Barry J. Goodno. 2012 : 310

$$\text{สมดุลของแรง ;} \quad F_2 + \tau b \Delta x = F_1 \quad (5.23)$$

$$\tau b \Delta x = F_1 - F_2 \quad (5.24)$$

$$\text{แรงในแนว } af; \quad F_1 = \sum \sigma_{y1} \Delta A \quad (5.25)$$

แรงในแนว be ;  $F_2 = \sum \sigma_{y_2} \Delta A$  (5.26)

จะได้  $\tau b \Delta x = \sum \sigma_{y_1} \Delta A - \sum \sigma_{y_2} \Delta A$  (5.27)

ความเค้นอัดแนว af ;  $\sigma_{y_1} = \frac{M_1 y}{I}$  (5.28)

ความเค้นอัดแนว be ;  $\sigma_{y_2} = \frac{M_2 y}{I}$  (5.29)

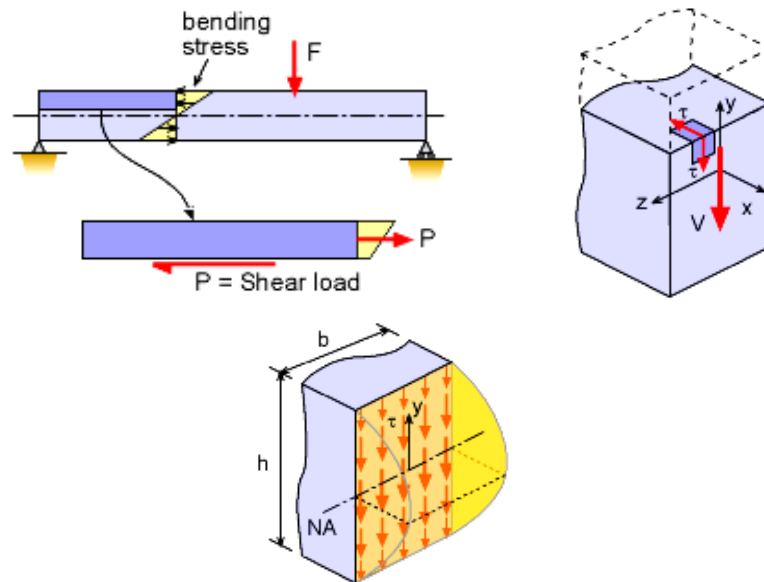
แรงเฉือนในแนวราบ ;  $\tau b \Delta x = \sum \frac{M_1 y}{I} \Delta A - \sum \frac{M_2 y}{I} \Delta A$  (5.30)

$$\tau b \Delta x = \frac{(M_1 - M_2)}{I} \sum y \Delta A$$
 (5.31)

$$\tau b \Delta x = \frac{\Delta M}{\Delta x} \times \frac{\sum y \Delta A}{I b}$$
 (5.32)

$$\tau b \Delta x = \frac{V}{I b} A \bar{Y}$$
 (5.33)

เมื่อ  $\Delta M / \Delta x$  เท่ากับแรงเฉือน  $V$  และ  $\sum y \Delta A$  เท่ากับ  $A \bar{Y}$  ซึ่งเป็นค่าของโมเมนต์ของพื้นที่เหนือระดับที่เกิดความเค้นเฉือนแนวราบ ค่าความเค้นเฉือนจะมีค่ามากที่สุดและเมื่อ  $A \bar{Y}$  มีค่ามากที่สุดซึ่งจะอยู่ที่ระนาบสะเทินดังแสดงในภาพที่ 5.16 ดังนั้นความเค้นเฉือนสูงสุดจึงหาได้จากสมการดังต่อไปนี้



ภาพที่ 5.16 แรงเฉือนแนวราบบนหน้าตัดคาน

ที่มา : Kurt Gramoll. n.d.

$$\text{ความเค้นเฉือนแนวราบ ; } \tau_{\max} = \frac{V}{Ib} \int ydA \quad (5.34)$$

$$\tau_{\max} = \frac{V}{Ib} \int yb(dy) = \frac{V}{I} \left[ \frac{y^2}{2} \right]_y^{h/2} \quad (5.35)$$

$$\tau_{\max} = \frac{V}{2I} \left[ \frac{h^2}{4} - y^2 \right] \quad (5.36)$$

การหาค่าความเค้นเฉือนแนวราบของคานสี่เหลี่ยมและคานกลมดังแสดงในภาพที่ 5.16 จะต้องทราบระยะห่างระหว่างจุดศูนย์กลางท่่างหน้าตัดถึงแนวระนาบสะเทิน จากนั้นจึงแทนค่าคุณสมบัติหน้าตัดในสมการความเค้นเฉือนแนวราบต่อไป กรณีคานหน้าตัดรูปสี่เหลี่ยมสามารถหาค่าความเค้นเฉือนแนวราบสูงสุดได้จากสมการดังต่อไปนี้

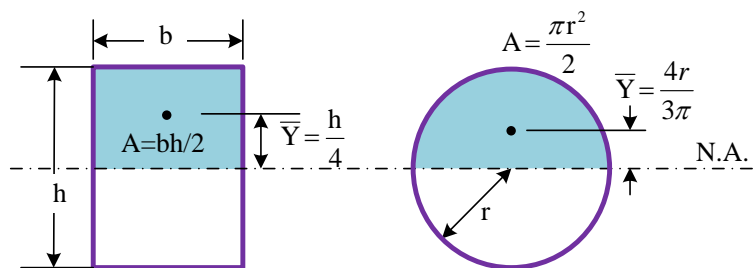
$$\text{ความเค้นเฉือนแนวราบ ; } \tau_{\max} = \frac{V}{Ib} \times \frac{bh}{2} \times \frac{h}{4} = \frac{V}{(1/12)bh^3} \times \frac{h^2}{8} \quad (5.37)$$

$$\tau_{\max} = \frac{3V}{2bh} \quad (5.38)$$

$$\tau_{\max} = \frac{3V}{2A} \quad (5.39)$$

หรือ  $\tau_{\max} = \frac{VQ}{Ib} \quad (5.40)$

เมื่อ  $Q = \frac{bh}{2} \times \frac{h}{4}$  หรือ  $A \bar{Y}$  (5.41)



(ก) หน้าตัดสี่เหลี่ยม

(ข) หน้าตัดวงกลม

ภาพที่ 5.17 หน้าตัดคานรับความเค้นเฉือนแนวราบ

ที่มา : จีรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

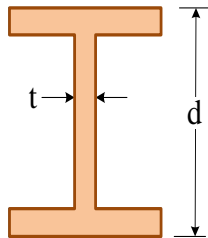
กรณีคานหน้าตัดรูปวงกลมสามารถหาค่าความเค้นเฉือนแนวราบสูงสุดได้จากสมการดังต่อไปนี้

$$\text{ความเค้นเฉือนแนวราบ ; } \tau_{\max} = \frac{V}{12r} \times \frac{\pi r^2}{2} \times \frac{4r}{3\pi} = \frac{4V}{3\pi r^2} \quad (5.42)$$

$$\text{หรือ} \quad \tau_{\max} = \frac{4V}{3A} \quad (5.43)$$

กรณีคานหน้าตัดรูปตัวไอที่มีความลึก  $d$  และความหนาของแผ่นตั้ง  $t$  ดังแสดงในภาพที่ 5.18 สามารถหาค่าความเค้นเฉือนแนวราบสูงสุดได้จากสมการดังต่อไปนี้

$$\text{ความเค้นเฉือนแนวราบ ; } \tau_{\max} = \frac{3V}{2td} \quad (5.44)$$



ภาพที่ 5.18 คานรูปตัวไอ

ที่มา : จีรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

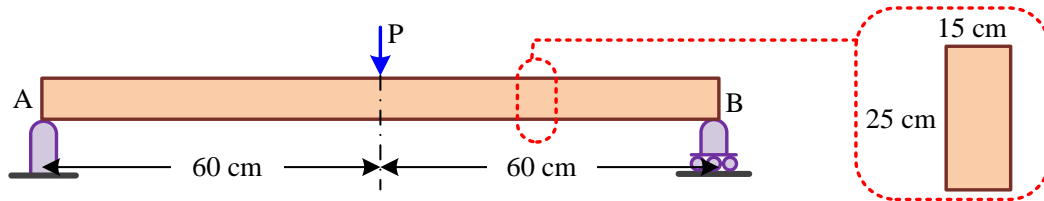
ตัวอย่างการวิบัติของคานไม้ประกอบหน้าตัดรูปตัวไอเนื่องจากความเค้นเฉือนแนวราบแสดงในภาพที่ 5.19 จากภาพเมื่อคานแอ่นตัวจนวิบัติก็จะเกิดรอยแตกกว้างเป็นแนวยาวบริเวณปลายคาน รอยร้าวดังกล่าวเกิดจากความเค้นเฉือนแนวราบมีค่ามากกว่าความเค้นที่เนื้อไม้รับได้



ภาพที่ 5.19 การวิบัติของคานไม้ประกอบรูปตัวไอเนื่องจากความเค้นเฉือนแนวราบ

ที่มา : Construction with Bamboo. 2005

ตัวอย่างที่ 5.4 คาน AB มีขนาดหน้าตัด  $15 \times 25$  cm และมีน้ำหนัก  $P$  กระทำที่กึ่งกลางคานดังแสดงในภาพที่ 5.20 จงหาน้ำหนักสูงสุดที่คานสามารถรับได้อย่างปลอดภัย กำหนดให้ความเค้นดัดที่คานรับได้เท่ากับ  $80 \text{ kg/cm}^2$  และความเค้นเฉือนที่รับได้เท่ากับ  $12.8 \text{ kg/cm}^2$



ภาพที่ 5.20 คานช่วงเดียวธรรมดา มีน้ำหนักกระทำกึ่งกลางคาน

ที่มา : จีรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

วิธีทำ

$$\text{พื้นที่หน้าตัดคาน ;} \quad A = bh = 15 \times 25 = 375 \text{ cm}^2$$

$$\begin{aligned} \text{โมเมนต์ขงหน้าตัดคาน ;} \quad Z &= \frac{bh^2}{6} \\ &= \frac{15 \times 25^2}{6} = 1,562.5 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{โมเมนต์ดัดสูงสุดในคาน ;} \quad M &= \frac{PL}{4} \\ &= \frac{P \times 120}{4} = 30 \times P \text{ kg-cm} \end{aligned}$$

$$\text{แรงเฉือนสูงสุดในคาน ;} \quad V = \frac{P}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{ความเค้นเฉือนในคาน ;} \quad \tau_{\max} &= \frac{3V}{2A} \\ &= \frac{3P}{4(15 \times 25)} = \frac{P}{500} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ความเค้นเฉือนใช้งาน ;} \quad P_1 &= 500 \tau_{\max} \\ &= 500 \times 12.8 = 6,400 \text{ kg} \end{aligned}$$

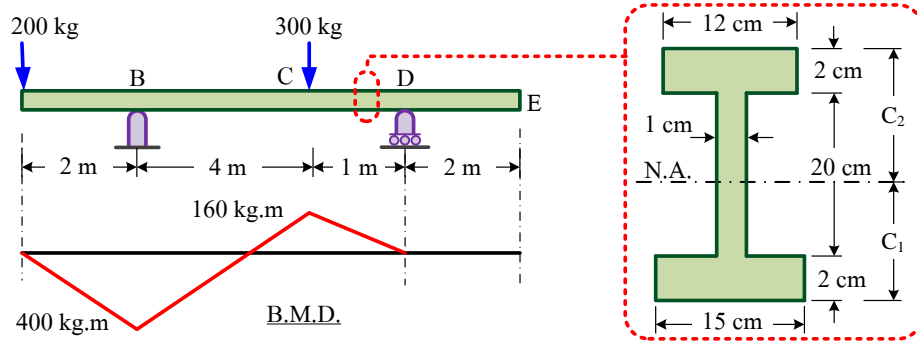
$$\text{ความเค้นอัดในคาน ;} \quad \sigma_{\max} = \frac{M}{Z} = \frac{30 \times P}{1,562.5}$$

$$\begin{aligned} \text{ความเค้นดัด ;} \quad P_2 &= \frac{1562.5 \sigma_{\max}}{30} \\ &= \frac{1562.5 \times 80}{30} = 4,167 \text{ kg} \end{aligned}$$

น้ำหนักที่คานรับได้อย่างปลอดภัยมีค่าเท่ากับ 4,167 kg

ตอบ

ตัวอย่างที่ 5.5 คานหน้าตัดรูปตัวไอรับน้ำหนักดังแสดงในภาพที่ 5.21 จงหาความเค้นดึงสูงสุดและความเค้นอัดสูงสุดที่เกิดขึ้นบนหน้าตัดคานที่จุด B และจุด C



ภาพที่ 5.21 คานหน้าตัดรูปตัวไอรับน้ำหนักแบบจุด

ที่มา : จีรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

วิธีทำ

แรงปฏิกิริยาฐานรองรับ B ;  $R_B = 340 \text{ kg}$

แรงปฏิกิริยาฐานรองรับ D ;  $R_D = 160 \text{ kg}$

โมเมนต์คัตที่จุด B ;  $M_B = -200 \times 2 = -400 \text{ kg-m}$

โมเมนต์คัตที่จุด C ;  $M_C = 160 \times 1 = 160 \text{ kg-m}$

ตำแหน่งของระนาบสะเทินของหน้าตัดคาน

$$C_1 = \frac{(12 \times 2) \times 23 + (1 \times 20) \times 12 + (15 \times 2) \times 1}{(12 \times 2) + (1 \times 20) + (15 \times 2)}$$

$$= 11.108 \text{ cm}$$

$$C_2 = 24 - 11.108 = 12.892 \text{ cm}$$

โมเมนต์ความเฉื่อยหน้าตัด ;  $I = \left( \left( \frac{12 \times 2^3}{12} \right) + (12 \times 2 \times (12.88 - 1)^2) \right) + \left( \left( \frac{1 \times 20^3}{12} \right) + (1 \times 20 \times (12.88 - 12)^2) \right) + \left( \left( \frac{15 \times 3^3}{12} \right) + (15 \times 3 \times (11.12 - 1)^2) \right)$

$$= 8,716.12 \text{ cm}^4$$

ความเค้นดึงสูงสุดที่จุด B ;  $\sigma_t = \frac{M_B C_2}{I}$

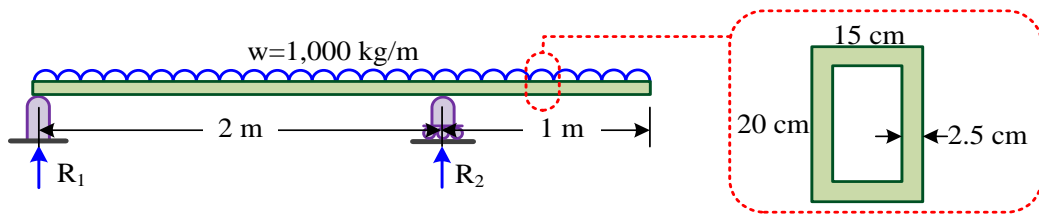
$$= \frac{(400 \times 100) \times 12.892}{8,716.12}$$

$$= 59.16 \text{ kg/cm}^2 \quad \text{ตอบ}$$

ความเค้นอัดสูงสุดที่จุด B ;  $\sigma_c = \frac{M_B C_1}{I}$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(400 \times 100) \times 11.108}{8,716.12} \\
 &= 50.98 \text{ kg/cm}^2 \quad \text{ตอบ} \\
 \text{ความเค้นดึงสูงสุดที่จุด C ; } \quad \sigma_t &= \frac{M_c C_1}{I} \\
 &= \frac{(160 \times 100) \times 12.892}{8,716.12} \\
 &= 23.67 \text{ kg/cm}^2 \quad \text{ตอบ} \\
 \text{ความเค้นอัดสูงสุดที่จุด C ; } \quad \sigma_c &= \frac{M_c C_2}{I} \\
 &= \frac{(160 \times 100) \times 11.108}{8,716.12} \\
 &= 20.39 \text{ kg/cm}^2 \quad \text{ตอบ}
 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 5.6 จงคำนวณหาความเค้นเฉือนแนวราบสูงสุดที่เกิดขึ้นในคานกลางรูปสี่เหลี่ยมมีพื้นที่หน้าตัดและน้ำหนักกระทำแผ่กระจายสม่ำเสมอแสดงในภาพที่ 5.22



ภาพที่ 5.22 คานกลางสี่เหลี่ยมรับน้ำหนักแผ่กระจายสม่ำเสมอ  
ที่มา : จีรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

วิธีทำ

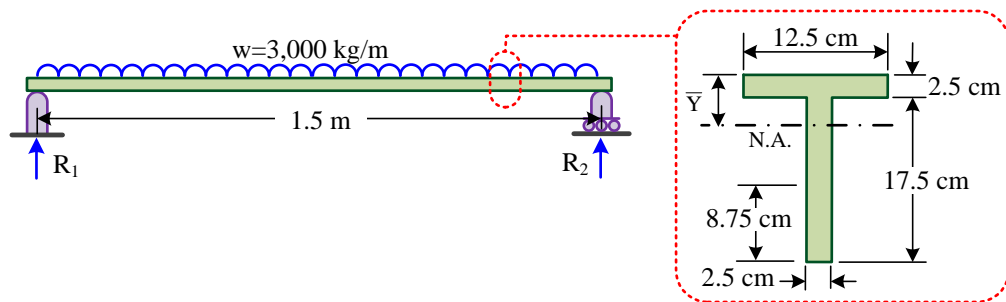
$$\begin{aligned}
 \text{แรงปฏิกิริยาที่ฐานรองรับ ; } \quad R_2 &= 2,250 \text{ kg} \\
 \text{แรงปฏิกิริยาที่ฐานรองรับ ; } \quad R_1 &= 750 \text{ kg} \\
 \text{โมเมนต์ความเฉื่อย ; } \quad I_{N-A} &= I_{\text{ตัน}} - I_{\text{ส่วนกลาง}} \\
 &= \left[ \frac{1}{12} (15 \times 20^3) \right] - \left[ \frac{1}{12} (10 \times 15^3) \right] \\
 &= 7,187.5 \text{ cm}^4 \\
 \bar{A} \bar{Y} &= A_1 \bar{Y}_1 - A_2 \bar{Y}_2 \\
 &= (15 \times 10 \times 5) - (10 \times 7.5 \times 3.75) \\
 &= 468.75 \text{ cm}
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \text{ความหนาในแนวตั้ง ; } b &= 2.5+2.5 = 5 \text{ cm} \\
 \text{แรงเฉือนสูงสุดที่เกิดกับคาน ; } V_{\max} &= 1,250 \text{ kg} \\
 \text{ความเค้นเฉือนแนวราบสูงสุด ; } \tau_{\max} &= \frac{V}{Ib} A \bar{Y} \\
 &= \frac{1,250 \times 468.75}{7,187.5 \times 5} \\
 &= 16.30 \text{ kg/cm}^2
 \end{aligned}$$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 5.7 คานที่มีพื้นที่หน้าตัดรูปตัวทีและรับน้ำหนักกระจายสม่ำเสมอแสดงในภาพที่ 5.23 จงคำนวณหาความเค้นเฉือนแนวราบสูงสุดที่เกิดขึ้นในคานนี้



ภาพที่ 5.23 คานหน้าตัดรูปตัวทีรับน้ำหนักแผ่กระจายสม่ำเสมอ  
ที่มา : จีรวัดณ์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
 \text{แรงเฉือนสูงสุด ; } V_{\max} &= \frac{wL}{2} \\
 &= \frac{3,000 \times 1.5}{2} \\
 &= 2,250 \text{ kg}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ระยะแกนสะเทิน ; } \bar{Y} &= \frac{(12.5 \times 2.5 \times 1.25) + (17.5 \times 2.5 \times 11.25)}{(12.5 \times 2.5) + (17.5 \times 2.5)} \\
 &= 7.08 \text{ cm}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{โมเมนต์ความเฉื่อย ; } I_{N-A} &= (I + Ad^2)_1 + (I + Ad^2)_2 \\
 &= \left( \left( \frac{1.25 \times 2.5^3}{12} \right) \times (12.5 \times 2.5 \times 5.83^2) \right) + \left( \left( \frac{2.5 \times 17.5^3}{12} \right) \times (17.5 \times 2.5 \times 4.17^2) \right) \\
 &= 2,955.73 \text{ cm}^4
 \end{aligned}$$

$$A \bar{Y} = A_1 Y_1 = A_2 Y_2$$

$$= (2.5 \times 12.92) \times \frac{12.92}{2}$$

$$= 208.66 \text{ cm}^3$$

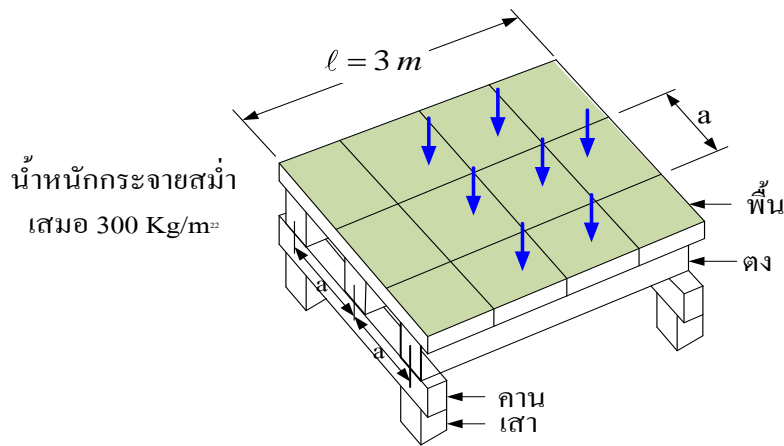
ความเค้นเฉือนสูงสุด ;  $\tau_{\max} = \frac{VA\bar{Y}}{Ib}$

$$= \frac{2,250 \times 208.66}{2,955.73 \times 2.5}$$

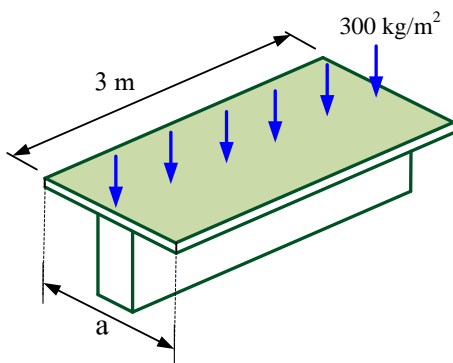
$$= 63.54 \text{ kg/cm}^2$$

ตอบ

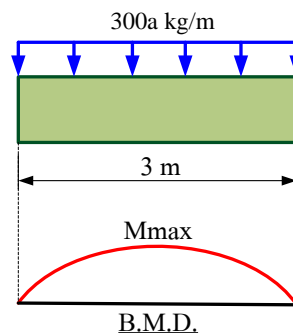
ตัวอย่างที่ 5.8 พื้นอาคารทำจากไม้รับน้ำหนักกระจายสม่ำเสมอ  $300 \text{ kg/m}^2$  ดังแสดงในภาพที่ 5.24 จงหาระยะห่างระหว่างคานไม้ที่ทำให้พื้นห้องรับน้ำหนักได้อย่างปลอดภัย กำหนดให้คานไม้มีขนาดกว้าง  $5 \times 10 \text{ cm}$  ยาว  $3 \text{ m}$  ความเค้นดัดสูงสุดที่ไม้รับได้เท่ากับ  $80 \text{ kg/cm}^2$



(ก) พื้นไม้อาคาร



(ข) น้ำหนักพื้นถ่ายลงสู่คาน



(ค) แผนภาพ โมเมนต์ดัด

ภาพที่ 5.24 คานไม้รับแผ่นพื้น

ที่มา : จีรวัดน์ วิมุตติสุขวิทยา. 2556

## วิธีทำ

กำหนดให้ตงวางห่างกันเป็นระยะ  $a$  ทำให้น้ำหนักกระทำบนตงต่อหนึ่งหน่วยความยาว  
มีค่า  $\omega = 300 a$  kg/m

$$\begin{aligned} \text{โมเมนต์สูงสุด ; } M_{\max} &= \frac{\omega l^2}{8} \\ &= \frac{300a \times 3^2}{8} \\ &= 337.5 a \text{ kg-m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{โมดูลัสของหน้าตัดตง ; } Z &= \frac{bh^2}{6} \\ &= \frac{5 \times 10^2}{6} \\ &= 83.33 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

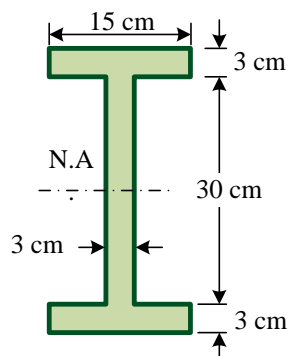
$$\begin{aligned} \text{ความเค้นดัดสูงสุดในแกน ; } \sigma_{\max} &= \frac{M}{Z} \\ 80 &= \frac{337.5a \times 100}{83.33} \end{aligned}$$

$$\text{ระยะห่างระหว่างตง ; } a = 0.1975 \text{ m หรือ } 19.75 \text{ cm}$$

เลือกใช้ระยะห่างระหว่างตงเท่ากับ 19 cm

ตอบ

ตัวอย่างที่ 5.9 จงคำนวณความเค้นเฉือนสูงสุดของแกนหน้าตัดรูปตัว I ดังแสดงในภาพที่ 5.25 โดยเปรียบเทียบค่าความเค้นเฉือนที่คำนวณได้ระหว่างความเค้นเฉือนแนวตั้งและความเค้นเฉือนแนวราบ



ภาพที่ 5.25 แกนรูปตัวไอ

ที่มา : จีรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

## วิธีทำ

$$\begin{aligned} \text{โมเมนต์ความเฉื่อย ;} \quad I &= 2\left(\frac{15 \times 3^3}{12}\right) + (3 \times 15 \times 16.5^2) + \left(\frac{3 \times 30^3}{12}\right) \\ &= 31,320 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q &= A \bar{Y} \\ &= [(3 \times 15) \times 16.5] + (15 \times 3) \times \left(\frac{15}{2}\right) \\ &= 1,080 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ความเค้นเฉือนแนวราบ} \quad \tau_{\max} &= \frac{VQ}{Ib} \\ &= \frac{1,080 \times V}{31,320 \times 3} \\ &= 0.01149V \text{ kg/cm}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ความเค้นเฉือนแนวตั้ง} \quad \tau_{\max} &= \frac{V}{b_1 t} \\ &= \frac{V}{(30 \times 3) + (2 \times 15 \times 3)} \\ &= 0.00556V \text{ kg/cm}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ความแตกต่าง} &= \frac{(0.01149 - 0.00556)}{0.01149} \times 100 \\ &= 51.61 \% \end{aligned}$$

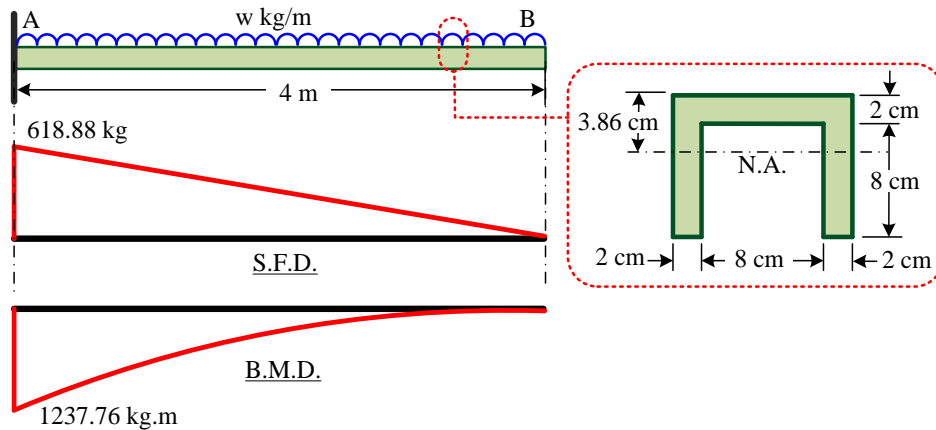
ความเค้นเฉือนแนวราบและแนวตั้งต่างกันคิดเป็นร้อยละ 51.61

ตอบ

**ตัวอย่างที่ 5.10** คานยื่น AB มีหน้าตัดดังแสดงในภาพที่ 5.26 ยาว 4 m รับน้ำหนักบรรทุกแผ่กระจายสม่ำเสมอ ถ้าความเค้นดัดที่ยอมให้มีค่าเท่ากับ  $1,500 \text{ kg/cm}^2$  จงคำนวณหาความเค้นเฉือนสูงสุดที่เกิดขึ้นบนคาน

## วิธีทำ

$$\begin{aligned} \text{โมเมนต์ความเฉื่อย ;} \quad I &= \left[ \frac{12 \times 2^3}{12} + (12 \times 2)(3.86 - 1)^2 \right] \\ &\quad + 2 \left[ \frac{2 \times 8^3}{12} + (2 \times 8)(6 - 3.86)^2 \right] \\ &= 521.52 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$



ภาพที่ 5.26 คานยื่นรับน้ำหนักแผ่กระจายสม่ำเสมอ

ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

โมเมนต์สูงสุด ; 
$$M_{\max} = \frac{wL^2}{2}$$

$$= \frac{w \times 4^2}{2}$$

$$= 8w \text{ kg-m หรือ } 800w \text{ kg-cm}$$

ความเค้นดัดสูงสุด ; 
$$\sigma_{\max} = \frac{Mc_1}{I}$$

$$1,500 = \frac{800w \times (10 - 3.68)}{521.52}$$

$$w = 154.72 \text{ kg/m}$$

แรงเฉือนสูงสุด ; 
$$V_{\max} = wL$$

$$= 154.72 \times 4 = 618.88 \text{ kg}$$

$$Q = A\bar{Y}$$

$$= 2 \left[ (10 - 3.86) \times 2 \times \frac{(10 - 3.68)}{2} \right]$$

$$= 75.4 \text{ cm}^3$$

ความเค้นเฉือนแนวราบ ; 
$$\tau_{\max} = \frac{VQ}{Ib}$$

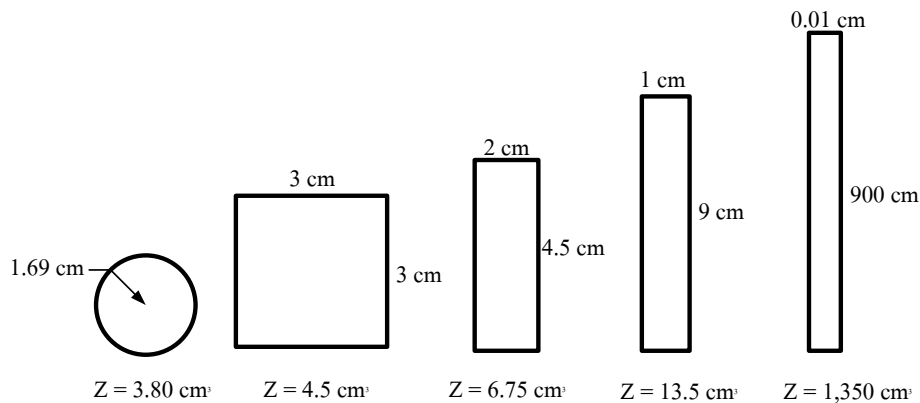
$$= \frac{618.88 \times 75.4}{521.52 \times 4}$$

$$= 22.37 \text{ kg/cm}^2$$

ตอบ

รูปร่างของหน้าตัดคานมีผลต่อการต้านทานความเค้นดัดและความเค้นเฉือนที่เกิดขึ้นในคาน ถ้าคานทำจากวัสดุที่มีความแข็งแรงมากโดยสามารถต้านทานความเค้นดัดได้ใกล้เคียงกับความเค้นอัดก็ควรเลือกใช้หน้าตัดที่มีลักษณะสมมาตร แต่ถ้าคานทำด้วยวัสดุที่มีความสามารถต้านทานความเค้นดัดแตกต่างกับความเค้นอัดก็อาจเลือกใช้หน้าตัดที่มีรูปร่างแตกต่างออกไปขึ้นอยู่กับแรงดัดและแรงอัดที่เกิดขึ้นในคานนั้นๆ เช่น คานคอนกรีตเสริมเหล็กหน้าตัดรูปตัวที เป็นต้น นอกจากคุณสมบัติด้านความแข็งแรงของวัสดุแล้วยังต้องคำนึงถึงน้ำหนักบรรทุกและน้ำหนักของคานเองด้วย เนื่องจากคานที่ทำจากวัสดุต่างชนิดกันจะทำให้คานมีน้ำหนักแตกต่างกันด้วย ดังนั้นการเลือกใช้วัสดุให้เหมาะสมจึงมีผลต่อทั้งคุณสมบัติด้านความแข็งแรงและน้ำหนักของคาน นอกจากนั้นรูปร่างของหน้าตัดคานก็ส่งผลถึงคุณสมบัติในการรับแรง รูปร่างคานที่มีค่าโมเมนต์ขงหน้าตัดมากจะสามารถต้านทาน โมเมนต์ดัดได้มากตามไปด้วย หากพิจารณาคานหน้าตัดสี่เหลี่ยมกว้าง  $b$  สูง  $h$  ซึ่งสามารถหาค่าโมเมนต์ขงหน้าตัด  $Z$  ได้ดังสมการต่อไปนี้ (สิริศักดิ์ ปโยชรสิริ. 2549 : 212-213)

$$Z = \frac{bh^2}{6} = \frac{hA}{6} \quad (5.45)$$



ภาพที่ 5.27 หน้าตัดที่มีแกนสะเทินอยู่กึ่งกลางของความสูง

ที่มา : สิริศักดิ์ ปโยชรสิริ. 2549 : 217

จากสมการด้านบนพบว่าหน้าตัดคานที่มีพื้นที่เท่ากันแต่มีความสูง  $h$  เพิ่มมากขึ้นและความกว้าง  $b$  ลดลงจะทำให้ค่าโมเมนต์ขงหน้าตัด  $Z$  เพิ่มขึ้นตามไปด้วยดังแสดงในภาพที่ 5.27 ส่งผลทำให้คานสามารถรับน้ำหนักได้มากขึ้น อย่างไรก็ตามการที่คานมีความกว้าง  $b$  น้อยเกินไปเมื่อเทียบกับความสูง  $h$  ก็จะส่งผลเสียคือทำให้คานรับน้ำหนักได้ลดลงเนื่องจากเกิดการโก่งด้านข้าง (Lateral Buckling)

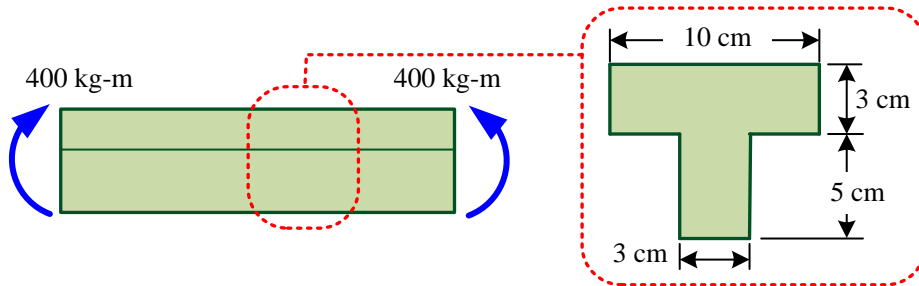
## สรุปท้ายบท

คานเมื่อมีน้ำหนักกระทำก็จะเกิดโมเมนต์คดและแรงเฉือนขึ้นส่งผลให้คานแอ่นตัว การแอ่นตัวของคานจะทำให้คานนั้นเกิดความเค้นดึงจากส่วนที่ยึดออกและความเค้นอัดจากส่วนที่หุดเข้า ความเค้นดึงและความเค้นอัดจะเกิดขึ้นพร้อมกันเรียกว่า ความเค้นคด ซึ่งเกิดรอบระนาบสะเทินของหน้าตัดคาน ความเค้นคดจะเกิดขึ้นมากบริเวณผิวบนและผิวล่างของหน้าตัดคานโดยกระจายตัวแบบเชิงเส้นเมื่อคานอยู่ในสภาวะยึดหยุ่น ความเค้นคดจะมีค่าเป็นศูนย์บริเวณระนาบสะเทิน โมเมนต์คดนอกจากจะทำให้เกิดความเค้นดึงและความเค้นอัดในคานแล้วยังทำให้เกิดความเค้นเฉือนแนวราบอีกด้วย ความเค้นเฉือนแนวราบจะเกิดขึ้นในลักษณะที่ทำให้คานนิกขาดออกจากกันเป็นแนวยาวในแนวราบ เช่น การเอาคานแผ่นบางมาซ้อนกันโดยไม่ได้ยึดติดกัน เมื่อมีน้ำหนักกระทำก็จะทำให้คานนั้นแอ่นตัวลง คานแผ่นบางเหล่านั้นก็จะเลื่อนออกจากกันในแนวราบสามารถสังเกตได้ที่ปลายคาน แต่ถ้าคานถูกยึดแน่นจนเป็นเนื้อเดียวกันเมื่อแอ่นตัวก็จะออกแรงต้านการเคลื่อนที่ในแนวราบนั้นไว้เพื่อให้คานคงรูปเดิมไว้ การที่คานแผ่นบางถูกยึดแน่นและออกแรงต้านนี้แสดงให้เห็นว่ามีความเค้นเฉือนแนวราบเกิดขึ้นในคาน เป็นต้น ความเค้นเฉือนแนวราบจะมีค่าเป็นศูนย์บริเวณผิวบนและผิวล่างของหน้าตัดคานโดยจะมีค่ามากที่สุดบริเวณระนาบสะเทิน

รูปร่างของหน้าตัดคานมีผลต่อการต้านทานความเค้นคดและความเค้นเฉือนที่เกิดขึ้นในคาน ถ้าคานทำจากวัสดุที่มีความแข็งแรงมากโดยสามารถต้านทานความเค้นดึงได้ใกล้เคียงกับความเค้นอัดก็ควรเลือกใช้หน้าตัดที่มีลักษณะสมมาตร แต่ถ้าคานทำด้วยวัสดุที่มีความสามารถต้านทานความเค้นดึงแตกต่างกับความเค้นอัดก็อาจเลือกใช้หน้าตัดที่มีรูปร่างแตกต่างออกไปขึ้นอยู่กับแรงดึงและแรงอัดที่เกิดขึ้นในคาน นอกจากนี้คุณสมบัติด้านความแข็งแรงของวัสดุแล้วยังต้องคำนึงถึงน้ำหนักบรรทุกและน้ำหนักของคานเองด้วย เนื่องจากคานที่ทำจากวัสดุต่างชนิดกันจะทำให้คานมีน้ำหนักแตกต่างกันด้วย นอกจากนี้รูปร่างของหน้าตัดคานก็ส่งผลถึงคุณสมบัติในการรับแรง รูปร่างคานที่มีค่าโมดูลัสของหน้าตัดมากจะสามารถต้านทานโมเมนต์คดได้มากตามไปด้วย โดยทั่วไปคานมีความลึกมากจะส่งผลดีต่อค่าโมดูลัสของหน้าตัดและทำให้คานนั้นสามารถรับน้ำหนักได้ดี อย่างไรก็ตามการที่คานมีความกว้างน้อยเกินไปเมื่อเทียบกับความสูงก็จะส่งผลเสียคือทำให้คานรับน้ำหนักได้ลดลงเนื่องจากเกิดการโก่งด้านข้าง

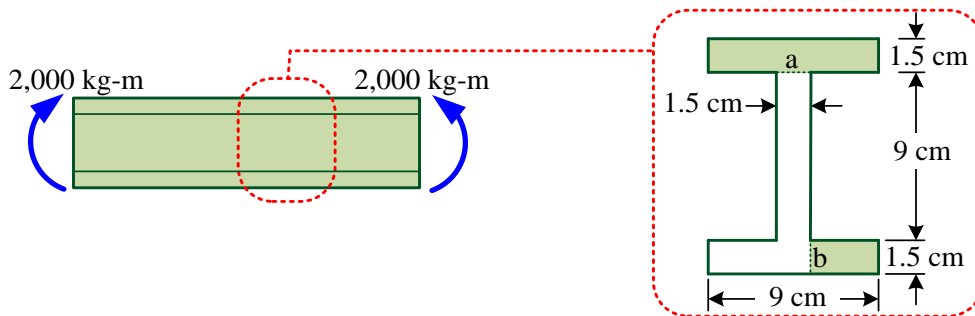
## แบบฝึกหัดท้ายบท

1. ท่อนเหล็กหล่อหน้าตัดรูปตัวทีรับ โมเมนต์คดขนาด  $400 \text{ kg-m}$  ดังแสดงในภาพที่ 5.28 จงหาความเค้นดึงและความเค้นอัดสูงสุดที่เกิดขึ้น กำหนดให้ค่าโมดูลัสยืดหยุ่นของเหล็กหล่อ  $E = 1.75 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$



ภาพที่ 5.28 ท่อนเหล็กหล่อรูปตัวทีรับ โมเมนต์คด  
ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

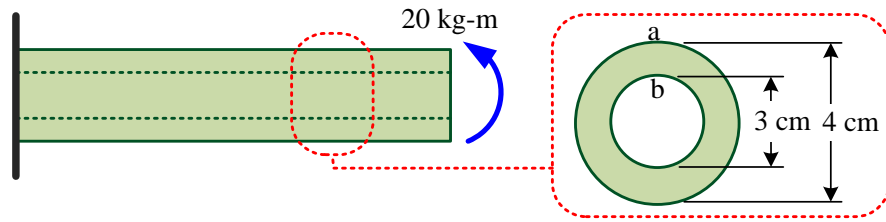
2. คานหน้าตัดรูปตัวไอรับ โมเมนต์คด  $2,000 \text{ kg-m}$  ดังแสดงในภาพที่ 5.29 จงหาแรงเฉือนแนวราบที่กระทำบริเวณปีกคานตำแหน่ง a และ b



ภาพที่ 5.29 คานหน้าตัดรูปตัวไอรับ โมเมนต์คด  
ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

3. คานยื่นหน้าตัดรูปวงกลมกลวงรับ โมเมนต์คดที่ปลายคาน  $20 \text{ kg-m}$  ดังแสดงในภาพที่ 5.30 จงหาความเค้นดัดสูงสุดที่เกิดกับหน้าตัดคานที่จุด a และจุด b ตามลำดับ

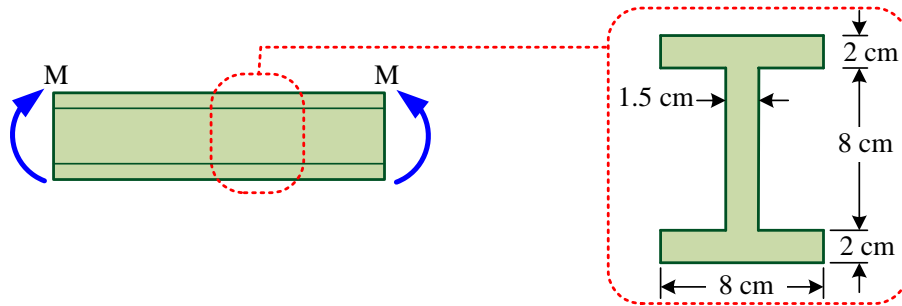




ภาพที่ 5.30 คานยื่นหน้าตัดรูปวงกลมกลวงรับโมเมนต์ดัด

ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

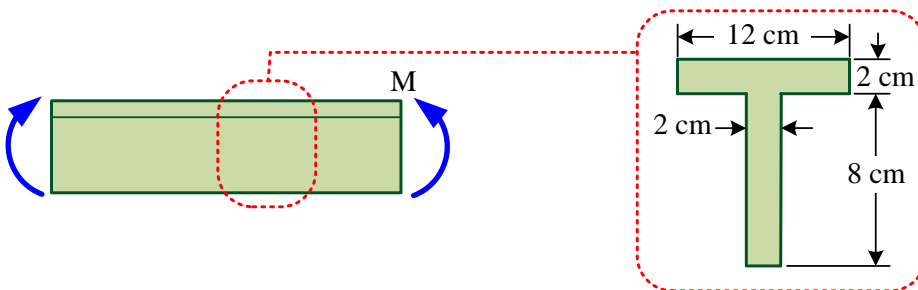
4. คานหน้าตัดรูปตัวไอรับโมเมนต์ดัดดังแสดงในภาพที่ 5.31 จงหาโมเมนต์ดัดสูงสุดที่คานนี้สามารถรับได้อย่างปลอดภัย กำหนดให้ความเค้นดัดที่ยอมให้เท่ากับ  $2,500 \text{ kg/cm}^2$



ภาพที่ 5.31 คานหน้าตัดรูปตัวไอรับโมเมนต์ดัด

ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

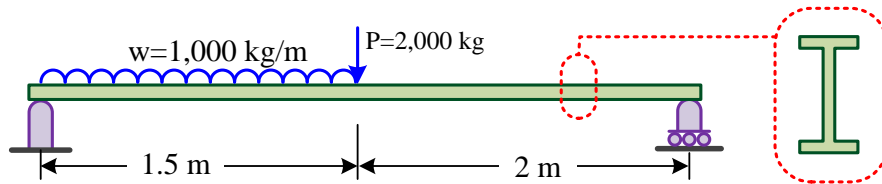
5. คานหน้าตัดรูปตัวทีที่รับโมเมนต์ดัดดังแสดงในภาพที่ 5.32 จงหาโมเมนต์ดัดสูงสุดที่คานนี้สามารถรับได้อย่างปลอดภัย กำหนดให้ความเค้นดัดที่ยอมให้เท่ากับ  $1,450 \text{ kg/cm}^2$



ภาพที่ 5.32 คานหน้าตัดรูปตัวทีที่รับโมเมนต์ดัด

ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

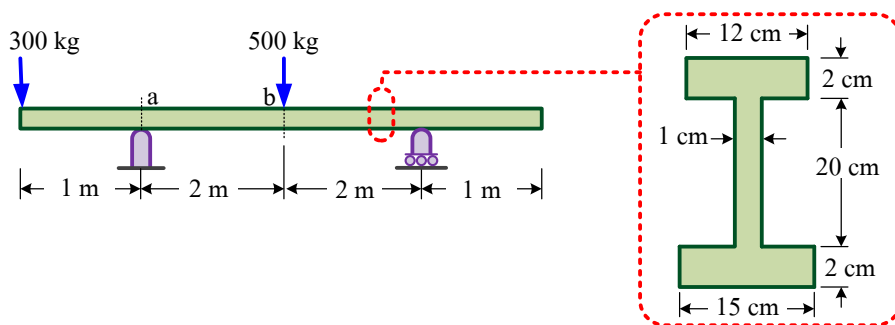
6. คานช่วงเดียวธรรมดาหน้าตัดรูปตัวไอรับน้ำหนักกระทำดังแสดงในภาพที่ 5.33 จงหาค่าโมเมนต์หน้าตัด  $Z$  ของคานนี้พร้อมทั้งออกแบบแผ่นเหล็กทั้ง 3 แผ่นที่นำมาประกอบกันเป็นหน้าตัดคาน กำหนดให้ความเค้นอัดที่ยอมให้เท่ากับ  $1,200 \text{ kg/cm}^2$



ภาพที่ 5.33 คานหน้าตัดรูปตัวไอรับน้ำหนัก

ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

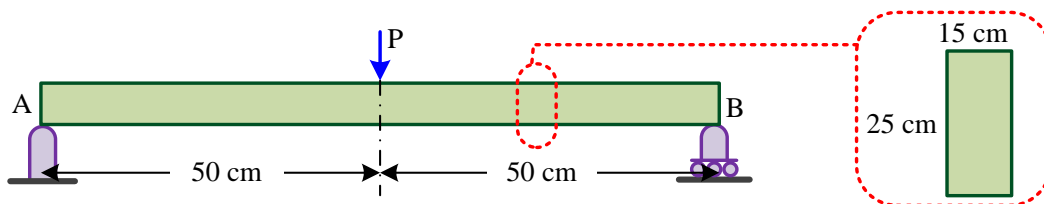
7. คานหน้าตัดรูปตัวไอรับน้ำหนักดังแสดงในภาพที่ 5.34 จงหาค่าความเค้นดัดสูงสุดที่เกิดขึ้นกับหน้าตัดคานที่จุด a และจุด b ตามลำดับ



ภาพที่ 5.34 คานหน้าตัดรูปตัวไอรับน้ำหนักแบบจุด

ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

8. คานช่วงเดียวธรรมดาขนาดหน้าตัด  $15 \times 25 \text{ cm}$  และมีน้ำหนัก  $5,000 \text{ kg}$  กระทำที่กึ่งกลางคาน ดังแสดงในภาพที่ 5.35 จงหาความเค้นดึงและความเค้นอัดสูงสุดที่เกิดกับคานนี้



ภาพที่ 5.35 คานช่วงเดียวรับน้ำหนักกระทำกึ่งกลางคาน

ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

## เอกสารอ้างอิง

- มนตรี พิรุณเกษตร. (2544). **กลศาสตร์ของวัสดุ**. กรุงเทพฯ : วิทยพัฒน์.
- วินิต ช่อวิเชียร วรนิติ ช่อวิเชียร และวรสวรรษัฐ ช่อวิเชียร. (2548). **กำลังวัสดุ/กลศาสตร์วัสดุ**.  
กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- สมโพธิ วิวิธเกตุรวงศ์. (2542). **กลศาสตร์ของวัสดุ**. กรุงเทพฯ : ฟิสิกส์เซ็นเตอร์การพิมพ์.
- สุกิจ นามพิชญ์. (2541). **ความแข็งแรงของวัสดุ**. กรุงเทพฯ : ซีเอ็ดดูเคชั่น.
- สิทธิชัย แสงอาทิตย์. (2549). **กลศาสตร์ของวัสดุ**. นครราชสีมา : สาขาวิชาวิศวกรรมโยธา  
สำนักวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี.
- สิริศักดิ์ ปโยธรสิริ. (2549). **กลศาสตร์วัสดุ**. พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพฯ : ว.เพ็ชรสกุล.
- Construction with Bamboo. (2005). **Glued Bamboo**. Retrieved June 25, 2013, from  
<http://www.conbam.info/pagesEN/leimbambus.html>.
- Ferdinand P. Beer, Russell Johnston, John T. DeWolf and David F. Mazurek. (2012).  
**Mechanics of Materials**. New York : Mc Graw Hill.
- James M. Gere and Barry J. Goodno. (2012). **Mechanics of Materials**. Stamford : Cengage  
Learning.
- James M. Gere and Stephen P. Timoshenko. (1991). **Mechanics of Materials**. New York :  
Springer Science Business Media. B.V.
- John Case, Lord Chilver and CarL T. F. Ross. (1999). **Strength of Materials and Structures**.  
London : Arnold.
- Joseph E. Shigley. (2004). **Mechanical Engineering Design**. New York : McGraw-Hill.
- Hearn E. J. (2000). **Mechanics of Materials 1: An Introduction to the Mechanics of Elastic  
and Plastic Deformation of Solids and Structural Materials**. Oxford : Butterworth-  
Heinemann.
- Kurt Gramoll. (n.d.). **Bending Strain and Stress**. Retrieved June 25, 2013, from  
<http://www.ecourses.ou.edu>.
- Timoshenko S. (1940). **Strength of Materials : Part I Elementary Theory and Problems**.  
New York : D. Van Nostrand Company, Inc.
- Vitor Dias da Silva. (2006). **Mechanics and Strength of Materials**. Heidelberg : Springer-  
Verlag.

**เอกสารอ้างอิง (ต่อ)**

William A. Nash. (1998). **Theory and Problems of Strength of Materials**. New York :  
McGraw-Hill.

## แผนบริหารการสอนประจำบทที่ 6

### คานประกอบ

#### หัวข้อเนื้อหาประจำบท

1. คานประกอบ
2. คานเสริมกำลัง
3. การแปลงหน้าตัดคานเสริมกำลัง
4. คานคอนกรีตเสริมเหล็ก
5. สรุบท้ายบท
6. แบบฝึกหัดท้ายบท

#### วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม

เมื่อนักศึกษาเรียนบทเรียนนี้แล้วสามารถ

1. อธิบายคานประกอบได้
2. อธิบายและคำนวณความเค้นในคานประกอบได้
3. อธิบายและคำนวณรอยต่อคานประกอบได้
4. อธิบายคานเสริมกำลังได้
5. อธิบายการแปลงหน้าตัดคานเสริมกำลังได้
6. อธิบายการคำนวณคุณสมบัติหน้าตัดแปลงของคานเสริมกำลังได้
7. อธิบายและคำนวณความเค้นในคานเสริมกำลังได้
8. อธิบายคานคอนกรีตเสริมเหล็กได้
9. อธิบายการแปลงหน้าตัดคานคอนกรีตเสริมเหล็กได้
10. อธิบายและคำนวณความเค้นในคอนกรีตและเหล็กเสริมของคานคอนกรีตเสริมเหล็กได้
11. อธิบายและคำนวณ โมเมนต์ดัดที่คานคอนกรีตเสริมเหล็กสามารถรับได้อย่างปลอดภัย
12. แก้ไขข้อปัญหาที่เกี่ยวข้องกับเนื้อหาในบทเรียนได้

### วิธีสอนและกิจกรรมการเรียนการสอนประจำบท

1. บรรยายเนื้อหาในเอกสารประกอบคำสอน การถามและตอบในห้องเรียนร่วมกับการใช้สื่อประกอบอื่น เช่น สื่อแผ่นใส สื่อคอมพิวเตอร์ หรือสื่อวีดิทัศน์ เป็นต้น

2. แสดงตัวอย่างงานเชิงประกอบ และงานคอนกรีตเสริมเหล็ก และสาธิตให้ผู้เรียนเห็นถึงการเปลี่ยนแปลงรูปร่างงานเมื่อรับน้ำหนัก

3. สาธิตขั้นตอนการแก้ปัญหาโจทย์ที่เกี่ยวข้องกับเนื้อหาในการเรียนการสอน เช่น ความเค้น การแปลงหน้าตัด และโมเมนต์คัต เป็นต้น

4. มอบหมายงาน

4.1 ให้ผู้เรียนแต่ละคนแก้ปัญหาโจทย์ที่เกี่ยวข้องกับเนื้อหา เช่น พฤติกรรมการรับน้ำหนักของงานประกอบ งานเสริมกำลัง และงานคอนกรีตเสริมเหล็ก เป็นต้น

4.2 ให้ผู้เรียนแต่ละกลุ่มศึกษาเพิ่มเติมเกี่ยวกับการทดสอบงานประกอบที่ทำจากวัสดุวิศวกรรมสมัยใหม่

4.3 ให้ผู้เรียนแต่ละคนทำแบบฝึกหัดจากคำถามท้ายบท เพื่อทดสอบความรู้ที่ได้เรียนมา

5. ทำแบบฝึกหัดท้ายบท

### การวัดและประเมินผล

1. การสังเกตความสนใจของผู้เรียน

2. การฝึกปฏิบัติเกี่ยวกับการคำนวณปัญหาโจทย์

3. การทดสอบจากแบบทดสอบ

4. การประเมินผล ผู้เรียนจะต้องได้คะแนนรวมไม่ต่ำกว่าร้อยละ 60 จึงจะผ่านเกณฑ์การเรียนรู้

## บทที่ 6

### คานประกอบ

คานเป็นชิ้นส่วน โครงสร้างที่มีความสำคัญทำหน้าที่รับน้ำหนักในแนวตั้งฉากกับแนวแกน การคำนวณและออกแบบคานจะต้องคำนึงถึงคุณสมบัติวัสดุในการต้านทานแรงที่เกิดกับคาน เช่น แรงในแนวราบ แรงในแนวตั้ง โมเมนต์คัต และโมเมนต์บิด เป็นต้น แรงดังกล่าวส่งผลถึงความเค้นและสาเหตุการวิบัติที่เกิดกับคาน อย่างไรก็ตามวัสดุที่นำมาใช้ทำคานอาจมีความแข็งแรงหรือมีรูปร่างที่ไม่เหมาะสม ดังนั้นเพื่อให้คานมีความปลอดภัยจึงได้มีการนำเอาชิ้นส่วนที่ทำจากวัสดุชนิดเดียวกันมาประกอบเข้าด้วยกันเรียกว่า คานประกอบ หรืออาจใช้วัสดุต่างชนิดกันมาเสริมความแข็งแรงเรียกว่า คานเสริมกำลัง ทั้งคานประกอบและคานเสริมกำลังต่างมีความสำคัญในวงการก่อสร้างเนื่องจากโครงสร้างในปัจจุบันมีขนาดใหญ่ขึ้น ดังนั้นบทนี้จึงนำเสนอเนื้อหาที่เกี่ยวข้องกับคานทั้งสองชนิดดังกล่าว

### คานประกอบ

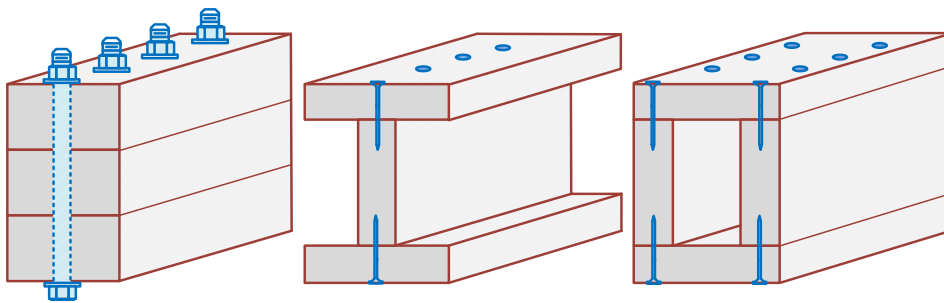
คานประกอบ (Built up Beams) คือคานที่เกิดจากการนำชิ้นส่วนหลายชิ้นมาประกอบเข้าด้วยกันเป็นหน้าตัดคานรูปร่างต่าง ๆ เพื่อวัตถุประสงค์ในการต้านทานแรงได้ดีขึ้น การนำชิ้นส่วนมาประกอบเข้าด้วยกันจะต้องทำการยึดแต่ละชิ้นให้ติดกันอย่างมั่นคงแข็งแรง วิธีการยึดให้ชิ้นส่วนต่าง ๆ ติดเข้าด้วยกันมีหลายวิธีขึ้นอยู่กับชนิดของวัสดุ เช่น การใช้กาว ตะปู สลักเกลียว หมุดย้ำ หรือการเชื่อม เป็นต้น นอกจากนั้นคานประกอบที่มีตำแหน่งของรอยยึดแน่นดีแล้วจะทำให้การกระจายความเค้นระหว่างชิ้นส่วนเกิดได้ดีอีกด้วย ภาพที่ 6.1 เป็นตัวอย่างคานประกอบขนาดใหญ่ที่ทำจากไม้



ภาพที่ 6.1 คานประกอบทำจากไม้

ที่มา : Fire Tower Engineered Timber, 2007

เกรียงศักดิ์ อุดมสินโรจน์ (2540 : 7-15-7-31) บรรจบ อรชร (2542 : 5-19-5-21) มนตรี พิรุณเกษตร (2544 : 353-387) Ferdinand P. Beer, et al. (2012 : 259-263) และ John Case, et al. (1999 : 266-271) กล่าวว่าคานประกอบที่พบเห็นทั่วไปมักเกิดจากการนำชิ้นส่วนที่ทำจากวัสดุชนิดเดียวกันมาประกอบเข้าด้วยกัน เช่น ไม้ หรือ เหล็ก เป็นต้น ในการออกแบบคานประกอบจะต้องทราบแรงที่เกิดกับหน้าตัดคาน แรงที่เกิดกับคานและมักส่งผลต่อการวิบัติของคานคือแรงเฉือนและโมเมนต์คดโค้งที่อธิบายแล้วในบทก่อนหน้านี้ ทั้งแรงเฉือนและโมเมนต์คดโค้งจะทำให้เกิดความเค้นต่าง ๆ เช่น ความเค้นคด ความเค้นเฉือนแนวตั้ง ความเค้นเฉือนแนวราบ เป็นต้น ความเค้นดังกล่าวจะถูกใช้ในการคำนวณและออกแบบคานประกอบ ค่าความเค้นดังกล่าวสามารถหาได้จากสมการที่ได้กล่าวมาแล้วในเนื้อหาเรื่องความเค้นในคาน นอกจากคุณสมบัติของวัสดุที่นำมาใช้ทำชิ้นส่วนคานแล้วยังควรต้องทราบคุณสมบัติของวัสดุที่นำมาใช้ยึดชิ้นส่วนเข้าด้วยกันอีกด้วย โดยคานประกอบเมื่อรับน้ำหนักแล้วชิ้นส่วนและวัสดุยึดแน่นจะต้องมีความเค้นภายในไม่มากกว่าความเค้นที่ยอมให้เพื่อความปลอดภัย นอกจากนั้นการเลือกรูปแบบหน้าตัดคานที่เหมาะสมยังสามารถช่วยลดความเค้นภายในชิ้นส่วนได้อีกด้วย ตัวอย่างหน้าตัดคานประกอบรูปแบบต่าง ๆ ที่มักพบเห็นทั่วไปแสดงในภาพที่ 6.2



ภาพที่ 6.2 คานประกอบรูปแบบต่าง ๆ

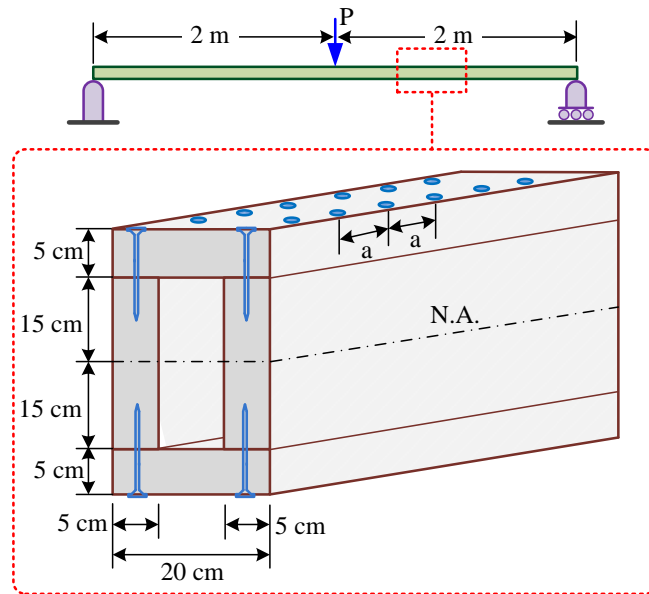
ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

ตัวอย่างที่ 6.1 คานประกอบช่วงเดียวธรรมดา ยาว 4 m ทำจากไม้ขนาด  $5 \times 20$  cm และ  $5 \times 30$  cm ดังแสดงในภาพที่ 6.3 จงหาว่าตะปูที่ใช้ยึดจะต้องตอกห่างกันเท่าไรจึงจะทำให้คานนี้สามารถรับน้ำหนักกระทำที่กึ่งกลางคานได้อย่างปลอดภัย กำหนดให้ความเค้นคดใช้งานของไม้เท่ากับ  $200 \text{ kg/cm}^2$  และตะปูหนึ่งตัวรับแรงเฉือนได้ 200 kg

วิธีทำ

$$\text{โมเมนต์ความเฉื่อยหน้าตัดคาน ; } I = \left( \frac{20 \times 40^3}{12} \right) - \left( \frac{10 \times 30^3}{12} \right) = 84,166.67 \text{ cm}^4$$





### ภาพที่ 6.3 คานประกอบทำด้วยไม้

ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

$$\begin{aligned} \text{โมดูลัสของหน้าตัด ;} \quad Z &= \frac{I}{C} \\ &= \frac{84,166.67}{20} = 4,208.33 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

น้ำหนัก P ทำให้คานเกิดโมเมนต์คัตสูงสุด  $M = P \text{ kg-m}$

$$\begin{aligned} \text{ความเค้นคัต ;} \quad \sigma_w &= \frac{M}{Z} \\ 200 &= \frac{P \times 100}{4,208.33} \end{aligned}$$

$$\text{น้ำหนักที่กระทำกับคาน ;} \quad P = 8,416.66 \text{ kg}$$

$$\begin{aligned} \text{แรงเฉือนสูงสุด ;} \quad V &= \frac{P}{2} \\ &= \frac{8,416.66}{2} \\ &= 4,208.33 \text{ kg} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ความเค้นเฉือนแนวราบจุดต่อ ;} \quad \tau &= \frac{V}{Ib} A\bar{Y} \\ &= \frac{4,208.33 \times (20 \times 5 \times 17.5)}{84,166.67 \times 10} \\ &= 8.75 \text{ kg/cm}^2 \end{aligned}$$

แรงเฉือนในแนวราบที่จุดต่อคานประกอบที่เกิดจากความเค้นเฉือนต่อความยาว 1 m

$$\begin{aligned} \text{แรงเฉือนในแนวราบจุดต่อ ; } F &= \tau \times b \times l \\ &= 8.75 \times (5+5) \times 100 \\ &= 8,750 \text{ kg/m} \end{aligned}$$

หาจำนวนตะปูที่ตอก 2 แถวต่อความยาว 1 m เพื่อต้านทานแรงเฉือน

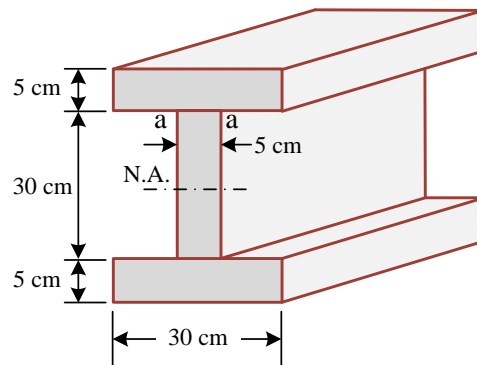
$$\begin{aligned} \text{จำนวนตะปู ; } n &= \frac{F}{2\tau} \\ &= \frac{8,750}{2 \times 200} \\ &= 21.88 \text{ ตัว/m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ระยะห่างระหว่างตะปู ; } a &= \frac{l}{n} \\ &= \frac{100}{21.88} \\ &= 4.57 \text{ cm} \end{aligned}$$

เลือกใช้ระยะห่างระหว่างตะปูชิดเท่ากับ 4.50 cm

ตอบ

**ตัวอย่างที่ 6.2** คานประกอบรูปตัวไอทำจากไม้จำนวน 3 ท่อน ขนาด  $5 \times 30$  cm ดังแสดงในภาพที่ 6.4 ถ้าคานนี้รับแรงเฉือน 2,000 kg จงหาความเค้นเฉือนแนวราบของระนาบจุดต่อ a-a และความเค้นเฉือนแนวราบที่ระนาบสะเทิน



**ภาพที่ 6.4** คานประกอบทำจากไม้จำนวน 3 ท่อน

ที่มา : จีรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

**วิธีทำ**

$$\begin{aligned} \text{โมเมนต์ความเฉื่อยหน้าตัดคาน ; } I &= \frac{30 \times 40^3}{12} - \frac{25 \times 30^3}{12} \\ &= 103,750 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

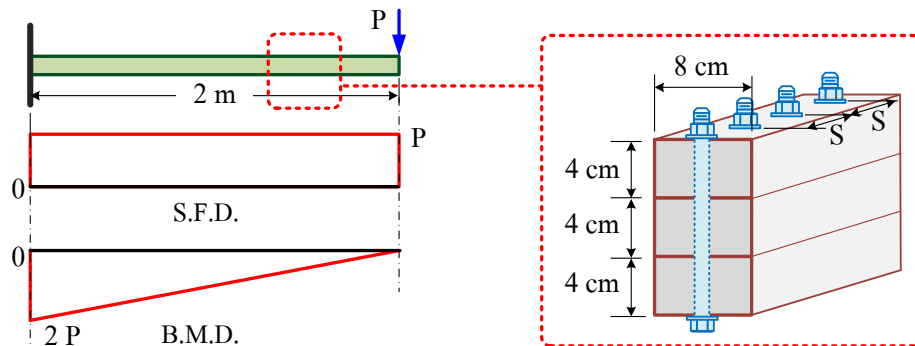
ความเค้นเฉือนแนวราบที่เกิดจากแรงเฉือนขนาด 2,000 kg ที่ระนาบ a-a

$$\begin{aligned} \text{ความเค้นเฉือนแนวราบ ; } \tau &= \frac{V}{Ib} A\bar{Y} \\ &= \frac{2,000 \times (5 \times 30 \times 17.5)}{103,750 \times 5} \\ &= 10.12 \text{ kg/cm}^2 \end{aligned} \quad \text{ตอบ}$$

ความเค้นเฉือนแนวราบที่เกิดจากแรงเฉือนขนาด 2,000 kg ที่ระนาบสะเทิน

$$\begin{aligned} \text{ความเค้นเฉือนแนวราบ ; } \tau &= \frac{V}{Ib} A\bar{Y} \\ &= \frac{2,000 \times [(5 \times 30 \times 17.5) + (5 \times 15 \times 7.5)]}{103,750 \times 5} \\ &= 12.29 \text{ kg/cm}^2 \end{aligned} \quad \text{ตอบ}$$

ตัวอย่างที่ 6.3 คานยื่น AB ทำจากไม้จำนวน 3 ท่อน ขนาด 4×8 cm ยึดติดกันแน่นด้วยสลักเกลียวดังแสดงในภาพที่ 6.5 จงคำนวณหาหน้าหนักกระทำที่ปลายคานและระยะห่างระหว่างสลักเกลียวที่คานสามารถรับน้ำหนักได้อย่างปลอดภัย ถ้าคานนี้รับแรงเฉือนได้ไม่เกิน 120 kg และไม้สามารถรับความเค้นคัดได้ไม่เกิน 90 kg/cm<sup>2</sup> และความเค้นเฉือนได้ไม่เกิน 20 kg/cm<sup>2</sup>



ภาพที่ 6.5 คานยื่นทำจากไม้สามท่อน  
ที่มา : จีรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

วิธีทำ

$$\text{โมเมนต์ความเฉื่อยหน้าตัดคาน ; } I = \frac{8 \times 12^3}{12} = 1,152 \text{ cm}^4$$

กรณีที่ 1 หน้าหนัก P ที่ทำให้เกิดแรงเฉือนสูงสุด

$$\text{แรงเฉือนสูงสุดที่เกิดกับคาน ; } V_{\max} = P \text{ kg}$$

$$\text{ความเค้นเฉือนแนวราบ ; } \tau = \frac{VQ}{Ib}$$

$$20 = \frac{P(6 \times 8) \left( \frac{6}{2} \right)}{1,152 \times 8}$$

น้ำหนักที่คานรับได้ ;  $P_1 = 1,280 \text{ kg}$

กรณีที่ 2 หาน้ำหนัก P ที่ทำให้เกิดโมเมนต์ค้ดสูงสุด

โมเมนต์ค้ดสูงสุด ;  $M_{\max} = 2P \text{ kg-m}$  หรือ  $200P \text{ kg-cm}$

ความเค้นค้ด ;  $\sigma = \frac{Mc}{I}$

$$90 = \frac{200P \times 6}{1,152}$$

น้ำหนักที่คานรับได้ ;  $P_2 = 86.4 \text{ kg}$

น้ำหนักที่คานสามารถรับได้อย่างปลอดภัยคือ  $86.4 \text{ kg}$  ตอบ

การไหลของแรงเฉือนแนวราบ ;  $q = \frac{VQ}{I}$

$$= \frac{86.4(4 \times 8)(4)}{1,152}$$

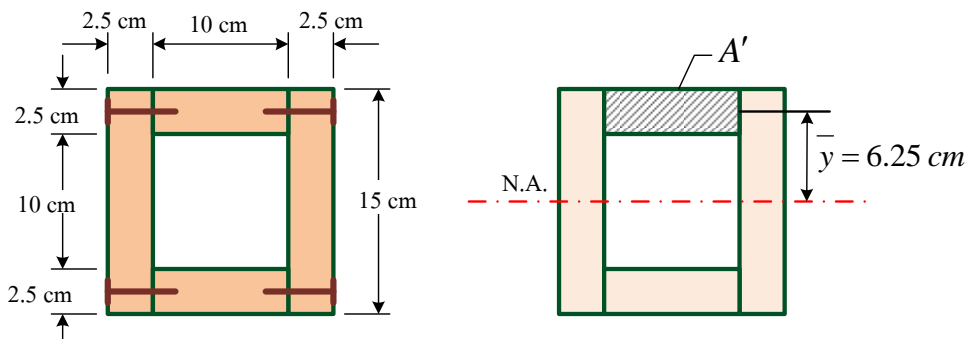
$$= 9.60 \text{ kg/cm}$$

สมมติให้ระยะห่างระหว่างสลักเกลียวเท่ากับ s ดังนั้นแรงเฉือนที่สลักเกลียวจะต้องรับ

แรงเฉือนในสลักเกลียว ;  $qs = 120$

ระยะห่างระหว่างสลักเกลียว ;  $s = \frac{120}{9.60} = 12.50 \text{ cm}$  ตอบ

**ตัวอย่างที่ 6.4** คานประกอบหน้าค้ดรูปสี่เหลี่ยมกลวงทำจากท่อนไม้ขนาด  $2.5 \times 10 \text{ cm}$  และไม้ขนาด  $2.5 \times 15 \text{ cm}$  ยึดติดกันแน่นด้วยตะปูซึ่งตอกห่างกัน  $3 \text{ cm}$  ดังแสดงในภาพที่ 6.6 ถ้าคานนี้รับแรงเฉือนในแนวค้ด  $150 \text{ kg}$  จงหาแรงเฉือนที่เกิดกับตะปูแต่ละตัว



ภาพที่ 6.6 คานประกอบขึ้นค้ดด้วยไม้สองแผ่น

ที่มา : จิรวฒน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \text{โมเมนต์ความเฉื่อยหน้าตัดคาน ; } I &= \frac{15 \times 15^3}{12} - \frac{10 \times 10^3}{12} \\ &= 3,385.42 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

หาการไหลของแรงเฉือนแนวราบที่รอยต่อระหว่างท่อนไม้ทั้งสองด้าน  
เมื่อ

$$\begin{aligned} Q &= A'\bar{y} \\ &= (2.5 \times 10) \times 6.25 \\ &= 156.25 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{การไหลของแรงเฉือนแนวราบ ; } q &= \frac{VQ}{I} \\ &= \frac{150 \times 156.25}{3,385.42} \\ &= 6.92 \text{ kg/cm} \end{aligned}$$

หาการไหลของแรงเฉือนแนวราบที่เกิดขึ้นที่รอยต่อแต่ละด้านของท่อนไม้

$$\text{การไหลของแรงเฉือนแนวราบ ; } \frac{q}{2} = 3.46 \text{ kg/cm}$$

$$\begin{aligned} \text{แรงเฉือนในตะปู ; } F &= s \times q \\ &= 3 \times 3.46 \\ &= 10.38 \text{ kg} \end{aligned}$$

ตอบ



ภาพที่ 6.7 โครงสร้างอาคารที่ใช้คานประกอบสลักไม้

ที่มา : Fire Tower Engineered Timber. 2007

จากตัวอย่างคานประกอบที่นำเสนอมาแล้วข้างต้นพบว่ามักใช้สลักเกลียวในการยึดขึ้นส่วนท่อนไม้เข้าไว้ด้วยกัน แต่ในสมัยโบราณที่ยังไม่มีการใช้สลักเกลียวอย่างแพร่หลายก็สามารถทำคานประกอบได้ด้วยการนำท่อนไม้มาทำเป็นสลักยึด โดยสลักไม้ที่ใช้ยึดจะต้องสามารถต้านทานความเค้นเฉือนแนวราบได้อย่างปลอดภัย ตัวอย่างคานประกอบที่นำท่อนไม้มาทำเป็นสลักยึดแสดงในภาพ 6.7 อย่างไรก็ตามในปัจจุบันมีการนำกาคุณภาพสูงที่สามารถทนทานต่อความชื้นมาใช้เพื่อยึดขึ้นส่วนท่อนไม้ การใช้กาเป็นตัวเชื่อมประสานนี้จะทำให้ประหยัดเวลาและแรงงานในการทำคานประกอบ

### คานเสริมกำลัง

นอกจากคานประกอบที่ทำจากวัสดุชนิดเดียวกันแล้วยังมีคานอีกประเภทหนึ่งที่น่าวัสดุมากกว่าหนึ่งชนิดมาประกอบเข้าด้วยกันเพื่อให้สามารถต้านทานแรงได้มากขึ้น คานประเภทนี้เรียกว่า คานเสริมกำลัง (Strengthening Beams) หรืออาจเรียกอีกชื่อหนึ่งว่า คานเชิงประกอบ (Composite Beam) ยกตัวอย่างเช่นการเพิ่มกำลังให้กับคานไม้ด้วยการนำแผ่นเหล็กมายึดติดกับคานไม้ โดยที่แผ่นเหล็กสามารถช่วยทำให้คานไม้นั้นรับแรงได้เพิ่มขึ้น ทั้งนี้คานไม้และแผ่นเหล็กต้องยึดกันอย่างแน่นหนา ดังแสดงในภาพที่ 6.8 คานเสริมกำลังอีกประเภทหนึ่งที่มีมักพบเห็นบ่อยในการก่อสร้างคือคานคอนกรีตเสริมเหล็ก เนื่องจากคอนกรีตสามารถรับแรงอัดได้ดีแต่รับแรงดึงได้น้อย ดังนั้นจึงนำเหล็กเส้นมาเสริมด้านในเพื่อช่วยกับแรงดึง การคำนวณหาแรงที่เกิดกับคานเสริมกำลังไม่สามารถคำนวณได้โดยตรงเนื่องจากมีวัสดุที่ใช้มากกว่าหนึ่งชนิด แต่จะต้องทำการศึกษาและเปรียบเทียบคุณสมบัติของวัสดุแต่ละชนิดที่นำมาใช้ทำคานเสียก่อน เมื่อทราบคุณสมบัติของวัสดุแล้วจึงสร้างความสัมพันธ์ระหว่างวัสดุต่างชนิดกันเพื่อนำไปสร้างหน้าตัดแปลง (Transformed Sections) โดยหน้าตัดแปลงเป็นแบบจำลองหน้าตัดคานที่เกิดจากการแปลงขนาดหรือรูปร่างวัสดุที่มีอยู่หลายชนิดให้เป็นวัสดุเพียงชนิดเดียว เมื่อได้หน้าตัดแปลงแล้วจึงจะสามารถคำนวณหาแรงที่เกิดกับคานเสริมกำลังได้โดยใช้หลักการเดียวกับคานประกอบ

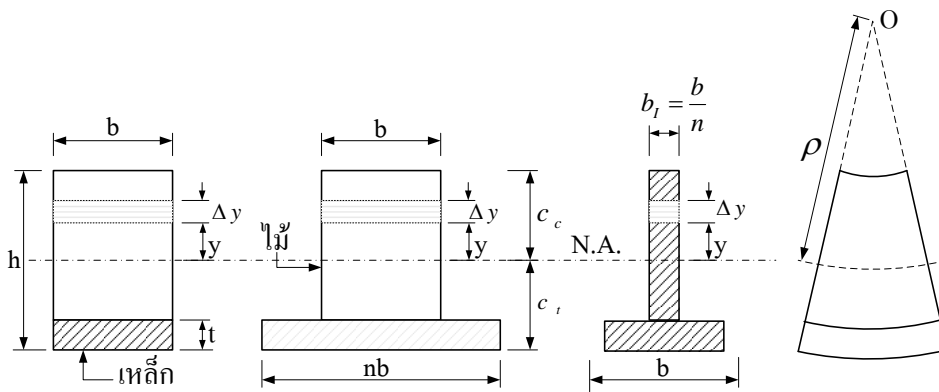
มนตรี พิรุณเกษตร (2544 : 366-377) สิริศักดิ์ ปโยธรสิริ (2549 : 256-263) และ James M. Gere and Barry J. Goodno (2012 : 330-342) กล่าวถึงหลักการแปลงหน้าตัดและการคำนวณหาแรงภายในของคานเสริมกำลังไว้ดังต่อไปนี้ การแปลงหน้าตัดคานเสริมกำลังสามารถทำได้โดยสมมติให้คานทำมาจากวัสดุชนิดใดชนิดหนึ่งเพียงอย่างเดียว ยกตัวอย่างเช่น คานเสริมกำลังกว้าง  $b$  ลึก  $h$  ที่ด้านบนทำจากไม้และมีแผ่นเหล็กหนา  $t$  ประกอบอยู่ด้านล่างดังแสดงในภาพที่ 6.9 เมื่อคานเสริมกำลังนี้แอนตัวลงจนเกิดครีမ်มีความโค้ง  $\rho$  แผ่นเหล็กประกบที่อยู่ด้านล่างซึ่งมีความแข็งแรงมากกว่าไม้จะทำหน้าที่รับแรงดึง ในขณะที่ท่อนไม้ด้านบนจะทำหน้าที่รับแรงอัด

หากสมมติให้ค่าโมดูลัสยืดหยุ่นของเหล็กคือ  $E_s$  และโมดูลัสยืดหยุ่นของไม้คือ  $E_w$  หากนำค่าโมดูลัสยืดหยุ่นของวัสดุทั้งสองมาหารกันก็จะเป็นค่าคงที่  $n$  ค่าหนึ่งดังสมการต่อไปนี้

$$n = \frac{E_s}{E_w} \tag{6.1}$$



ภาพที่ 6.8 คานไม้เสริมกำลัง  
ที่มา : The Timber Post, 2013



(ก) หน้าตัดไม้และเหล็ก (ข) หน้าตัดเทียบเท่าไม้ (ค) หน้าตัดเทียบเท่าเหล็ก

ภาพที่ 6.9 ความสัมพันธ์ของคานไม้กับแผ่นเหล็ก

ที่มา : สิริศักดิ์ ปโยชรศิริ, 2549 : 256

ซึ่งค่าคงที่  $n$  นี้มีความหมายว่าความแข็งแรงของเหล็กมีมากกว่าไม้  $n$  เท่าและค่าคงที่นี้จะถูกนำไปใช้สร้างหน้าตัดแปลงของคาน เมื่อพิจารณาคานเสริมกำลังพบว่าความเค้นดัดที่เกิดขึ้นที่หน้าตัดของไม้ที่ระยะ  $y$  เหนือระนาบสะเทินสามารถหาได้จากสมการ

$$\text{ความเค้นดัดท่อนไม้}; \quad \sigma_w = \frac{E_w}{\rho} y \quad (6.2)$$

เมื่อ  $\rho$  เป็นรัศมีความโค้งของคานเสริมกำลังและถ้าพิจารณาแรงที่เกิดกับคานไม้ในพื้นที่ขนาดเล็ก  $\Delta y$  ใดๆ จะได้

$$\text{แรงในท่อนไม้}; \quad \Delta F_w = \sigma_w b \Delta y = \left( \frac{E_w}{\rho} \right) y (b \Delta y) \quad (6.3)$$

ในการทำงานเดียวกันหาความเค้นดัดและแรงที่กระทำในแผ่นเหล็กสามารถหาได้จากสมการดังต่อไปนี้

$$\text{ความเค้นดัดแผ่นเหล็ก}; \quad \sigma_s = \frac{E_s}{\rho} y \quad (6.4)$$

$$\text{แรงในแผ่นเหล็ก}; \quad \Delta F_s = \sigma_s b_s \Delta y = \left( \frac{E_s}{\rho} \right) y (b_s \Delta y) \quad (6.5)$$

สมการสมดุลของแรงที่หน้าตัดคานประกอบ

$$\left( \frac{E_w}{\rho} \right) y (b \Delta y) = \left( \frac{E_s}{\rho} \right) y (b_s \Delta y) \quad (6.6)$$

$$\text{ความกว้างแผ่นเหล็ก}; \quad b_s = b_w \left( \frac{E_w}{E_s} \right) \quad (6.7)$$

$$\text{ความกว้างท่อนไม้}; \quad b_w = n b_s \quad (6.8)$$

$$\text{พื้นที่หน้าตัดแผ่นเหล็ก}; \quad A_s = A_w \frac{E_w}{E_s} \quad (6.9)$$

$$\text{พื้นที่หน้าตัดท่อนไม้}; \quad A_w = n A_s \quad (6.10)$$

เมื่อแปลงพื้นที่หน้าตัดให้เป็นหน้าตัดแปลงแล้วก็จะสามารถคำนวณค่าความเค้นดัดเนื่องจากโมเมนต์ดัด  $M$  ได้ดังนี้

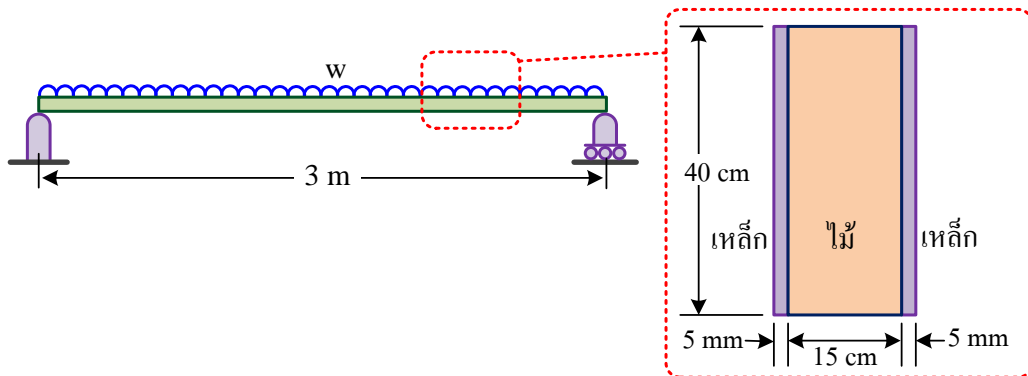
$$\text{ความเค้นดัด}; \quad \sigma = \frac{Mc}{I} \quad (6.11)$$

ถ้าต้องการหาความเค้นดัดในท่อนไม้ทำได้โดยแปลงหน้าตัดเหล็กให้เป็นไม้ได้ดังนี้

$$\text{ความเค้นดัดท่อนไม้}; \quad \sigma_w = \frac{Mc}{I} \times \frac{E_w}{E_s} \quad (6.12)$$



ตัวอย่างที่ 6.5 คานเสริมกำลังช่วงเดียวธรรมดายาว 3 m ทำด้วยไม้ขนาด  $15 \times 40$  cm และประกบด้วยแผ่นเหล็กหนา 5 mm ทั้งสองด้านดังแสดงในภาพที่ 6.10 ถ้ามีน้ำหนักแผ่กระจายสม่ำเสมอ 800 kg/m กระทำต่อคาน จงหาความเค้นดัดสูงสุดที่เกิดกับไม้และเหล็ก กำหนดให้โมดูลัสยืดหยุ่นของเหล็ก  $E_s = 2.1 \times 10^6$  kg/cm<sup>2</sup> และ โมดูลัสยืดหยุ่นของไม้  $E_w = 1.05 \times 10^5$  kg/cm<sup>2</sup>



ภาพที่ 6.10 หน้าตัดคานประกอบไม้และเหล็ก

ที่มา : จีรวัดน์ วิมุติสุขวิริยา. 2556

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \text{โมเมนต์ดัดสูงสุด ;} \quad M_{\max} &= \frac{800 \times 3^2}{8} \\ &= 900 \text{ kg-m} \end{aligned}$$

กรณีที่ 1 แปลงหน้าตัดประกอบไม้และเหล็กเป็นหน้าตัดเทียบเท่าไม้ดังแสดงในภาพ 6.11

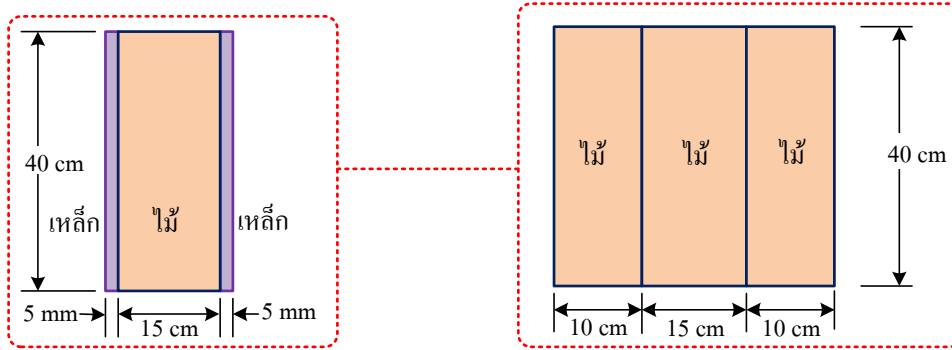
$$\begin{aligned} \text{ความหนาไม้เทียบเท่า ;} \quad b_w &= \frac{E_s}{E_w} b_s \\ &= \frac{2.1 \times 10^6}{1.05 \times 10^5} \times 0.5 \\ &= 10 \text{ cm} \end{aligned}$$

พื้นที่หน้าตัดประกอบเทียบเท่าหน้าตัดไม้เท่ากับ  $35 \times 40$  cm

$$\begin{aligned} \text{โมเมนต์ความเฉื่อยคานไม้ ;} \quad I_w &= \frac{1}{12} bh^3 \\ &= \frac{1}{12} \times 35 \times 40^3 \\ &= 186,666.67 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

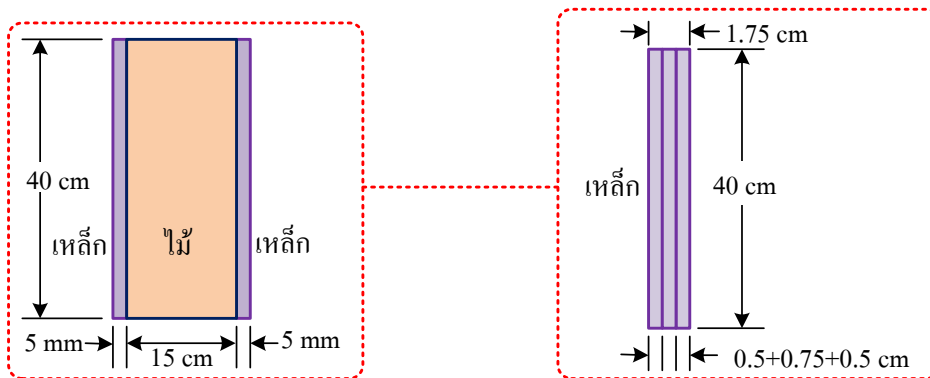
$$\begin{aligned} \text{ความเค้นดัดในคานไม้ ;} \quad \sigma_w &= \frac{Mc}{I_w} \\ &= \frac{(900 \times 100) \times 20}{186,666.67} = 9.64 \text{ kg/cm}^2 \text{ ตอบ} \end{aligned}$$

ความเค้นในเหล็ก ;  $\sigma_s = \frac{E_w}{E_s} \times \sigma_w$   
 $= \frac{2.1 \times 10^6}{1.05 \times 10^5} \times 9.64 = 192.8 \text{ kg/cm}^2 \text{ ตอบ}$



ภาพที่ 6.11 หน้าตัดแปลงเทียบเท่าไม้  
 ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

กรณีที่ 2 แปลงหน้าตัดประกอบ ไม้และเหล็กเป็นหน้าตัดเทียบเท่าเหล็กดังแสดงในภาพ 6.12



ภาพที่ 6.12 หน้าตัดแปลงเทียบเท่าเหล็ก  
 ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

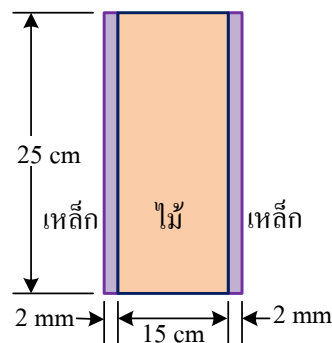
ความหนาเหล็กเทียบเท่า ;  $b_s = \frac{E_w}{E_s} \times b_w = \frac{1.05 \times 10^5}{2.1 \times 10^6} \times 15$   
 $= 0.75 \text{ cm}$

พื้นที่หน้าตัดประกอบเทียบเท่าหน้าตัดไม้เท่ากับ  $1.75 \times 40 \text{ cm}$

โมเมนต์ความเฉื่อยแกนเหล็ก ;  $I_s = \frac{1}{12} b h^3$   
 $= \frac{1}{12} \times 1.75 \times 40^3$

$$\begin{aligned}
 &= 9,333 \text{ cm}^4 \\
 \text{ความเค้นดัดคานเหล็ก ;} \quad \sigma_s &= \frac{Mc}{I_s} \\
 &= \frac{(900 \times 100) \times 20}{9,333} = 192.86 \text{ kg/cm}^2 \text{ ตอบ} \\
 \text{ความเค้นในไม้ ;} \quad \sigma_w &= \frac{E_w}{E_s} \times \sigma_s \\
 &= \frac{1.05 \times 10^5}{2.1 \times 10^6} \times 192.86 = 9.64 \text{ kg/cm}^2 \text{ ตอบ}
 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 6.6 คานเสริมกำลังทำด้วยไม้ขนาด  $15 \times 25$  cm และประกบด้วยแผ่นเหล็กหนา 2 mm ทั้งสองด้านดังแสดงในภาพที่ 6.13 จงหาโมเมนต์ดัดสูงสุดที่หน้าตัดคานนี้สามารถรับได้อย่างปลอดภัย กำหนดให้ความเค้นดัดในไม้มีค่าไม่เกิน  $5 \text{ MN/m}^2$  ความเค้นดัดในเหล็กมีค่าไม่เกิน  $200 \text{ MN/m}^2$  และอัตราส่วนระหว่าง  $E_s/E_w = 30$



ภาพที่ 6.13 หน้าตัดคานประกอบไม้และเหล็ก

ที่มา : จีรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

### วิธีทำ

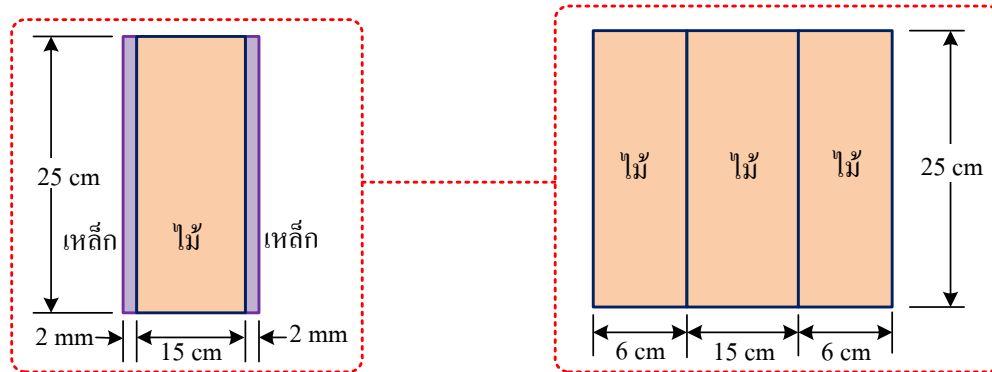
หาขีดจำกัดของความเค้นดัดซึ่งมีความสอดคล้องกับคุณสมบัติวัสดุที่ใช้ทำคานเสริมกำลัง

$$\begin{aligned}
 \text{ความเค้นดัดไม้ ;} \quad \sigma_w &= \frac{E_w}{E_s} \times \sigma_s \\
 &= \frac{1}{30} \times 200 \\
 &= 6.67 \text{ MN/m}^2 \text{ หรือ } 6.67 \times 10^6 \text{ N/m}^2
 \end{aligned}$$

ความเค้นดัดไม้ตามคุณสมบัติเทียบเท่ามากกว่าความเค้นดัดสูงสุดที่ไม้รับได้ เพราะฉะนั้นใช้ความเค้นดัดสูงสุดไม้  $\sigma_w = 5 \text{ MN/m}^2$  จากนั้นแปลงเป็นพื้นที่หน้าตัดไม้เทียบเท่า

$$\begin{aligned}
 \text{ความหนาไม้เทียบเท่า ; } b_w &= \frac{E_s}{E_w} \times \sigma_s \\
 &= 30 \times 2 \\
 &= 60 \text{ mm}
 \end{aligned}$$

พื้นที่หน้าตัดประกอบเทียบเท่าหน้าตัดไม้เท่ากับ  $270 \times 250 \text{ mm}$  ดังแสดงในภาพที่ 6.14



ภาพที่ 6.14 หน้าตัดแปลงเทียบเท่าไม้

ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

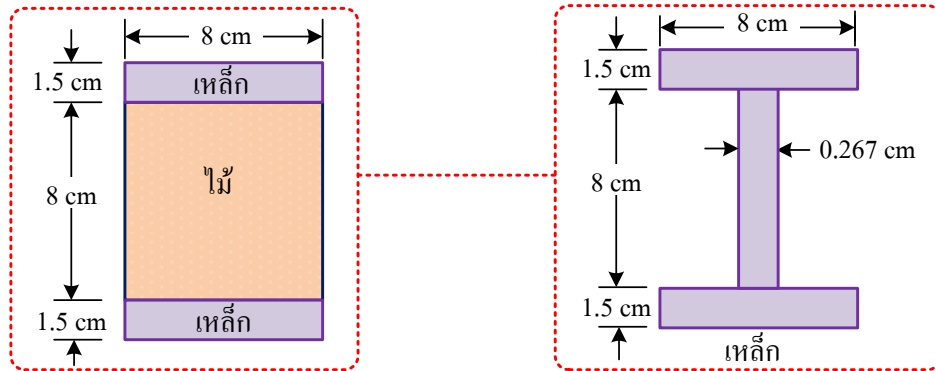
$$\begin{aligned}
 \text{โมเมนต์ความเฉื่อยคานไม้ ; } I_w &= \frac{1}{12} bh^3 \\
 &= \frac{1}{12} \times 270 \times 250^3 \\
 &= 3.516 \times 10^8 \text{ mm}^4 \text{ หรือ } 0.0003516 \text{ m}^4
 \end{aligned}$$

$$\text{ความเค้นดัดคานไม้ ; } \sigma_w = \frac{Mc}{I_w}$$

$$\begin{aligned}
 \text{โมเมนต์ดัด ; } M &= \frac{\sigma_w I_w}{c} \\
 &= \frac{5 \times 10^6 \times 0.0003516}{0.125} \\
 &= 14,064 \text{ N-m หรือ } 14.06 \text{ kN-m}
 \end{aligned}$$

โมเมนต์ดัดสูงสุดที่คานเสริมกำลังสามารถรับได้อย่างปลอดภัยคือ 14.06 kN-m      ตอบ

**ตัวอย่างที่ 6.7** คานเสริมกำลังทำจากไม้ขนาด  $8 \times 8 \text{ cm}$  เสริมด้วยแผ่นเหล็กหนา 1.5 cm ทั้งด้านบนและด้านล่างดังแสดงในภาพที่ 6.15 จงหาความเค้นดัดสูงสุดที่เกิดไม้และเหล็ก ถ้าคานเสริมกำลังนี้รับโมเมนต์ดัด 60,000 kg-cm กำหนดให้แปลงหน้าตัดคานเป็นเหล็ก โดยไม่มีค่าโมดูลัสยืดหยุ่น  $E_w = 0.7 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$  และเหล็กมีค่าโมดูลัสยืดหยุ่น  $E_s = 2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$



ภาพที่ 6.15 คานไม้เสริมกำลังด้วยแผ่นเหล็กด้านบนและล่าง

ที่มา : จีรวัดน์ วิมุติสุขวิริยา. 2556

### วิธีทำ

ความหนาเหล็กเทียบเท่า ;  $b_s = \frac{E_w}{E_s} \times b_w$

$$= \frac{0.7 \times 10^5}{2.1 \times 10^6} \times 8 = 0.267 \text{ cm}$$

โมเมนต์ความเฉื่อยคานเหล็ก ;  $I_s = 2 \left[ \frac{8 \times 1.5^3}{12} + (1.5 \times 8)(4.75)^2 \right] + \frac{0.267 \times 8^3}{12}$

$$= 557.392 \text{ cm}^4$$

ความเค้นดัดสูงสุดในเหล็ก ;  $\sigma_s = \frac{Mc}{I_s}$

$$= \frac{60,000 \times 5.5}{557.392} = 592.04 \text{ kg/cm}^2 \quad \text{ตอบ}$$

ความเค้นที่รอยต่อไม้และเหล็ก ;  $\sigma_s = \frac{Mc}{I_s}$

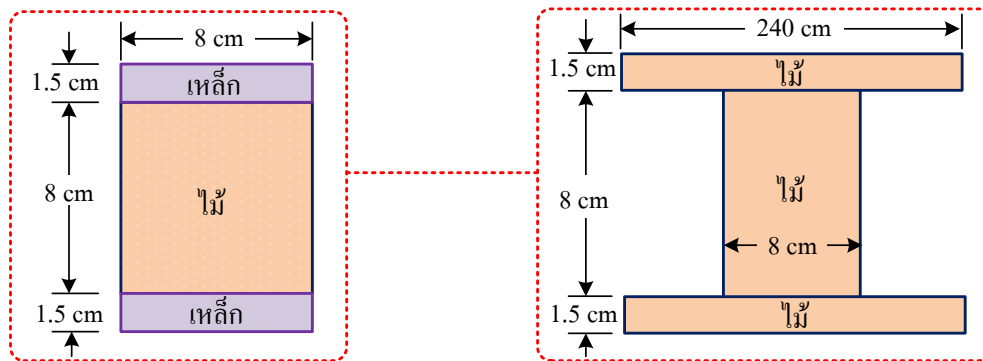
$$= \frac{60,000 \times 4}{557.392} = 430.58 \text{ kg/cm}^2$$

ความเค้นดัดสูงสุดในไม้ ;  $\sigma_w = \frac{E_w}{E_s} \times \sigma_s$

$$= \frac{0.7 \times 10^5}{2.1 \times 10^6} \times 430.58$$

$$= 14.35 \text{ kg/cm}^2 \quad \text{ตอบ}$$

ตัวอย่างที่ 6.8 กานเสริมกำลังทำจากไม้ขนาด  $8 \times 8$  cm เสริมด้วยแผ่นเหล็กหนา 1.5 cm ทั้งด้านบนและด้านล่างดังแสดงในภาพที่ 6.15 จงหาความเค้นดัดสูงสุดที่เกิดไม้และเหล็ก ถ้ากานเสริมกำลังนี้รับโมเมนต์ดัด  $60,000 \text{ kg-cm}$  กำหนดให้แปลงหน้าตัดกานเป็นไม้ โดยไม้มีค่าโมดูลัสยืดหยุ่น  $E_w = 0.7 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$  และเหล็กมีค่าโมดูลัสยืดหยุ่น  $E_s = 2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$



ภาพที่ 6.16 หน้าตัดกานประกอบด้วยไม้และเหล็ก

ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

#### วิธีทำ

$$\begin{aligned} \text{ความหนาไม้เทียบเท่า ; } b_w &= \frac{E_s}{E_w} b_s \\ &= \frac{2.1 \times 10^6}{0.7 \times 10^5} \times 8 = 240 \text{ cm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{โมเมนต์ความเฉื่อย ; } I_w &= 2 \left[ \frac{240 \times 1.5^3}{12} + (1.5 \times 240 \times 4.75^2) \right] + \frac{8 \times 8^3}{12} \\ &= 16,721.33 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

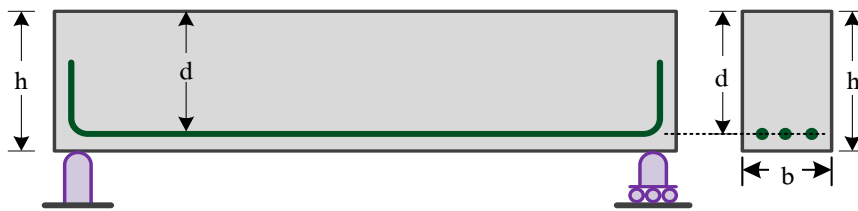
$$\begin{aligned} \text{ความเค้นในไม้ ; } \sigma_w &= \frac{Mc}{I_w} \\ &= \frac{60,000 \times 5.5}{16,721.33} = 19.74 \text{ kg/cm}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ความเค้นในเหล็ก ; } \sigma_s &= \frac{E_s}{E_w} \times \sigma_w \\ &= \frac{2.1 \times 10^6}{0.7 \times 10^5} \times 19.74 = 592.06 \text{ kg/cm}^2 \text{ ตอบ} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ความเค้นในไม้เทียบเท่า ; } \sigma_w &= \frac{Mc}{I_w} \\ &= \frac{60,000 \times 4}{16,721.33} = 14.35 \text{ kg/cm}^2 \text{ ตอบ} \end{aligned}$$

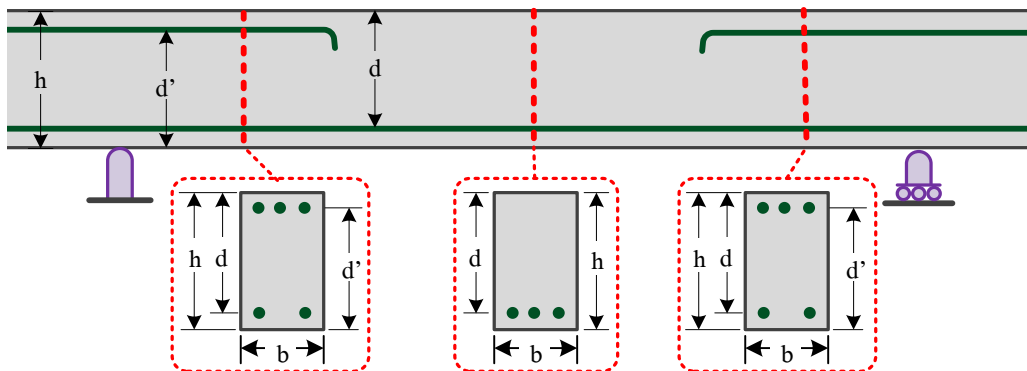
## คานคอนกรีตเสริมเหล็ก

คานคอนกรีตเสริมเหล็ก (Reinforced Concrete Beams) เป็นคานเสริมกำลังหรือคานเชิงประกอบอีกประเภทหนึ่งที่ทำจากคอนกรีตและเหล็กดังแสดงในภาพที่ 6.17 ปัจจุบันคานคอนกรีตเสริมเหล็กเป็นที่นิยมในการนำมาทำเป็นโครงสร้างอาคารและสิ่งก่อสร้าง การนำวัสดุทั้งสองชนิดมาใช้ร่วมกันเนื่องจากคอนกรีตเป็นวัสดุที่สามารถรับแรงอัดได้ดีแต่รับแรงดึงได้น้อย ในขณะที่เหล็กเป็นวัสดุที่มีคุณสมบัติรับแรงดึงและรับแรงอัดได้ดี การนำคอนกรีตและเหล็กมาใช้ร่วมกันในการทำเป็นคานยังต้องคำนึงถึงรูปร่างหน้าตัดคานและตำแหน่งของวัสดุแต่ละชนิดเพื่อให้ทั้งคอนกรีตและเหล็กทำหน้าที่ได้อย่างมีประสิทธิภาพ ตัวอย่างการเสริมเหล็กเส้นในคานต่อเนื่องแสดงในในภาพที่ 6.18 อย่างไรก็ตามการออกแบบคานคอนกรีตเสริมเหล็กยังต้องคำนึงถึงราคาค่าก่อสร้างเนื่องจากเหล็กมีราคาแพง ถึงแม้ว่าคอนกรีตจะสามารถรับกำลังอัดได้ดีและมีราคาถูกแต่ยังมีข้อจำกัดคือมีน้ำหนักมาก ดังนั้นช่วงห่างของฐานรองรับคานต้องไม่มากเกินไปมิฉะนั้นจะทำให้ปริมาณเหล็กเสริมมากด้วย เหล็กที่นำมาใช้มักเป็นเหล็กเส้นกลมอาจจะเป็นเหล็กผิวเรียบหรือเหล็กข้ออ้อยก็ได้ โดยเหล็กข้ออ้อยจะมีแรงยึดระหว่างเหล็กและคอนกรีตดีกว่าเหล็กผิวเรียบ



ภาพที่ 6.17 คานช่วงเดียวคอนกรีตเสริมเหล็ก

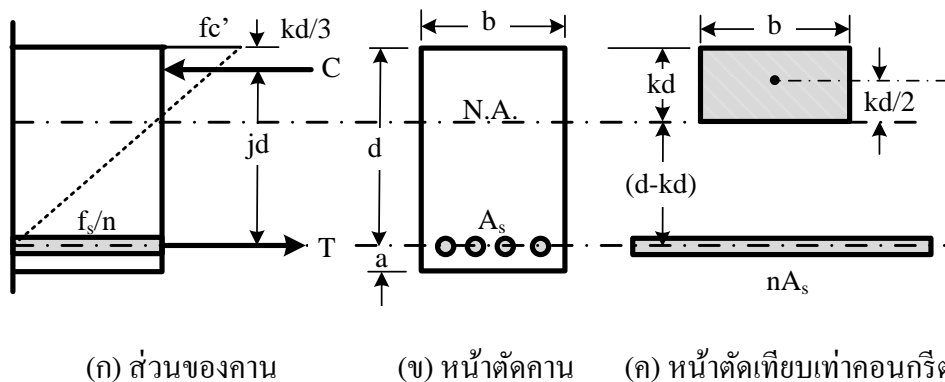
ที่มา : จีรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556



ภาพที่ 6.18 คานต่อเนื่องคอนกรีตเสริมเหล็ก

ที่มา : จีรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

สิริศักดิ์ ปโยขรสิริ (2549 : 261-263) Ferdinand P. Beer, et al. (2012 : 262) Hearn E. J. (2000 : 71-73) และ John Case, et al. (1999 : 272-275) กล่าวว่าคานคอนกรีตเสริมเหล็กใช้หลักการคำนวณเช่นเดียวกับคานเสริมกำลังดัดที่ได้กล่าวมาแล้วในหัวข้อก่อนหน้า เมื่อคำนวณแรงเฉือนและโมเมนต์ดัดเนื่องจากน้ำหนักที่กระทำกับคานได้แล้ว ขั้นตอนต่อไปคือการเลือกกำลังอัดประลัยของคอนกรีต  $f_c'$  และเกรดของเหล็กเสริมซึ่งสัมพันธ์กับกำลังรับแรงดึงจุดคราก  $f_y$  นำค่าทั้งสองไปหาขนาดหน้าตัดคานที่เหมาะสมกับแรงที่เกิดขึ้นในคาน การออกแบบคานเสริมกำลังประเภทนี้จะอยู่บนสมมติฐานว่าคอนกรีตไม่สามารถรับแรงดึงได้น้อยมาก หากพิจารณาคานหน้าตัดรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าดังแสดงในภาพที่ 6.19 พบว่า ความเค้นอัดจะเกิดขึ้นด้านบนของระนาบสะเทินและความเค้นดึงจะเกิดขึ้นด้านล่างของระนาบสะเทิน ส่งผลทำให้คอนกรีตด้านบนรับแรงอัดและเหล็กด้านล่างรับแรงดึง โดยคอนกรีตด้านล่างจะทำหน้าที่ยึดเหล็กเสริมให้อยู่ในตำแหน่งที่ต้องการเท่านั้น คอนกรีตด้านบนของระนาบสะเทินจะรับแรงอัดในลักษณะที่เป็นปฏิภาคโดยตรงกับระยะจากระนาบสะเทิน แรงอัดนี้กระจายเป็นรูปสามเหลี่ยมซึ่งแรงลัพธ์จะอยู่ที่จุดศูนย์กลางของพื้นที่ที่รับแรง



(ก) ส่วนของคาน

(ข) หน้าตัดคาน

(ค) หน้าตัดเทียบเท่าคอนกรีต

ภาพที่ 6.19 คานคอนกรีตเสริมเหล็ก

ที่มา : Hearn E. J. 2000 : 72

หากกำหนดให้โมดูลัสยืดหยุ่นของเหล็กเป็น  $E_s$  และ โมดูลัสยืดหยุ่นของคอนกรีตเป็น  $E_c$  ค่าโมดูลัสยืดหยุ่นของวัสดุทั้งสองจะถูกใช้ในการหาหน้าตัดแปลงซึ่งมีคุณสมบัติเทียบเท่าคานคอนกรีต จากภาพที่ 6.19 ถ้ากำหนดให้ค่าคงที่  $n$  คือ  $E_s/E_c$  ความกว้างหน้าตัดคานคือ  $b$  ระยะจากผิวคานด้านบนถึงศูนย์กลางของเหล็กเสริมคือ  $d$  พื้นที่หน้าตัดเหล็กเสริมคือ  $A_s$  และร้อยละเหล็กเสริม  $p$  มีค่าเท่ากับ  $A_s/bd$  จากสมมูลโมเมนต์รอบระนาบสะเทินจะได้ว่าโมเมนต์ที่เกิดจากความเค้นอัดจะมีค่าเท่ากับโมเมนต์ที่เกิดจากความเค้นดึงดังสมการต่อไปนี้



$$fc' (bkd) \frac{kd}{2} = nA_s(d-kd)fc' \quad (6.13)$$

$$\text{ร้อยละเหล็กเสริม ; } p = \frac{A_s}{bd} \quad (6.14)$$

$$\text{แทนค่าจะได้ ; } (bkd) \frac{kd}{2} = npbd(d-kd) \quad (6.15)$$

$$k^2 + 2pnk - 2pn = 0 \quad (6.16)$$

$$k = \frac{\sqrt{(2pn)^2 + (4 \times 2pn)} - 2pn}{2} \quad (6.17)$$

$$k = \sqrt{2pn + (pn)^2} - pn \quad (6.18)$$

แรงอัด C กระทำกับคอนกรีตที่จุดศูนย์กลางของรูปสามเหลี่ยมความเค้นอัดที่ระยะ  $1/3$  ของ kd แรงต้าน T ที่เกิดขึ้นจะเป็นแรงดึง ดังนั้นสมดุลแรงในแนวราบมีดังสมการต่อไปนี้

$$C = T \quad (6.19)$$

$$\text{แขนของโมเมนต์ ; } jd = d - \frac{1}{3}(kd) = d(1 - \frac{1}{3}k) \quad (6.20)$$

$$j = 1 - \frac{k}{3} \quad (6.21)$$

$$\text{แรงอัดในคอนกรีต ; } C = bkd \times \frac{1}{2} fc' \quad (6.22)$$

$$\text{แรงดึงในเหล็ก ; } T = A_s \times fs \quad (6.23)$$

เมื่อ  $fc'$  คือความเค้นอัดที่ยอมให้ของคอนกรีตและ  $fs$  คือความเค้นดึงที่ยอมให้ของเหล็ก พิจารณาสมดุลโมเมนต์จะได้ว่าโมเมนต์ภายใน  $M_r$  จะเท่ากับโมเมนต์ดัด  $M$  ที่กระทำกับคานดังสมการต่อไปนี้

$$M = M_r \quad (6.24)$$

ค่าโมเมนต์ภายใน  $M_r$  สามารถสามารถคำนวณได้จากการนำแรงดึง T ที่เกิดขึ้นในเหล็ก คูณด้วยแขนโมเมนต์  $jd$  หรือสามารถคำนวณได้จากการนำแรงอัด C ที่เกิดขึ้นในคอนกรีต คูณด้วยแขนโมเมนต์  $jd$  ดังสมการต่อไปนี้

$$M_r = A_s \times fs \times jd \quad (6.25)$$

$$M_r = \frac{1}{2} \times (bkd) \times fc' \times jd \quad (6.26)$$

$$M_r = \frac{1}{2} \times fc' \times kjb d^2 \quad (6.27)$$

จากสมการด้านบนพบว่าความสามารถในการต้านทาน โมเมนต์ของคานคอนกรีตเสริมเหล็กขึ้นอยู่กับคุณสมบัติด้านกำลังของคอนกรีตและเหล็กเสริม ดังนั้นก่อนการคำนวณคานคอนกรีตเสริมเหล็กจึงต้องมีผลการทดสอบความแข็งแรงของคอนกรีตและเหล็กเสริมจากห้องปฏิบัติการเสียก่อน ตัวอย่างการผูกเหล็กเสริมในคานคอนกรีตเสริมเหล็กแสดงในภาพที่ 6.20 ซึ่งประกอบด้วยเหล็กแกนและเหล็กปลอก สำหรับตัวอย่างคานคอนกรีตเสริมเหล็กที่หล่อเสร็จแล้วและผ่านการทดสอบแรงเฉือนในห้องปฏิบัติการแสดงในภาพที่ 6.21



ภาพที่ 6.20 การผูกเหล็กเสริมในคานคอนกรีตเสริมเหล็ก

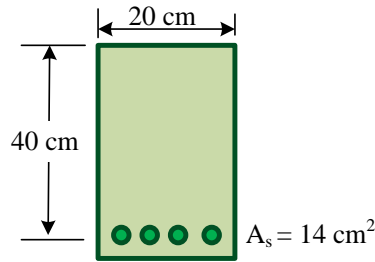
ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556



ภาพที่ 6.21 คานคอนกรีตเสริมเหล็กที่หล่อเสร็จแล้ว

ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

ตัวอย่างที่ 6.9 คานคอนกรีตเสริมเหล็กกว้าง 20 cm มีระยะจากผิวบนของคานถึงศูนย์กลางเหล็กเสริมเท่ากับ 40 cm มีพื้นที่หน้าตัดเหล็กเสริมเท่ากับ 14 cm<sup>2</sup> และมีค่าคงที่  $n = 20$  ดังแสดงในภาพที่ 6.22 จงหาความเค้นสูงสุดที่เกิดกับคอนกรีตและเหล็กเสริมเมื่อมีโมเมนต์ดัดขนาด 700,000 kg-cm กระทำกับคาน

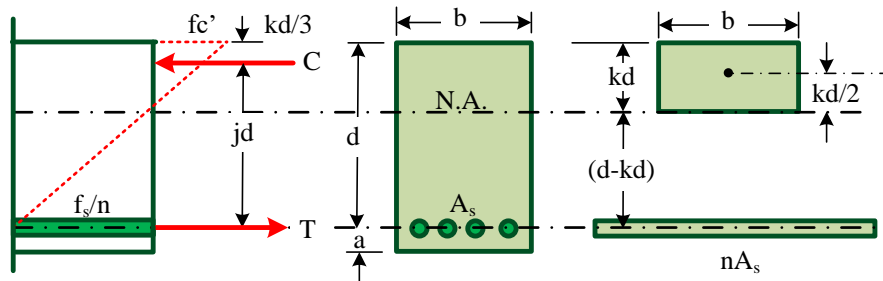


ภาพที่ 6.22 คานคอนกรีตเสริมเหล็ก

ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

วิธีทำ

แปลงพื้นที่หน้าตัดเหล็กให้เป็นคอนกรีต



ภาพที่ 6.23 หน้าตัดแปลงคานคอนกรีตเสริมเหล็ก

ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

จากนั้นพิจารณาสมดุลของโมเมนต์รอบระยะนาบสะเทินเพื่อหาระยะ kd

$$\begin{aligned}
 fc'(bkd) \frac{kd}{2} &= nA_s (d - kd) fc' \\
 \frac{20}{2} \times kd^2 &= 20 \times 14 \times (40 - kd) \\
 10kd^2 &= 11,200 - 280kd \\
 kd^2 + 28kd - 1,120 &= 0
 \end{aligned}$$

$$kd = \frac{-28 + \sqrt{28^2 + (4 \times 1,120)}}{2}$$

$$= 22.28 \text{ cm}$$

ระยะแขนโมเมนต์ ;  $jd = d - \frac{1}{3}(kd)$

$$= 40 - \left(\frac{1}{3} \times 22.28\right)$$

$$= 32.57 \text{ cm}$$

พิจารณาโมเมนต์ค้ดภายในที่เกิดจากแรงอัด C ในคอนกรีต

โมเมนต์ค้ดภายใน ;  $M_r = \frac{1}{2} \times (bkd) \times fc' \times jd$

$$700,000 = \frac{1}{2} \times (20 \times 22.28) \times fc' \times 32.57$$

ความเค้นสูงสุดในคอนกรีต ;  $fc' = \frac{700,000 \times 2}{20 \times 22.28 \times 32.57}$

$$= 96.46 \text{ kg/cm}^2$$

ตอบ

พิจารณาโมเมนต์ค้ดภายในที่เกิดจากแรงดึง T ในเหล็กเสริม

โมเมนต์ค้ดภายใน ;  $M_r = A_s fs \times jd$

$$700,000 = 14 \times fs \times 32.57$$

ความเค้นสูงสุดในเหล็ก ;  $fs = \frac{700,000}{14 \times 32.57}$

$$= 1,535.16 \text{ kg/cm}^2$$

ตอบ

**ตัวอย่างที่ 6.10** กานคอนกรีตเสริมเหล็กขนาด  $20 \times 40 \text{ cm}$  เสริมด้วยเหล็กเส้นพื้นที่หน้าตัด  $4 \text{ cm}^2$  ถ้ากำหนดให้ค่าคงที่  $n = 20$  ความเค้นอัดที่ยอมให้ของคอนกรีตเท่ากับ  $60 \text{ kg/cm}^2$  ความเค้นดึงที่ยอมให้ของเหล็กเส้นเท่ากับ  $1,200 \text{ kg/cm}^2$  และระยะคอนกรีตหุ้มเหล็กหนา  $5 \text{ cm}$  จงหาโมเมนต์ค้ดที่คานนี้สามารถรับได้อย่างปลอดภัย

### วิธีทำ

ระยะจากผิวบนของคานถึงศูนย์กลางเหล็กเสริมเท่ากับ  $d = 40 - 5 = 35 \text{ cm}$

ร้อยละเหล็กเสริม ;  $p = \frac{A_s}{bd}$

$$= \frac{4}{20 \times 35}$$

$$= 5.71 \times 10^{-3}$$

ดังนั้น  $pn = 20 \times 5.71 \times 10^{-3}$

$$= 0.114$$

$$\begin{aligned} k &= \sqrt{2pn + (pn)^2} - pn \\ &= \sqrt{(2 \times 0.114) + 0.114^2} - 0.114 \\ &= 0.377 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} j &= 1 - \frac{k}{3} \\ &= 1 - \frac{0.377}{3} \\ &= 0.874 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{โมเมนต์ที่คอนกรีตรับได้ ; } M_c &= \frac{1}{2} fc' \times k j b d^2 \\ &= \frac{1}{2} \times 60 \times 0.377 \times 0.874 \times 20 \times (35)^2 \\ &= 242,181.03 \text{ kg-cm หรือ } 2,421.81 \text{ kg-m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{โมเมนต์ที่เหล็กเสริมรับได้ ; } M_s &= A_s f_s j d \\ &= 4 \times 1,200 \times 0.874 \times 35 \\ &= 146,832 \text{ kg-cm หรือ } 1,468.32 \text{ kg-m} \end{aligned}$$

โมเมนต์ค้ดสูงสุดที่คานสามารถรับได้อย่างปลอดภัยคือ 1,468.32 kg-m ตอบ

### สรุปท้ายบท

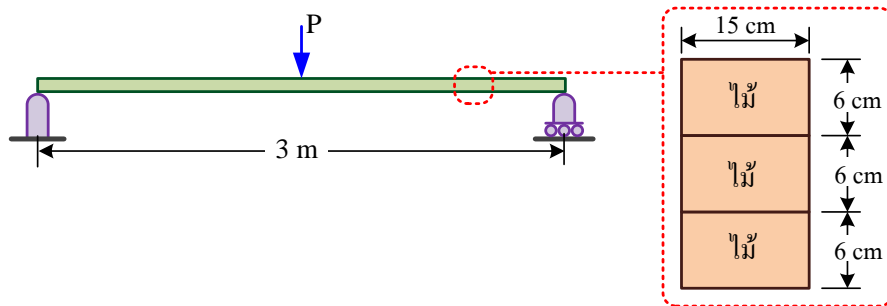
คานที่เกิดจากการนำวัสดุหลายชิ้นมาประกอบเข้าด้วยกันเพื่อต้านทานแรงที่เกิดขึ้น เรียกว่า คานประกอบ วิธีการย้ดวัสดุเหล่านั้นให้ติดกันอาจใช้กาว ตะปู สลักเกลียว หมุดย้ำ หรือ รอยเชื่อมก็ได้ นอกจากคุณสมบัติด้านความแข็งแรงของวัสดุที่นำมาใช้ทำชิ้นส่วนคานแล้วยัง ต้องทราบคุณสมบัติวัสดุที่นำมาใช้ย้ดด้วย การออกแบบคานประกอบจะต้องทราบแรงที่เกิดขึ้นกับ คานเพื่อนำแรงดังกล่าวไปออกแบบชิ้นส่วนที่จะนำมาประกอบเข้าด้วยกัน รูปแบบหน้าตัดคาน ประกอบมีหลากหลาย เช่น หน้าตัดรูปตัวไอ หน้าตัดรูปตัวที หรือหน้าตัดรูปกล่อง เป็นต้น

นอกจากคานประกอบที่ทำจากวัสดุชนิดเดียวกันแล้วยังมีคานอีกประเภทหนึ่งที่นำวัสดุ มากกว่าหนึ่งชนิดมาประกอบเข้าด้วยกันเพื่อให้สามารถต้านทานแรงได้มากขึ้น คานประเภทนี้ เรียกว่า คานเสริมกำลัง หรือ คานเชิงประกอบ เช่น คานไม้เสริมกำลังด้วยแผ่นเหล็ก หรือคาน คอนกรีตเสริมเหล็ก เป็นต้น โดยที่แผ่นเหล็กสามารถช่วยคานไม้รับแรงได้ดีขึ้น หรือเหล็กเสริม ช่วยให้คานคอนกรีตรับแรงได้ดีขึ้น สิ่งสำคัญในการคำนวณคานเสริมกำลังคือการทำให้เป็น หน้าตัดแปลง เมื่อได้หน้าตัดแปลงแล้วจึงสามารถใช้หลักการคำนวณของคานทั่วไปได้ สำหรับ คานคอนกรีตเสริมเหล็กเป็นคานเสริมกำลังประเภทหนึ่งที่ทำจากวัสดุหลัก 2 ชนิดคือคอนกรีต

และเหล็ก ปัจจุบันคานคอนกรีตเสริมเหล็กเป็นที่นิยมในการนำมาทำเป็น โครงสร้างอาคารและ  
สิ่งก่อสร้าง การที่นำวัสดุทั้งสองชนิดมาทำเป็นคานเนื่องจากคอนกรีตเป็นวัสดุที่สามารถรับ  
แรงอัดได้ดีแต่รับแรงดึงได้น้อยในขณะที่เหล็กเป็นวัสดุที่มีคุณสมบัติรับแรงดึงและรับแรงอัดได้  
ดี การคำนวณคานคอนกรีตเสริมเหล็กจะใช้หลักการคำนวณเดียวกับคานเสริมกำลังทั่วไป

## แบบฝึกหัดท้ายบท

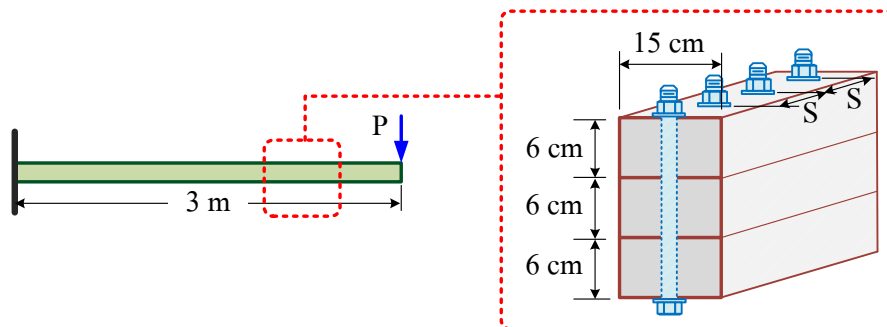
1. คานประกอบทำจากไม้ขนาด  $6 \times 15$  cm จำนวน 3 ท่อน ยึดติดกันด้วยกาวดังแสดงในภาพที่ 6.24 คานดังกล่าวยาว 3 m รับน้ำหนักที่กึ่งกลางคาน ถ้ากาวสามารถรับความเค้นเฉือนได้เท่ากับ  $5 \text{ kg/cm}^2$  จงหาว่าน้ำหนักสูงสุดที่คานนี้สามารถรับได้อย่างปลอดภัยมีค่าเท่าใดและจงหาความเค้นดัดสูงสุดที่เกิดขึ้น



ภาพที่ 6.24 คานประกอบทำด้วยไม้

ที่มา : จิรวัดณ์ วิมุติสุขวิริยา. 2556

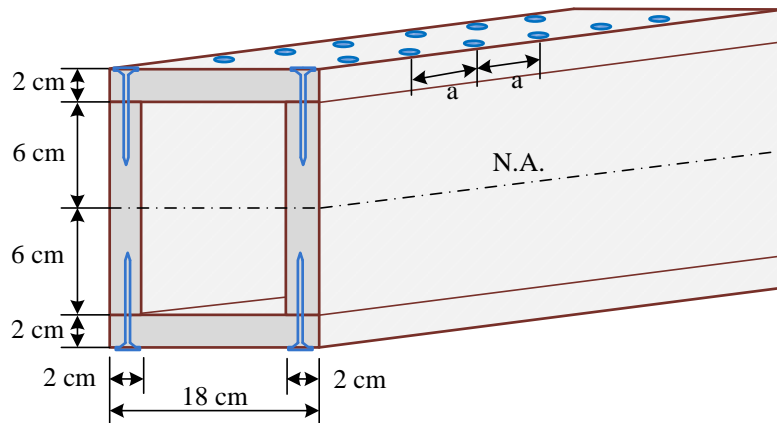
2. คานยื่นดังแสดงในภาพที่ 6.25 ทำจากไม้ขนาด  $6 \times 15$  cm จำนวน 3 ท่อน ยึดติดกันแน่นด้วยสลักเกลียวซึ่งสามารถรับแรงเฉือนได้ 2,500 kg ถ้าความเค้นอัดที่ได้รับได้เท่ากับ  $90 \text{ kg/cm}^2$  และความเค้นเฉือนที่ไม้รับได้เท่ากับ  $20 \text{ kg/cm}^2$  จงหาว่าน้ำหนักสูงสุดที่กระทำที่ปลายคานนี้และจงหาระยะห่างระหว่างสลักเกลียวที่ใช้ยึด ไม้ทั้ง 3 ท่อน



ภาพที่ 6.25 คานประกอบไม้ยึดติดกันแน่นด้วยสลักเกลียว

ที่มา : จิรวัดณ์ วิมุติสุขวิริยา. 2556

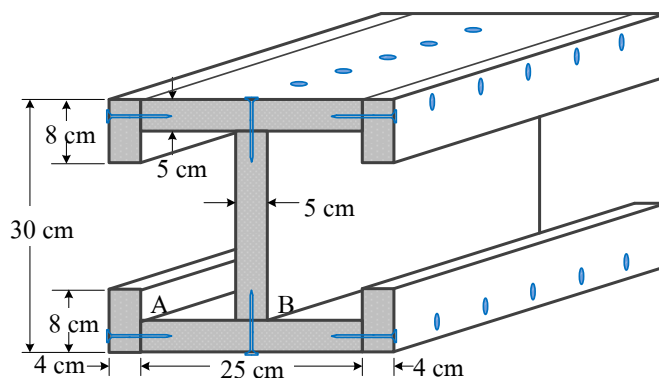
3. กานประกอบรูปกล่องสี่เหลี่ยมทำด้วยไม้ขนาด  $2 \times 12$  cm จำนวน 2 ท่อนในแนวตั้ง และไม้ขนาด  $2 \times 18$  cm จำนวน 2 ท่อนในแนวนอน ยึดติดกันด้วยตะปูดังแสดงในภาพที่ 6.26 ถ้าระยะห่างระหว่างตะปูเท่ากับ 3 cm และกานรับน้ำหนักในแนวดิ่ง 150 kg จงหาความเค้นเฉือนในตะปูแต่ละตัวและความเค้นเฉือนสูงสุดที่เกิดกับท่อนไม้



ภาพที่ 6.26 กานประกอบรูปกล่องสี่เหลี่ยมทำด้วยแผ่นไม้

ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

4. กานประกอบทำจากไม้และยึดด้วยตะปู โดยมีขนาดหน้าตัดดังแสดงในภาพที่ 6.27 กานนี้รับน้ำหนักในแนวดิ่ง 800 kg จงหาแรงเฉือนในตะปูที่จุดต่อ A และจุดต่อ B ซึ่งตอกทุกระยะ 3 cm ตลอดความยาวกาน

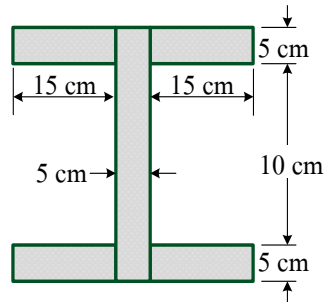


ภาพที่ 6.27 กานประกอบ

ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556



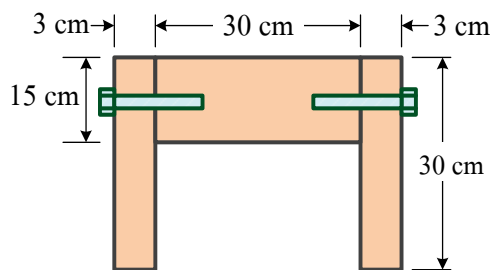
5. คานประกอบหน้าตัดรูปตัวไอดังแสดงในภาพที่ 6.28 ทำจากไม้จำนวน 5 ท่อนที่ยึดติดกันด้วยกาว ซึ่งกาวสามารถรับความเค้นเฉือนได้สูงสุด  $4 \text{ kg/cm}^2$  จงหาน้ำหนักสูงสุดที่กระทำในแนวดิ่งแล้วคานนี้สามารถรับได้อย่างปลอดภัย



ภาพที่ 6.28 คานประกอบทำจากไม้ยึดติดกันด้วยกาว

ที่มา : จิรวัดณ์ วิมุติสุขวิริยา. 2556

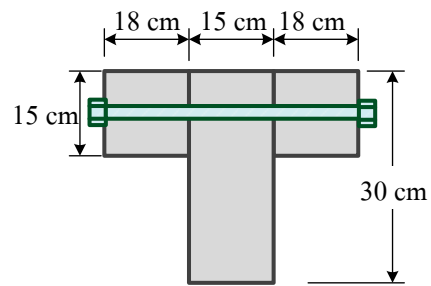
6. คานประกอบทำจากไม้ 3 ท่อน ยึดติดกันแน่นด้วยสลักเกลียวเส้นผ่าศูนย์กลาง 1 cm ทุกระยะ 20 cm ดังแสดงในภาพที่ 6.29 ถ้าคานนี้รับน้ำหนักในแนวดิ่ง 1,500 kg จงหาความเค้นเฉือนในสลักเกลียวแต่ละตัว



ภาพที่ 6.29 คานประกอบด้วยไม้สามแผ่น

ที่มา : จิรวัดณ์ วิมุติสุขวิริยา. 2556

7. คานประกอบหน้าตัดรูปตัวทีที่ทำจากไม้จำนวน 3 ท่อนยึดด้วยสลักเกลียวขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง 1.5 cm ทุกระยะ 20 cm ดังแสดงในภาพที่ 6.30 ถ้าคานนี้รับน้ำหนักในแนวดิ่ง 2,000 kg จงหาความเค้นเฉือนในสลักเกลียว



ภาพที่ 6.30 กานประกอบด้วยไม้สามแผ่นยึดติดกันแน่นด้วยสลักเกลียว  
ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

## เอกสารอ้างอิง

- เกรียงศักดิ์ อุคมสินโรจน์. (2540). **กลศาสตร์ของวัสดุ**. กรุงเทพฯ : มิตรนราการพิมพ์.
- ชาญ ถนัดงาน. (2523). **กลศาสตร์วัสดุ**. กรุงเทพฯ : สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้า  
วิทยาเขตพระนครเหนือ.
- มนตรี พิรุณเกษตร. (2544). **กลศาสตร์ของวัสดุ**. กรุงเทพฯ : วิทยพัฒน์.
- รุ่นพีวิศวกรรรม. (2541). **ความแข็งแรงของวัสดุ**. กรุงเทพฯ : สถาบันเทคโนโลยีราชมงคล.
- วินิต ช่อวิเชียร วรนิติ ช่อวิเชียร และวารเศรษฐ์ ช่อวิเชียร. (2548). **กำลังวัสดุ/กลศาสตร์วัสดุ**.  
กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- สมโพธิ วิวิธเกตุรงค์. (2542). **กลศาสตร์ของวัสดุ**. กรุงเทพฯ : ฟิสิกส์เซ็นเตอร์การพิมพ์.
- สุกิจ นามพิชญ์. (2541). **ความแข็งแรงของวัสดุ**. กรุงเทพฯ : ซีเอ็ดยูเคชั่น.
- สิทธิชัย แสงอาทิตย์. (2549). **กลศาสตร์ของวัสดุ**. นครราชสีมา : สาขาวิชาวิศวกรรมโยธา  
สำนักวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี.
- สิริศักดิ์ ปโยธรสิริ. (2549). **กลศาสตร์วัสดุ**. กรุงเทพฯ : ว.เพ็ชรสกุล.
- Ferdinand P. Beer, Russell Johnston, John T. DeWolf and David F. Mazurek. (2012).  
**Mechanics of Materials**. New York : Mc Graw Hill.
- Fire Tower Engineered Timber. (2007). **White Paper: Mechanically Laminated Beams**.  
Retrieved June 25, 2013, from <http://www.ftet.biz/index.php?action=resources>.
- Hearn E. J. (2000). **Mechanics of Materials 1: An Introduction to the Mechanics of Elastic  
and Plastic Deformation of Solids and Structural Materials**. Oxford : Butterworth-  
Heinemann.
- James M. Gere and Barry J. Goodno. (2012). **Mechanics of Materials**. Stamford : Cengage  
Learning.
- John Case, Lord Chilver and Carl T. F. Ross. (1999). **Strength of Materials and Structures**.  
London : Arnold.
- Joseph E. Shigley. (2004). **Mechanical Engineering Design**. New York : McGraw-Hill.
- The Timber Post. (2013). **Green Square**. Retrieved June 25, 2013, from  
<http://www.timberpost.com.au/public-spaces/green-square>.
- Timoshenko S. (1940). **Strength of Materials : Part I Elementary Theory and Problems**.  
New York : D. Van Nostrand Company, Inc.

**เอกสารอ้างอิง (ต่อ)**

Vitor Dias da Silva. (2006). **Mechanics and Strength of Materials**. Heidelberg : Springer-Verlag.

William A. Nash. (1998). **Theory and Problems of Strength of Materials**. New York : McGraw-Hill.

## แผนบริหารการสอนประจำบทที่ 7

### การโค้งของคาน

#### หัวข้อเนื้อหาประจำบท

1. การหาระยะ โคงของคานวิธีพื้นที่โมเมนต์
2. การหาระยะ โคงของคานวิธีอินทิเกรตสองชั้น
3. การหาระยะ โคงของคานวิธีซูเปอร์โพสิชัน
4. สรุปรายบท
5. แบบฝึกหัดท้ายบท

#### วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม

เมื่อนักศึกษาเรียนบทเรียนนี้แล้วสามารถ

1. อธิบายการ โคงของคานเมื่อรับน้ำหนักได้
2. อธิบายความชันของคานวิธีพื้นที่โมเมนต์ และแก้โจทย์ปัญหาที่เกี่ยวข้องได้
3. อธิบายการหาระยะ โคงของคานวิธีพื้นที่โมเมนต์และแก้โจทย์ปัญหาที่เกี่ยวข้องได้
4. อธิบายความชันของคานวิธีอินทิเกรตสองชั้น และแก้โจทย์ปัญหาที่เกี่ยวข้องได้
5. อธิบายการหาระยะ โคงของคานวิธีอินทิเกรตสองชั้น และแก้โจทย์ปัญหาที่เกี่ยวข้องได้
6. อธิบายความชันของคานวิธีซูเปอร์โพสิชัน และแก้โจทย์ปัญหาที่เกี่ยวข้องได้
7. อธิบายการหาระยะ โคงของคานวิธีซูเปอร์โพสิชัน และแก้โจทย์ปัญหาที่เกี่ยวข้องได้

#### วิธีสอนและกิจกรรมการเรียนการสอนประจำบท

1. บรรยายเนื้อหาในเอกสารประกอบคำสอน การถามและตอบในห้องเรียนร่วมกับการใช้สื่อประกอบอื่น เช่น สื่อแผ่นใส สื่อคอมพิวเตอร์ หรือสื่อวีดิทัศน์ เป็นต้น
2. แสดงตัวอย่างชิ้นงานคานเหล็กที่มีฐานรองรับรูปแบบต่าง ๆ สาธิตการโค้งตัวของคานภายใต้น้ำหนักกระทำ เช่น น้ำหนักกระทำจุดเดียว หรือน้ำหนักกระทำหลายจุด เป็นต้น
3. แสดงตัวอย่างการสร้างแบบจำลองชิ้นงาน โดยใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำเร็จรูป รวมถึงการแสดงผลรูปร่างการโค้งของคานภายใต้การรับน้ำหนัก

4. สาระที่ขึ้นตอนการแก้ปัญหาโจทย์ที่เกี่ยวข้องกับเนื้อหาในการเรียนการสอน เช่น ระยะเวลาและความชันของคานาวิธีพื้นที่โมเมนต์ ระยะเวลาและความชันของคานาวิธีอินทิเกรตสองชั้น และระยะเวลาและความชันของคานาวิธีซูเปอร์โพลีชั่น เป็นต้น

#### 5. มอบหมายงาน

5.1 ให้ผู้เรียนแต่ละคนแก้ปัญหาโจทย์ที่เกี่ยวข้องกับเนื้อหา เช่น ระยะเวลาและความชันของคานาวิธีพื้นที่โมเมนต์ ระยะเวลาและความชันของคานาวิธีอินทิเกรตสองชั้น และระยะเวลาและความชันของคานาวิธีซูเปอร์โพลีชั่น เป็นต้น

5.2 ให้ผู้เรียนแต่ละกลุ่มศึกษาเพิ่มเติมเกี่ยวกับการหาระยะโค้งและความชันของคานาที่ทำจากวัสดุวิศวกรรมสมัยใหม่และคานาที่ทำจากวัสดุในท้องถิ่น

5.3 ให้ผู้เรียนแต่ละคนทำแบบฝึกหัดจากคำถามท้ายบท เพื่อทดสอบความรู้ที่ได้เรียนมา

#### 6. ทำแบบฝึกหัดท้ายบท

### การวัดและประเมินผล

1. การสังเกตความสนใจของผู้เรียน
2. การฝึกปฏิบัติเกี่ยวกับการคำนวณปัญหาโจทย์
3. การทดสอบจากแบบทดสอบ
4. การประเมินผล ผู้เรียนจะต้องได้คะแนนรวมไม่ต่ำกว่าร้อยละ 60 จึงจะผ่านเกณฑ์การเรียนรู้

## บทที่ 7

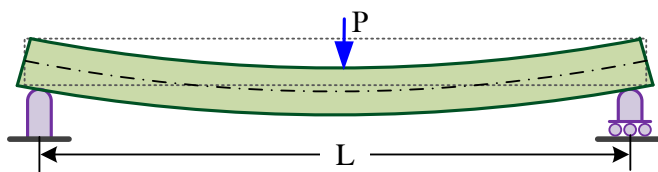
### การโก่งของคาน

ในขณะที่มีน้ำหนักกระทำต่อคานจะทำให้คานเกิดการโก่งตัวหรือแอ่นตัว (Deflection) การโก่งของคานอาจโก่งขึ้นหรือโก่งลงก็ได้ขึ้นอยู่กับทิศทางแรงที่กระทำและประเภทของฐานรองรับ การโก่งตัวของคานจะมากหรือน้อยขึ้นอยู่กับขนาดของน้ำหนัก คุณสมบัติหน้าตัดคาน และวัสดุที่ใช้ทำคาน ตามลำดับ การหาระยะโก่งของคานสามารถหาได้หลายวิธี สำหรับบทนี้จะขอนำเสนอวิธีที่พบเห็นทั่วไปได้แก่ วิธีโมเมนต์พื้นที่โมเมนต์ วิธีอินทิเกรตสองชั้น และวิธีซูเปอร์โพสิชัน ตามลำดับ

#### การหาระยะโก่งของคานวิธีพื้นที่โมเมนต์

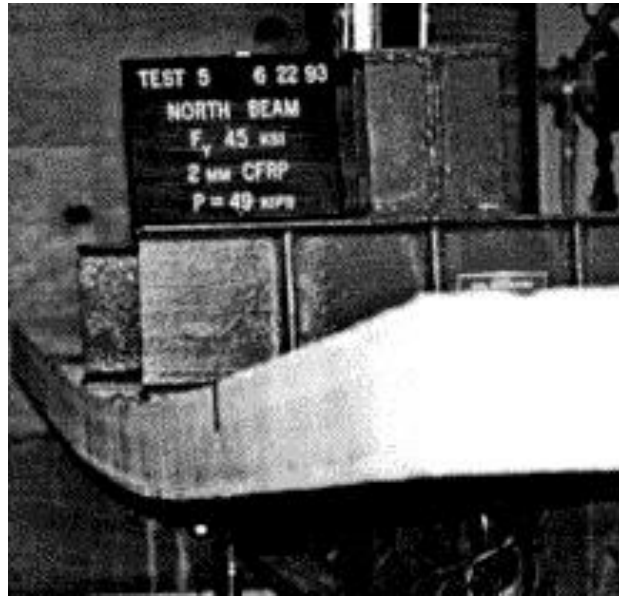
คานเมื่อรับน้ำหนักจะมีการโก่งตัวหรือแอ่นตัวดังแสดงในภาพที่ 7.1 การศึกษาการโก่งตัวมีความสำคัญต่อการออกแบบชิ้นส่วนจำพวกคาน เนื่องจากคานเมื่อรับน้ำหนักจะต้องมีระยะโก่งไม่มากกว่าข้อกำหนดที่ยอมให้ในมาตรฐานการออกแบบ เช่น คานที่โก่งตัวมากจะส่งผลทำให้ผู้อยู่อาศัยรู้สึกไม่สะดวกสบายและคานนั้นดูไม่สวยงาม เป็นต้น ในบางครั้งภายหลังจากการคำนวณและออกแบบคานแล้วยังจำเป็นต้องทำการทดสอบคานเพื่อตรวจสอบความสัมพันธ์ระหว่างการโก่งตัวและน้ำหนักที่กระทำดังแสดงในภาพที่ 7.2 มนตรี พิรุณเกษตร (2544 : 422-425) สมโพธิ์ วิวิธเกยูรวงศ์ (2542 : 253-257) และสิริศักดิ์ ปโยธรสิริ (2549 : 298-303) กล่าวว่า การหาระยะโก่งของคานวิธีพื้นที่โมเมนต์ (Moment Area Method) มีหลักการดังนี้คือ เมื่อคานมีน้ำหนักกระทำจะเกิดโมเมนต์คัตและแรงเฉือนขึ้นดังแสดงในภาพที่ 7.3 ถ้าคานโก่งภายใต้อิทธิพลโมเมนต์คัตและวัสดุอยู่ในสภาวะยืดหยุ่นพบว่า อัตราส่วนระหว่างโมเมนต์ความเฉื่อยของหน้าตัดคาน  $I$  ต่อรัศมีความโค้ง  $\rho$  จะมีค่าเท่ากับอัตราส่วนระหว่างโมเมนต์คัต  $M$  ต่อผลคูณของค่าโมดูลัสยืดหยุ่น  $E$  และโมเมนต์ความเฉื่อย  $I$  ดังสมการต่อไปนี้

$$\frac{I}{\rho} = \frac{M}{EI} \quad (7.1)$$



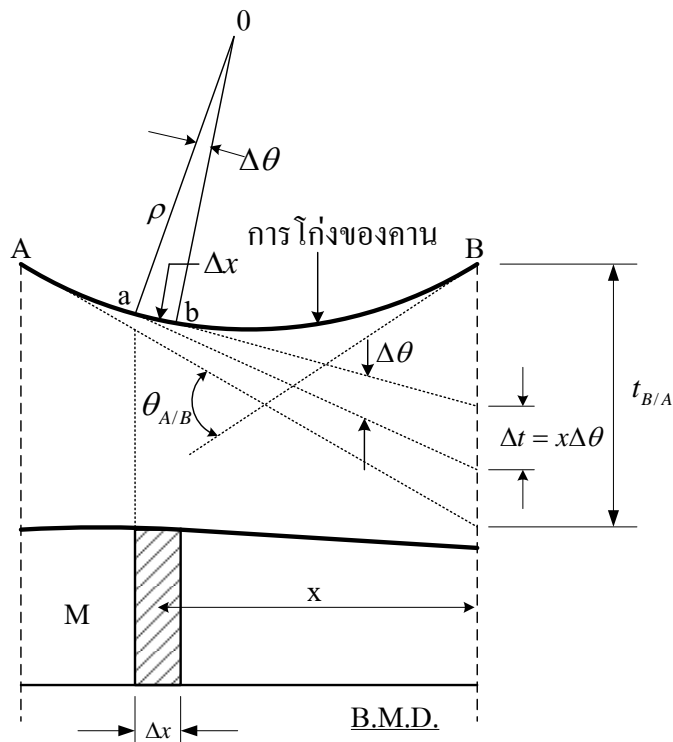
ภาพที่ 7.1 การโก่งของคานช่วงเดียวธรรมดาเมื่อรับน้ำหนัก

ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิทยา. 2556



ภาพที่ 7.2 การทดสอบการรับน้ำหนักของคาน

ที่มา : [Rajan Sen](#), [Larry Liby](#) and [Gray Mullins](#). 2001



ภาพที่ 7.3 การหาระยะโก่งของคาน

ที่มา : สิริศักดิ์ ปโยธรสิริ. 2549 : 282



จากภาพที่ 7.3 หากพิจารณาการโค้งของคาน AB พบว่าระยะชั้นส่วนขนาดเล็กของคานที่โค้งตัว  $\Delta x$  จะมีค่าใกล้เคียงกับผลคูณระหว่างความโค้ง  $\rho$  และมุม  $\Delta \theta$  ดังสมการต่อไปนี้

$$\text{ระยะชั้นส่วนขนาดเล็ก ; } \Delta x = \rho \Delta \theta \quad (7.2)$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\Delta \theta}{\Delta x} \quad (7.3)$$

เพราะฉะนั้นจะได้

$$\frac{\Delta \theta}{\Delta x} = \frac{M}{EI} \quad (7.4)$$

$$\text{มุมขนาดเล็ก ; } \Delta \theta = \frac{M \Delta x}{EI} \quad (7.5)$$

หากพิจารณาส่วนยาวของการโค้งซึ่งเป็นเส้นโค้งยืดหยุ่น (Elastic Curve) เพียงระยะสั้น  $\Delta x$  จะทำให้เกิดมุม  $\Delta \theta$  ที่จุด O ระหว่างเส้นที่ลากตั้งฉากกับเส้นสัมผัสโค้ง (Tangent) ที่จุด a และจุด b ถ้าคิดความยาวของเส้นโค้งยืดหยุ่นระหว่างแนว A และแนว B จะได้ว่ามุมระหว่างเส้นสัมผัสโค้งที่จุด A กับแนวเส้นสัมผัสโค้งที่จุด B เป็นมุม  $\theta_{A/B}$  สามารถเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$\theta_{A/B} = \frac{\sum M \Delta x}{EI} = \frac{I}{EI} \sum M \Delta x \quad (7.6)$$

เมื่อ  $\sum M \Delta x$  คือพื้นที่ใต้โมเมนต์คัตระหว่างจุด A และจุด B จากแผนภาพโมเมนต์คัต มุมระหว่างเส้นสัมผัสโค้งที่จุด A ลากตรงไปเทียบกับจุด B บนเส้นโค้งยืดหยุ่นจะมีค่าเท่ากับพื้นที่ใต้เส้นโค้งโมเมนต์คัตในช่วง AB หากด้วย EI เมื่อ  $\Delta t$  เป็นระยะแตกต่างระหว่างเส้นสัมผัสโค้งที่จุด a และ b มายังแนวที่ผ่านจุด B ในแนวตั้ง ซึ่ง  $\Delta t$  เท่ากับ  $x \Delta \theta$  เมื่อกำหนดให้  $t_{B/A}$  เป็นระยะในแนวตั้งที่จุด B ซึ่งเกิดจากปลายเส้นสัมผัสโค้งที่จุด A ถึงฐานรองรับที่จุด B และค่า  $t_{B/A}$  คือผลรวมของ  $\Delta t$  ตลอดระยะการโค้งตัวจากจุด A ถึงจุด B ซึ่งเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

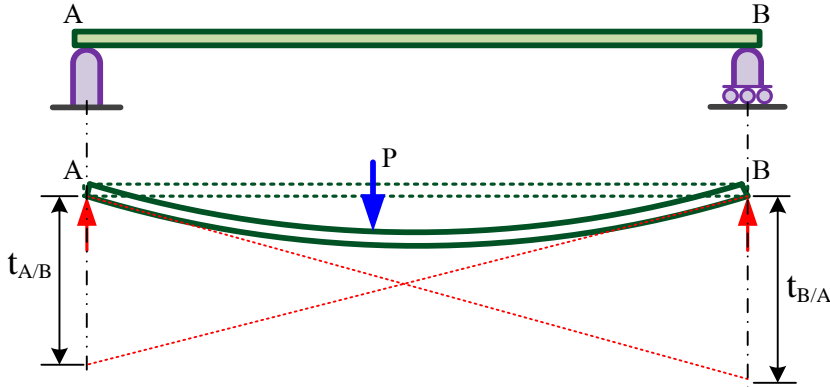
$$t_{B/A} = \sum_A^B \Delta t = \sum_A^B x \Delta \theta \quad (7.7)$$

$$t_{B/A} = \sum_A^B x \left( \frac{M \Delta x}{EI} \right) \quad (7.8)$$

$$t_{B/A} = \frac{I}{EI} \sum_A^B x (M \Delta x) \quad (7.9)$$

เมื่อ  $\sum_A^B x (M \Delta x)$  คือค่าพื้นที่ของโมเมนต์คัตระหว่างจุด A ไปถึงจุด B ตามแนวแกนตั้งที่ลากผ่านจุด B เมื่อกำหนดให้  $t_{A/B}$  คือระยะแนวตั้งที่วัดจากจุด A ถึงปลายเส้นสัมผัสโค้งที่ลากจากจุด

B และ  $t_{B/A}$  คือระยะแนวตั้งที่วัดจากจุด B ถึงเส้นสัมผัสโค้งที่ลากจากจุด A ดังแสดงในภาพที่ 7.4 หรือเขียนเป็นสมการได้ดังต่อไปนี้



ภาพที่ 7.4 ระยะการโก่งตัวของจุดต่างๆ บนคาน

ที่มา : จีรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

$$t_{A/B} = \frac{1}{EI} (\text{พื้นที่โมเมนต์})_{AB} \bar{X}_A \quad (7.10)$$

$$t_{B/A} = \frac{1}{EI} (\text{พื้นที่โมเมนต์})_{AB} \bar{X}_B \quad (7.11)$$

เมื่อ  $\bar{X}_A$  คือระยะระหว่างจุดศูนย์กลางถ่วงของพื้นที่โมเมนต์ช่วง AB ถึงจุด A และ  $\bar{X}_B$  คือระยะระหว่างจุดศูนย์กลางถ่วงของพื้นที่โมเมนต์ช่วง AB ถึงจุด B หรือ  $t_{A/B}$  เป็นระยะแนวตั้งจากจุด A ไปยังเส้นโค้งยึดหยุ่นของคานเบี่ยงเบนไปจากแนวเส้นสัมผัสที่ลากจากจุด B จะมีค่าเท่ากับโมเมนต์ของพื้นที่ของแผนภาพโมเมนต์คดหารด้วย EI

ตัวอย่างที่ 7.1 คานยื่นทำจากไม้มีน้ำหนักกระทำ 100 kg ดังแสดงในภาพที่ 7.5 จงคำนวณหา ระยะโก่งสูงสุดของคานและมุมที่เส้นสัมผัสโค้งสัมผัสจุด A กำหนดให้ไม้มีค่าโมดูลัสยึดหยุ่น  $E = 1.05 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$  และหน้าตัดคานมีค่าโมเมนต์ความเฉื่อย  $I = 26,000 \text{ cm}^4$

### วิธีทำ

ระยะโก่งที่ปลายคาน ;

$$y_{\max} = t_{A/B}$$

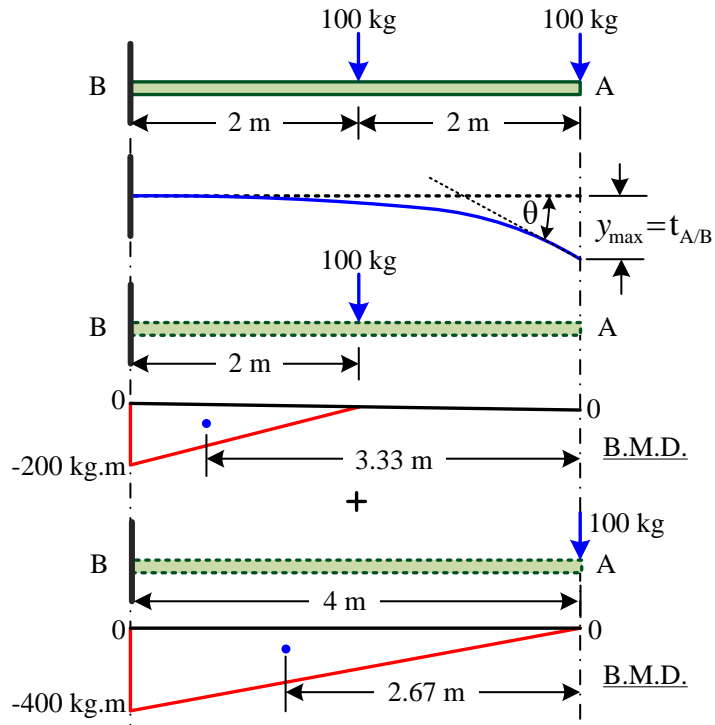
$$= \frac{1}{EI} (\text{พื้นที่โมเมนต์})_{AB} \bar{X}_A$$

$$= \frac{I}{EI} \left( \left( \frac{-200 \times (200 \times 100)}{2} \right) \times 3.33 \times 100 \right) + \frac{I}{EI} \left( \left( \frac{-400 \times (400 \times 100)}{2} \right) \times 2.67 \times 100 \right)$$

$$= -\frac{2.802 \times 10^9}{1.05 \times 10^5 \times 26,000}$$

$$= -1.026 \text{ cm (โก่งลง)}$$

ตอบ



ภาพที่ 7.5 คานไม้อื่นรับน้ำหนัก

ที่มา : จีรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

มุมเส้นสัมผัสโค้งที่จุด A หาได้จากผลรวมระหว่างมุมที่คานยื่นรับน้ำหนักกระทำ 100 kg ที่ระยะ 2 m และมุมที่คานยื่นรับน้ำหนักกระทำ 100 kg ที่ระยะ 4 m

$$\text{มุมเส้นสัมผัสโค้งที่ A ; } \theta = \frac{1}{EI} (\text{พื้นที่เมนต์})_{AB}$$

$$= \frac{1}{EI} \left( \frac{-200 \times (200 \times 100)}{2} \right) + \frac{1}{EI} \left( \frac{-400 \times (400 \times 100)}{2} \right)$$

$$= -\frac{10 \times 10^6}{1.05 \times 10^5 \times 26,000}$$

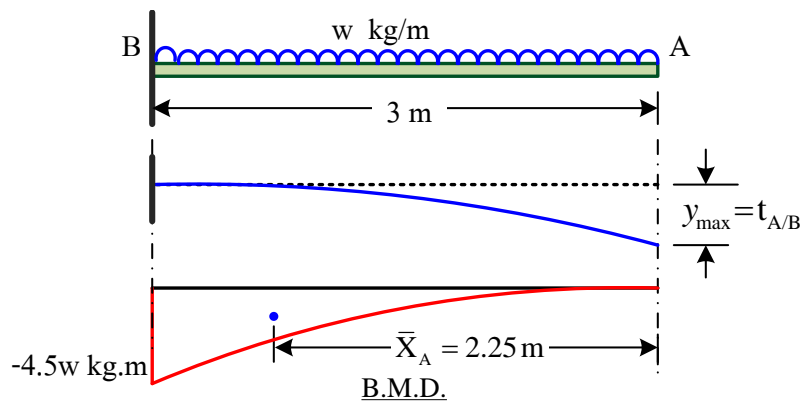
$$= -3.66 \times 10^{-3} \text{ rad (ทวนเข็มนาฬิกา)}$$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 7.2 คานยื่น AB มีน้ำหนักกระทำแผ่กระจายสม่ำเสมอตลอดความยาวคานดังแสดงในภาพที่ 7.6 จงหาน้ำหนักแผ่กระจายสม่ำเสมอที่คานยื่นนี้รับได้อย่างปลอดภัย ถ้ากำหนดให้ระยะโคงที่ปลายคานยื่นต้องไม่เกิน 3 cm ค่าโมดูลัสยืดหยุ่นของวัสดุ  $E = 1.05 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$  และโมเมนต์ความเฉื่อยหน้าตัด  $I = 2,100 \text{ cm}^4$

### วิธีทำ

หาแรงปฏิกิริยาที่ฐานรองรับและสร้างแผนภาพโมเมนต์ค้ำของคานยื่น



ภาพที่ 7.6 คานยื่นรับน้ำหนักบรรทุก

ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

$$\begin{aligned} \text{พื้นที่โมเมนต์ AB ;} \quad A_{AB} &= \frac{1}{3} \times 3 \times 100 \times (-4.5w) \times 100 \\ &= -45,000 w \end{aligned}$$

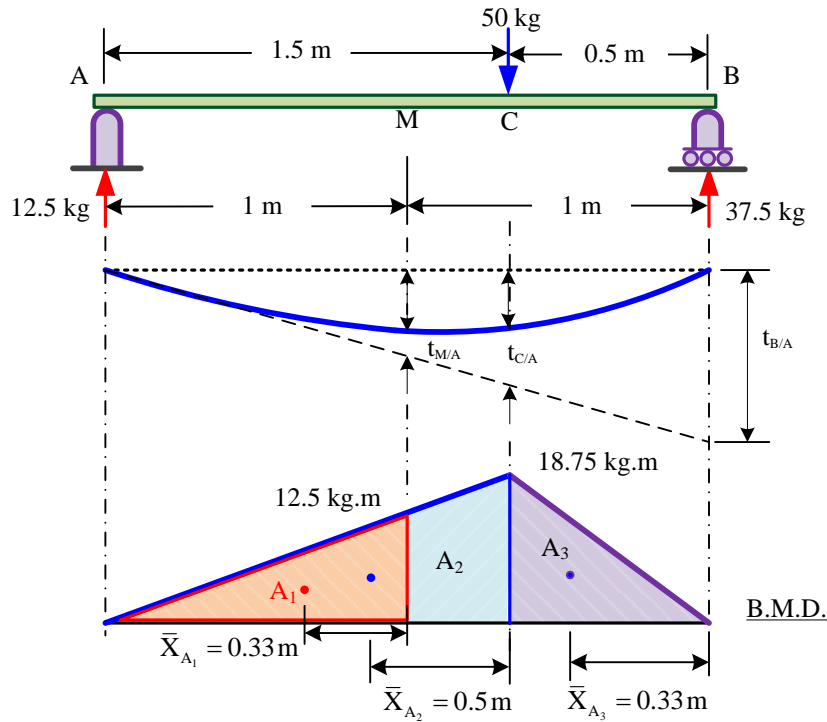
$$\begin{aligned} \text{ระยะศูนย์กลางถึงจุด A ;} \quad \bar{X}_A &= \frac{3}{4} \times 3 \times 100 \\ &= 225 \text{ cm} \end{aligned}$$

ระยะโคงตัวสูงสุดที่ปลายคาน  $y_{\max} = 3 \text{ cm}$  จะได้

$$\begin{aligned} \text{ระยะโคงที่ปลายคานยื่น ;} \quad y_{\max} &= t_{A/B} \\ t_{A/B} &= \frac{1}{EI} A_{AB} \bar{X}_A \\ 3 &= - \frac{45,000w \times 225}{1.05 \times 10^5 \times 2,100} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{น้ำหนักแผ่สม่ำเสมอ ;} \quad w &= \frac{3 \times 1.05 \times 10^5 \times 2,100}{45,000 \times 225} \\ &= 65.33 \text{ kg/cm หรือ } 6,533 \text{ kg/m} \quad \text{ตอบ} \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 7.3 คานช่วงเดียวธรรมดา AB มีน้ำหนักกระทำ 50 kg ดังแสดงในภาพที่ 7.7 จงหา  
 ระยะโก่งของคานที่จุด M และจุด C กำหนดให้ค่าโมดูลัสยืดหยุ่นของวัสดุ  $E = 1.05 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$   
 และโมเมนต์ความเฉื่อยหน้าตัดคาน  $I = 3,000 \text{ cm}^4$



ภาพที่ 7.7 คานรับน้ำหนักกระทำแบบจุด

ที่มา : จีรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

**วิธีทำ**

หาแรงปฏิกิริยาที่ฐานรองรับและสร้างแผนภาพโมเมนต์ค้ดของคาน

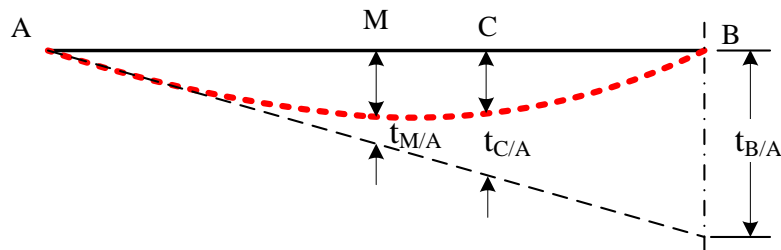
พื้นที่โมเมนต์ค้ด ;  $A_1 = \frac{1}{2} \times 1 \times 12.5$   
 $= 6.25 \text{ kg.m}^2$  หรือ  $6.25 \times 10^4 \text{ kg.cm}^2$

พื้นที่โมเมนต์ค้ด ;  $A_2 = \frac{1}{2} \times 1.5 \times 18.75$   
 $= 14.06 \text{ kg.m}^2$  หรือ  $14.06 \times 10^4 \text{ kg.cm}^2$

พื้นที่โมเมนต์ค้ด ;  $A_3 = \frac{1}{2} \times 0.5 \times 18.75$   
 $= 4.69 \text{ kg.m}^2$  หรือ  $4.69 \times 10^4 \text{ kg.cm}^2$

ระยะในแนวตั้งจากเส้นสัมผัสโค้งถึงแนวโก่งของคาน

$$\begin{aligned}
 t_{B/A} &= \frac{1}{EI} A_{AB} \bar{X}_B \\
 &= \frac{I}{EI} \left( 14.06 \times 10^4 \times (0.5 + 0.5) \times 100 \right) + \frac{I}{EI} \left( 4.69 \times 10^4 \times 0.33 \times 100 \right) \\
 &= \frac{15.61 \times 10^6}{1.05 \times 10^5 \times 3,000} \\
 &= 0.0496 \text{ cm} \\
 t_{M/A} &= \frac{1}{EI} A_{AM} \bar{X}_M \\
 &= \frac{I}{EI} \left( 6.25 \times 10^4 \times 0.33 \times 100 \right) \\
 &= \frac{2.06 \times 10^6}{1.05 \times 10^5 \times 3,000} \\
 &= 0.0065 \text{ cm} \\
 t_{C/A} &= \frac{1}{EI} (\text{พื้นที่โมเมนต์})_{AC} \bar{X}_C \\
 &= \frac{I}{EI} \left( 14.06 \times 10^4 \times 0.5 \times 100 \right) \\
 &= \frac{7.03 \times 10^6}{1.05 \times 10^5 \times 3,000} \\
 &= 0.0223 \text{ cm}
 \end{aligned}$$



ภาพที่ 7.8 การโก่งของคานเมื่อรับน้ำหนัก

ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิทยา. 2556

ระยะการโก่งตัวที่จุด M ;

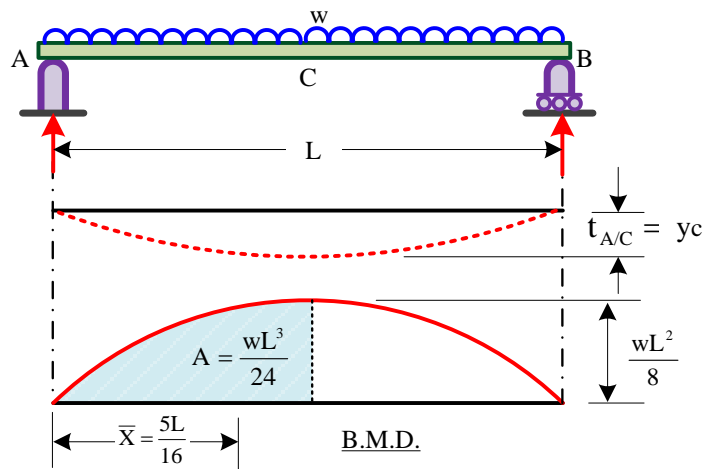
$$\begin{aligned}
 y_M &= \left( \frac{t_{B/A} \times 1}{2} \right) - t_{M/A} \\
 &= \left( \frac{0.0496 \times 1}{2} \right) - 0.0065 \\
 &= 0.0183 \text{ cm หรือ } 0.183 \text{ mm} \quad \text{ตอบ}
 \end{aligned}$$

ระยะการโก่งตัวที่จุด C ;

$$y_C = \left( \frac{t_{B/A} \times 1.5}{2} \right) - t_{C/A}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left( \frac{0.0496 \times 1.5}{2} \right) - 0.0223 \\
 &= 0.0149 \text{ cm หรือ } 0.149 \text{ mm} \quad \text{ตอบ}
 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 7.4 คานช่วงเดียวธรรมดา AB ยาว L มีน้ำหนักแผ่กระจายสม่ำเสมอตลอดความยาว คานดังแสดงในภาพที่ 7.9 จงหาระยะโค้งที่กึ่งกลางคาน กำหนดให้คานมีค่า EI คงที่ตลอดความยาวคาน



ภาพที่ 7.9 การโค้งตัวของคานเมื่อมีน้ำหนักกระทำสม่ำเสมอ  
ที่มา : จีรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

**วิธีทำ**

หาแรงปฏิกิริยาที่ฐานรองรับและสร้างแผนภาพโมเมนต์คัตของคาน

พื้นที่โมเมนต์คัตกึ่งกลางคาน ;  $A = \int_0^{L/2} \left( \frac{wLx}{2} - \frac{wx^2}{2} \right) dx$

$$\begin{aligned}
 &= \left[ \frac{wLx^2}{4} - \frac{wx^3}{6} \right]_0^{L/2} \\
 &= \frac{wL^3}{16} - \frac{wL^3}{48} \\
 &= \frac{wL^3}{24} \\
 \frac{wL^3}{24} \bar{X} &= \int_0^{L/2} \left( \frac{wLx}{2} - \frac{wx^2}{2} \right) x dx
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[ \left( \frac{wLx^3}{6} - \frac{wx^4}{8} \right) \right]_0^{L/2} \\
&= \frac{wL^4}{48} - \frac{wL^4}{128} \\
&= \frac{5wL^4}{384} \\
\text{ระยะถึงศูนย์กลางพื้นที่โมเมนต์ ; } \bar{X} &= \left( \frac{5 \times 24}{384} \right) L \\
&= \frac{5L}{16} \\
\text{ระยะ โคง่ตัวกึ่งกลางคาน ; } y_c &= t_{AC} \\
&= \frac{A\bar{X}}{EI} \\
&= \frac{wL^3}{24} \times \frac{5L}{16} \\
&= \frac{5wL^4}{384EI}
\end{aligned}$$

ตอบ

### การหาระยะโค้งของคานวิธีอินทิเกรตสองชั้น

การหาระยะโค้งของคานวิธีอินทิเกรตสองชั้น (Double Integration Method) เป็นวิธีการหาระยะโค้งของคานที่ใช้หลักการของสมการอนุพันธ์เส้นโค้งยืดหยุ่น ลีร์สค์ดี ปโยทริสรี (2549 : 284-285) Ferdinand P. Beer, et al. (2012 : 600-617, 623-630) และ James M. Gere and Barry J. Goodno (2012 : 486-502) กล่าวว่าขั้นตอนการหาระยะโค้งวิธีอินทิเกรตสองชั้นเริ่มต้นจากการพิจารณาคานเมื่อมีน้ำหนักมากระทำจนเกิดโมเมนต์คด ค่าโมเมนต์คดที่ระยะ  $x$  ใด ๆ ในแนวราบสามารถเขียนในรูปของสมการที่มี  $x$  เป็นตัวแปรหรือฟังก์ชัน  $f(x)$  สมการโมเมนต์คดนี้จะมีความสัมพันธ์กับการโค้งตัวของคานที่ระยะในแนวราบ  $x$  หากกำหนดให้  $y$  เป็นระยะโค้งจากเส้นโค้งยืดหยุ่นถึงสภาวะเริ่มต้นของคานพบว่า ระยะในแนวโค้ง  $y$  คือระยะโค้งของคานที่สัมพันธ์กับระยะในแนวราบ  $x$  ด้วยเช่นกัน การคำนวณค่าระยะโค้ง  $y$  มีค่าเท่ากับการอินทิเกรตสมการความชัน โดยที่ความชันของเส้นโค้งจะมีค่าเท่ากับการอินทิเกรตสมการโมเมนต์คดในคาน ดังนั้นระยะโค้ง  $y$  จึงมีค่าเท่ากับการอินทิเกรตสองชั้นฟังก์ชันโมเมนต์คดของคาน หรือในทางกลับกันค่าโมเมนต์คดมีค่าเท่ากับสมการอนุพันธ์อันดับสองของฟังก์ชันระยะโค้ง  $y$  การหาระยะโค้งวิธีอินทิเกรตสองชั้นมีขั้นตอนดังต่อไปนี้



1. สร้างสมการโมเมนต์คัต  $M$  แต่ละช่วงของคานที่สัมพันธ์กับน้ำหนักในรูปฟังก์ชันของตัวแปรระยะในแนวราบ  $x$  หรือ  $M = f(x)$

2. อินทิเกรตสมการโมเมนต์คัต  $M$  ครั้งที่หนึ่งจะได้คำตอบเป็นสมการความชัน  $\frac{dy}{dx}$  ของเส้นโค้งและค่าคงที่  $C_1$  ดังสมการต่อไปนี้

$$\text{ความชันเส้นโค้ง ; } \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{EI} \left\{ \int M dx + C_1 \right\} = \tan \theta \quad (7.12)$$

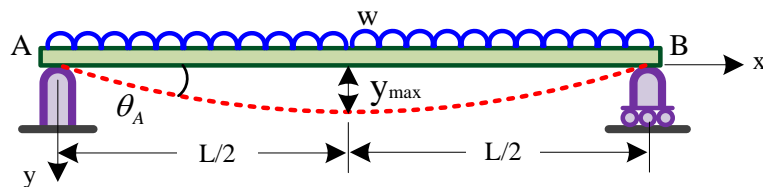
3. อินทิเกรตสมการโมเมนต์คัต  $M$  ครั้งที่สอง หรืออินทิเกรตสมการความชัน  $\frac{dy}{dx}$  ของเส้นโค้งจะได้คำตอบเป็นสมการของระยะโค้ง  $y$  และค่าคงที่  $C_2$  ดังสมการ

$$\text{ระยะโค้งของคาน ; } \quad y = \frac{1}{EI} \left\{ \iint M dx + C_1 x + C_2 \right\} \quad (7.13)$$

4. หาค่าคง  $C_1$  และ  $C_2$  โดยอาศัยการแก้สมการจากเงื่อนไขการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของคาน ณ ตำแหน่งที่ทราบค่า (Boundary Conditions) โดยจำนวนเงื่อนไขจะต้องมีจำนวนเท่ากับจำนวนค่าคงที่ที่ต้องการหา ยกตัวอย่างเช่น กรณีคานยื่นที่มีฐานยึดแน่นจะพบว่าความชัน  $\frac{dy}{dx}$  และระยะโค้ง  $y$  มีค่าเป็นศูนย์ ณ ตำแหน่งฐานยึดแน่น เป็นต้น

5. นำค่าคงที่  $C_1$  และ  $C_2$  ที่ได้จากขั้นตอนก่อนหน้าไปแทนในสมการความชันเส้นโค้ง  $\frac{dy}{dx}$  และระยะโค้งตัว  $y$  ก็จะได้สมการที่อยู่ในรูปตัวแปรของระยะในแนวราบ  $x$

**ตัวอย่างที่ 7.5** คานช่วงเดียวธรรมดารับน้ำหนักแผ่กระจายสม่ำเสมอตลอดความยาวคานดังแสดงในภาพที่ 7.10 จงหาสมการความชันและสมการระยะโค้งของคานที่อยู่ในรูปตัวแปรของระยะในแนวราบและจงหาสมการความชันสูงสุดและสมการระยะโค้งสูงสุด กำหนดให้คานมีค่า  $EI$  เท่ากันตลอดความยาว



**ภาพที่ 7.10** คานช่วงเดียวธรรมดารับน้ำหนักแผ่กระจายสม่ำเสมอ

ที่มา : จีรวัดน์ วิศวกรรมศาสตรบัณฑิต. 2556

## วิธีทำ

$$\text{แรงปฏิกิริยาที่ฐานรองรับ A ; } R_A = \frac{wL}{2}$$

$$\text{แรงปฏิกิริยาที่ฐานรองรับ B ; } R_B = \frac{wL}{2}$$

$$\text{โมเมนต์คัตที่ระยะ } x \text{ จาก A ; } M = \frac{wLx}{2} - \frac{wx^2}{2}$$

จากสมการ โมเมนต์คัตซึ่งมีค่าเท่ากับสมการอนุพันธ์อันดับสองของระยะโค้งจะได้

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = M$$

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{wLx}{2} - \frac{wx^2}{2}$$

$$\text{จาก } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{EI} \left\{ \int M dx + C_1 \right\}$$

$$EI \frac{dy}{dx} = \frac{wLx^2}{4} - \frac{wx^3}{6} + C_1$$

$$\text{จาก } y = \frac{1}{EI} \left\{ \iint M dx + C_1 x + C_2 \right\}$$

$$EI y = \frac{wLx^3}{12} - \frac{wx^4}{24} + C_1 x + C_2$$

หา  $C_1$  จากการพิจารณาที่จุดกึ่งกลางคาน  $x = L/2$  จะมีค่าความชันเท่ากับศูนย์หรือ  $\frac{dy}{dx} = 0$

$$0 = \frac{wL^3}{16} - \frac{wL^3}{48} + C_1$$

$$C_1 = -\frac{wL^3}{24}$$

หา  $C_2$  จากการพิจารณาฐานรองรับ A ที่  $x = 0$  จะมีค่าระยะโค้งเท่ากับศูนย์หรือ  $y = 0$

$$C_2 = 0$$

แทนค่า  $C_1$  และ  $C_2$  ลงในสมการความชันและระยะโค้งของคานจะได้

$$\text{สมการความชัน ; } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{EI} \left( \frac{wLx^2}{4} - \frac{wx^3}{6} - \frac{wL^3}{24} \right) \quad \text{ตอบ}$$

$$\text{สมการระยะโค้ง ; } y = \frac{1}{EI} \left( \frac{wLx^3}{12} - \frac{wx^4}{24} - \frac{wL^3x}{24} \right) \quad \text{ตอบ}$$

ระยะโค้งสูงสุดเกิดขึ้นเมื่อ  $\frac{dy}{dx} = 0$  ที่  $x = L/2$

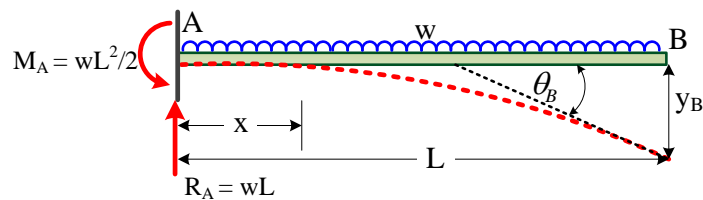
$$\begin{aligned} \text{ระยะโค้งสูงสุด ; } y_{\max} &= \frac{1}{EI} \left( \frac{wL^4}{96} - \frac{wL^4}{384} - \frac{wL^4}{48} \right) \\ &= -\frac{5wL^4}{384EI} \quad (\text{โค้งลง}) \quad \text{ตอบ} \end{aligned}$$

ความชันสูงสุดเกิดขึ้นที่จุดรองรับ  $x = 0$

ความชันสูงสุดที่ A ;  $\frac{dy}{dx} = -\frac{wL^3}{24EI}$  (ตามเข็มนาฬิกา) ตอบ

หรือ  $\theta_A = \tan^{-1}\left(\frac{dy}{dx}\right)$   
 $= \tan^{-1}\left(-\frac{wL^3}{24EI}\right)$  ตอบ

ตัวอย่างที่ 7.6 คานยื่นรับน้ำหนักกระจายสม่ำเสมอแสดงในภาพที่ 7.11 จงหาค่าความชันสูงสุดและระยะ โคง่สูงสุดของคาน กำหนดให้คานมีค่า EI เท่ากันตลอดความยาว



ภาพที่ 7.11 การโค้งตัวของคานยื่นรับน้ำหนักแผ่กระจายสม่ำเสมอ

ที่มา : จีรวัดน์ วิศวกรรมศาสตรบัณฑิต, 2556

วิธีทำ

แรงปฏิกิริยาที่ฐานรองรับ ;  $R_A = wL$

โมเมนต์คัตที่ระยะ  $x$  จาก A ;  $M_x = wLx - \frac{wx^2}{2} - \frac{wL^2}{2}$

จากสมการโมเมนต์คัตซึ่งมีค่าเท่ากับสมการอนุพันธ์อันดับสองของระยะ โคง่จะได้

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = M_x$$

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = wLx - \frac{wx^2}{2} - \frac{wL^2}{2}$$

จาก  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{EI} \left\{ \int M dx + C_1 \right\}$

$$EI \frac{dy}{dx} = \frac{wLx^2}{2} - \frac{wx^3}{6} - \frac{wL^2x}{2} + C_1$$

จาก  $y = \frac{1}{EI} \left\{ \iint M dx + C_1x + C_2 \right\}$

$$EIy = \frac{wLx^3}{6} - \frac{wx^4}{24} - \frac{wL^2x^2}{4} + C_1x + C_2$$

พิจารณาฐานรองรับ A ที่  $x = 0$  จะมีค่าความชันเท่ากับศูนย์หรือ  $\frac{dy}{dx} = 0$

$$C_1 = 0$$

พิจารณาฐานรองรับ A ที่  $x = 0$  จะมีค่าระยะโก่งเท่ากับศูนย์หรือ  $y = 0$

$$C_2 = 0$$

แทนค่า  $C_1$  และ  $C_2$  ลงในสมการความชันและระยะโก่งของคานจะได้

สมการความชัน ; 
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{EI} \left( \frac{wLx^2}{2} - \frac{wx^3}{6} - \frac{wL^2x}{2} \right)$$

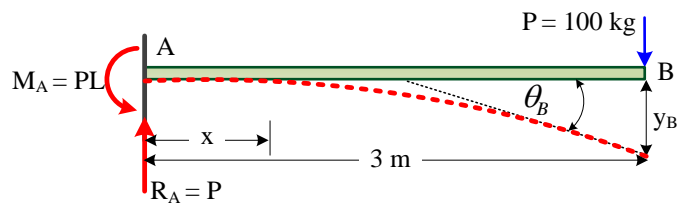
สมการระยะโก่ง ; 
$$y = \frac{1}{EI} \left( \frac{wLx^3}{6} - \frac{wx^4}{24} - \frac{wL^2x^2}{4} \right)$$

ค่าความชันสูงสุดและระยะโก่งสูงสุดเกิดขึ้นที่ปลาย B ที่  $x = L$

ความชันสูงสุดที่ B ; 
$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{EI} \left( \frac{wL^3}{2} - \frac{wL^3}{6} - \frac{wL^3}{2} \right) \\ &= -\frac{wL^3}{6EI} \quad (\text{ตามเข็มนาฬิกา}) \quad \text{ตอบ} \end{aligned}$$

ระยะโก่งสูงสุด ; 
$$\begin{aligned} y_{\max} &= y_B \\ &= \frac{1}{EI} \left( \frac{wL^4}{6} - \frac{wL^4}{24} - \frac{wL^4}{4} \right) \\ &= -\frac{wL^4}{8EI} \quad (\text{โก่งลง}) \quad \text{ตอบ} \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 7.7 จงหาความชันและระยะโก่งที่ปลายอิสระของคานยื่นดังแสดงในภาพที่ 7.12 ถ้าวัสดุที่ทำคานมีค่าโมดูลัสยืดหยุ่น  $E = 2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$  และโมเมนต์ความเฉื่อย  $I = 100 \text{ cm}^4$



ภาพที่ 7.12 การโก่งของคานยื่น

ที่มา : จีรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

**วิธีทำ**

แรงปฏิกิริยาที่ฐานรองรับ ;  $R_A = P = 100 \text{ kg}$

โมเมนต์ดัดที่ระยะ  $x$  จาก A ;  $M_x = Px - PL = -P(L-x)$

จากสมการโมเมนต์ดัดซึ่งมีค่าเท่ากับสมการอนุพันธ์อันดับสองของระยะโค้ง

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = M_x$$

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = -P(L-x)$$

สมการความชัน ;  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{EI} \left\{ \int M dx + C_1 \right\}$

$$EI \frac{dy}{dx} = \frac{P(L-x)^2}{2} + C_1$$

สมการการโค้ง ;  $y = \frac{1}{EI} \left\{ \iint M dx + C_1 x + C_2 \right\}$

$$EI y = -\frac{P(L-x)^3}{6} + C_1 x + C_2$$

พิจารณาฐานรองรับ A ที่  $x=0$  จะมีค่าความชันเท่ากับศูนย์หรือ  $\frac{dy}{dx} = 0$

$$0 = \frac{PL^2}{2} + C_1$$

$$C_1 = -\frac{PL^2}{2}$$

พิจารณาฐานรองรับ A ที่  $x=0$  จะมีค่าระยะโค้งเท่ากับศูนย์หรือ  $y=0$

$$0 = -\frac{PL^3}{6} + 0 + C_2$$

$$C_2 = \frac{PL^3}{6}$$

แทนค่า  $C_1$  และ  $C_2$  ลงในสมการความชันและระยะโค้งของคาน

สมการความชัน ;  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{EI} \left( \frac{P(L-x)^2}{2} - \frac{PL^2}{2} \right)$

สมการระยะโค้ง ;  $y = \frac{1}{EI} \left( -\frac{P(L-x)^3}{6} - \frac{PL^2 x}{2} + \frac{PL^3}{6} \right)$

หาความชันและระยะโค้งตัวที่ปลายคานเมื่อ  $x=L$  จากการแทนค่า  $E = 2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$  โมเมนต์ความเฉื่อยหน้าตัด  $I = 100 \text{ cm}^4$  และน้ำหนัก  $P = 100 \text{ kg}$

ความชันที่ปลายคาน ;  $\frac{dy}{dx} = -\frac{PL^2}{2EI}$

$$= -\frac{100(300)^2}{2 \times 2 \times 10^6 \times 100}$$

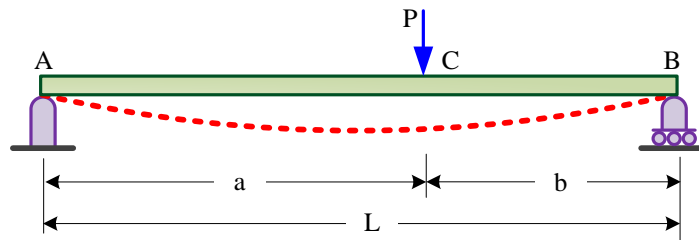
$$= -0.0225 \text{ rad (ตามเข็มนาฬิกา) \quad \text{ตอบ}}$$

ความชันที่ปลายคาน ;  $y_B = -\frac{PL^3}{3EI}$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{100(300)^3}{3 \times 2 \times 10^6 \times 100} \\
 &= -4.50 \text{ cm (โก่งลง)}
 \end{aligned}$$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 7.8 จงหาสมการการโก่งตัวของคานช่วงเดียวธรรมดาที่รับน้ำหนักกระทำแบบจุดบนคานดังแสดงในภาพที่ 7.13 และจงหาระยะโก่งสูงสุดเมื่อระยะ  $a$  มากกว่า  $b$



ภาพที่ 7.13 การโก่งตัวของคานรับน้ำหนักกระทำแบบจุด

ที่มา : จีรวัดน์ วิมุตติสุขวิทยา. 2556

วิธีทำ

$$\text{แรงปฏิกิริยาที่ฐานรองรับ A ; } R_A = \frac{Pb}{L}$$

$$\text{แรงปฏิกิริยาที่ฐานรองรับ B ; } R_B = \frac{Pa}{L}$$

โมเมนต์ตัดคานช่วง AC มีระยะอยู่ระหว่าง  $0 < x < a$

$$M_{AC} = \frac{Pbx}{L}$$

จากสมการ โมเมนต์ตัดซึ่งมีค่าเท่ากับสมการอนุพันธ์อันดับสองของระยะโก่ง

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = M_{AC}$$

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{Pbx}{L}$$

จาก  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{EI} \left\{ \int M_{AC} dx + C_1 \right\}$

$$EI \frac{dy}{dx} = \frac{Pbx^2}{2L} + C_1$$

จาก  $y = \frac{1}{EI} \left\{ \iint M_{AC} dx + C_1x + C_2 \right\}$

$$EIy = \frac{Pbx^3}{6L} + C_1x + C_2$$

โมเมนต์ดัดคานช่วง CB มีระยะอยู่ระหว่าง  $a < x < L$

$$M_{CB} = \frac{Pbx}{L} - P(x-a)$$

จากสมการโมเมนต์ดัดซึ่งมีค่าเท่ากับสมการอนุพันธ์อันดับสองของระยะโค้ง

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = M_{CB}$$

$$EI \frac{dy^2}{dx^2} = \frac{Pbx}{L} - P(x-a)$$

สมการความชัน ;  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{EI} \left\{ \int M_{CB} dx + C_3 \right\}$

$$EI \frac{dy}{dx} = \frac{Pbx^2}{2L} - \frac{P(x-a)^2}{2} + C_3$$

สมการระยะโค้ง ;  $y = \frac{1}{EI} \left\{ \iint M_{CB} dx + C_3x + C_4 \right\}$

$$EI y = \frac{Pbx^3}{6L} - \frac{P(x-a)^3}{6} + C_3x + C_4$$

พิจารณารูปร่างรองรับ A ที่  $x = 0$  มีค่าระยะโค้งเท่ากับศูนย์หรือ  $y = 0$

$$C_2 = 0$$

พิจารณาคัด C ที่  $x = a$  มีความชัน  $\frac{dy}{dx}$  เท่ากันระหว่างคานช่วง AC และช่วง CB เมื่อ  $C_2 = 0$

$$\frac{Pbx^2}{2L} + C_1 = \frac{Pbx^2}{2L} - \frac{P(x-a)^2}{2} + C_3$$

$$\frac{Pba^2}{2L} + C_1 = \frac{Pba^2}{2L} - 0 + C_3$$

$$C_1 = C_3$$

พิจารณาคัด C ที่  $x = a$  มีระยะโค้งตัว  $y$  เท่ากันระหว่างคานช่วง AC และช่วง CB เมื่อ  $C_1 = C_3$

$$\frac{Pbx^3}{6L} + C_1x + C_2 = \frac{Pbx^3}{6L} - \frac{P(x-a)^3}{6} + C_3x + C_4$$

$$\frac{Pba^3}{6L} + C_1a + C_2 = \frac{Pba^3}{6L} - 0 + C_3a + C_4$$

$$C_4 = 0$$

พิจารณารูปร่างรองรับ B ที่  $x = L$  จะมีค่าระยะโค้งเท่ากับศูนย์หรือ  $y = 0$  เมื่อค่า  $C_4 = 0$

$$0 = \frac{Pbx^3}{6L} - \frac{P(x-a)^3}{6} + C_3x + C_4$$

$$= \frac{PbL^3}{6L} - \frac{P(L-a)^3}{6} + C_3L$$

$$C_3 = \frac{PbL}{6} - \frac{P(L-a)^3}{6L}$$

$$= \frac{PbL}{6} - \frac{Pb^3}{6L}$$

$$= \frac{Pb(L^2 - b^2)}{6L}$$

แทน  $C_1$  และ  $C_2$  ลงในสมการความชันและระยะโค้งของคานช่วงช่วง AC เมื่อ  $0 < x < a$  จะได้

สมการความชัน ;  $EI \frac{dy}{dx} = \frac{Pbx^2}{2L} + C_1$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Pb}{6LEI} (3x^2 + L^2 - b^2) \quad \text{ตอบ}$$

สมการระยะโค้ง ;  $EI y = \frac{Pbx^3}{6L} + C_1 x + C_2$

$$y = \frac{Pbx}{6LEI} (x^2 + L^2 - b^2) \quad \text{ตอบ}$$

แทน  $C_3$  และ  $C_4$  ลงในสมการความชันและระยะโค้งของคานช่วง CB เมื่อ  $a < x < l$  จะได้

สมการความชัน ;  $EI \frac{dy}{dx} = \frac{Pbx^2}{2L} - \frac{P(x-a)^2}{2} + C_3$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Pb}{6lEI} \left\{ 3x^2 + l^2 - b^2 + \frac{3l(x-a)^2}{b} \right\} \quad \text{ตอบ}$$

สมการระยะโค้ง ;  $EI y = \frac{Pbx^3}{6L} - \frac{P(x-a)^3}{6} + C_3 x + C_4$

$$y = \frac{Pb}{6LEI} \left[ x^3 - \frac{L(x-a)^3}{b} + (L^2 - b^2)x \right] \quad \text{ตอบ}$$

ถ้าระยะ  $a$  มากกว่า  $b$  พบว่าระยะโค้งสูงสุดเกิดในคานช่วง AC และตำแหน่งระยะโค้งตัวสูงสุดมี

ความชัน  $\frac{dy}{dx} = 0$  ดังนั้นจึงสามารถคำนวณหาค่าระยะโค้งตัวสูงสุดได้ดังนี้

ความชันช่วง AC ;  $\frac{dy}{dx} = \frac{Pb}{6LEI} (3x^2 + L^2 - b^2)$

$$0 = 3x^2 + L^2 - b^2$$

$$x = \sqrt{\frac{b^2 - L^2}{3}}$$

แทนค่า  $x$  ซึ่งเป็นระยะที่เกิดการโค้งสูงสุดลงในสมการระยะโค้งตัวช่วง AC

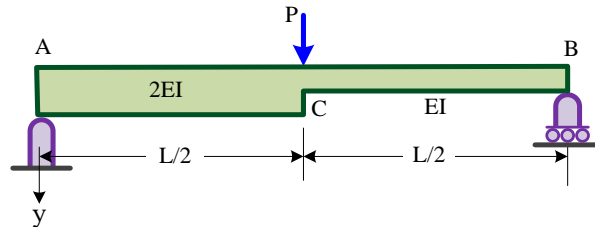
ระยะโค้งช่วง AC ;  $y = \frac{Pbx}{6LEI} (x^2 + L^2 - b^2)$

$$y_{\max} = \frac{Pb}{6LEI} \sqrt{\frac{b^2 - L^2}{3}} \left[ \left( \frac{b^2 - L^2}{3} \right) + L^2 - b^2 \right]$$

$$y_{\max} = -\frac{Pb}{9LEI} \sqrt{\frac{(b^2 - L^2)^3}{3}} \quad \text{ตอบ}$$



ตัวอย่างที่ 7.9 คานช่วงเดียวธรรมดาที่มีขนาดหน้าตัดต่างกันดังแสดงในภาพที่ 7.14 หากคานนี้รับน้ำหนักกระทำเป็นจุด ณ ตำแหน่งกึ่งกลางคาน จงหาระยะโก่งตัวที่กึ่งกลางคาน กำหนดให้ใช้วิธีทฤษฎีสองชั้นในการคำนวณ



ภาพที่ 7.14 คานช่วงเดียวที่มีขนาดหน้าตัดต่างกันรับแรงที่กึ่งกลางคาน

ที่มา : จีรวัดน์ วิศวกรรมศาสตรบัณฑิต. 2556

วิธีทำ

$$\text{แรงปฏิกิริยาที่ฐานรองรับ A ; } R_A = \frac{P}{2}$$

$$\text{แรงปฏิกิริยาที่ฐานรองรับ B ; } R_B = \frac{P}{2}$$

สมการ โมเมนต์ตัดที่ระยะ  $x$  จาก A ถึง C มีค่าระหว่าง  $0 < x < L/2$

$$\text{โมเมนต์ตัด ; } M_{AC} = \frac{Px}{2}$$

จากสมการ โมเมนต์ตัดซึ่งมีค่าเท่ากับสมการอนุพันธ์อันดับสองของระยะโก่งจะได้

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = M_{AC}$$

$$2EI \frac{dy^2}{dx^2} = -\frac{Px}{2}$$

$$\text{สมการความชัน ; } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{EI} \left\{ \int M_{AC} dx + C_1 \right\}$$

$$2EI \frac{dy}{dx} = -\frac{Px^2}{4} + C_1$$

$$\text{สมการระยะโก่ง ; } y = \frac{1}{EI} \left\{ \iint M_{AC} dx + C_1 x + C_2 \right\}$$

$$2EI y = -\frac{Px^3}{12} + C_1 x + C_2$$

สมการ โมเมนต์ตัดที่ระยะ  $x$  จาก C ถึง B มีค่าระหว่าง  $L/2 < x < L$

$$M_{CB} = \frac{Px}{2} - P \left( x - \frac{L}{2} \right)$$

$$= \frac{PL}{2} - \frac{Px}{2}$$

จากสมการ โมเมนต์ดัดซึ่งมีค่าเท่ากับสมการอนุพันธ์อันดับสองของระยะ โคง

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = M_{CB}$$

$$EI \frac{dy^2}{dx^2} = -\frac{PL}{2} + \frac{Px}{2}$$

สมการความชัน ;  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{EI} \left\{ \int M_{CB} dx + C_3 \right\}$

$$EI \frac{dy}{dx} = -\frac{PLx}{2} + \frac{Px^2}{4} + C_3$$

สมการระยะ โคง ;  $y = \frac{1}{EI} \left\{ \iint M_{CB} dx + C_3x + C_4 \right\}$

$$EI y = -\frac{PLx^2}{4} + \frac{Px^3}{12} + C_3x + C_4$$

พิจารณาฐานรองรับ A ที่  $x=0$  จะมีค่าระยะ โคงเท่ากับศูนย์หรือ  $y=0$

$$C_2 = 0$$

หาความสัมพันธ์ระหว่าง  $C_1$  และ  $C_3$  จากการพิจารณาจุด C ที่  $x=a$  มีความชัน  $\frac{dy}{dx}$  เท่ากัน

ระหว่างคานช่วงแรกและช่วงหลังเมื่อ  $C_2=0$

$$-\frac{PL^2}{32} + \frac{C_1}{2} = -\frac{PL^2}{4} + \frac{PL^2}{16} + C_3$$

$$C_1 - 2C_3 = -\frac{5PL^2}{16}$$

$$C_1 = \frac{5PL^2}{16} + 2C_3$$

ที่จุด C ระยะ  $x=a$  มีระยะ โคงเท่ากันระหว่างคานช่วงแรกและช่วงหลัง

$$-\frac{PL^3}{192} + \frac{C_1L}{4} = -\frac{PL^3}{16} + \frac{PL^3}{96} + \frac{C_3L}{2} + C_4$$

$$C_1 - 2C_3 - \frac{4C_4}{L} = -\frac{3PL^2}{16}$$

$$-\frac{5PL^2}{16} - \frac{4C_4}{L} = -\frac{3PL^2}{16}$$

$$C_4 = -\frac{PL^3}{32}$$

ฐานรองรับ B ที่ระยะ  $x=L$  จะมีค่าระยะ โคงเท่ากับศูนย์หรือ  $y=0$

$$0 = -\frac{PL^3}{4} + \frac{PL^3}{12} + C_3L - \frac{PL^3}{32}$$

$$C_3 = \frac{19PL^2}{96}$$

$$C_1 = \frac{PL^3}{12}$$

แทน  $C_1$  และ  $C_2$  ลงในสมการระยะ โกงช่วง AC เมื่อ  $0 < x < L/2$  จะได้

สมการการโก่ง ; 
$$y = \frac{Px}{24EI}(L^2 - x^2)$$

แทน  $C_3$  และ  $C_4$  ลงในสมการระยะ โกงช่วง CB เมื่อ  $L/2 < x < L$  จะได้

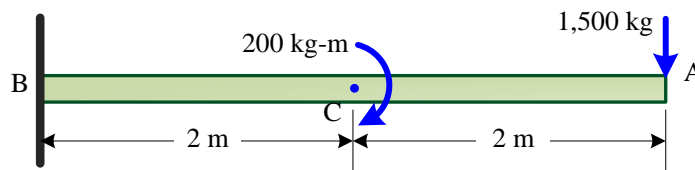
สมการการโก่ง ; 
$$y = \frac{P}{4EI} \left( \frac{x^3}{3} - x^2L + \frac{19xL^2}{24} - \frac{L^3}{8} \right)$$

ระยะ โกงที่ C หาได้จากสมการการ โกงของคานช่วงแรกเมื่อ  $x = L/2$  จะได้

$$y_c = \frac{PL^3}{64EI}$$

ตอบ

**ตัวอย่างที่ 7.10** จงหาความชันและระยะ โกงที่ปลายคานยื่นดังแสดงในภาพที่ 7.15 เมื่อน้ำหนักกระทำที่ปลายคานและ โมเมนต์คัตกระทำที่กึ่งกลางคาน กำหนดให้คานมีค่า  $EI = 4 \times 10^9 \text{ kg/cm}^2$



ภาพที่ 7.15 คานยื่นรับน้ำหนักแบบจุดและ โมเมนต์คัต

ที่มา : จีรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

**วิธีทำ**

แรงปฏิกิริยาที่ฐานรองรับ ;  $R_B = 1,500 \text{ kg}$

สมการ โมเมนต์คัตที่ระยะ  $x$  จาก A ถึง C ระหว่าง  $0 < x < 200 \text{ cm}$

โมเมนต์คัต ;  $M_{AC} = -1,500x \text{ kg-cm}$

จากสมการ โมเมนต์คัตซึ่งมีค่าเท่ากับสมการอนุพันธ์อันดับสองของระยะ โกง

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = M_{AC}$$

$$EI \frac{dy^2}{dx^2} = -1,500x$$

สมการความชัน ; 
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{EI} \left\{ \int M_{AC} dx + C_1 \right\}$$

$$EI \frac{dy}{dx} = -750x^2 + C_1$$

สมการระยะโค้ง ;

$$y = \frac{1}{EI} \left\{ \iint M_{AC} dx + C_1 x + C_2 \right\}$$

$$EI y = -\frac{750x^3}{3} + C_1 x + C_2$$

สมการโมเมนต์ดัดที่ระยะ  $x$  จาก C ถึง B ระหว่าง  $100 \text{ cm} < x < 200 \text{ cm}$

$$M_{CB} = -1,500x - 20,000 \text{ kg-cm}$$

จากสมการโมเมนต์ดัดซึ่งมีค่าเท่ากับสมการอนุพันธ์อันดับสองของระยะโค้ง

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = M_{CB}$$

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -1,500x - 20,000$$

สมการความชัน ;

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{EI} \left\{ \int M_{CB} dx + C_3 \right\}$$

$$EI \frac{dy}{dx} = -750 x^2 - 20,000 x + C_3$$

สมการระยะโค้ง ;

$$y = \frac{1}{EI} \left\{ \iint M_{CB} dx + C_3 x + C_4 \right\}$$

$$EI y = -\frac{750x^3}{3} - 10,000x^2 + C_3 x + C_4$$

พิจารณาฐานรองรับ B ที่  $x = 400 \text{ cm}$  จะมีค่าความชันเท่ากับศูนย์หรือ  $\frac{dy}{dx} = 0$

$$0 = -(750 \times 400) \times 2 - (20,000 \times (400)) + C_3$$

$$C_3 = 128 \times 10^6$$

พิจารณาฐานรองรับ B ที่  $x = 400 \text{ cm}$  มีระยะโค้งเป็นศูนย์หรือ  $y = 0$  เมื่อ  $C_3 = 128 \times 10^6$

$$0 = -\frac{750(400)^3}{3} - 10,000(400)^2 + C_3(400) + C_4$$

$$C_3(400) + C_4 = 1.76 \times 10^{10}$$

$$C_4 = -3.36 \times 10^{10}$$

พิจารณาจุด C ที่  $x = 200 \text{ cm}$  มีความชัน  $\frac{dy}{dx}$  เท่ากันระหว่างคานช่วงแรกและช่วงหลัง

$$-750x^2 + C_1 = -750 x^2 - 20,000x + C_3$$

$$-750(200)^2 + C_1 = -750(200)^2 - 20,000(200) + C_3$$

$$C_1 = 124 \times 10^6$$

พิจารณาจุด C ที่  $x = 200 \text{ cm}$  มีระยะโค้งตัว  $y$  เท่ากันระหว่างคานช่วงแรกและช่วงหลัง

$$-\frac{750x^3}{3} + C_1x + C_2 = -\frac{750x^3}{3} - 10,000x^2 + C_3x + C_4$$

$$-\frac{750(200)^3}{3} + C_1(200) + C_2 = -\frac{750(200)^3}{3} - 10,000(200)^2 + C_3(200) + C_4$$

$$C_2 = -3.32 \times 10^{10}$$

ความชันที่จุด A เมื่อ  $x = 0$  ;  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{EI}(-750x^2 + C_1)$

$$= \frac{1}{4 \times 10^9}(-750(0)^2 + 124 \times 10^6)$$

$$= 0.031 \text{ rad (ทิศทวนเข็มนาฬิกา)} \quad \text{ตอบ}$$

ระยะ โคงที่จุด A เมื่อ  $x = 0$  ;  $y_A = \frac{1}{EI}\left(-\frac{750x^3}{3} + C_1x + C_2\right)$

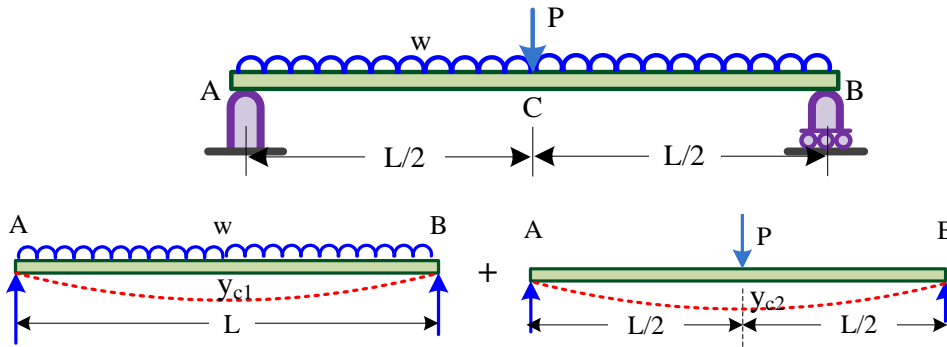
$$= -\frac{3.32 \times 10^{10}}{4 \times 10^9}$$

$$= -8.3 \text{ cm (โคงลง)} \quad \text{ตอบ}$$

### การหาระยะโคงของคานาวิชิซูเปอร์โพสิชัน

วิธีหาระยะโคงและความชันของคานาที่ได้กล่าวมาแล้วข้างต้นซึ่งประกอบด้วยวิธีพื้นที่โมเมนต์และวิธีอินทิเกรตสองชั้น วิธีการทั้งสองใช้ในการหาระยะโคงของคานาที่ไม่ซับซ้อน เช่น น้ำหนักกระทำเพียงไม่กี่รูปแบบ หรือมีฐานรองรับอย่างง่าย เป็นต้น แต่ในกรณีที่คานามีความซับซ้อนมักจะใช้วิธีซูเปอร์โพสิชันหรือเรียกว่า วิธีการวางซ้อน (Superposition Theorem) สิริศักดิ์ ปโยธรศิริ (2549 : 308-310) และ James M. Gere and Barry J. Goodno (2012 : 503-505) กล่าวว่า การหาระยะโคงและความชันของคานาวิชิซูเปอร์โพสิชันจะแยกพิจารณาภาระโคงหรือความชันของคานาจากน้ำหนักที่กระทำแต่ละรูปแบบ ในการหาระยะโคงและความชันของน้ำหนักแต่ละรูปแบบอาจเลือกใช้วิธีพื้นที่โมเมนต์หรือวิธีอินทิเกรตสองชั้นก็ได้ จากนั้นจึงนำค่าระยะโคงหรือความชันมารวมกันก็จะได้ระยะโคงหรือความชันของคานาทั้งระบบ อนึ่งอาจใช้ตารางที่แสดงผลระยะโคงหรือความชันของคานามาใช้ประกอบการคำนวณวิชิซูเปอร์โพสิชันนี้ก็ได้ จากตัวอย่างคานาช่วงเดียวธรรมดา AB ที่รับน้ำหนักแผ่กระจายสม่ำเสมอตลอดความยาวคานาและมีน้ำหนักกระทำแบบจุดที่กึ่งกลางคานาดังแสดงในภาพที่ 7.16 ถ้าหากต้องการหาระยะโคง  $y_C$  ที่กึ่งกลางคานาโดยใช้วิชิซูเปอร์โพสิชันสามารถทำได้โดยแยกพิจารณาคานา AB ออกเป็น 2 กรณีคือ กรณีที่ 1 คานา AB รับน้ำหนักแผ่กระจายสม่ำเสมอตลอดความยาวคานาและมีระยะโคงที่กึ่งกลางคานาเท่ากับ  $y_{C1}$  และกรณีที่ 2 คานา AB รับน้ำหนักกระทำแบบจุดมีระยะโคงที่

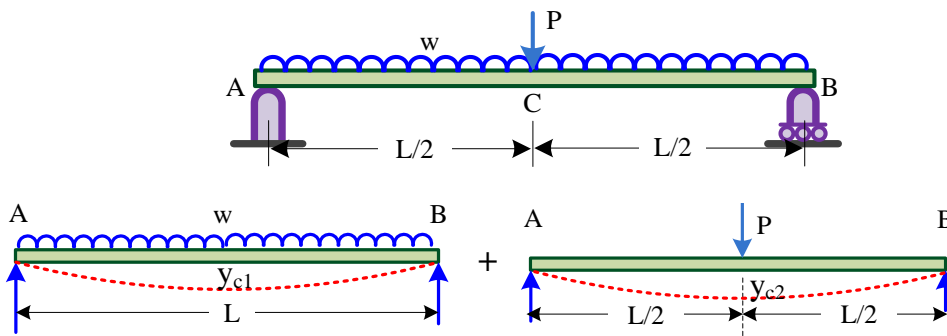
กึ่งกลางคานเท่ากับ  $y_{C2}$  ดังนั้นคาน AB มีระยะ โคงจริงเท่ากับผลรวมของทั้ง 2 กรณีคือ ระยะ โคง ที่กึ่งกลางคาน  $y_C$  เท่ากับผลรวมระหว่าง  $y_{C1}$  และ  $y_{C2}$



ภาพที่ 7.16 การ โคงของคานวิธีซูเปอร์โพสิชัน

ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

ตัวอย่างที่ 7.11 จงหาระยะ โคงและความชันสูงสุดของคาน AB ที่รับน้ำหนักแผ่กระจายสม่ำเสมอตลอดความยาวคานและมีน้ำหนักกระทำแบบจุดที่กึ่งกลางคานดังแสดงในภาพที่ 7.17 กำหนดให้ใช้วิธีซูเปอร์โพสิชันในการคำนวณและคานมีค่า EI คงที่ตลอดความยาวคาน



ภาพที่ 7.17 การ โคงของคานรับน้ำหนักแผ่กระจายสม่ำเสมอและแบบจุด

ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

วิธีทำ

กรณีที่ 1 คานรับน้ำหนักแผ่กระจายสม่ำเสมอ

ระยะ โคงสูงสุด ;  $y_{C1} = \frac{5wL^4}{384EI}$

ความลาดชันสูงสุดที่ฐาน ;  $\theta_{A1} = \frac{wL^3}{24EI}$

กรณีที่ 2 คานรับน้ำหนักกระทำแบบจุดที่กึ่งกลางคาน

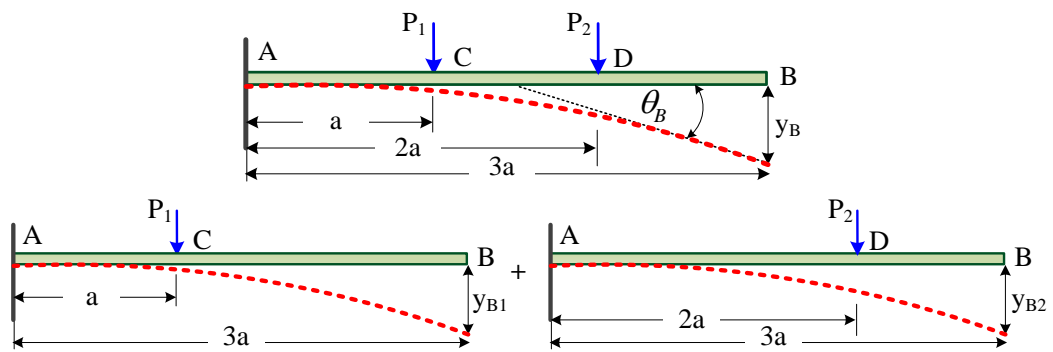
ระยะโก่งสูงสุด ;  $y_{C2} = \frac{PL^3}{48EI}$

ความลาดชันสูงสุดที่ฐาน ;  $\theta_{A2} = \frac{PL^2}{16EI}$

ระยะโก่งสูงสุดที่เกิดจริง ;  $y_C = y_{C1} + y_{C2}$   
 $= \frac{5wL^4}{384EI} + \frac{PL^3}{48EI}$  ตอบ

ความชันสูงสุดที่เกิดจริง ;  $\theta_A = \theta_{A1} + \theta_{A2}$   
 $= \frac{wL^3}{24EI} + \frac{PL^2}{16EI}$  ตอบ

ตัวอย่างที่ 7.12 คานยื่นรับน้ำหนักกระทำเป็นจุดดังแสดงในภาพที่ 7.18 จงคำนวณหาระยะโก่งที่ปลายอิสระโดยใช้วิธีซูเปอร์โพสิชัน กำหนดให้คานมีค่า EI คงที่ตลอดความยาวคาน



ภาพที่ 7.18 การโก่งของคานยื่นรับน้ำหนักกระทำเป็นจุด

ที่มา : จีรวัดน์ วิศวกรรมศาสตรบัณฑิต. 2556

**วิธีทำ**

กรณีที่ 1 คานยื่นรับเฉพาะน้ำหนักแบบจุด  $P_1$  และหาระยะโก่งโดยใช้วิธีพื้นที่โมเมนต์

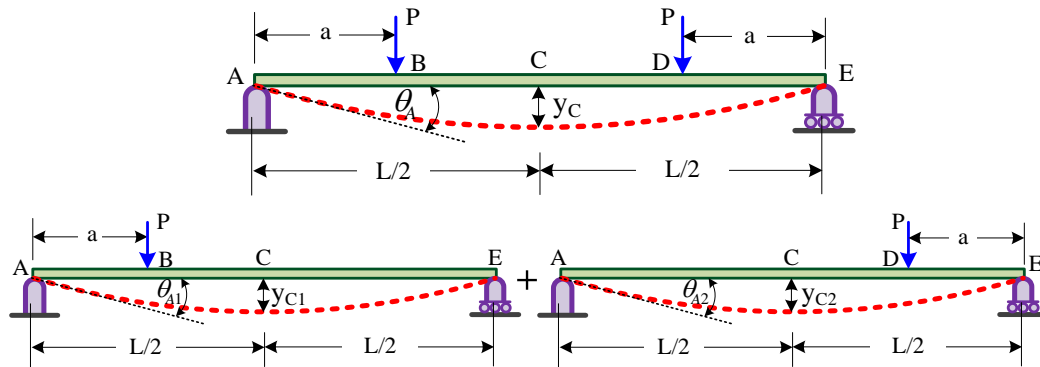
ระยะโก่งที่ปลายคานยื่น ;  $y_{B1} = \frac{1}{EI} \left\{ \frac{P_1 a^2}{2} \times \left( 2a + \left( \frac{2a}{3} \right) \right) \right\}$   
 $= \frac{P_1 a^3}{6EI}$

กรณีที่ 2 คานยื่นรับเฉพาะน้ำหนักแบบจุด  $P_2$  และหาระยะโก่งโดยใช้วิธีพื้นที่โมเมนต์

ระยะโก่งที่ปลายคานยื่น ;  $y_{B2} = \frac{1}{EI} \left\{ 2P_2 a^2 \times \left( a + \left( \frac{4a}{3} \right) \right) \right\}$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{14P_2a^3}{3EI} \\
 \text{ระยะ โคงตัวจริงที่ปลายคาน ; } y_B &= y_{B1} + y_{B2} \\
 &= \frac{P_1a^3}{6EI} + \frac{14P_2a^3}{3EI} \\
 &= \frac{a^3}{6EI} (P_1 + 28P_2) \qquad \text{ตอบ}
 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 7.13 คานช่วงเดียวธรรมดารับน้ำหนักแบบจุดดังแสดงในภาพที่ 7.19 จงหาความชันที่จุด A และระยะ โคงที่จุด C โดยใช้วิธีซูเปอร์โพสิชัน กำหนดให้คานมีค่า EI คงที่ตลอดความยาวคาน



ภาพที่ 7.19 การ โคงของคานรับน้ำหนักแบบจุด  
ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

วิธีทำ

กรณีที่ 1 คานรับน้ำหนักแบบจุด P กระทำที่จุด B และหาความชัน โดยใช้วิธีพื้นที่โมเมนต์

ความชันที่ A ; 
$$\theta_{A1} = \frac{Pa(L^2 - a^2)}{24EI}$$

กรณีที่ 2 คานรับน้ำหนักแบบจุด P กระทำที่จุด D และหาความชัน โดยใช้วิธีพื้นที่โมเมนต์

ความชันที่ A ; 
$$\theta_{A2} = \frac{P(L-a)[L^2 - (L-a)^2]}{6LEI}$$

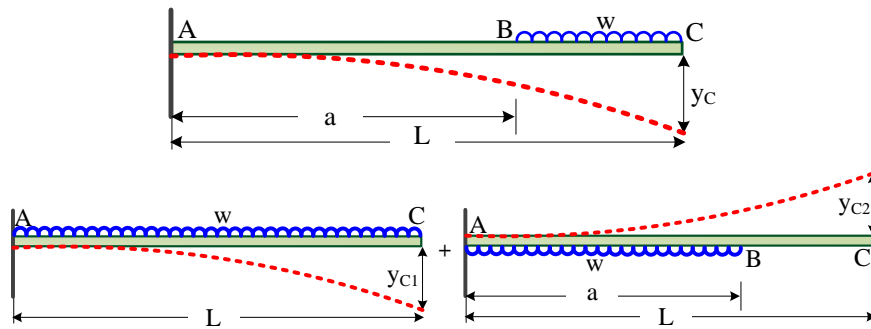
ความชันจริงที่ A ; 
$$\begin{aligned}
 \theta_A &= \theta_{A1} + \theta_{A2} \\
 &= \frac{Pa(L^2 - a^2)}{24EI} + \frac{P(L-a)[L^2 - (L-a)^2]}{6LEI} \\
 &= \frac{Pa(L-a)}{2EI} \qquad \text{ตอบ}
 \end{aligned}$$



กรณีที่ 1 คานรับน้ำหนักแบบจุด P กระทำที่จุด B และกรณีที่ 2 คานรับน้ำหนักแบบจุด P กระทำที่จุด D ทั้งสองกรณีมีระยะ โคง่ที่กึ่งกลางคาน C เท่ากัน ดังนั้นระยะ โคง่รวมของทั้งสองกรณีหาได้โดยใช้วิธีพื้นที่โมเมนต์ดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned} \text{ระยะ โคง่รวมที่จุด C ;} \quad y_c &= 2 \frac{Pa(3L^2 - 4a^2)}{48EI} \\ &= \frac{Pa(3L^2 - 4a^2)}{24EI} \end{aligned} \quad \text{ตอบ}$$

ตัวอย่างที่ 7.14 จงคำนวณหาระยะ โคง่ที่ปลายอิสระของคานยื่นรับน้ำหนักดังแสดงในภาพที่ 7.20 โดยใช้วิธีชุปเปอร์โพสิชัน กำหนดให้คานมีค่า EI คงที่ตลอดความยาวคาน



ภาพที่ 7.20 การ โคง่ของคานยื่นรับน้ำหนักแผ่กระจายบางช่วง

ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

### วิธีทำ

กรณีที่ 1 คานยื่นรับน้ำหนักแผ่กระจายสม่ำเสมอ จากวิธีพื้นที่โมเมนต์จะได้

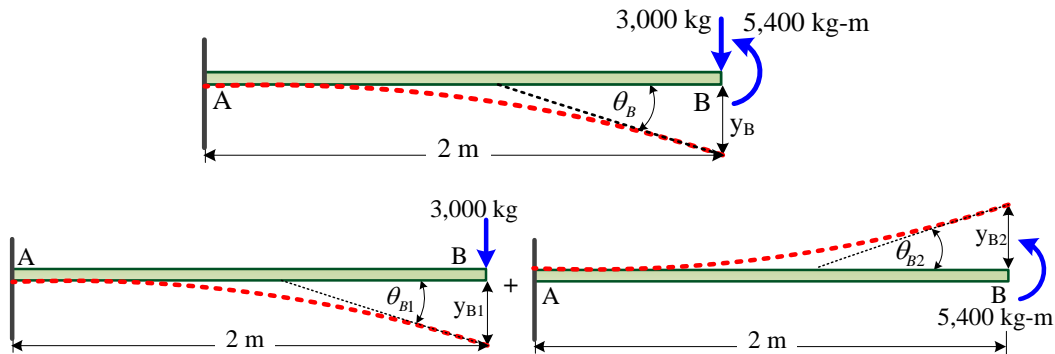
$$\begin{aligned} \text{ระยะ โคง่ที่ปลายคาน ;} \quad y_{c1} &= \frac{1}{EI} \left[ \left( \frac{wL^3}{6} \right) \times \left( \frac{3L}{4} \right) \right] \\ &= \frac{wL^4}{8EI} \quad (\text{โคง่ลง}) \end{aligned}$$

กรณีที่ 2 คานยื่นรับน้ำหนักแผ่กระจายสม่ำเสมอจาก A ถึง B จากวิธีพื้นที่โมเมนต์จะได้

$$\begin{aligned} \text{ระยะ โคง่ที่ปลายคาน ;} \quad y_{c2} &= -\frac{1}{EI} \left[ \left( \frac{wa^3}{6} \right) \times \left( L - \frac{a}{4} \right) \right] \\ &= -\frac{wa^3}{6EI} \left( L - \frac{a}{4} \right) \quad (\text{โคง่ขึ้น}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ระยะ โคง่ตัวจริงที่ปลายคาน ;} \quad y_c &= y_{c1} + y_{c2} \\ &= \left( \frac{wL^4}{8EI} \right) - \left[ \frac{wa^3}{6EI} \left( L - \frac{a}{4} \right) \right] \end{aligned} \quad \text{ตอบ}$$

ตัวอย่างที่ 7.15 จงคำนวณหาระยะโก่งและความชันที่ปลายอิสระของคานยื่นรับน้ำหนักดังแสดงในภาพที่ 7.21 โดยใช้วิธีซูเปอร์โพสิชัน กำหนดให้คานมีค่า  $EI = 1 \times 10^{10} \text{ kg/cm}^2$  คงที่ตลอดความยาวคาน



ภาพที่ 7.21 การโก่งของคานยื่นรับน้ำหนักกระทำที่ปลายคาน

ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

### วิธีทำ

กรณีที่ 1 คานรับน้ำหนัก 3,000 kg กระทำที่ปลายคาน จากวิธีพื้นที่โมเมนต์จะได้

$$\begin{aligned} \text{ระยะโก่งที่ปลายคาน ; } y_{B1} &= \frac{PL^3}{3EI} \\ &= \frac{3,000(200)^3}{3 \times 10^{10}} \\ &= 0.8 \text{ cm (โก่งลง)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ความชันที่ปลายคานยื่น ; } \theta_{B1} &= \frac{PL^2}{2EI} \\ &= \frac{3,000(200)^2}{2 \times 10^{10}} \\ &= 0.006 \text{ rad (ตามเข็มนาฬิกา)} \end{aligned}$$

กรณีที่ 2 คานรับโมเมนต์คัต 5,400 kg-m กระทำที่ปลายคาน จากวิธีพื้นที่โมเมนต์จะได้

$$\begin{aligned} \text{ระยะโก่งที่ปลายคาน ; } y_{B2} &= -\frac{ML^2}{EI} \\ &= -\frac{(5,400 \times 100)(200)^2}{2 \times 10^{10}} \\ &= -1.08 \text{ cm (โก่งขึ้น)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{ความชันที่ปลายคานขึ้น ;} \quad \theta_{B2} &= -\frac{ML}{EI} \\
&= -\frac{(5,400 \times 100)(200)}{10^{10}} \\
&= -0.0108 \text{ rad (ทวนเข็มนาฬิกา)} \\
\text{ความชันจริงที่ปลายคาน ;} \quad \theta_B &= \theta_{B1} + \theta_{B2} \\
&= 0.006 - 0.0108 \\
&= -0.0048 \text{ rad (ทวนเข็มนาฬิกา)} \quad \text{ตอบ} \\
\text{ระยะ โคงจริงที่ปลายคาน ;} \quad y_B &= y_{B1} + y_{B2} \\
&= 0.80 - 1.08 \\
&= -0.28 \text{ cm (โคงขึ้น)} \quad \text{ตอบ}
\end{aligned}$$

### สรุปท้ายบท

คานเมื่อน้ำหนักกระทำก็จะเกิดการแอ่นตัวหรือโคงตัว การหาระยะโคงของคานสามารถหาได้หลายวิธี เช่น การหาระยะโคงโดยวิธีโมเมนต์พื้นที่โมเมนต์ วิธีอินทิเกรตสองชั้น และวิธีซูเปอร์โพสิชัน เป็นต้น การหาระยะโคงของคานวิธีพื้นที่โมเมนต์มีหลักการดังนี้คือ คานเมื่อน้ำหนักกระทำจะเกิดโมเมนต์คัตและแรงเฉือนภายในคาน หากคานอยู่ในสภาวะยืดหยุ่นและเกิดการโคงภายใต้อิทธิพลของโมเมนต์คัตพบว่าอัตราส่วนระหว่างโมเมนต์ความเฉื่อยต่อรัศมีโคงจะมีค่าเท่ากับอัตราส่วนระหว่างโมเมนต์คัตต่อความแข็งแกร่งคาน หลักการดังกล่าวจะถูกใช้ในการคำนวณระยะโคงและความชันของคาน

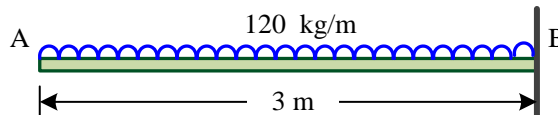
การหาระยะโคงของคานวิธีอินทิเกรตสองชั้นเป็นวิธีการหาระยะโคงของคานอีกวิธีการหนึ่งที่น่าสนใจสมการอนุพันธ์ของเส้นโคงยืดหยุ่น เมื่อคานรับน้ำหนักก็จะเกิดโมเมนต์คัตขึ้นและสามารถเขียนในรูปของฟังก์ชันระยะในแนวราบได้ โดยระยะโคงจะมีค่าเท่ากับการอินทิเกรตสมการความชัน และความชันของเส้นโคงจะมีค่าเท่ากับการอินทิเกรตสมการโมเมนต์คัต หรืออาจกล่าวได้ว่าระยะโคงคือการอินทิเกรตสองชั้นของสมการโมเมนต์คัต วิธีหาระยะโคงวิธีอินทิเกรตสองชั้นมีความซับซ้อนกว่าวิธีพื้นที่โมเมนต์

การหาระยะโคงวิธีซูเปอร์โพสิชันเป็นวิธีการหาระยะโคงหรือความชันด้วยการแยกพิจารณาระยะโคงหรือความชันของคานจากน้ำหนักที่กระทำแต่ละกรณี จากนั้นจึงนำค่าระยะโคงหรือความชันที่คำนวณได้มารวมกันก็จะได้ระยะโคงหรือความชันของคานจริง การหาระยะโคงและความชันของคานวิธีนี้เหมาะกับคานที่ซับซ้อน เช่น น้ำหนักหลายอย่างกระทำพร้อมกัน หรือมีฐานรองรับซับซ้อน เป็นต้น เมื่อแยกพิจารณาคานเป็นกรณีแล้วก็สามารถใช้วิธีพื้นที่

โมเมนต์หรือวิธีอินทิเกรตสองชั้นในการหาระยะ โกงหรือความชันได้ เมื่อได้ผลลัพธ์ของแต่ละกรณีก็นำมารวมกัน

## แบบฝึกหัดท้ายบท

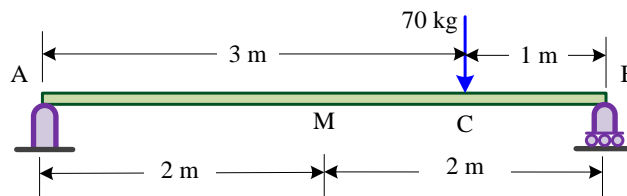
1. คานยื่น AB มีน้ำหนักกระทำแผ่กระจายสม่ำเสมอ  $120 \text{ kg/m}$  ดังแสดงในภาพที่ 7.22 จงหา ระยะ โคง่ตัวที่ปลายคาน โดยวิธีอินทิเกรตสองชั้น กำหนดให้คานมีค่าโมดูลัสยืดหยุ่น  $E = 1.05 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$  และโมเมนต์ความเฉื่อย  $I = 2,100 \text{ cm}^4$



ภาพที่ 7.22 คานยื่นรับน้ำหนักกระทำกระจายสม่ำเสมอ

ที่มา : จีรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

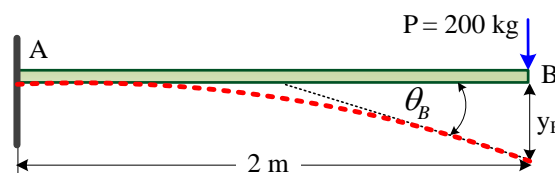
2. คานช่วงเดียวธรรมดา AB มีน้ำหนักกระทำ  $70 \text{ kg}$  ดังแสดงในภาพที่ 7.23 จงคำนวณหา ระยะ โคง่ที่กึ่งกลางคาน โดยวิธีอินทิเกรตสองชั้น กำหนดให้คานมีโมเมนต์ความเฉื่อย  $I = 3,000 \text{ cm}^4$  และโมดูลัสยืดหยุ่น  $E = 1.05 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$



ภาพที่ 7.23 คานรับน้ำหนักกระทำแบบจุด

ที่มา : จีรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

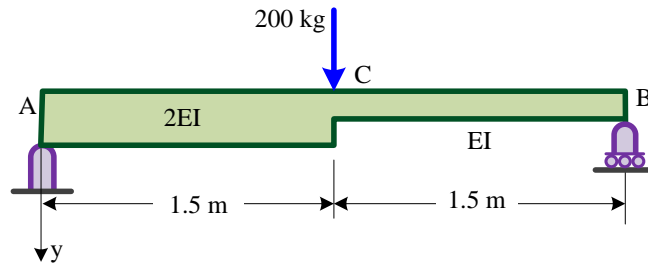
3. จงหาความชันและระยะ โคง่ที่ปลายคานยื่นดังแสดงในภาพที่ 7.24 โดยใช้วิธีพื้นที่โมเมนต์ ถ้า กำหนดให้คานมีค่าโมดูลัสยืดหยุ่น  $E = 2.04 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$  และโมเมนต์ความเฉื่อย  $I = 100 \text{ cm}^4$



ภาพที่ 7.24 การโค้งของคานยื่น

ที่มา : จีรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

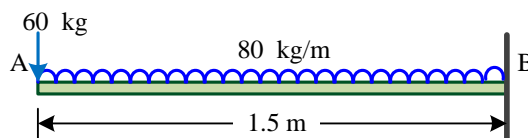
4. คานช่วงเดียวธรรมดา AB มีน้ำหนักกระทำ 200 kg ดังแสดงในภาพที่ 7.25 จงคำนวณหาระยะโก่งที่กึ่งกลางคานโดยวิธีพื้นที่โมเมนต์ กำหนดให้คานมีค่าโมเมนต์ความเฉื่อย  $I = 3,000 \text{ cm}^4$  และโมดูลัสยืดหยุ่น  $E = 1.05 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$



ภาพที่ 7.25 คานช่วงเดียวมีขนาดหน้าตัดต่างกันรับแรงที่กึ่งกลางคาน

ที่มา : จิรวัดน์ วิศวกรรมวิริยา. 2556

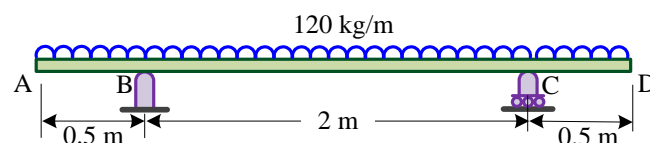
5. คานยื่นรับน้ำหนักกระทำดังแสดงในภาพที่ 7.26 จงหาระยะโก่งตัวที่ปลายคานโดยวิธีชูปเปอร์โพลิชัน กำหนดให้คานมีค่าโมดูลัสยืดหยุ่น  $E = 1.05 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$  และ โมเมนต์ความเฉื่อย  $I = 2,100 \text{ cm}^4$



ภาพที่ 7.26 คานยื่นรับน้ำหนักแบบจุดและแผ่กระจายสม่ำเสมอ

ที่มา : จิรวัดน์ วิศวกรรมวิริยา. 2556

6. คานมีน้ำหนักแผ่กระจายสม่ำเสมอ 120 kg/m ดังแสดงในภาพที่ 7.27 จงคำนวณหาระยะโก่งที่กึ่งกลางและปลายคานโดยวิธีอินทิเกรตสองชั้น กำหนดให้ค่าโมเมนต์ความเฉื่อย  $I = 4,000 \text{ cm}^4$  และ โมดูลัสยืดหยุ่น  $E = 1.05 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$



ภาพที่ 7.27 การโก่งตัวของคานเมื่อน้ำหนักแผ่กระจายสม่ำเสมอ

ที่มา : จิรวัดน์ วิศวกรรมวิริยา. 2556

## เอกสารอ้างอิง

- ชาญ ถนัดงาน. (2523). **กลศาสตร์วัสดุ**. กรุงเทพฯ : สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้า  
วิทยาเขตพระนครเหนือ.
- ชาญชัย จารุจินดา. (ม.ป.ป.). **ทฤษฎีโครงสร้าง**. กรุงเทพฯ : บุญเลิศการพิมพ์.
- มนตรี พิรุณเกษตร. (2544). **กลศาสตร์ของวัสดุ**. กรุงเทพฯ : วิทยพัฒน์.
- วินิต ช่อวิเชียร วรนิติ ช่อวิเชียร และวรสเรษฐ ช่อวิเชียร. (2548). **กำลังวัสดุ/กลศาสตร์วัสดุ**.  
กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- สมโพธิ วิวิธเกยูรวงศ์. (2542). **กลศาสตร์ของวัสดุ**. กรุงเทพฯ : ฟิสิกส์เซ็นเตอร์การพิมพ์.
- สุกิจ นามพิชญ์. (2541). **ความแข็งแรงของวัสดุ**. กรุงเทพฯ : ซีเอ็ดยุคเข่น.
- สิทธิชัย แสงอาทิตย์. (2549). **กลศาสตร์ของวัสดุ**. นครราชสีมา : สาขาวิชาวิศวกรรมโยธา  
สำนักวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี.
- สิริศักดิ์ ปโยชรสิริ. (2549). **กลศาสตร์วัสดุ**. กรุงเทพฯ : ว.เพ็ชรสกุล.
- Ferdinand P. Beer, Russell Johnston, John T. DeWolf and David F. Mazurek. (2012).  
**Mechanics of Materials**. New York : Mc Graw Hill.
- Hearn E. J. (2000). **Mechanics of Materials 1: An Introduction to the Mechanics of Elastic  
and Plastic Deformation of Solids and Structural Materials**. Oxford : Butterworth-  
Heinemann.
- James M. Gere and Barry J. Goodno. (2012). **Mechanics of Materials**. Stamford : Cengage  
Learning.
- John Case, Lord Chilver and Carl T. F. Ross. (1999). **Strength of Materials and Structures**.  
London : Arnold.
- Joseph E. Shigley. (2004). **Mechanical Engineering Design**. New York : McGraw-Hill.
- [Rajan S.](#), [Larry L.](#) and [Gray M.](#) (2001). **Strengthening steel bridge sections using CFRP  
laminates**. [Composites Part B: Engineering, Volume 32, Issue 4](#), Pages 309–322.
- Russell C. Hibbeler. (2011). **Mechanics of Materials**. New York : Prentice Hall  
International Inc.
- Vitor Dias da Silva. (2006). **Mechanics and Strength of Materials**. Heidelberg : Springer-  
Verlag.

**เอกสารอ้างอิง (ต่อ)**

William A. Nash. (1998). **Theory and Problems of Strength of Materials**. New York :  
McGraw-Hill.



## แผนบริหารการสอนประจำบทที่ 8

### เสา

#### หัวข้อเนื้อหาประจำบท

1. เสาสั้น
2. เสายาว
3. หลักพื้นฐานการคำนวณเสายาว
4. ปัจจัยที่มีผลต่อความเร็วเสายาว
  - เสายาวที่มีค้ำยัน
  - เสายาวที่มีฐานยึดแน่นและปลายอิสระ
  - เสายาวฐานยึดแน่นทั้งสองด้าน
  - เสายาวที่มีฐานยึดแน่นและบานพับ
5. ความปลอดภัยของเสายาว
6. เสายาวรับน้ำหนักเชิงศูนย์
7. สรุปรายบท
8. แบบฝึกหัดท้ายบท

#### วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม

เมื่อนักศึกษาเรียนบทเรียนนี้แล้วสามารถ

1. อธิบายและคำนวณเสาสั้นได้
2. อธิบายและคำนวณเสายาวได้
3. อธิบายปัจจัยที่มีผลต่อความเร็วเสายาวได้
4. อธิบายและคำนวณเสายาวที่มีค้ำยันได้
5. อธิบายและคำนวณเสายาวที่มีฐานยึดแน่นและปลายอิสระได้
6. อธิบายและคำนวณเสายาวฐานยึดแน่นทั้งสองด้านได้
7. อธิบายและคำนวณเสายาวที่มีฐานยึดแน่นและบานพับได้
8. อธิบายความปลอดภัยของเสายาวได้
9. อธิบายเสายาวรับน้ำหนักเชิงศูนย์ได้

### วิธีสอนและกิจกรรมการเรียนการสอนประจำบท

1. บรรยายเนื้อหาในเอกสารประกอบคำสอน การถามและตอบในห้องเรียนร่วมกับการใช้สื่อประกอบอื่น เช่น สื่อแผ่นใส สื่อคอมพิวเตอร์ หรือสื่อวีดิทัศน์ เป็นต้น

2. แสดงชิ้นงานแบบจำลองเสาที่มีฐานรองรับแบบต่าง ๆ และสาธิตการ โกงตัวของเสายาวภายใต้น้ำหนักกระทำ

3. สาธิตขั้นตอนการแก้ปัญหาโจทย์ที่เกี่ยวข้องกับเนื้อหาในการเรียนการสอน เช่น เสาสั้น เสายาว เสายาวที่มีค้ำยัน เสายาวที่มีฐานยึดแน่นและปลายอิสระ เสายาวฐานยึดแน่นทั้งสองด้าน เสายาวที่มีฐานยึดแน่นและบานพับ ความปลอดภัยของเสายาว และเสายาวรับน้ำหนักเยื้องศูนย์กลาง เป็นต้น

#### 4. มอบหมายงาน

4.1 ให้ผู้เรียนแต่ละคนแก้ปัญหาโจทย์ที่เกี่ยวข้องกับเนื้อหา เช่น เสาสั้น เสายาว เสายาวที่มีค้ำยัน เสายาวที่มีฐานยึดแน่นและปลายอิสระ เสายาวฐานยึดแน่นทั้งสองด้าน เสายาวที่มีฐานยึดแน่นและบานพับ ความปลอดภัยของเสายาว และเสายาวรับน้ำหนักเยื้องศูนย์กลาง เป็นต้น

4.2 ให้ผู้เรียนแต่ละกลุ่มศึกษาเพิ่มเติมเกี่ยวกับเสาสั้นและเสายาว รวมถึงการยกตัวอย่างโครงสร้างจริงในชุมชนที่มีรูปร่างและพฤติกรรมรองรับน้ำหนักสอดคล้องกับเนื้อหาที่เรียน

4.3 ให้ผู้เรียนแต่ละคนทำแบบฝึกหัดจากคำถามท้ายบท เพื่อทดสอบความรู้ที่ได้เรียนมา

#### 5. ทำแบบฝึกหัดท้ายบท

### การวัดและประเมินผล

1. การสังเกตความสนใจของผู้เรียน
2. การฝึกปฏิบัติเกี่ยวกับการคำนวณปัญหาโจทย์
3. การทดสอบจากแบบทดสอบ
4. การประเมินผล ผู้เรียนจะต้องได้คะแนนรวมไม่ต่ำกว่าร้อยละ 60 จึงจะผ่านเกณฑ์การเรียนรู้

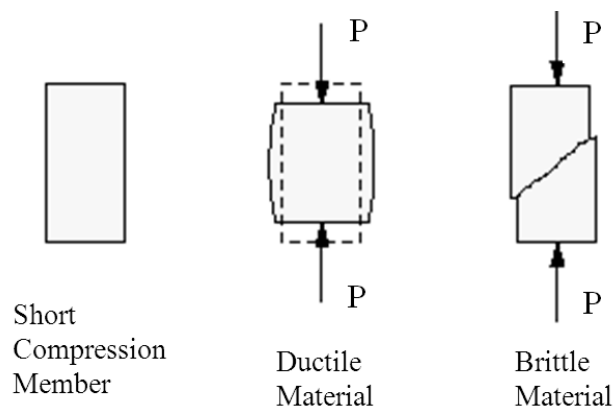
## บทที่ 8

### เสา

เสา (Column) เป็นชิ้นส่วนโครงสร้างที่รับแรงในแนวแกนและมีสำคัญในอุตสาหกรรมผลิตเครื่องจักรกล เช่น ก้านกระบอกลูกสูบ เสาเครื่องจักรกล และโครงสร้างรับแรงในแนวแกนรูปแบบต่าง ๆ เป็นต้น เสาสามารถรับได้ทั้งแรงดึงและแรงอัดขึ้นอยู่กับชนิดของวัสดุที่นำมาใช้ทำเสา การออกแบบเสาโดยส่วนใหญ่ผู้ออกแบบมักกำหนดให้รับแรงอัดเพราะมีความปลอดภัยมากกว่าการรับแรงดึง นอกจากแรงในแนวแกนแล้วเสายังสามารถต้านทานโมเมนต์ดัดได้อีกด้วย อย่างไรก็ตามหากมีโมเมนต์ดัดกระทำก็จะทำให้เสานั้นรับแรงในแนวแกนได้ลดลง เนื้อหาในบทนี้นำเสนอพฤติกรรมกรรมการรับน้ำหนักของเสาสั้นและเสายาว ตลอดจนพฤติกรรมของเสาเมื่อรับแรงเยื้องศูนย์กลาง

#### เสาสั้น

เสาสั้น (Short Column) คือชิ้นส่วนโครงสร้างที่สามารถรับน้ำหนักในแนวแกนได้เต็มคุณสมบัติด้านความแข็งแรงของวัสดุจนเกิดการอัดแตก (Crushing) หรือเกิดการคราก การวิบัติของเสาสั้นจะมีลักษณะแตกต่างกันตามชนิดของวัสดุที่ใช้ทำเสาดังแสดงในภาพที่ 8.1 ถ้าเสาทำจากวัสดุเหนียวจะเกิดการหดตัวในแนวแกนและเกิดการบวมตัวทางด้านข้างซึ่งเรียกว่าการคราก เมื่อมีการเพิ่มน้ำหนักที่กระทำ แต่ถ้าเสาทำจากวัสดุเปราะจะเกิดการแตกหักอย่างฉับพลันหรืออัดแตกเมื่อความเค้นอัดที่เกิดขึ้นมีค่ามากกว่าความเค้นอัดที่วัสดุสามารถรับได้ ความเค้นอัดที่เกิดขึ้นกับเสาสั้นสามารถหาได้จากการนำแรงหารด้วยพื้นที่หน้าตัดโดยไม่คำนึงถึงการโก่งด้านข้าง



ภาพที่ 8.1 การวิบัติของเสาสั้นที่ทำจากวัสดุเหนียวและวัสดุเปราะ

ที่มา : Efundu. 2013

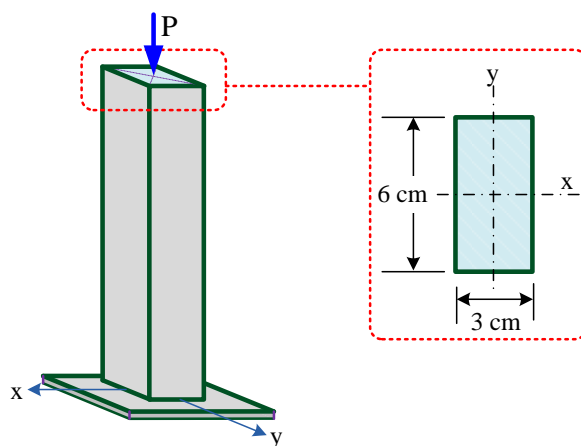
การกำหนดว่าเสาใดเป็นเสาสั้นหรือเสายาวนั้นมีหลากหลายแนวคิด ยกตัวอย่างเช่น กรณีเสาคอนกรีตเสริมเหล็กกำหนดให้เสาสั้นคือเสาที่มีอัตราส่วนความยาวต่อความกว้างน้อยกว่า 15 เป็นต้น สำหรับการจำแนกประเภทของเสาจะนำเสนอโดยละเอียดในหัวข้อเสายาวต่อไป สมโพธิ์ วิวิธเกษรวงษ์ (2542 : 383-387) และสิริศักดิ์ ปโยธรสิริ (2549 : 344-347) กล่าวว่าในกรณีที่เสาสั้นใด ๆ มีพื้นที่หน้าตัด  $A$  เท่ากันตลอดความยาวเสา  $L$  และความเค้นอัดใช้งานของวัสดุที่ใช้ทำเสามีค่า  $\sigma_c$  เสาสั้นนั้นจะสามารถรับน้ำหนักสูงสุดได้จากสมการดังต่อไปนี้

$$\text{ความเค้นอัด ; } \quad \sigma_c = \frac{P}{A} \quad (8.1)$$

$$\text{น้ำหนักที่รับได้ ; } \quad P = \sigma_c A \quad (8.2)$$

กรณีที่เสาสั้นรับแรงเยื้องศูนย์กลางก็จะเกิดแรงในแนวแกนร่วมกับโมเมนต์คดจากแรงเยื้องศูนย์กลาง ในการคำนวณความเค้นที่เกิดจะอาศัยหลักการซูเปอร์โพสิชันโดยการแยกพิจารณาเป็นสองกรณีคือ กรณีเสารับแรงในแนวแกนและกรณีเสารับโมเมนต์คด โดยเสารับโมเมนต์คดจะคำนวณโดยใช้หลักการเดียวกับคานภายใต้โมเมนต์คดที่ได้กล่าวมาแล้วในบทก่อนหน้า หลังจากนั้นก็จึงนำผลที่เกิดกับเสาทั้งสองกรณีมารวมกัน

**ตัวอย่างที่ 8.1** เสาไม้อันหนึ่งกำหนดให้เป็นเสาสั้นมีหน้าตัดรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาด  $3 \times 6$  cm ดังแสดงในภาพที่ 8.2 จงหาน้ำหนักที่เสาไม้นี้สามารถรับได้อย่างปลอดภัยถ้าความเค้นอัดใช้งานของไม้มีค่าไม่เกิน  $50 \text{ kg/cm}^2$



ภาพที่ 8.2 เสาสั้นหน้าตัดรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

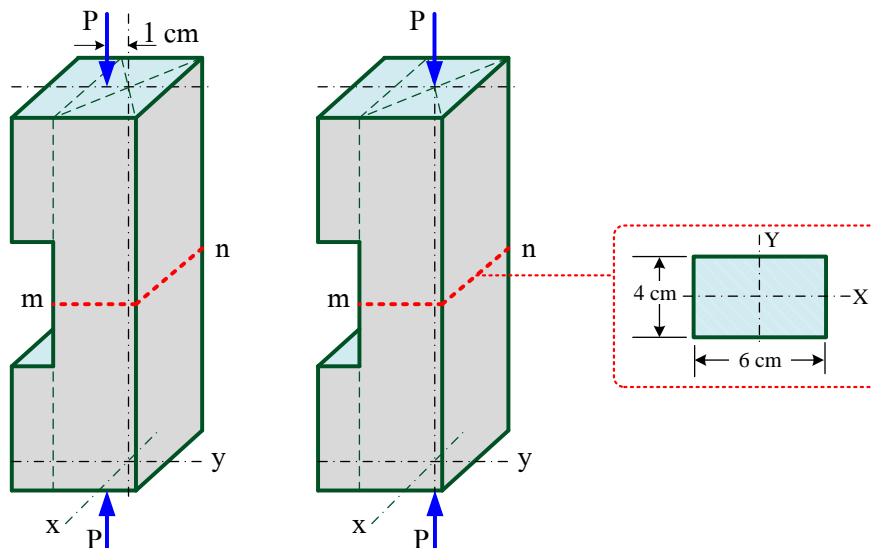
ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \text{พื้นที่หน้าตัดเสา; } A &= bh \\ &= 3 \times 6 = 18 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{น้ำหนักที่เสารับได้; } P &= \sigma_c A \\ &= 50 \times 18 = 900 \text{ kg} \end{aligned} \quad \text{ตอบ}$$

ตัวอย่างที่ 8.2 เสาสี่เหลี่ยมขนาด  $6 \times 6$  cm และที่หน้าตัด m-n ขนาดลดลงเป็น  $4 \times 6$  cm ดังแสดงในภาพที่ 8.3 จงหาความเค้นที่จุด m ถ้ามีน้ำหนัก 2,000 kg กระทำเยื้องศูนย์กลาง 1 cm และจงหาความเค้นที่จุด n ถ้ามีน้ำหนัก 2,000 kg กระทำในแนวแกน



ภาพที่ 8.3 เสาสี่เหลี่ยมมีหน้าตัดลดลงตรงกลาง

ที่มา : จีรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

วิธีทำ

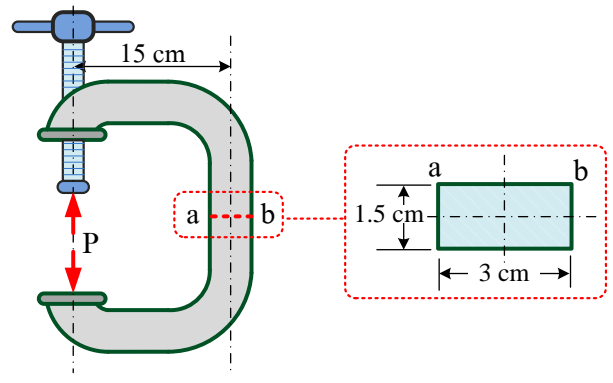
กรณีน้ำหนักกระทำเยื้องศูนย์กลาง 1 cm

$$\begin{aligned} \text{ความเค้นที่จุด m; } \sigma &= \frac{P}{A} + \frac{Mc}{I} \\ &= \frac{2,000}{4 \times 6} + \frac{2,000 \times 1 \times 2}{\left( \frac{6 \times 4^3}{12} \right)} \\ &= 208.33 \text{ kg/cm}^2 \text{ (เป็นความเค้นอัด)} \end{aligned} \quad \text{ตอบ}$$

กรณีน้ำหนักกระทำผ่านแนวแกนเสา

ความเค้นที่จุด n ;  $\sigma = \frac{P}{A}$   
 $= \frac{2,000}{4 \times 6}$   
 $= 83.33 \text{ kg/cm}^2$  (เป็นความเค้นอัด) ตอบ

ตัวอย่างที่ 8.3 เหล็กยึดรูปตัวซี (C-Clamp) ดังแสดงในภาพที่ 8.4 จงหาความเค้นบนหน้าตัด a-b ถ้ามีน้ำหนักกระทำ 300 kg และหน้าตัดเหล็กยึดรูปตัวซีเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาด 1.5×3 cm



ภาพที่ 8.4 เหล็กยึดรูปตัวซี

ที่มา : จีรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

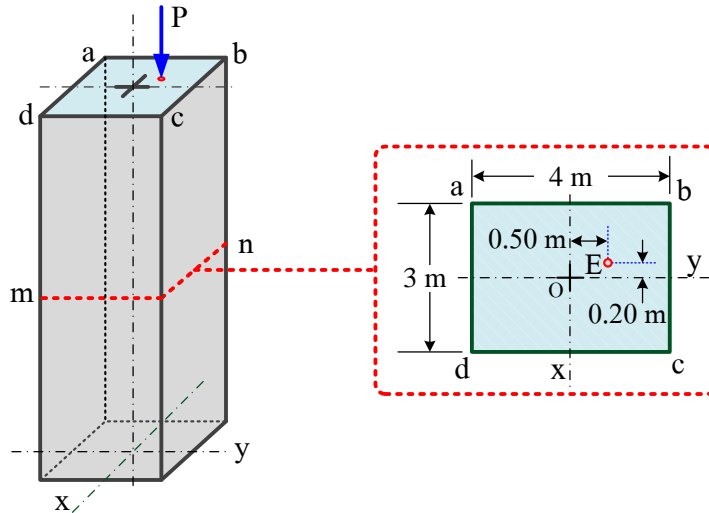
**วิธีทำ**

พิจารณาหน้าตัด a-b พบว่ามีแรงดึง  $P = 300 \text{ kg}$  และ โมเมนต์คัต  $M = 300 \times 15 = 4,500 \text{ kg-cm}$

ความเค้นที่จุด a ;  $\sigma_a = \frac{P}{A} + \frac{Mc}{I}$   
 $= \frac{300}{1.5 \times 3} + \frac{4,500 \times 1.5}{\left(\frac{1.5 \times 3^3}{12}\right)}$   
 $= 2,066.67 \text{ kg/cm}^2$  (ความเค้นดึง) ตอบ

ความเค้นที่จุด b ;  $\sigma_b = \frac{P}{A} - \frac{Mc}{I}$   
 $= \frac{300}{1.5 \times 3} - \frac{4,500 \times 1.5}{\left(\frac{1.5 \times 3^3}{12}\right)}$   
 $= -1,933.33 \text{ kg/cm}^2$  (ความเค้นอัด) ตอบ

ตัวอย่างที่ 8.4 เสาสั้นทำจากคอนกรีตขนาด  $4 \times 3$  m มีน้ำหนัก  $2 \times 10^5$  kg กระทำผ่านจุด E ซึ่งเยื้องศูนย์กลางดังแสดงในภาพที่ 8.5 จงหาความเค้นสูงสุดและต่ำสุดที่เกิดขึ้นบนหน้าตัดเสานี้



ภาพที่ 8.5 เสาสั้นรับน้ำหนักเยื้องศูนย์กลาง

ที่มา : จีรวัดน์ วิศวกรรมศาสตรบัณฑิต. 2556

**วิธีทำ**

น้ำหนัก P กระทำเยื้องศูนย์กลาง  $e_y = 50$  cm และ  $e_x = 20$  cm ทำให้เกิดโมเมนต์คัต M

โมเมนต์คัตรอบแกน y ;  $M_y = P e_y = 2 \times 10^5 \times 50 = 10 \times 10^6$  kg-cm

โมเมนต์คัตรอบแกน x ;  $M_x = P e_x = 2 \times 10^5 \times 20 = 4 \times 10^6$  kg-cm

โมเมนต์ความเฉื่อย ;  $I_y = \frac{1}{12} bh^3 = \frac{1}{12} \times 400 \times 300^3 = 900 \times 10^6$  cm<sup>4</sup>

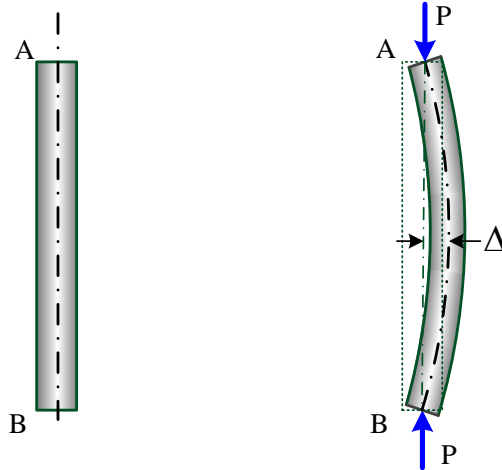
โมเมนต์ความเฉื่อย ;  $I_x = \frac{1}{12} bh^3 = \frac{1}{12} \times 300 \times 400^3 = 1.60 \times 10^9$  cm<sup>4</sup>

ความเค้นสูงสุดที่ n ;  $\sigma_{max} = \frac{P}{A} + \frac{M_y c}{I_x} + \frac{M_x c}{I_y}$   
 $= -\frac{2 \times 10^5}{300 \times 400} - \frac{10 \times 10^6 \times 200}{1.6 \times 10^9} - \frac{4 \times 10^6 \times 150}{900 \times 10^6}$   
 $= -3.59$  kg/cm<sup>2</sup> (ความเค้นอัด) ตอบ

ความเค้นน้อยสุดที่ m ;  $\sigma_{min} = \frac{P}{A} + \frac{M_y c}{I_x} + \frac{M_x c}{I_y}$   
 $= -\frac{2 \times 10^5}{300 \times 400} + \frac{10 \times 10^6 \times 200}{1.6 \times 10^9} + \frac{4 \times 10^6 \times 150}{900 \times 10^6}$   
 $= 0.25$  kg/cm<sup>2</sup> (ความเค้นดึง) ตอบ

## เสายาว

ชาญ ถนัดงาน (2523 : 263-274) และบรรจบ อรชร (2542 : 13.1-13.15) กล่าวว่า เสายาว (Long Column) คือชิ้นส่วน โครงสร้างที่รับน้ำหนักในแนวแกนแต่ประสิทธิภาพในการรับน้ำหนักของเสายาวจะขึ้นอยู่กับสัดส่วนความสูงต่อขนาดพื้นที่หน้าตัดเสาหรือเรียกว่า ความเรียวยของเสา (Slenderness Ratio) สาเหตุที่ความเรียวยมีผลต่อการรับน้ำหนักเนื่องจากเสาที่เรียวยมาก หรือมีพื้นที่หน้าตัดเล็กเมื่อเทียบกับความสูงจะทำให้เกิดการโก่งด้านข้าง (Lateral Deflection) จนเกิดการวิบัติ เรียกว่า การเดาะหัก (Buckling) เมื่อเสาเกิดการโก่งด้านข้างจะทำให้แรงที่กระทำ P เกิดการเอียงจากจุดศูนย์กลางถ่วงของหน้าตัดเสาเป็นระยะ  $\Delta$  จนเกิด โมเมนต์ดัดขึ้นดังแสดงในภาพที่ 8.6 ขนาดโมเมนต์ดัดจะเพิ่มขึ้นเมื่อระยะโก่งเพิ่มขึ้นจน กระทั่งบางส่วนของหน้าตัดเสามีความเค้นเกินกว่าความแข็งแรงที่วัสดุจะรับได้ โมเมนต์ดัดที่เกิดขึ้นในเสายาวมีค่าเท่ากับ แรงอัด P คูณด้วยการโก่งด้านข้าง  $\Delta$  ส่งผลทำให้เสายาวรับน้ำหนักได้น้อยกว่าเสาสั้นเมื่อพื้นที่หน้าตัดเท่ากัน การจำแนกประเภทของเสาสั้นและเสายาวยังไม่มีข้อสรุปที่ชัดเจนแต่นักวิจัยหลายท่านได้แนะนำไว้ เช่น D.J. Dunn (nd.) เสนอแนะว่าเสาสั้นที่ทำจากเหล็กควรมีอัตราส่วนระหว่างความสูงต่อรัศมีไจเรชั่น (Radius of Gyration) น้อยกว่า 120 หากเกินกว่าถือว่าเป็นเสายาว และเสาที่ทำจากอะลูมิเนียมจะเป็นเสาสั้นถ้าอัตราส่วนระหว่างความสูงต่อรัศมีไจเรชั่นน้อยกว่า 80 เป็นต้น



(ก) เสายาวก่อนรับน้ำหนัก

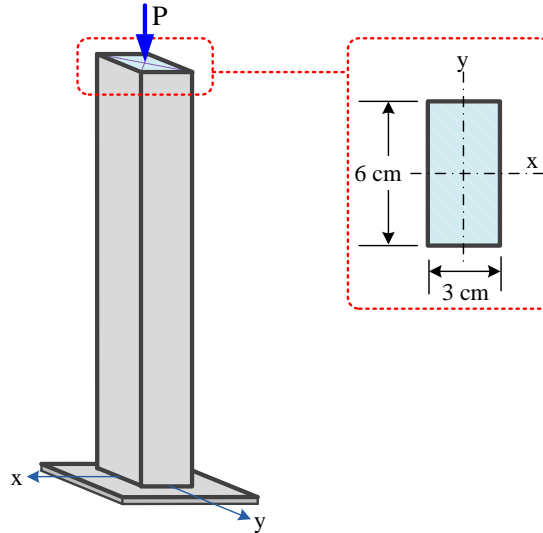
(ข) เสายาวที่รับน้ำหนัก

ภาพที่ 8.6 การโก่งเดาะของเสายาว

ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556



ตัวอย่างที่ 8.5 จงคำนวณหารัศมีใจเรขาคณิตของเสาหน้าตัดรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีขนาด  $3 \times 6$  cm ดังแสดงในภาพที่ 8.7 โดยพิจารณาขอบแกน  $x$  และแกน  $y$  ตามลำดับ



ภาพที่ 8.7 เสาหน้าตัดรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \text{พื้นที่หน้าตัดเสา ; } A &= bh \\ &= 3 \times 6 = 18 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{โมเมนต์ความเฉื่อยรอบแกน } x ; I_x &= \frac{1}{12} bh^3 \\ &= \frac{1}{12} \times 3 \times 6^3 = 54 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

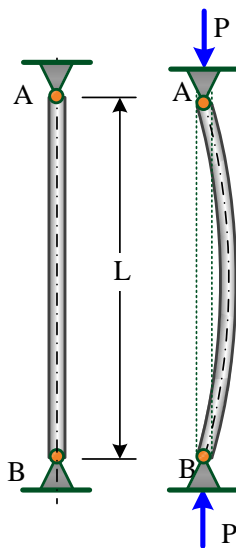
$$\begin{aligned} \text{รัศมีใจเรขาคณิตรอบแกน } x ; r_x &= \sqrt{\frac{I_x}{A}} \\ &= \sqrt{\frac{54}{18}} = 1.73 \text{ cm} \quad \text{ตอบ} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{โมเมนต์ความเฉื่อยรอบแกน } y ; I_y &= \frac{1}{12} bh^3 \\ &= \frac{1}{12} \times 6 \times (3)^3 = 13.50 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{รัศมีใจเรขาคณิตรอบแกน } y ; r_y &= \sqrt{\frac{I_y}{A}} \\ &= \sqrt{\frac{13.50}{18}} = 0.866 \text{ cm} \quad \text{ตอบ} \end{aligned}$$

## การคำนวณเสายาว

มนตรี พิรุณเกษตร (2544 : 528-532) สมโพธิ วิวิธเกยูรวงศ์ (2542 : 465-480) และ John Case, et al. (1999 : 424-428) กล่าวว่าสมการที่ใช้ทำนายแรงหรือน้ำหนักที่เสายาวสามารถรับได้อย่างปลอดภัยถูกนำเสนอโดยนักวิทยาศาสตร์ชาวสวิสเซอร์แลนด์ชื่อ เลออนฮาร์ด ออยเลอร์ (Leonard Euler) โดยสมการที่เขานำเสนอนี้เรียกว่า สมการออยเลอร์ (Euler's Equation) ซึ่งเป็นสมการที่ได้รับการยอมรับอย่างแพร่หลาย สมการดังกล่าวมีสมมติฐานมาจากการพิจารณาเสายาว  $L$  ที่มีฐานรองรับทั้งสองด้านเป็นบานพับ (Hinge Ended) และมีน้ำหนัก  $P$  กระทำที่ปลายทั้งสองผ่านจุดศูนย์กลางถ่วงน้ำหนักแสดงในภาพที่ 8.8 เมื่อเสารับน้ำหนักจนเกิดการโก่งด้านข้างก็จะส่งผลทำให้เกิดโมเมนต์จากน้ำหนักเชื่อมศูนย์กลางกระทำร่วมกับแรงในแนวแกน โมเมนต์ดังกล่าวสามารถเขียนให้อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์ (Differential Equation) ถ้าหากอินทิเกรตสมการเชิงอนุพันธ์ดังกล่าวก็จะได้สมการความชันและสมการระยะ โคงงของเสา เมื่อนำผลการวิเคราะห์การเสียรูปไปหาค่าคงที่ที่เกิดจากการอินทิเกรตสมการเชิงอนุพันธ์ก็จะได้น้ำหนักสูงสุดที่สอดคล้องกับรูปแบบการโก่งของเสา ซึ่งค่าน้ำหนักสูงสุดนี้จะทำให้เสาเกิดการเดาะหักพอดี หรือเรียกว่า น้ำหนักวิกฤติ (Critical Load :  $P_{cr}$ ) ค่าน้ำหนักวิกฤติที่เสายาวสามารถรับได้อย่างปลอดภัยหาได้จากสมการดังต่อไปนี้



ภาพที่ 8.8 การโก่งด้านข้างของเสายาวฐานบานพับ

ที่มา : จีรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

$$\text{น้ำหนักสูงสุด ; } P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (8.3)$$

ถ้าเอาพื้นที่หน้าตัดของเสา A มารวมจะได้

$$\frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 EI}{L^2 A} \quad (8.4)$$

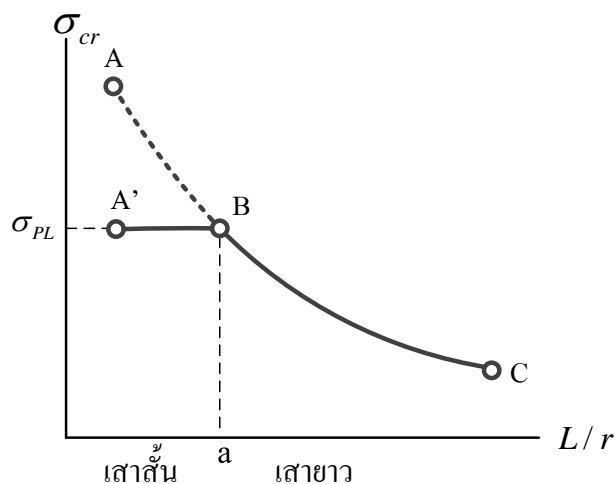
ความเค้นสูงสุด ;  $\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2 A} \quad (8.5)$

รัศมีจอร์จัน ;  $r = \sqrt{\frac{I}{A}} \quad (8.6)$

ความเค้นสูงสุด ;  $\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E r^2}{L^2} \quad (8.7)$

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(L/r)^2} \quad (8.8)$$

เมื่อ E คือโมดูลัสยืดหยุ่นของวัสดุที่ใช้ทำเสา I คือโมเมนต์ความเฉื่อยต่ำสุดของหน้าตัดเสา L คือความยาวของเสา  $\sigma_{cr}$  คือความเค้นอัดสูงสุดที่ทำให้เกิดการเดาะหัก และ L/r คือความเรียวเสา จะเห็นว่า  $\pi^2 E$  เป็นค่าคงที่ดังนั้นความเค้นอัดจึงแปรผกผันกับความเรียวเสาสามารถเขียนแผนภาพได้ดังแสดงในภาพที่ 8.9 (สิริศักดิ์ ปโยชรสิริ. 2549 : 351-358, James M. Gere and Barry J. Goodno. 2012 : 523-547)



ภาพที่ 8.9 ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นอัดและความเรียวเสา

ที่มา : สิริศักดิ์ ปโยชรสิริ. 2549 : 358

จากภาพที่ 8.9 เป็นแผนภาพความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นอัดและความเรียวเสาของสมการออยเลอร์พบว่า จุด a ซึ่งเป็นค่าความเรียวเสา L/r ซึ่งแบ่งเส้นโค้ง ABC ออกเป็นสองส่วน คือ AB และ BC ความเค้นในเสาที่จุด B จะมีค่าเท่ากับความเค้นที่ขีดจำกัดสัดส่วน  $\sigma_{PL}$

ของวัสดุที่ใช้ทำเสา จะเห็นว่าเมื่อค่าความเร็ว  $L/r$  ลดลงหรือน้อยกว่าจุด  $a$  ก็จะทำให้ความเค้นในเสามากกว่า  $\sigma_{PL}$  นั่นคือเสาจะแตกหักเมื่อความเค้นสูงกว่าขีดจำกัดสัดส่วนซึ่งเป็นไปไม่ได้ ดังนั้นสมการของออยเลอร์จะนำมาใช้ได้ก็ต่อเมื่อเสานั้นมีค่าความเร็ว  $L/r$  ที่ทำให้ความเค้นในเสาน้อยกว่า  $\sigma_{PL}$  หรือแนว A'B ถ้าความเค้นในเสาเท่ากับ  $\sigma_{PL}$  ก็จะสัมพันธ์กับจุด  $a$  ซึ่งเป็นจุดที่ใช้แบ่งเขตระหว่างเสาสั้นและเสายาว วัสดุแต่ละชนิดก็จะมีจุด  $a$  ซึ่งเป็นค่าความเร็วที่ไม่เท่ากัน

**ตัวอย่างที่ 8.6** เสาเหล็กยาว  $L$  รัศมีจอยเรชั่น  $r$  ที่ปลายทั้งสองข้างยึดด้วยบานพับ จงหาค่าความเร็วเสาที่แบ่งระหว่างเสาสั้นและเสายาว กำหนดให้เหล็กมีค่าโมดูลัสยืดหยุ่น  $E = 30 \times 10^6 \text{ lb/in}^2$  และค่าความเค้นอัดที่ขีดจำกัดสัดส่วนเท่ากับ  $30,000 \text{ lb/in}^2$

### วิธีทำ

จากสมการความเค้นเสายาวของออยเลอร์

$$\begin{aligned} \text{ความเค้นสูงสุด ;} \quad \sigma_{cr} &= \frac{\pi^2 E}{(L/r)^2} \\ \text{ความเร็วเสา ;} \quad \frac{L}{r} &= \sqrt{\frac{\pi^2 \times 30 \times 10^6}{30,000}} \\ &= 99.35 \end{aligned}$$

ค่าความเร็วเสาที่แบ่งเสาสั้นและเสายาวคือ 99.35

ตอบ

**ตัวอย่างที่ 8.7** เสาเหล็กยาว  $L$  รัศมีจอยเรชั่น  $r$  ที่ปลายทั้งสองข้างยึดด้วยบานพับ มีค่าโมดูลัสยืดหยุ่น  $E = 2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$  ความเค้นอัดที่พิกัดยืดหยุ่นเท่ากับ  $1,500 \text{ kg/cm}^2$  จงหาค่าความเร็วเสาที่แบ่งระหว่างเสาสั้นและเสายาว

### วิธีทำ

จากสมการความเค้นเสายาวของออยเลอร์

$$\begin{aligned} \text{ความเค้นสูงสุด ;} \quad \sigma_{cr} &= \frac{\pi^2 E}{(L/r)^2} \\ 1,500 &= \frac{\pi^2 \times 2 \times 10^6}{(L/r)^2} \\ \text{ความเร็วเสา ;} \quad \frac{L}{r} &= 114.71 \end{aligned}$$

ค่าความเร็วเสาที่แบ่งเสาสั้นและเสายาวคือ 114.71

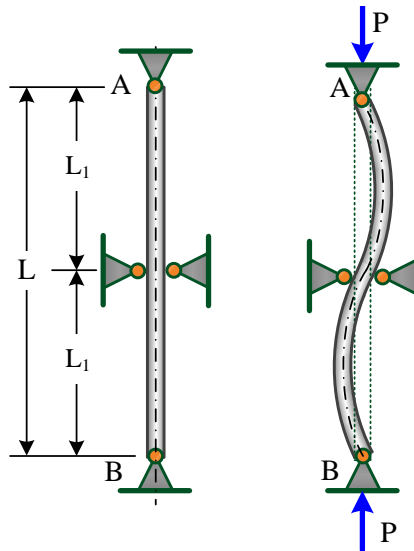
ตอบ

## ปัจจัยที่มีผลต่อความยาวเสายาว

เสายาวที่มีฐานเสาทั้งด้านบนและด้านล่างแบบบานพับเป็นรูปแบบพื้นฐานในการคำนวณความเค้นตามสมการออยเลอร์ ซึ่งมีความสัมพันธ์กับความยาวเสาดังที่ได้กล่าวมาแล้วในหัวข้อก่อนหน้า แต่ในความเป็นจริงฐานเสาอาจเป็นแบบอื่นได้อีก เช่น ยึดแน่น ปลายอิสระ หรือแบบผสม เป็นต้น ชนิดของฐานเสามีผลต่อรูปร่างการโก่งด้านข้างซึ่งมีผลต่อการรับน้ำหนักอนึ่งการยึดด้านข้างก็มีผลทำให้ค่าความยาวเสาเปลี่ยนไปด้วย ในลักษณะเช่นนี้ความยาวเสาดเดิม  $L$  จะเปลี่ยนแปลงเป็นความยาว  $L_1$  และสามารถประยุกต์ใช้สมการออยเลอร์ในการคำนวณน้ำหนักก่อนการเดาะหักได้ดังต่อไปนี้

### 1. เสายาวที่มีค้ำยัน

ถ้าชิ้นส่วน โครงสร้างรับแรงในแนวแกนเหมือนกันแต่ไม่อยู่ในแนวคิ่งมักเรียกชิ้นส่วนนั้นว่า ค้ำยัน (Strut) หากพิจารณาเสายาวที่มีฐานเสาเป็นแบบบานพับทั้งสองด้านจะพบว่า การโก่งด้านข้างจะเป็นแนวโค้งโดยไม่มีจุดค้ำกลับตลอดความยาว  $L$  เมื่อมีการใส่ค้ำยันด้านข้างยึดที่กึ่งกลางเสาจะทำให้ความยาวเสาสั้นลงเป็น  $L_1$  เรียกว่า ความยาวประสิทธิผล (Effective Length) และมีจุดค้ำกลับที่ตำแหน่งค้ำยันดังแสดงในภาพที่ 8.10 ความยาวเสาสั้นลงจะทำให้ความสามารถในการรับแรงได้มากขึ้น สมการที่ใช้ในการคำนวณน้ำหนักเสามีดังนี้ (James M. Gere and Barry J. Goodno, 2012 : 524-535)



ภาพที่ 8.10 เสายาวมีค้ำยันด้านข้างที่กึ่งกลาง

ที่มา : จีรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา, 2556

พิจารณาจากสมการของออยเลอร์

$$\text{น้ำหนักที่เสารับได้ ; } P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (8.9)$$

ความยาวเสาที่เปลี่ยนแปลง  $L_1$  นี้จะมีความสัมพันธ์กับความยาวเสาเดิมก่อนการค้ำยัน  $L$  ที่คูณด้วยสัมประสิทธิ์คงที่  $k$  ดังสมการ

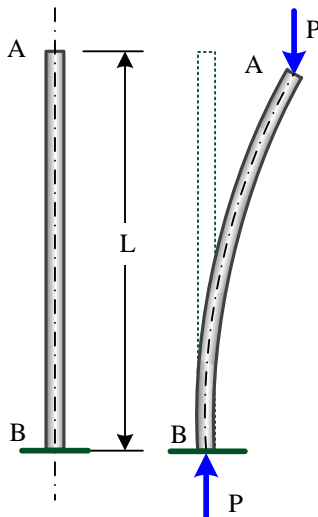
$$L_1 = kL \quad (8.10)$$

เมื่อค้ำยันด้านข้าง (Lateral Support) ณ กึ่งกลางเสาจะได้  $L_1 = L/2$  หรือ  $k = 0.5$  แทนค่าในสมการออยเลอร์จะได้สมการของแรงอัดสูงสุดดังนี้

$$\text{น้ำหนักที่เสารับได้ ; } P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_1^2} = \frac{4\pi^2 EI}{L^2} \quad (8.11)$$

## 2. เสาที่มีฐานยึดแน่นและปลายอิสระ

เมื่อพิจารณาเสาที่มีฐานยึดแน่น (Fixed End) และปลายอีกข้างหนึ่งอิสระ (Free End) ดังแสดงในภาพที่ 8.11 รูปร่างของการโก่งด้านข้างจะเกิดขึ้นสูงสุด ณ ตำแหน่งปลายอิสระและจะมีค่าลดลงจนเป็นศูนย์ ณ ตำแหน่งฐานยึดแน่น ดังนั้นความยาว  $L$  เดิมกรณีฐานบานพับจะเปลี่ยนเป็นความยาว  $L_1$  ใหม่ซึ่งมีค่าเป็น  $2L$  จึงจะมีรูปร่างการโก่งตัวด้านข้างคล้ายกับกรณีฐานบานพับ สมการที่ใช้ในการคำนวณน้ำหนักสูงสุดคือ (James M. Gere and Barry J. Goodno. 2012 : 540-543)



ภาพที่ 8.11 เสาที่มีฐานยึดแน่นและปลายอิสระ

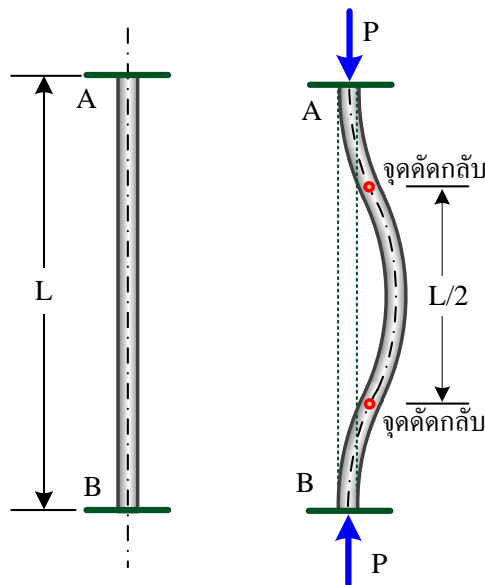
ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิทยา. 2556

$$\text{น้ำหนักที่เสารับได้}; \quad P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_1^2} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2} \quad (8.12)$$

### 3. เสายาวฐานยึดแน่นทั้งสองด้าน

กรณีเสายาวที่มีปลายทั้งสองข้างยึดแน่น (Fixed Ends) ดังแสดงในภาพที่ 8.12 รูปร่างของการโก่งด้านข้างจะเกิดขึ้นสูงสุด ณ ตำแหน่งกึ่งกลางเสาและจะมีค่าลดลงจนเป็นศูนย์ ณ ตำแหน่งฐานยึดแน่นทั้งสองด้านโดยมีจุดตัดกลับ 2 จุด ดังนั้นความยาว  $L$  เดิมกรณีฐานบานพับจะเปลี่ยนเป็นความยาว  $L_1$  ใหม่ซึ่งมีค่าเป็น  $L/2$  จึงจะมีรูปร่างการโก่งตัวด้านข้างคล้ายกับกรณีฐานบานพับ สมการที่ใช้ในการคำนวณน้ำหนักสูงสุดคือ (James M. Gere and Barry J. Goodno. 2012 : 543-544)

$$\text{น้ำหนักที่เสารับได้}; \quad P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_1^2} = \frac{4\pi^2 EI}{L^2} \quad (8.13)$$



ภาพที่ 8.12 เสายาวฐานยึดแน่นทั้งสองด้าน

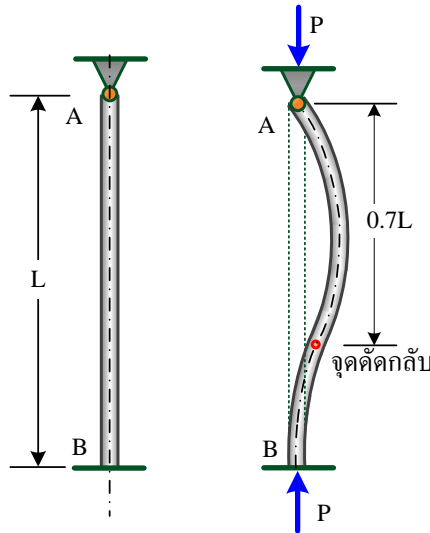
ที่มา : จีรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

### 4. เสายาวที่มีฐานยึดแน่นและบานพับ

กรณีเสายาวที่มีฐานด้านหนึ่งยึดแน่นและฐานอีกด้านเป็นบานพับ ดังแสดงในภาพที่ 8.13 รูปร่างของการโก่งด้านข้างจะเกิดขึ้นสูงสุด ณ ตำแหน่งเอียงใกล้กับฐานบานพับและจะมีค่าลดลงจนเป็นศูนย์ ณ ตำแหน่งฐานทั้งสองด้านโดยมีจุดตัดกลับ 1 จุด ดังนั้นความยาว  $L$  เดิมกรณีฐานบานพับจะเปลี่ยนเป็นความยาว  $L_1$  ใหม่ซึ่งมีค่าเป็น  $0.7L$  จึงจะมีรูปร่างการโก่งตัวด้านข้าง

คล้ายกับกรณีฐานบานพับ สมการที่ใช้ในการคำนวณน้ำหนักสูงสุดคือ (James M. Gere and Barry J. Goodno, 2012 : 545-547)

$$\text{น้ำหนักที่เสารับได้ ; } P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_1^2} = \frac{\pi^2 EI}{(0.7L)^2} \quad (8.14)$$



ภาพที่ 8.13 เสาขาคอนกรีตที่มีฐานยึดแน่นและบานพับ

ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

### ความปลอดภัยของเสา

น้ำหนักปลอดภัย (Safe Load :  $P_{safe}$ ) ที่เสาสามารถรับได้จะถูกทอนลงจากน้ำหนักสูงสุดที่คำนวณได้จากสมการออยเลอร์ การทอนน้ำหนักสามารถทำได้โดยการนำค่าน้ำหนักสูงสุดเฉพาะ  $P_{cr}$  หารด้วยค่าความปลอดภัย N (Safety Factor) ดังสมการ

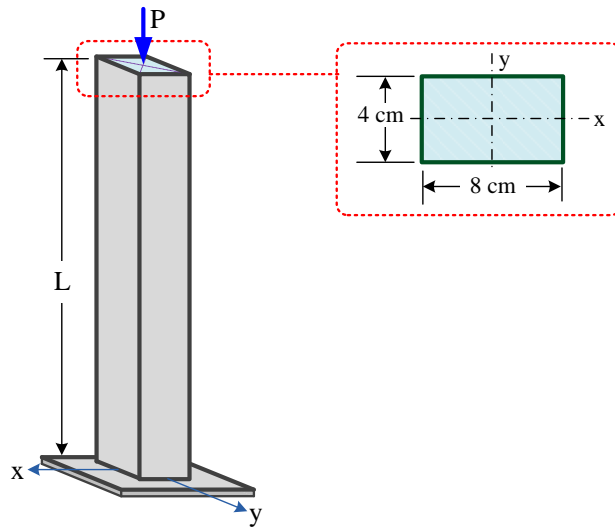
$$\text{น้ำหนักปลอดภัย ; } P_{safe} = \frac{P_{cr}}{N} \quad (8.15)$$

ตัวอย่างที่ 8.8 เสาขาคอนกรีต 3 m มีหน้าตัดรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาด  $4 \times 8$  cm รับน้ำหนักในแนวแกนดังแสดงในภาพที่ 8.14 จงหาค่าความเร็วเสาที่แบ่งระหว่างเสาสั้นและเสา

### วิธีทำ

$$\begin{aligned} \text{พื้นที่หน้าตัดเสา ; } A &= bh \\ &= 8 \times 4 = 32 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$





ภาพที่ 8.14 เสาขาน้ำตัดรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า  
ที่มา : จีรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

$$\begin{aligned} \text{โมเมนต์ความเฉื่อยรอบแกน } x; I_x &= \frac{1}{12}bh^3 \\ &= \frac{1}{12} \times 8 \times 4^3 = 42.67 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{โมเมนต์ความเฉื่อยรอบแกน } y; I_y &= \frac{1}{12}bh^3 \\ &= \frac{1}{12} \times 4 \times (8)^3 = 170.67 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

ใช้โมเมนต์ความเฉื่อย  $I_x$  ในการคำนวณรัศมีไจเรชั่นเนื่องจากมีค่าน้อยกว่า  $I_y$

$$\begin{aligned} \text{รัศมีไจเรชั่น;} \quad r &= \sqrt{\frac{I}{A}} \\ &= \sqrt{\frac{42.67}{32}} = 1.15 \text{ cm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ความเร็วเสา;} \quad \frac{L}{r} &= \frac{3 \times 100}{1.15} \\ &= 260.87 \end{aligned}$$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 8.9 เสาขาน้ำที่ปลายทั้งสองข้างยึดด้วยบานพับ เสาทำจากอะลูมิเนียมมีค่าโมดูลัสยืดหยุ่น  $E = 72 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$  และความเค้นอัดสูงสุดเท่ากับ  $700 \text{ kg/cm}^2$  จงหาค่าความเร็วเสาที่แบ่งระหว่างเสาสั้นและเสาขาน้ำ

**วิธีทำ**

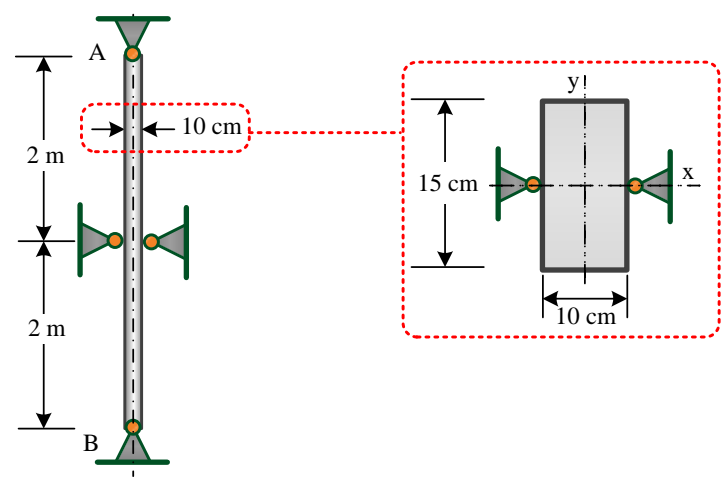
ความริ้วเสา ; 
$$\frac{L}{r} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{PL}}}$$

$$= \sqrt{\frac{\pi^2 \times 72 \times 10^5}{700}}$$

$$= 318.62$$

ค่าความริ้วเสาที่แบ่งเสาสั้นและเสายาวคือ 318.62 ตอบ

**ตัวอย่างที่ 8.10** เสาไม้หน้าตัดรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาด 10×15 cm ยาว 4 m ที่กึ่งกลางเสามีค้ำยัน ด้านข้างในแนวแกน x ดังแสดงในภาพที่ 8.15 ถ้าปลายทั้งสองของเสามีการยึดแบบบานพับ จงหาหน้าหนักปลอดภัยที่เสารับได้ กำหนดให้ความเค้นอัดของไม้เท่ากับ 120 kg/cm<sup>2</sup> ค่าโมดูลัสยืดหยุ่นของไม้ E = 1.5×10<sup>4</sup> kg/cm<sup>2</sup> ค่าความปลอดภัยเท่ากับ 4 และเสาไม้จะเป็นเสายาวเมื่อค่าความริ้วมากกว่า 60



**ภาพที่ 8.15** เสาไม้ฐานบานพับและมีค้ำยัน

ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิทยา. 2556

**วิธีทำ**

พื้นที่หน้าตัดเสา ;  $A = bh$   
 $= 10 \times 15 = 150 \text{ cm}^2$

กรณีที่ 1 พิจารณาการ โกงในแนวแกน y ที่ไม่มีค้ำยัน

โมเมนต์ความเฉื่อย ;  $I_x = \frac{1}{12} bh^3$

$$= \frac{1}{12} \times 10 \times (15)^3$$

$$= 2,812.5 \text{ cm}^4$$

รัศมีจอร์แดน ;  $r = \sqrt{\frac{I}{A}}$

$$= \sqrt{\frac{2,812.5}{150}} = 4.33 \text{ cm}$$

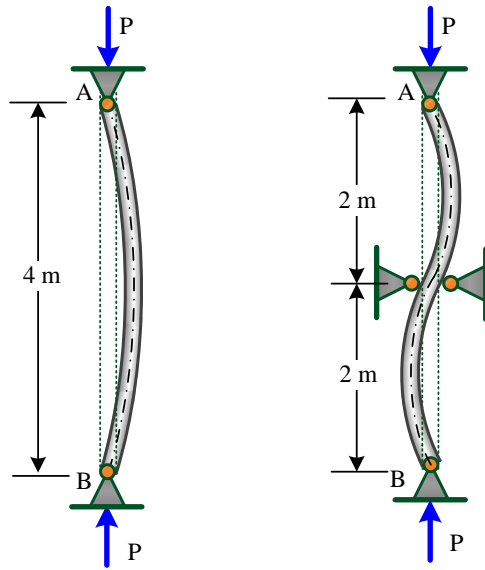
ความยาวเสา ;  $\frac{L}{r} = \frac{400}{4.33} = 92.38$

ค่าความยาวเสาที่โค้งในแนวแกน y มีค่า 92.38 มากกว่า 60 แสดงว่าเป็นเสายาว

น้ำหนักจากสมการออยเลอร์ ;  $P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{NL_1^2}$

$$= \frac{\pi^2 \times 1.5 \times 10^4 \times 2,812.5}{4 \times (400)^2}$$

$$= 650.58 \text{ kg}$$



กรณีที่ 1 ไม่มีค้ำยัน

กรณีที่ 2 มีค้ำยัน

ภาพที่ 8.16 การโค้งของเสายาวตามแนวแกน y และแกน x

ที่มา : จีรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

กรณีที่ 2 พิจารณาการโค้งในแนวแกน x ซึ่งมีค้ำยัน

โมเมนต์ความเฉื่อย ;  $I_y = \frac{1}{12} bh^3$

$$= \frac{1}{12} \times 15 \times (10)^3$$

$$= 1,250 \text{ cm}^4$$

รัศมีจอร์ชัน ;  $r = \sqrt{\frac{I}{A}}$

$$= \sqrt{\frac{1,250}{150}} = 2.89 \text{ cm}$$

เมื่อมีค้ำยันด้านข้างที่กึ่งกลางเสาตั้งนั้น  $L_1$  เท่ากับ  $L/2$

ความยาวเสา ;  $\frac{L_1}{r} = \frac{2 \times 100}{2.89} = 69.20$

ค่าความยาวเสาที่โค้งในแนวแกน x มีค่า 69.20 มากกว่า 60 แสดงว่าเป็นเสายาว

น้ำหนักจากสมการออยเลอร์ ;  $P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{NL_1^2}$

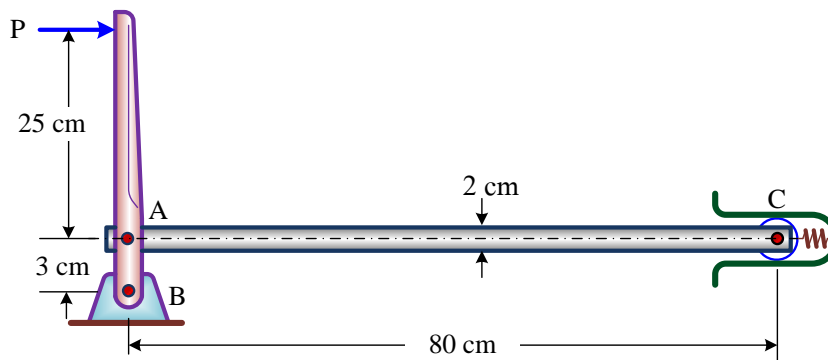
$$= \frac{\pi^2 \times 1.5 \times 10^4 \times 1,250}{4 \times (200)^2}$$

$$= 1,156.59 \text{ kg}$$

น้ำหนักปลอดภัยที่เสารับได้เท่ากับ 650.58 kg

ตอบ

**ตัวอย่างที่ 8.11** อุปกรณ์ควบคุมกลไกประกอบด้วยท่อนเหล็กกลมที่ยึดกับคันโยกดังแสดงในภาพที่ 8.17 จงหาน้ำหนักสูงสุดที่กระทำบนปลายคันโยกแล้วไม่ทำให้ท่อนเหล็กยาวเกิดการเดาะหักและจงหาความเค้นสูงสุดของท่อนเหล็กก่อนการเดาะหัก กำหนดให้โมดูลัสยืดหยุ่นของเหล็ก  $E = 2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$



ภาพที่ 8.17 อุปกรณ์ควบคุมกลไก

ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิทยา. 2556

## วิธีทำ

$$\begin{aligned} \text{โมเมนต์ความเฉื่อยท่อนเหล็ก ; } I &= \frac{\pi D^4}{64} \\ &= \frac{\pi(2)^4}{64} \\ &= 0.785 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{รัศมีจําเรซัน ; } r &= \sqrt{\frac{I}{A}} \\ &= \sqrt{\frac{D^2}{16}} \\ &= D/4 = 0.5 \text{ cm} \end{aligned}$$

หาค่าความเร็วท่อนเหล็กภายใต้แรงอัดกรณียึดปลายด้วยบานพับทั้งสองด้าน เมื่อ D เป็นขนาดเส้นผ่าศูนย์กลางท่อนเหล็ก

$$\begin{aligned} \text{ความเร็วท่อนเหล็ก ; } \frac{L}{r} &= \frac{80}{0.5} \\ &= 160 \end{aligned}$$

กรณีที่ 1 สมมติให้ท่อนเหล็กกลมเป็นเสาขาวเมื่อมีค่าความเร็วมากกว่า 100 ดังนั้นการรับแรงอัดสูงสุดในท่อนเหล็กจึงหาได้จากสมการของออยเลอร์

$$\begin{aligned} \text{น้ำหนักในท่อนเหล็ก ; } P_{cr} &= \frac{\pi^2 EI}{L^2} \\ &= \frac{\pi^2 \times 2.1 \times 10^6 \times 0.785}{80^2} \\ &= 2,542.19 \text{ kg} \end{aligned}$$

กรณีที่ 2 หาน้ำหนักที่ท่อนเหล็กรับได้จากสมการสมมูลโมเมนต์รอบจุด B

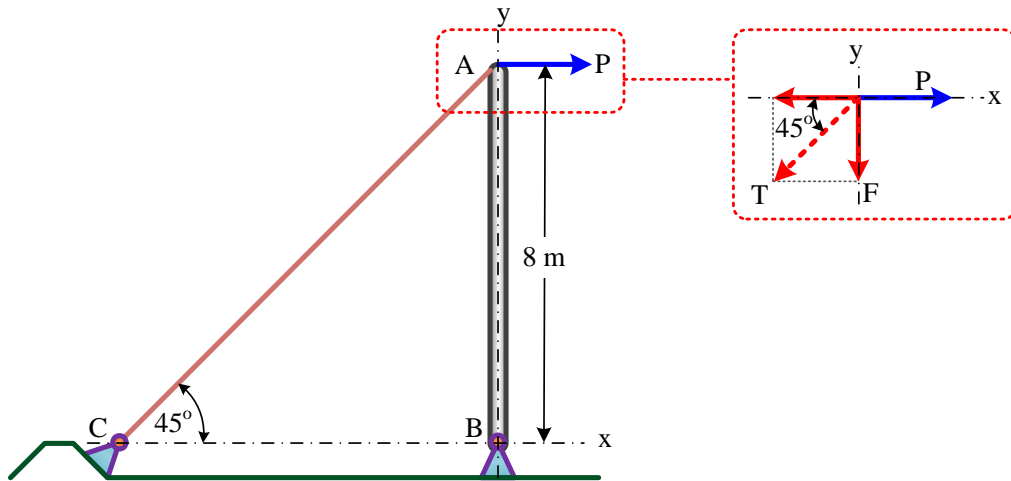
$$P(25+3) = 2,542.19 \times 3$$

$$\text{น้ำหนักในท่อนเหล็ก ; } P = 272.38 \text{ kg}$$

ดังนั้นท่อนเหล็กกลมสามารถรับน้ำหนักได้มากที่สุดเท่ากับ 272.38 kg ตอบ

$$\begin{aligned} \text{ความเค้นสูงสุดในท่อนเหล็ก ; } \sigma_{cr} &= \frac{P}{A} \\ &= \frac{272.38}{3.1416} \\ &= 86.70 \text{ kg/cm}^2 \end{aligned} \quad \text{ตอบ}$$

ตัวอย่างที่ 8.12 เสากลม AB ทำจากไม้ขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง 25 cm ที่มีค่าความเค้นอัดปลอดภัยเท่ากับ  $80 \text{ kg/cm}^2$  และค่าโมดูลัสยืดหยุ่น  $E = 30 \times 10^4 \text{ kg/cm}^2$  มีน้ำหนักกระทำในแนวราบที่จุด A ดังแสดงในภาพที่ 8.18 จงหาน้ำหนักสูงสุดที่เสาสามารถรับได้อย่างปลอดภัย เมื่อลวดเหล็กแนว AC แข็งแรงมากและเสา AB เป็นเสาขาว



ภาพที่ 8.18 เสากลมทำจากไม้และยึดด้วยลวดเหล็ก  
ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

**วิธีทำ**

น้ำหนัก P ในแนวราบทำให้เกิดแรงอัดในแนวแกนเสา พิจารณาสมดุลแรงที่จุด A

สมดุลแรงในแกน x ;  $P = T \sin 45^\circ$

แรงดึงในลวดเหล็ก ;  $T = \frac{P}{\sin 45^\circ}$

สมดุลแรงในแกน y ;  $F = T \cos 45^\circ$

แรงอัดในเสา ;  $F = \frac{P}{\sin 45^\circ} \times \cos 45^\circ = P \text{ kg}$

กำหนดให้เสา AB เป็นเสาขาวจึงใช้สมการของออยเลอร์หาน้ำหนักสูงสุดที่เสารับได้กรณีปลายเป็นบานพับทั้งสองด้าน

น้ำหนักที่เสารับได้ ; 
$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} = \frac{\pi^2 \times 30 \times 10^4}{(800)^2} \times \frac{\pi (25)^4}{64}$$

$= 88,709.67 \text{ kg}$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 8.13 เสาขบวนแบบปลายบานพับทั้งสองข้างยาว 3 m หน้าตัดเป็นรูปจัตุรัสทำด้วยวัสดุที่มีค่าโมดูลัสยืดหยุ่น  $E = 1.25 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$  ความเค้นอัดที่ยอมให้เท่ากับ  $100 \text{ kg/cm}^2$  จงหาขนาดของเสาที่รับน้ำหนัก 25,000 kg และ 30,000 kg ถ้าเสานี้ใช้ค่าความปลอดภัยเท่ากับ 3

### วิธีทำ

กรณีที่ 1 เสารับน้ำหนัก 25,000 kg โดยมีค่าความปลอดภัยเท่ากับ 3

$$\text{น้ำหนักออกแบบ ; } P = 3 \times 25,000 = 75,000 \text{ kg}$$

$$\text{น้ำหนักจากสมการออยเลอร์ ; } P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

หาค่าโมเมนต์ความเฉื่อยที่เสานี้สามารถรับได้อย่างปลอดภัย

$$\begin{aligned} \text{โมเมนต์ความเฉื่อยที่ต้องการ ; } I &= \frac{P_{cr} L^2}{\pi^2 E} \\ &= \frac{75,000(300)^2}{\pi^2 \times 1.25 \times 10^5} \\ &= 5,471.34 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{โมเมนต์ความเฉื่อยเสาจัตุรัส ; } I &= \frac{a^4}{12} \\ a^4 &= I \times 12 = 5,471.34 \times 12 \end{aligned}$$

$$\text{ขนาดเสาจัตุรัส ; } a = 16 \text{ cm}$$

$$\begin{aligned} \text{ความเค้นในเสา ; } \sigma &= \frac{P}{A} \\ &= \frac{25,000}{16 \times 16} \times 16 \\ &= 97.66 \text{ kg/cm}^2 \end{aligned}$$

ความเค้นที่เกิดขึ้นในเสา  $97.667 \text{ kg/cm}^2$  น้อยกว่าความเค้นอัดที่ยอมให้  $100 \text{ kg/cm}^2$

ดังนั้นเลือกใช้เสาขนาด  $16 \times 16 \text{ cm}$

ตอบ

กรณีที่ 2 เสารับน้ำหนัก 30,000 kg โดยมีค่าความปลอดภัยเท่ากับ 3

$$\text{น้ำหนักออกแบบ ; } P = 3 \times 30,000 = 90,000 \text{ kg}$$

$$\begin{aligned} \text{โมเมนต์ความเฉื่อยที่ต้องการ ; } I &= \frac{P_{cr} L^2}{\pi^2 E} \\ &= \frac{90,000 \times (300)^2}{\pi^2 \times 1.25 \times 10^5} \\ &= 6,565.61 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

$$\text{โมเมนต์ความเฉื่อยเสาจัตุรัส ; } I = \frac{a^4}{12}$$

$$a^4 = I \times 12 = 6,565.61 \times 12$$

ขนาดเสาจัตุรัส ;  $a = 16.75 \text{ cm}$

ความเค้นในเสา ;  $\sigma_{cr} = \frac{P}{A}$

$$= \frac{30,000}{16.75 \times 16.75}$$

$$= 106.93 \text{ kg/cm}^2$$

ความเค้นที่เกิดขึ้นในเสา  $106.93 \text{ kg/cm}^2$  มากกว่าความเค้นอัดที่ยอมให้  $100 \text{ kg/cm}^2$  จึงต้องออกแบบเสาใหม่โดยใช้สมมติฐานเสาสั้น

พื้นที่หน้าตัดเสาที่ต้องการ ;  $A = \frac{P}{\sigma_w}$

$$= \frac{30,000}{100}$$

$$= 300 \text{ cm}^2$$

ขนาดเสาจัตุรัส ;  $a = \sqrt{A}$

$$= \sqrt{300} = 17.32 \text{ cm}$$

ดังนั้นเลือกใช้เสาขนาด  $17.5 \times 17.5 \text{ cm}$

ตอบ

**ตัวอย่างที่ 8.14** จงคำนวณน้ำหนักปลอดภัยที่กระทำกับเสาดังแสดงในภาพที่ 8.19 กำหนดให้ โมดูลัสยืดหยุ่นวัสดุ  $E = 2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$  โมเมนต์ความเฉื่อย  $I_x = 533 \text{ cm}^4$   $I_y = 167 \text{ cm}^4$  ความเค้นอัดขีดจำกัดสัดส่วนเท่ากับ  $2,500 \text{ kg/cm}^2$  รัศมีจอร์จัน  $r_x = 3.65 \text{ cm}$   $r_y = 2.04 \text{ cm}$  ค่าความปลอดภัยสำหรับเสาสั้นเท่ากับ 3 และค่าความปลอดภัยสำหรับเสายาวเท่ากับ 4

### วิธีทำ

กรณีที่ 1 พิจารณาเสาที่ปลายทั้งสองด้านเป็นแบบบานพับ

น้ำหนักจากสมการออยเลอร์ ;  $P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$

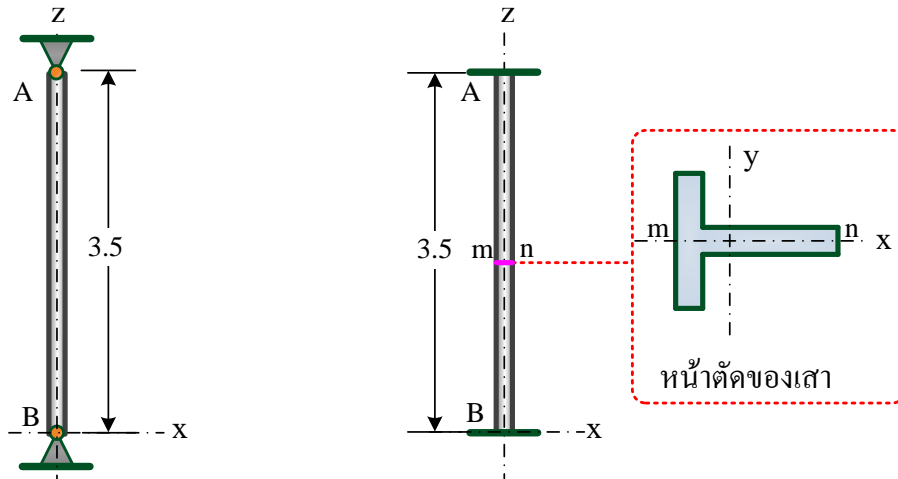
$$= \frac{\pi^2 E}{(L/r)^2}$$

ความเร็วเสาจากความเค้นขีดจำกัดสัดส่วนที่แบ่งระหว่างเสาสั้นและเสายาว

$$2,500 = \frac{\pi^2 \times 2 \times 10^6}{(L/r)^2}$$

ความเร็วเสา ;  $\frac{L}{r} = 88.56$





กรณีที่ 1 ปลายทั้งสองเป็นบานพับ

กรณีที่ 2 ปลายทั้งสองยึดแน่น

ภาพที่ 8.19 เสาขารฐานบานพับและเสาขารฐานยึดแน่น

ที่มา : จีรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

ความยาวจริงของเสา ;  $\frac{L}{r_y} = \frac{350}{2.04} = 171.57$

จะเห็นว่าค่าความยาวเสาจริง 171.57 มากกว่า 88.56 จึงเป็นเสายาว ดังนั้นจึงใช้สมการออยเลอร์ในการคำนวณน้ำหนักโดยใช้ค่าความปลอดภัยเท่ากับ 4

น้ำหนักที่เสารับได้ ; 
$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_y}{NL^2} = \frac{\pi^2 \times 2 \times 10^6 \times 167}{4(350)^2} = 6,727.44 \text{ kg}$$
 ตอบ

กรณีที่ 2 พิจารณาเสาที่ปลายทั้งสองด้านยึดแน่น

ความยาว L เดิมกรณีฐานบานพับจะเปลี่ยนเป็นความยาว  $L_1$  ใหม่ซึ่งมีค่าเป็น  $L/2$

$L_1 = \frac{350}{2} = 175 \text{ cm}$

ความยาวเสา ;  $\frac{L_1}{r} = \frac{2L}{r} = 2 \times 88.56 = 177.12$

ความยาวจริง ;  $\frac{L}{r_y} = \frac{350}{2.04} = 171.57$

จะเห็นว่าความเร็วเสาจริง 171.57 น้อยกว่า 177.12 จึงเป็นเสาสั้น ดังนั้นจึงใช้สมการเสาสั้นในการคำนวณน้ำหนักโดยใช้ค่าความปลอดภัยเท่ากับ 3

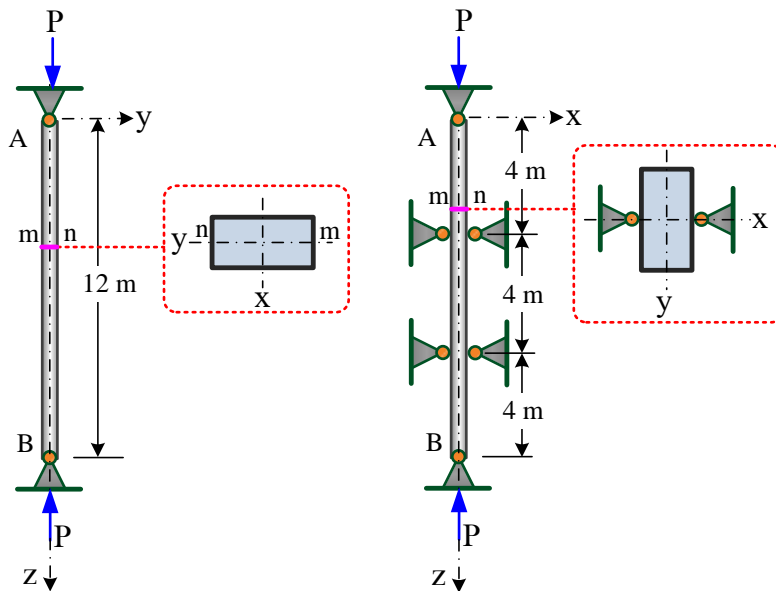
พื้นที่หน้าตัดเสา ;  $A = \frac{I_y}{r_y^2} = \frac{167}{(2.04)^2} = 40.13 \text{ cm}^2$

ความเค้นในเสาสั้น ;  $\frac{\sigma}{N} = \frac{P}{A}$

น้ำหนักที่เสารับได้ ;  $P = \frac{\sigma A}{N} = \frac{2,500 \times 40.13}{3}$

$= 33,441.67 \text{ kg}$  ตอบ

**ตัวอย่างที่ 8.15** เสายาว 12 m มีปลายแบบบานพับทั้งสองด้าน ใช้ค่าความปลอดภัยเท่ากับ 2 ถ้าเสาถูกยึดด้วยค้ำยันไม่ให้เคลื่อนที่เฉพาะในแนวแกน x ทุกช่วงความยาว 4 m ดังแสดงในภาพที่ 8.20 จงหาน้ำหนักปลอดภัยที่เสาสามารถรับได้อย่างปลอดภัย กำหนดให้รัศมีจอยเรชั่น  $r_x = 18.18 \text{ cm}$   $r_y = 3.78 \text{ cm}$  พื้นที่หน้าตัดเสาเท่ากับ  $100 \text{ cm}^2$  และ โมดูลัสยืดหยุ่น  $E = 2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$



กรณีที่ 1 ไม่มีค้ำยัน

กรณีที่ 2 มีค้ำยัน

ภาพที่ 8.20 เสาฐานบานพับทั้งสองด้าน

ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

**วิธีทำ**

กรณีที่ 1 พิจารณาการโก่งของเสาในแนวแกน  $y$  ที่ไม่มีค้ำยัน โดยใช้ความยาว  $L = 12 \text{ m}$

$$\begin{aligned} \text{ความเค้นในเสา ; } \sigma_{cr} &= \frac{\pi^2 E}{(L/r)^2} \\ &= \frac{\pi^2 2 \times 10^6}{\left(\frac{1,200}{18.18}\right)^2} \\ &= 4,530.59 \text{ kg/cm}^2 \end{aligned}$$

กรณีที่ 2 พิจารณาการโก่งของเสาในแนวแกน  $x$  ที่มีค้ำยันแต่ละช่วงเท่ากับ  $4 \text{ m}$  โดยใช้ความยาวเสา  $L_1 = L/3$

$$\begin{aligned} \text{ความเค้นในเสา ; } \sigma_{cr} &= \frac{\pi^2 E}{(L/r)^2} \\ &= \frac{\pi^2 2 \times 10^6}{\left(\frac{400}{3.78}\right)^2} \\ &= 1,762.76 \text{ kg/cm}^2 \end{aligned}$$

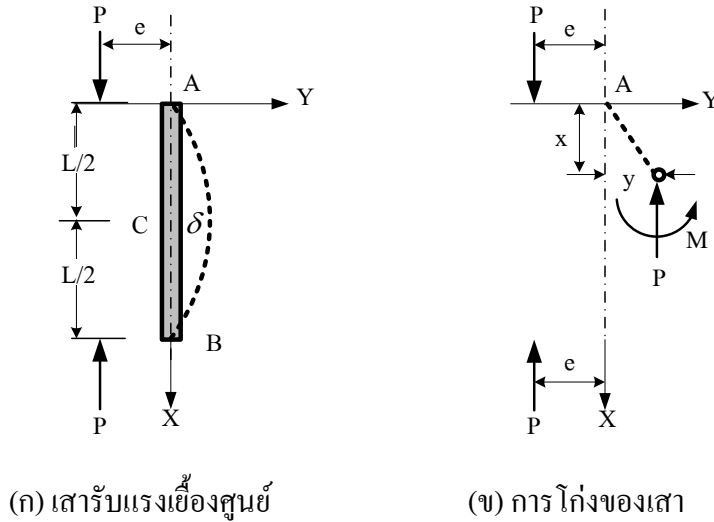
ใช้ความเค้นอัด  $1,762.76 \text{ kg/cm}^2$  ในการออกแบบ

$$\begin{aligned} \text{น้ำหนักที่เสารับได้ ; } P_{cr} &= \frac{\sigma A}{N} \\ &= \frac{1,762.76 \times 100}{2} \\ &= 88,138 \text{ kg} \end{aligned} \quad \text{ตอบ}$$

**เสายารับน้ำหนักเยื้องศูนย์กลาง**

ชาญ ถนัดงาน (2523 : 274-281) สมโพธิ์ วิวิธเกยูรวงศ์ (2542 : 494-498) และสิริศักดิ์ ปโยธรสิริ (2549 : 364-368) กล่าวว่า การรับน้ำหนักในสภาวะจริงของเสายาวโดยส่วนใหญ่จะอยู่ในลักษณะเยื้องศูนย์กลาง ที่เป็นเช่นนั้นเนื่องจากความไม่สมมาตรของเสาหรือข้อบกพร่องในวัสดุที่ใช้ทำเสา เมื่อมีการเยื้องศูนย์กลางจะทำให้เกิดโมเมนต์ค้ำยันค่าเท่ากับแรงคูณด้วยระยะเยื้องศูนย์กลาง  $e$  ถ้าหากระยะเยื้องมีค่าน้อยมากเสานั้นอาจมีพฤติกรรมการรับแรงเสมือนมีแรงผ่านศูนย์กลางด้วยโดยมีเพียงความเค้นอัดเกิดเท่านั้น ถึงแม้ว่าระยะเยื้องศูนย์กลางจะน้อยแต่น้ำหนักที่กระทำมีค่ามากก็จะมีอิทธิพลต่อการโก่งของเสา ในขณะที่เสายาวเกิดการโก่งตัว  $\delta$  ในระยะเริ่มต้นความสามารถในการรับน้ำหนักจะยังคงอยู่ดังแสดงในภาพที่ 8.21 แต่หากการโก่งเพิ่มขึ้นก็จะทำให้ความเสามา

รถในการรับแรงของเสาตกลงตามไปด้วย เนื่องจากระยะ โกงของเสาเพิ่มขึ้นมีผลทำให้โมเมนต์คัตในเสาสูงขึ้นนั่นเองซึ่งแตกต่างจากเสาสั้นที่ไม่ต้องคำนึงถึงการโก่งตัว



ภาพที่ 8.21 การ โกงตัวของเสาขาวเมื่อรับน้ำหนักเอียงศูนย์

ที่มา : สิริศักดิ์ ปโยชรสิริ. 2549 : 364

พิจารณาเสาขาวที่มีปลายแบบบานพับทั้งสองด้านดังแสดงในภาพที่ 8.21 ซึ่งมีความยาว L รับน้ำหนักโดยมีการเอียงศูนย์ e ที่ระยะ x ใด ๆ จากจุด A เป็นระยะ โกง y โดยมีแรง P และ โมเมนต์คัต M ณ จุดใด ๆ ดังนี้

$$\text{โมเมนต์คัต ;} \quad M = -P(e + y) \quad (8.16)$$

$$\text{เมื่อ} \quad M = EI \frac{d^2y}{dx^2} \quad (8.17)$$

$$\text{จะได้} \quad EI \frac{d^2y}{dx^2} = -P(e + y) \quad (8.18)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{P}{EI} y = \frac{-Pe}{EI} \quad (8.19)$$

กำหนดให้  $k^2$  เป็นค่าคงที่มีค่าเท่ากับ  $\frac{P}{EI}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + k^2 y = -k^2 e \quad (8.20)$$

แก้ปัญหาสมาการเชิงอนุพันธ์ (Differential Equation) โดยแบ่งเป็น 2 ส่วนคือ

ส่วนที่ 1 เป็นฟังก์ชันเติมเต็ม (Complementary Function) ซึ่งเป็นคำตอบของ  $\frac{d^2y}{dx^2} + k^2y = 0$

$$y_1 = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx \quad (8.21)$$

ส่วนที่ 2 เป็นผลเฉลยเฉพาะ (Particular Integral) ซึ่งเป็นคำตอบของ  $\frac{d^2y}{dx^2} + k^2y = -k^2e$

$$y_2 = -e \quad (8.22)$$

$$y = y_1 + y_2 = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx - e \quad (8.23)$$

หาค่าคงที่  $C_1$  และ  $C_2$  จากเงื่อนไขการเปลี่ยนแปลงรูปร่างดังนี้

ที่จุด A ระยะ  $x = 0$  และระยะ  $y = 0$

$$0 = C_1 \sin 0 + C_2 \cos 0 - e \quad (8.24)$$

$$C_2 = e \quad (8.25)$$

ที่จุด B ระยะ  $x = L$  และระยะ  $y = 0$

$$0 = C_1 \sin kL + e \cos kL - e \quad (8.26)$$

$$C_1 = \frac{e(1 - \cos kL)}{\sin kL} \quad (8.27)$$

แทน  $C_1$  และ  $C_2$  ; 
$$y = \frac{e(1 - \cos kL)}{\sin kL} \sin kx + e(\cos kx - 1) \quad (8.28)$$

ที่จุด C ระยะ  $x = \frac{L}{2}$  และระยะ  $y = \delta$

จาก 
$$y = \frac{e(1 - \cos kL)}{\sin kL} \sin kx + e(\cos kx - 1) \quad (8.29)$$

$$\delta = e \left[ \frac{(1 - \cos kL)}{\sin kL} \sin \frac{kL}{2} + \cos \frac{kL}{2} - 1 \right] \quad (8.30)$$

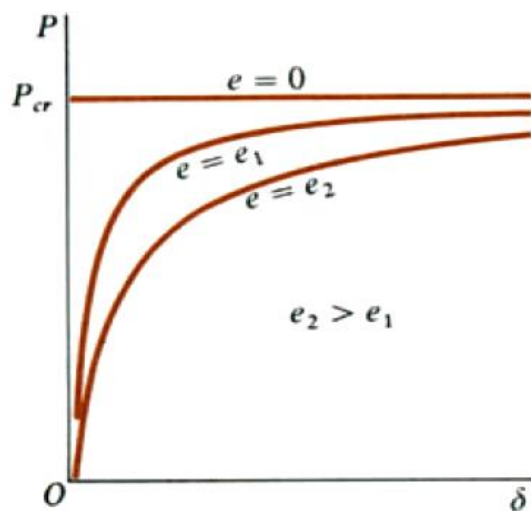
$$= e \left[ \frac{(1 - \cos kL)}{2 \sin \frac{kL}{2} \cos \frac{kL}{2}} \sin \frac{kL}{2} + \cos \frac{kL}{2} - 1 \right] \quad (8.31)$$

$$= e \left[ \frac{1 - \cos kL + 2 \cos^2 \frac{kL}{2} - 2 \cos \frac{kL}{2}}{2 \sin \frac{kL}{2} \cos \frac{kL}{2}} \right] \quad (8.32)$$

แทนค่า  $2\cos^2 \frac{kL}{2} = 1 + \cos kL$  จะได้

$$\delta = e \left[ \frac{1 - \cos \frac{kL}{2}}{\cos \frac{kL}{2}} \right] = e \left( \sec \frac{kL}{2} - 1 \right) \quad (8.33)$$

เมื่อ  $k$  เป็นค่าคงที่มีค่าเท่ากับ  $\sqrt{\frac{P}{EI}}$  ถ้านำค่าน้ำหนัก  $P$  กับระยะ โกง  $\delta$  มาเขียนลงในแผนภาพจะได้ผลดังแสดงในภาพที่ 8.22



ภาพที่ 8.22 ความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักและระยะ โกงของเสา

ที่มา : James M. Gere and Stephen P. Timoshenko. 1991 : 594

จากภาพที่ 8.22 สามารถอธิบายพฤติกรรมของเสาภายใต้แรงเยื้องศูนย์กลางได้ดังนี้ (สิริศักดิ์ ปโยชรศิริ. 2549 : 364-368 และ Ferdinand P. Beer, et al. 2012 : 653)

กรณีที่ 1 ระยะเยื้องศูนย์กลาง  $e$  เท่ากับศูนย์ หรือ น้ำหนัก  $P$  ผ่านแนวแกนของเสาจะได้เส้น  $OAB$  มีความหมายว่า ถ้าน้ำหนัก  $P$  น้อยกว่าน้ำหนักจากสมการออยเลอร์  $P_{cr}$  ทำให้  $\frac{kL}{2}$  น้อยกว่า  $\frac{\pi}{2}$  จะได้ระยะ โกง  $\delta$  เท่ากับศูนย์ดังเส้น  $OA$  นั่นคือเมื่อน้ำหนัก  $P$  มีขนาดเล็กระยะการ โกงตัวของเสาจะเป็นศูนย์ เสาจะสามารถกลับสู่สถานะเดิมเนื่องจากยังอยู่ในช่วงยืดหยุ่น

ถ้าน้ำหนัก  $P$  เท่ากับน้ำหนักจากสมการออยเลอร์  $P_{cr}$  ทำให้  $\frac{kL}{2}$  เท่ากับ  $\frac{\pi}{2}$  จะได้ระยะ โกง  $\delta$  เป็นค่าใด ๆ ก็ได้ดังเส้น  $AB$  กานจะ โกงมากขึ้นเรื่อย ๆ จนพึงเหมือนพฤติกรรมของเสา

กรณีที่ 2 ระยะเยื้องศูนย์กลาง  $e$  มากกว่าศูนย์หรือมีน้ำหนัก  $P$  เยื้องศูนย์กลางกระทำกับเสาขาวจะได้ ความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนัก  $P$  และระยะโก่ง  $\delta$  ดังเส้น OCB มีความหมายว่าน้ำหนัก  $P$  น้อยกว่าน้ำหนักจากสมการออยเลอร์  $P_{cr}$  ทำให้ระยะโก่ง  $\delta$  ของเสาเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ ตามเส้น OC ในแผนภาพ ถ้าน้ำหนัก  $P$  เท่ากับ  $P_{cr}$  ระยะโก่งตัว  $\delta$  ก็จะเพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็วจนเสาวิบัติตามแนวเส้น CB

โมเมนต์สูงสุดที่จุด C ;

$$M_{\max} = -P(e + \delta) \quad (8.34)$$

เมื่อ

$$\delta = e \left( \sec \frac{kL}{2} - 1 \right) \quad (8.35)$$

$$M_{\max} = -Pe \sec \frac{kL}{2} \quad (8.36)$$

ความเค้นสูงสุดที่เกิดขึ้นในเสา

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A} + \frac{M_{\max} c}{I} \quad (8.37)$$

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A} + \frac{Pec \sec \left( \frac{kL}{2} \right)}{I} \quad (8.38)$$

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A} \left[ 1 + \frac{ec}{r^2} \sec \left( \frac{kL}{2} \right) \right] \quad (8.39)$$

เมื่อ  $k = \sqrt{\frac{P}{EI}}$  จะได้

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A} \left[ 1 + \frac{ec}{r^2} \sec \left( \frac{L}{2} \sqrt{\frac{P}{EI}} \right) \right] \quad (8.40)$$

$$= \frac{P}{A} \left[ 1 + \frac{ec}{r^2} \sec \left( \frac{L}{2r} \sqrt{\frac{P}{EA}} \right) \right] \quad (8.41)$$

ซึ่งเรียกค่า  $\frac{ec}{r^2}$  ว่าอัตราเยื้องศูนย์กลาง (Eccentricity Ratio) และค่า  $\frac{kL}{2}$  เรียกว่ามุมออยเลอร์ (Euler Angle) สำหรับเสาขาวที่มีปลายแบบอื่น ๆ ความยาว  $L$  เดิมกรณีฐานบานพับจะเปลี่ยนเป็นความยาว  $L_1$  ใหม่และน้ำหนัก  $P$  ที่ทำให้เกิดระยะโก่งของเสาไม่ควรมากเกินไปจากสมการออยเลอร์

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_1^2} \quad (8.42)$$

$$\text{หรือ} \quad EI = \frac{P_{cr} L_1^2}{\pi^2} \quad (8.43)$$

$$\text{แทนค่า EI;} \quad \sigma_{\max} = \frac{P}{A} \left[ 1 + \frac{ec}{r^2} \sec \left( \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_{cr}}} \right) \right] \quad (8.44)$$

$$\text{ระยะโก่ง} \quad \delta = e \left[ \sec \left( \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_{cr}}} \right) - 1 \right] \quad (8.45)$$

กรณีที่ P มีขนาดน้อยมากทำให้ค่า  $\sec \frac{kL}{2}$  เท่ากับ 1 จะได้

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A} \left( 1 + \frac{ec}{r^2} \right) \quad (8.46)$$

เมื่อความเค้นสูงสุด  $\sigma_{\max}$  เท่ากับความเค้นที่ขีดจำกัดสัดส่วน  $\sigma_y$  และสมมติให้น้ำหนัก P ถึงจุดขีดจำกัดสัดส่วน  $P_y$  ด้วยจะได้

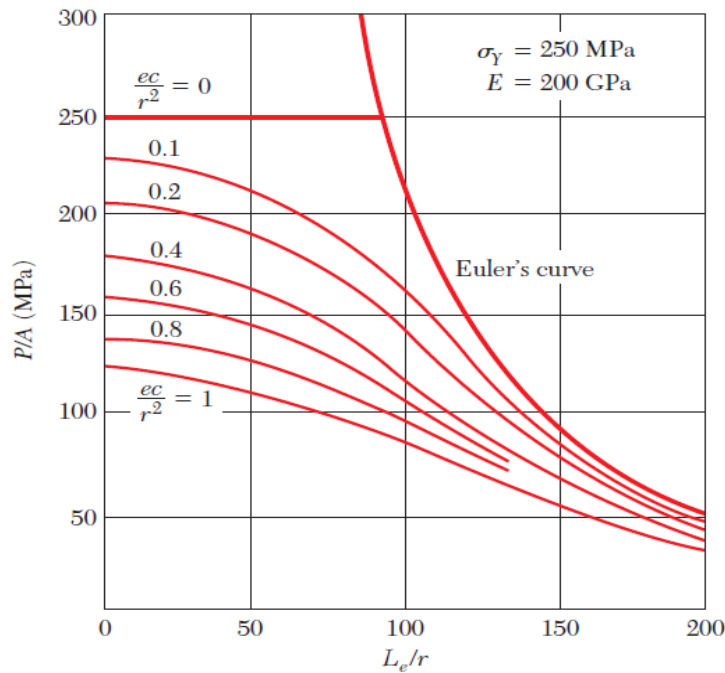
$$\frac{P_y}{A} = \frac{\sigma_y}{1 + \frac{ec}{r^2} \sec \left( \frac{L}{2r} \sqrt{\frac{P_y}{AE}} \right)} \quad (8.47)$$

จากสมการด้านบนเป็นการยากในการแก้สมการเพื่อหาค่าอัตราเยื้องศูนย์กลาง  $\frac{ec}{r^2}$  ดังนั้นในการแก้ปัญหาจึงใช้หลักการลองผิดลองถูก (Trial and Error) โดยการทดลองกำหนดค่า  $\frac{P}{A}$  และ  $\frac{L}{r}$  จนทำให้ผลลัพธ์ของทั้งสองเทอมเท่ากัน จากนั้นจึงนำค่าทั้งสามมาเขียนแผนภาพความสัมพันธ์ระหว่าง  $\frac{P}{A}$  และ  $\frac{L}{r}$  โดยกำหนดค่าความเค้นจุดครากของวัสดุ  $\sigma_y$  เป็นค่าคงที่ ตัวอย่างแผนภาพความสัมพันธ์ระหว่างแรงเยื้องศูนย์กลางกับความเร็วของเสาเหล็กที่มีค่าความเค้นจุดครากเท่ากับ 250 MPa แสดงในภาพที่ 8.23

ในการออกแบบเสาขารับแรงเยื้องศูนย์กลางหากกำหนดให้มีค่าความปลอดภัย N สมการที่ใช้อธิบายน้ำหนักที่ใช้งานจริงหรือน้ำหนักปลอดภัย  $P_w$  สามารถหาได้ดังนี้

$$\frac{P_w}{A} = \frac{\left( \frac{\sigma_y}{N} \right)}{1 + \frac{ec}{r^2} \sec \left( \frac{L}{2r} \sqrt{\frac{NP_w}{AE}} \right)} \quad (8.48)$$





ภาพที่ 8.23 ความสัมพันธ์ระหว่างแรงเยื้องศูนย์กลางกับความยาวของเสาเหล็ก

ที่มา : Ferdinand P. Beer, et al. 2012 : 653

ตัวอย่างที่ 8.16 เสาต้นยาว 3.5 m ฐานยึดแน่นและปลายอีกด้านอิสระ มีพื้นที่หน้าตัด 25 cm<sup>2</sup> ระยะจากศูนย์กลางเสาถึงขอบนอกสุดหน้าตัด 5 cm ค่าโมเมนต์ความเฉื่อย I = 350 cm<sup>4</sup> ค่ารัศมีไจเรชั่น r = 3.74 cm ค่าโมดูลัสยืดหยุ่น E = 2 × 10<sup>6</sup> kg/cm<sup>2</sup> รับน้ำหนักดังแสดงในภาพที่ 8.24 จงหาค่าน้ำหนักและความเค้นที่เสาสามารถรับได้กรณีแรงผ่านศูนย์กลางถ่วงหน้าตัด และจงหาระยะการโก่งตัวสูงสุดที่ปลายเสาและความเค้นสูงสุดที่เกิดขึ้นกรณีแรงเยื้องศูนย์กลาง กำหนดให้ค่าความปลอดภัยเท่ากับ 3

วิธีทำ

พิจารณาการโก่งของเสายาวที่มีฐานยึดแน่นและปลายอิสระ โดยใช้สมมติฐานของออยเลอร์จะได้ความยาวประสิทธิผล  $L_1 = 2L$

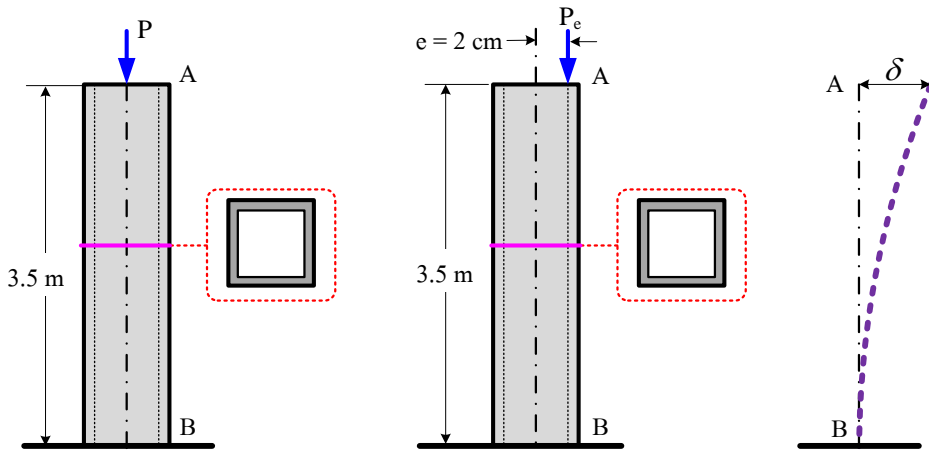
กรณีที่ 1 เสาขามีน้ำหนักผ่านจุดศูนย์กลางถ่วงหน้าตัด

$$\begin{aligned}
 \text{น้ำหนักที่เสารับได้ ; } P_{cr} &= \frac{\pi^2 EI}{L_1^2} \\
 &= \frac{\pi^2 \times 2 \times 10^6 \times 350}{(2 \times 350)^2} \\
 &= 14,099.43 \text{ kg}
 \end{aligned}$$

น้ำหนักปลอดภัย ;

$$P_{\text{safe}} = \frac{P_{\text{cr}}}{N} = \frac{14,099.43}{3} = 4,699.81 \text{ kg}$$

ตอบ



กรณีที่ 1 น้ำหนักในแนวแกน

กรณีที่ 2 น้ำหนักเอียงศูนย์กลาง

ภาพที่ 8.24 เสารับน้ำหนักในแนวแกนและน้ำหนักเอียงศูนย์กลาง

ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

ความเค้นสูงสุดในเสา ;

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{4,699.81}{25} = 187.99 \text{ kg/cm}^2$$

ตอบ

กรณีที่ 2 เสาขามีน้ำหนักกระทำเอียงศูนย์กลาง

ระยะ โกงกรณีเอียงศูนย์กลาง ;

$$\delta = e \left[ \sec \left( \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_{\text{cr}}}} \right) - 1 \right] = 2 \left[ \sec \left( \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{4,699.81}{14,099.43}} \right) - 1 \right] = 0.000251 \text{ cm}$$

ตอบ

ความเค้นสูงสุดในเสา ;

$$\sigma = \frac{P}{A} \left[ 1 + \frac{ec}{r^2} \sec \left( \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_{\text{cr}}}} \right) \right]$$

$$= \frac{4,699.81}{25} \left[ 1 + \frac{2 \times 5}{3.74^2} \sec \left( \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{4,699.81}{14,099.43}} \right) \right]$$

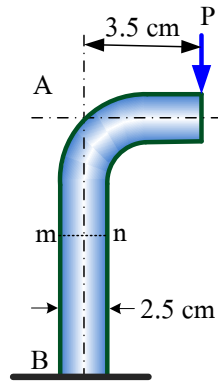
$$= 322.41 \text{ kg/cm}^2 \quad \text{ตอบ}$$

### สรุปท้ายบท

เสาเป็นชิ้นส่วนโครงสร้างที่รับแรงในแนวแกน โดยสามารถรับได้ทั้งแรงดึงและแรงอัด แต่ส่วนใหญ่มักออกแบบให้รับแรงอัด นอกจากแรงในแนวแกนแล้วเสายังสามารถต้านทานโมเมนต์ดัดได้ด้วย แต่หากเกิดโมเมนต์ดัดขึ้นในเสาก็จะทำให้เสานั้นรับแรงในแนวแกนได้ลดลง เสาสามารถจำแนกออกเป็น 2 ประเภทคือเสาสั้นและเสายาว เสาสั้นคือชิ้นส่วนโครงสร้างที่สามารถรับน้ำหนักในแนวแกนได้เต็มที่ตามความเค้นอัดของวัสดุที่ใช้ทำเสา การวิบัติของเสาสั้นเมื่อรับแรงอัดจะพิจารณาจากวัสดุที่ใช้ หากเสาทำจากวัสดุเหนียวจะเกิดการบวมตัวทางด้านข้างเมื่อน้ำหนักมีขนาดมากขึ้น ถ้าหากเสาทำจากวัสดุเปราะจะเกิดการแตกหักอย่างฉับพลันเมื่อความเค้นที่เกิดขึ้นเกินกว่าความเค้นอัดที่วัสดุสามารถรับได้ การคำนวณเสาประเภทนี้จะใช้หลักการคำนวณวัสดุภายใต้แรงอัดทั่วไป สำหรับเสายาวคือชิ้นส่วนโครงสร้างที่รับแรงในแนวแกนแต่ความสามารถในการรับน้ำหนักขึ้นอยู่กับสัดส่วนความสูงต่อขนาดพื้นที่หน้าตัดเสา หรืออาจเรียกว่า ความเร็วของเสา สาเหตุที่ความเร็วมีผลต่อการรับน้ำหนักเนื่องจากเสาที่เร็วมากหรือมีพื้นที่หน้าตัดเล็กเมื่อเทียบกับความสูงจะทำให้เกิดการโก่งด้านข้าง จนกระทั่งเกิดการวิบัติเรียกว่าการเดาะหักที่ไม่ได้ขึ้นอยู่กับแรงในแนวแกนที่กระทำเพียงอย่างเดียว สมการที่ใช้หาแรงหรือน้ำหนักสูงสุดของเสายาวคือสมการออยเลอร์ สมมติฐานของเสายาวตามสมการออยเลอร์กำหนดให้ฐานเสาทั้งด้านบนและด้านล่างแบบบานพับและใช้ความเร็วเสาในการคำนวณน้ำหนักที่เสารับได้ แต่ในความเป็นจริงฐานเสาอาจเป็นแบบอื่นได้อีก เช่น ยึดแน่นปลายอิสระ หรือแบบผสม เป็นต้น ชนิดของฐานเสาที่เปลี่ยนไปจึงมีผลต่อรูปร่างการโก่งด้านข้างซึ่งมีผลต่อการรับน้ำหนัก อนึ่งการยึดด้านข้างก็มีผลทำให้ค่าความเร็วเสาเปลี่ยนไปจึงทำให้เสาสามารถรับแรงได้มากขึ้น

## แบบฝึกหัดท้ายบท

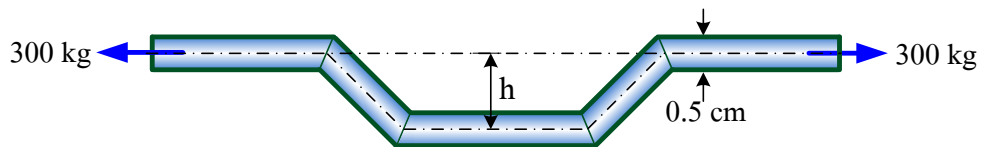
1. เสาสั้น AB มีหน้าตัดเป็นรูปวงกลมเส้นผ่าศูนย์กลาง 2.5 cm มีน้ำหนัก  $P = 1,200$  kg กระทำตำแหน่งห่างจากแกนของเสา AB เป็นระยะ 3.5 cm ดังแสดงในภาพที่ 8.25 จงคำนวณหาความเค้นที่หน้าตัด m-n



ภาพที่ 8.25 เสาหน้าตัดรูปวงกลมรับแรงเชิงศูนย์

ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

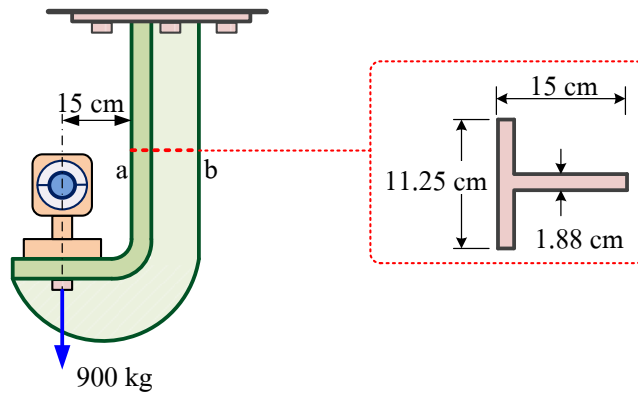
2. ท่อนวัสดุกลมรับแรงดึงดังแสดงในภาพที่ 8.26 จงคำนวณหาระยะ  $h$  สูงสุด ถ้าท่อวัสดุกลมนี้มีค่าความเค้นที่ยอมให้  $1,750$  kg/cm<sup>2</sup>



ภาพที่ 8.26 ท่อนวัสดุกลมรับแรงดึง

ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

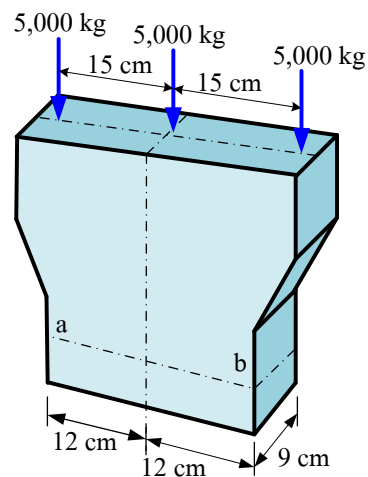
3. โครงสร้างรับรับน้ำหนักดังแสดงในภาพที่ 8.27 กำหนดให้เสาโครงสร้างมีพื้นที่หน้าตัดรูปตัวทีและเป็นเสาสั้น จงหาความเค้นดึงสูงสุดบนหน้าตัด a-b



ภาพที่ 8.27 โครงสร้างรับแรงดึงมีพื้นที่หน้าตัดรูปตัวที

ที่มา : จีรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

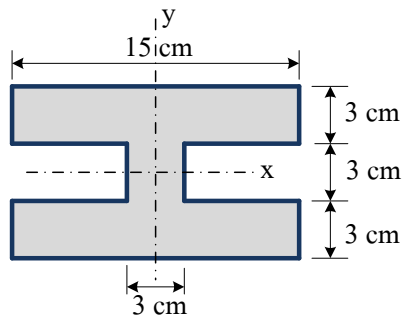
4. เสาสั้นต้นหนึ่งรับน้ำหนัก 5,000 kg จำนวน 3 จุดพร้อมกันดังแสดงในภาพที่ 8.28 จงหาความเค้นที่จุด a และ b



ภาพที่ 8.28 เสารับน้ำหนัก 3 จุดพร้อมกัน

ที่มา : จีรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

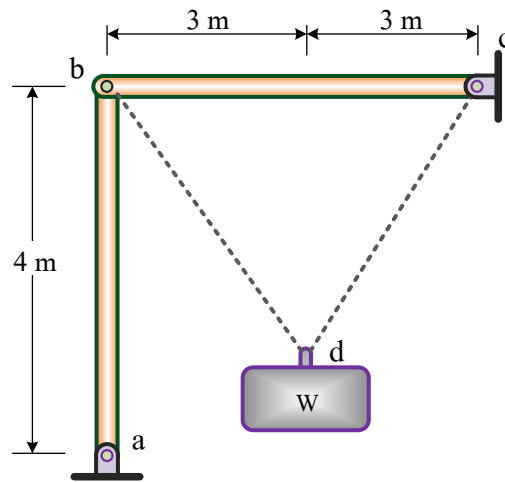
5. เสาเหล็กยาว 3 m มีพื้นที่หน้าตัดดังแสดงในภาพที่ 8.29 มีความยาวประสิทธิผลเป็น 1.28 เท่าของความยาวจริง ถ้าโมดูลัสยืดหยุ่น  $E = 2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$  และความเค้นจุดคราก  $3,000 \text{ kg/cm}^2$  จงหาน้ำหนักที่เสานี้สามารถรับได้อย่างปลอดภัย กำหนดให้เสาเหล็กนี้เป็นเสายาว



ภาพที่ 8.29 เสาเหล็กหน้าตัดรูปตัวไอ

ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

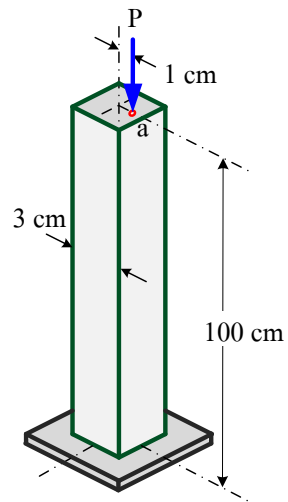
6. ท่อนโลหะกลวง AB และ BC ต่อกันที่จุด b ดังแสดงในภาพที่ 8.30 ท่อนโลหะทั้งสองทำจากอะลูมิเนียมขนาดเส้นผ่าศูนย์กลางภายนอก 8 cm หนา 0.5 cm มีจุดต่อที่จุด a จุด b และจุด c เป็นแบบบานพับ จงคำนวณหาขนาดของน้ำหนัก  $w$  กำหนดให้โมดูลัสยืดหยุ่น  $E = 7 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$  และท่อนโลหะมีค่าความปลอดภัยเท่ากับ 3



ภาพที่ 8.30 เสาอะลูมิเนียมปลายยึดหมุนรับน้ำหนัก

ที่มา : จิรวัดน์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

7. น้ำหนัก 3,000 kg กระทำที่จุด D ซึ่งห่างจากจุดศูนย์กลางวงหน้าตัดเสาเป็นระยะ 1 cm ดังแสดงในภาพที่ 8.31 จงคำนวณหาระยะการโก่งตัวและความเค้นสูงสุดในเสา ถ้าโมดูลัสยืดหยุ่น  $E = 7 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$



ภาพที่ 8.31 เสารับน้ำหนักเอียงศูนย์  
ที่มา : จิรวัดณ์ วิมุตติสุขวิริยา. 2556

## เอกสารอ้างอิง

- ชาญ ถนัดงาน. (2523). **กลศาสตร์วัสดุ**. กรุงเทพฯ : สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้า  
วิทยาเขตพระนครเหนือ.
- มนตรี พิรุณเกษตร. (2544). **กลศาสตร์ของวัสดุ**. กรุงเทพฯ : วิทยพัฒน์.
- วรรณศรี บุญรัตน์. (2524). **วัสดุการก่อสร้าง**. กรุงเทพฯ : โอเดียนสโตร์.
- สมโพธิ วิวิธเกียรติ. (2542). **กลศาสตร์ของวัสดุ**. กรุงเทพฯ : ฟิสิกส์เซ็นเตอร์การพิมพ์.
- สุกิจ นามพิชญ์. (2541). **ความแข็งแรงของวัสดุ**. กรุงเทพฯ : ซีเอ็ดดูเคชั่น.
- สิทธิชัย แสงอาทิตย์. (2549). **กลศาสตร์ของวัสดุ**. นครราชสีมา : สาขาวิชาวิศวกรรมโยธา  
สำนักวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี.
- สิริศักดิ์ ปโยธรศิริ. (2549). **กลศาสตร์วัสดุ**. กรุงเทพฯ : ว.เพ็ชรสกุล.
- D.J. Dunn. (nd). **Engineering Science H1 Outcom 1 – Tutoral 4 Columns**. Retrieved  
June 25, 2013, from [http://www.freestudy.co.uk/engineering%20science%20h1/  
outcome%201%20t4.pdf](http://www.freestudy.co.uk/engineering%20science%20h1/outcome%201%20t4.pdf).
- Efunda. (2013). **Columns: Introduction**. Retrieved July 29, 2013, from  
[http://www.efunda.com/formulae/solid\\_mechanics/columns/intro.cfm](http://www.efunda.com/formulae/solid_mechanics/columns/intro.cfm).
- Ferdinand P. Beer, Russell Johnston, John T. DeWolf and David F. Mazurek. (2012).  
**Mechanics of Materials**. New York : Mc Graw Hill.
- Hearn E. J. (2000). **Mechanics of Materials 1: An Introduction to the Mechanics of Elastic  
and Plastic Deformation of Solids and Structural Materials**. Oxford : Butterworth-  
Heinemann.
- James M. Gere and Barry J. Goodno. (2012). **Mechanics of Materials**. Stamford : Cengage  
Learning.
- James M. Gere and Stephen P. Timoshenko. (1991). **Mechanics of Materials**. New York :  
Springer Science Business Media. B.V.
- John Case, Lord Chilver and CarL T. F. Ross. (1999). **Strength of Materials and Structures**.  
London : Arnold.
- Joseph E. Shigley. (2004). **Mechanical Engineering Design**. New York : McGraw-Hill.
- Russell C. Hibbeler. (2011). **Mechanics of Materials**. New York : Prentice Hall  
International Inc.



**เอกสารอ้างอิง (ต่อ)**

- Timoshenko S. (1940). **Strength of Materials : Part I Elementary Theory and Problems.**  
New York : D. Van Nostrand Company, Inc.
- Vitor Dias da Silva. (2006). **Mechanics and Strength of Materials.** Heidelberg : Springer-  
Verlag.
- Wikipedia. (2008). **Column.** Retrieved July 29, 2013, from  
[http://en.wikipedia.org/wiki/ Column.](http://en.wikipedia.org/wiki/Column)
- William A. Nash. (1998). **Theory and Problems of Strength of Materials.** New York :  
McGraw-Hill.

## บรรณานุกรม

- เกรียงศักดิ์ อุคมสินโรจน์. (2540). **กลศาสตร์ของวัสดุ**. กรุงเทพฯ : มิตรนราการพิมพ์.
- จรรยา พรหมสุทธิ และอำนาจ ทองแสน. (2547). **การออกแบบบรรอยต่องานเชื่อม**. กรุงเทพฯ :  
เอ็มพีเอ็น.
- ชาญ ถนัดงาน. (2523). **กลศาสตร์วัสดุ**. กรุงเทพฯ : สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้า  
วิทยาเขตพระนครเหนือ.
- ชาญชัย จารุจินดา. (ม.ป.ป.). **ทฤษฎีโครงสร้าง**. กรุงเทพฯ : บุญเลิศการพิมพ์.
- บรรจบ อรชร. (2542). **กลศาสตร์ของแข็ง**. กรุงเทพฯ : บริษัทพิมพ์ดีจำกัด.
- ประสิทธิ์ เวียงแก้ว และนัทรชัย ลาภรังสิรัตน์. (2554). **คู่มืองานเหล็ก**. กรุงเทพฯ :  
ซีเอ็ดยูเคชั่น.
- มนตรี พิรุณเกษตร. (2541). **กลศาสตร์ของวัสดุ เล่ม 1**. กรุงเทพฯ : ซีเอ็ดยูเคชั่น.  
\_\_\_\_\_. (2544). **กลศาสตร์ของวัสดุ**. กรุงเทพฯ : วิทยพัฒน์.
- รุ่นพีวิศวกรรรม. (2541). **ความแข็งแรงของวัสดุ**. กรุงเทพฯ : สถาบันเทคโนโลยีราชมงคล.
- วรรณศรี บุญรัตพันธุ์. (2524). **วัสดุการก่อสร้าง**. กรุงเทพฯ : โอเดียนสโตร์.
- วินิต ช่อวิเชียร วรนิติ ช่อวิเชียร และวรเศรษฐ์ ช่อวิเชียร. (2548). **กำลังวัสดุ/กลศาสตร์วัสดุ**.  
กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- สมโพธิ วิวิธเกตุรงค์. (2542). **กลศาสตร์ของวัสดุ**. กรุงเทพฯ : ฟิสิกส์เซ็นเตอร์การพิมพ์.
- สุกิจ นามพิชญ์. (2541). **ความแข็งแรงของวัสดุ**. กรุงเทพฯ : ซีเอ็ดยูเคชั่น.
- สิทธิชัย แสงอาทิตย์. (2549). **กลศาสตร์ของวัสดุ**. นครราชสีมา : สาขาวิชาวิศวกรรมโยธา  
สำนักวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี.
- สิริศักดิ์ ปโยธรสิริ. (2549). **กลศาสตร์วัสดุ**. กรุงเทพฯ : ว.เพ็ชรสกุล.
- Ali H. Abbas, Sajid Abbas and Brian Maroney. (2011). **San Francisco-Oakland Bay Bridge  
benefits from bridge information modeling**. Retrieved June 20, 2013, from  
[http://cenews.com/article/8351/san\\_francisco\\_oakland\\_bay\\_brid](http://cenews.com/article/8351/san_francisco_oakland_bay_brid).
- American Welding Society. (2000). **AWS D1.1: Structural Welding Code—Steel**.  
Retrieved June 25, 2013, from  
<http://archive.org/details/gov.law.aws.d1.1.2000>.
- Benham P.P. and Crawford R.J. (1989). **Mechanics of Engineering Materials**. New York :  
Longman Scientific.

## บรรณานุกรม (ต่อ)

- Benoit Vieille, Jérémie Aucher and Lakhdar Taleb. (2009). **Interdisciplinary and Integration Aspects in Structural Health Monitoring**. Journal of Materials Science and Engineering: A, Vol. 517, pp. 51–60.
- Civil Architectural and Environmental Engineering. (1997). **Direct Shear, Torsion Testing**. Missouri University of Science & Technology. Retrieved June 5, 2013, from <http://classes.mst.edu/civeng120/lessons/torsion/fracture/index.html>.
- Construction with Bamboo. (2005). **Glued Bamboo**. Retrieved June 25, 2013, from <http://www.conbam.info/pagesEN/leimbambus.html>.
- David Roylance. (2000). **Shear and Torsion**. Department of Materials Science and Engineering: Massachusetts Institute of Technology : Cambridge, MA 02139.
- D.J. Dunn. (nd). **Engineering Science H1 Outcom 1 – Tutoroal 4 Columns**. Retrieved June 25, 2013, from <http://www.freestudy.co.uk/engineering%20science%20h1/outcome%201%20t4.pdf>.
- Duane K. Miller. (2001). **Designing Welded Lap Joints**. Welding Innovation: Vol. 18, No. 3.
- Efunda. (2013). **Columns: Introduction**. Retrieved July 29, 2013, from [http://www.efunda.com/formulae/solid\\_mechanics/columns/intro.cfm](http://www.efunda.com/formulae/solid_mechanics/columns/intro.cfm).
- Engineering Materials. (n.d.). **Types of fracture**. Retrieved June 12, 2013, from [http://www.hsc.csu.edu.au/engineering\\_studies/application/lift/3210/index.html](http://www.hsc.csu.edu.au/engineering_studies/application/lift/3210/index.html).
- Engineering Visualization. (2009). **ABC bridges on 3D Google (Sketchup) Warehouse**. Retrieved June 25, 2013, from <http://www.tallbridgeguy.com/2009/07>.
- Essam Al-Bahkali. (n.d). **Mechanical Engineering Design Welding, Bonding and the Design of Permanent Joints**. Retrieved June 12, 2013, from <http://www.google.co.th/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&frm=1&source=web&cd>.

Ferdinand P. Beer, Russell Johnston, John T. DeWolf and David F. Mazurek. (2012).

**Mechanics of Materials.** New York : Mc Graw Hill.

### บรรณานุกรม (ต่อ)

Fire Tower Engineered Timber. (2007). **White Paper: Mechanically Laminated Beams.**

Retrieved June 25, 2013, from <http://www.ftet.biz/index.php?action=resources>.

*G.M. Goodrich.* (2013). **Toolbox Case Study 1: Valve Spring Failure.** [Element Materials Technology](#). Retrieved June 25, 2013, from

[https://www.element.com/information/ resources/articles-index](https://www.element.com/information/resources/articles-index).

Hearn E. J. (2000). **Mechanics of Materials 1: An Introduction to the Mechanics of Elastic and Plastic Deformation of Solids and Structural Materials.** Oxford : Butterworth-Heinemann.

James M. Gere and Barry J. Goodno. (2012). **Mechanics of Materials.** Stamford : Cengage Learning.

James M. Gere and Stephen P. Timoshenko. (1991). **Mechanics of Materials.** New York : Springer Science Business Media. B.V.

James O. Smith. (1939). **The Effect of Range of Stress on the Torsional Fatigue Strength of Steel.** The University of Illinoisurbana, Engineering Experiment Station Bulletin Series No. 316.

John Case, Lord Chilver and CarL T. F. Ross. (1999). **Strength of Materials and Structures.** London : Arnold.

Joseph E. Shigley. (2004). **Mechanical Engineering Design.** New York : McGraw-Hill.

Kurt Gramoll. (n.d.). **Bending Strain and Stress.** Retrieved June 25, 2013, from

<http://www.ecourses.ou.edu>.

Machinio. (2012). **Used Yilteks LPG Storage Tank.** Retrieved April 19, 2013, from

<http://www.machinio.com/listings/1348593-YILTEKS-LPG-Storage-Tank-Used-gas-tank-for-sale>.

Metal Pass. (2005). **Metallurgy & Materials.** Retrieved June 18, 2013, from

<http://www.metallpass.com/metallmaterials>.

Nirmal Bansal. (2009). **Strength of Materials**. New Delhi : Laxmi Publications (P) Ltd.

## บรรณานุกรม (ต่อ)

Pablo G. C. Valencia. (n.d.). **Spherical Pressure Vessels**. Mechanical Metallurgy.

University of Puerto Rico at Mayaguez: Puerto Rico.

P.L. Hurricks. (2011). **Springs**. Retrieved June 25, 2013, from

<http://www.data4design.co.uk/PDF's/Springs%20text.pdf>.

Rajan S., Larry L. and Gray M. (2001). **Strengthening steel bridge sections using CFRP**

**laminates**. Composites Part B: Engineering, Volume 32, Issue 4, Pages 309–322.

Russell C. Hibbeler. (2013). **Mechanics of Materials**. New York : Prentice Hall

International Inc.

T. Dang Hoang, C. Herbelot and A. Imad. (2012). **On failure mode analysis in a bolted**

**single lap joint under tension-shearing**. Journal of Engineering Failure Analysis: Vol.24, pp. 9–25.

The Timber Post. (2013). **Green Square**. Retrieved June 25, 2013, from

<http://www.timberpost.com.au/public-spaces/green-square>.

Timoshenko S. (1940). **Strength of Materials : Part I Elementary Theory and Problems**.

New York : D. Van Nostrand Company, Inc.

Vitor Dias da Silva. (2006). **Mechanics and Strength of Materials**. Heidelberg : Springer-

Verlag.

Wikipedia. (2008). **Column**. Retrieved July 29, 2013, from [http://en.wikipedia.org/wiki/](http://en.wikipedia.org/wiki/Column)

Column.

William A. Nash. (1998). **Theory and Problems of Strength of Materials**. New York :

McGraw-Hill.

