บทที่ 5 สถิติอนุมานที่ใช้ในการทดสอบสมมติฐานการวิจัย

สถิติอนุมาน (Inferential statistics)

เป็นสถิติหรือศาสตร์ที่ว่าด้วยทฤษฎีและวิธีการต่างๆ ในการวิเคราะห์ข้อมูลเพื่อตอบคำถามหรือปัญหาที่สนใจ โดยอาศัยข้อมูลเพียงส่วนหนึ่งที่มีอยู่หรือข้อมูลตัวอย่างเพื่ออธิบายลักษณะของประชากร ซึ่งสถิติอนุมานจะแบ่งเทคนิคในการวิเคราะห์ออกเป็นสองส่วนใหญ่ๆคือ การประมาณค่า และการทดสอบสมมติฐาน แต่สำหรับในบทนี้จะขอกล่าวถึงเพียงแค่การทดสอบสมติฐานเกี่ยวกับค่าเฉลี่ยเนื่องจากเป็นสถิติที่ใช้มากในการวิจัย ดังนี้

วิธีการทดสอบสมมติฐาน

ในการทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับค่าพารามิเตอร์ในประชาหนึ่งกลุ่ม หรือมากกว่าจะมีขั้นตอน ดังนี้

1. กำหนดสมมติฐานเพื่อการทดสอบ H_0 และ H_1

2. กำหนดระดับนัยสำคัญ α

3. กำหนดตัวสถิติที่ใช้ในการทดสอบสมมติฐานในข้อ 1.

4. หาบริเวณวิกฤต

5. คำนวณค่าสถิติทดสอบจากข้อมูลในตัวอย่างที่เก็บรวบรวมได้ และพิจารณาว่าค่าสถิติที่คำนวณได้นั้นตกอยู่ในบริเวณวิกฤตหรือไม่

6. สรุปผล การเปรียบเทียบค่าสถิติทดสอบที่คำนวณได้กับค่าวิกฤตที่ได้จากตารางการแจกแจง ถ้าพบว่า ค่าสถิติที่คำนวณได้ตกอยู่ในบริเวณวิกฤต จะปฏิเสธ H_0 แต่ถ้าค่าสถิติที่คำนวณได้ตกอยู่ในบริเวณของการยอมรับ จะยอมรับ H_0

1. การทดสอบสมติฐานเกี่ยวกับค่าเฉลี่ยของประชากร 1 กลุ่ม แบ่งออกเป็น 3 กรณีดังนี้

1.1 การทดสอบค่าเฉลี่ยประชากร เมื่อทราบค่าความแปรปรวนของประชากร

σ^2 และประชากรมีการแจกแจงแบบปกติ ตัวสถิติที่ใช้ในการทดสอบคือ

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

ซึ่ง Z มีการแจกแจงปกติมาตรฐาน หรืออาจเขียนได้ว่า $Z \sim N(0, 1)$

สรุปการตัดสินใจสำหรับการทดสอบ $H_0 : \mu = \mu_0$ กับสมมติฐานทางเลือกต่างๆกัน โดยกำหนดระดับนัยสำคัญ α ดังตาราง

H_1:	บริเวณอาณาเขตวิกฤต
$\mu > \mu_0$	$Z \geq Z_\alpha$
$\mu < \mu_0$	$Z \leq -Z_\alpha$
$\mu \neq \mu_0$	$Z \leq -Z_{\frac{\alpha}{2}}$ หรือ $Z \geq Z_{\frac{\alpha}{2}}$

ตัวอย่างที่ 1 โรงงานผู้ผลิตเหล็กเส้นต้องการตรวจสอบคุณภาพการผลิต เพื่อที่จะพิจารณาว่าการผลิตได้มาตรฐานหรือไม่ ถ้ากำหนดความยาวมาตรฐานของเหล็กเส้นโดยเฉลี่ยเท่ากับ 8.6 นิ้ว และค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานความยาวเหล็กเส้นเท่ากับ 0.3 นิ้ว ถ้าสุ่มตัวอย่างเหล็กเส้นที่ผลิตโดยโรงงานแห่งนี้ขึ้นมาจำนวน 36 เส้น พบว่าค่าเฉลี่ยของความยาวเหล็กเส้นตัวอย่างเท่ากับ 8.7 นิ้ว จะกล่าวสรุปได้หรือไม่ว่า การผลิตเหล็กเส้นของโรงงานนี้ได้มาตรฐานค่าเฉลี่ย ที่ระดับนัยสำคัญ .05

วิธีทำ 1. สมมติฐานเพื่อการทดสอบ

$H_0 : \mu = 8.6$

$H_1 : \mu \neq 8.6$

2. สถิติที่ใช้ทดสอบ

เนื่องจากทราบค่าความแปรปรวนประชากร σ^2 ดังนั้นสถิติที่ใช้ในการทดสอบ

คือ $$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

3. กำหนดระดับนัยสำคัญ $\alpha = 0.05$

การทดสอบเป็นการทดสอบแบบสองข้าง ดังนั้นบริเวณอาณาเขตวิกฤต ก็คือ

$$Z \leq -Z_{\frac{\alpha}{2}} = -Z_{0.025} = -1.96 \quad \text{หรือ} \quad Z \geq Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{0.025} = 1.96$$

4. คำนวณค่าสถิติทดสอบ

จากข้อมูลทราบว่า $\mu_0 = 8.6$, $\bar{X} = 8.7$, $\sigma = 0.3$, $n = 36$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$Z = \frac{8.7 - 8.6}{0.3/\sqrt{36}}$$

$$= 2.00$$

5. สรุปผล

ค่าสถิติทดสอบที่คำนวณได้คือ $Z = 2.00$ มีค่ามากกว่า 1.96 ซึ่งตกอยู่ในบริเวณอาณาเขตวิกฤต ดังนั้นจึงปฏิเสธสมมติฐาน H_0 ที่ว่าค่าเฉลี่ยความยาวของเหล็กเส้นที่ผลิตโดยโรงงานนี้เท่ากับ 8.6 นิ้ว นั่นคือ การผลิตเหล็กเส้นของโรงงานแห่งนี้ไม่ได้มาตรฐานตามกำหนด (เนื่องจาก $\mu \neq 8.6$) ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05

1.2 การทดสอบค่าเฉลี่ยประชากร เมื่อไม่ทราบค่าความแปรปรวนของประชากร σ^2 และตัวอย่างที่สุ่มมามีขนาดใหญ่ ($n \geq 30$) จะประมาณค่า σ^2 ด้วย s^2 ตัวสถิติที่ใช้ทดสอบ คือ

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$$

ตัวอย่างที่ 2 จากการสำรวจครัวเรือนในเขตอำเภอเมืองบุรีรัมย์ จำนวน 36 ครัวเรือน พบว่า โดยเฉลี่ยครัวเรือนชมรายการโทรทัศน์ 27 ชั่วโมงต่อสัปดาห์ ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน 4 ชั่วโมง ถ้าจำนวนชั่วโมงการชมโทรทัศน์โดยเฉลี่ยของครัวเรือนทั่วประเทศเท่ากับ 25 ชั่วโมงต่อสัปดาห์ จะกล่าวสรุปได้หรือไม่ว่า จำนวนชั่วโมงการชมรายการโทรทัศน์โดยเฉลี่ยของครัวเรือนในเขตอำเภอเมืองบุรีรัมย์มากกว่าจำนวนชั่วโมงการชมรายการโดยเฉลี่ยของครัวเรือนทั่วประเทศ ที่ระดับนัยสำคัญ 0.01

วิธีทำ 1. สมมติฐานเพื่อการทดสอบ

$H_0 : \mu = 25$

$H_1 : \mu > 25$

2. สถิติที่ใช้ทดสอบ

เนื่องจากไม่ทราบค่าความแปรปรวนประชากร σ^2 แต่ตัวอย่างที่สุ่มมามีขนาดใหญ่ $(n \geq 30)$ จะประมาณค่า σ^2 ด้วย s^2 ดังนั้นสถิติที่ใช้ในการทดสอบ คือ

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$$

3. กำหนดระดับนัยสำคัญ $\alpha = 0.01$ การทดสอบเป็นการทดสอบแบบข้างเดียวทางขวา ดังนั้นบริเวณอาณาเขตวิกฤต ก็คือ

$$Z \geq Z_{\alpha} = Z_{0.01} = 2.326$$

4. คำนวณค่าสถิติทดสอบ

จากข้อมูลทราบว่า μ_0 = 25 , $\overline{X} = 27$,S = 4 , n = 36

ดังนั้นจะได้ว่า $Z = \dfrac{25-27}{4/\sqrt{36}}$

= 3.00

5. สรุปผล

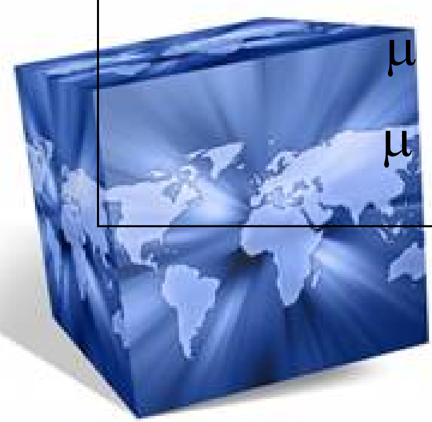
ค่าสถิติทดสอบที่คำนวณได้คือ Z = 3.00 มีค่ามากกว่า 2.326 ซึ่งตกอยู่ในบริเวณอาณาเขตวิกฤต ดังนั้นจึงปฏิเสธสมมติฐาน H_0 กล่าวสรุปได้ว่าที่ระดับนัยสำคัญ 0.01 จำนวนชั่วโมงการชมรายการโทรทัศน์โดยเฉลี่ยต่อสัปดาห์ของครัวเรือนในเขตอำเภอเมืองบุรีรัมย์มากกว่าจำนวนชั่วโมงการชมรายการโดยเฉลี่ยของครัวเรือนทั่วประเทศ (μ > 25)

1.3 การทดสอบค่าเฉลี่ยประชากร เมื่อไม่ทราบค่าความแปรปรวนของประชากร σ^2 และตัวอย่างที่สุ่มมามีขนาดเล็ก $(n < 30)$ จะประมาณค่า σ^2 ด้วย s^2 ตัวสถิติที่ใช้ทดสอบ คือ

$$t = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$$

ซึ่งมีการแจกแจง t และมีองศาความเป็นอิสระ (n-1) หรืออาจเขียนได้ว่า $t \sim t_{(n-1)}$ สรุปการตัดสินใจสำหรับการทดสอบ $H_0 : \mu = \mu_0$ กับสมมติฐานทางเลือกต่างๆกัน โดยกำหนดระดับนัยสำคัญ α ดังตาราง

H_1:	บริเวณอาณาเขตวิกฤต
$\mu > \mu_0$	$t \geq t_{\alpha,(n-1)}$
$\mu < \mu_0$	$t \leq -t_{\alpha,(n-1)}$
$\mu \neq \mu_0$	$t \leq -t_{\frac{\alpha}{2},(n-1)}$ หรือ $t \geq t_{\frac{\alpha}{2},(n-1)}$



ตัวอย่างที่ 3 ในการตรวจสอบคุณภาพชิ้นส่วนคอมพิวเตอร์ชนิดหนึ่ง กำหนดเกณฑ์ไว้ว่าจะต้องมีรอยตำหนิเกิดขึ้นเฉลี่ยไม่เกิน 4 จุด ต้องการทดสอบว่า บริษัทผลิตชิ้นส่วนบริษัทหนึ่งผลิตชิ้นส่วนคอมพิวเตอร์ชนิดนี้ได้ตามเกณฑ์มาตรฐานหรือไม่ จึงสุ่มชิ้นส่วนคอมพิวเตอร์มา 9 ชิ้น พบว่ามีรอยตำหนิเฉลี่ย 2.5 จุด ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 0.3 ที่ระดับนัยสำคัญ 0.10 เจ้าหน้าที่ตรวจสอบคุณภาพควรจะสรุปว่าอย่างไร

วิธีทำ 1. สมมติฐานเพื่อการทดสอบ

$$H_0 : \mu = 4$$

$$H_1 : \mu \leq 4$$

2. สถิติที่ใช้ทดสอบ

เนื่องจากไม่ทราบค่าความแปรปรวนประชากร σ^2 และตัวอย่างที่สุ่มมามีขนาดใหญ่ (n < 30) จะประมาณค่า σ^2 ด้วย s^2 ดังนั้น สถิติที่ใช้ในการทดสอบ คือ $t \leq -t_{\alpha,(n-1)} = -t_{0.10,8} = -1.397$

4. คำนวณค่าสถิติทดสอบ

จากข้อมูลทราบว่า $\mu_0 = 4$, $\overline{X} = 2.5$, $S = 0.3$, $n = 9$

ดังนั้นจะได้ว่า $$t = \frac{2.5 - 4}{0.3/\sqrt{9}}$$

$$= -15.00$$

5. สรุปผล

ค่าสถิติทดสอบที่คำนวณได้คือ $t = -15.00$ มีค่าน้อยกว่า -1.397 ซึ่งตกอยู่ในบริเวณอาณาเขตวิกฤต ดังนั้นจึงปฏิเสธสมมติฐาน H_0 กล่าวสรุปได้ว่าที่ระดับนัยสำคัญ 0.10 บริษัทผลิตชิ้นส่วนคอมพิวเตอร์ผลิตชิ้นส่วนได้ตามเกณฑ์มาตรฐาน

2. การทดสอบสมติฐานเกี่ยวกับค่าเฉลี่ยของประชากร 2 กลุ่ม (ผลต่างของค่าเฉลี่ยของประชากรสองกลุ่ม)

การทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับผลต่างของค่าเฉลี่ยของประชากรสองกลุ่ม เป็นการทดสอบว่าค่าเฉลี่ยของลักษณะที่ต้องการทดสอบของประชากรสองกลุ่มมีความแตกต่างกันหรือไม่เพียงใด หรือค่าเฉลี่ยประชากรกลุ่มใดมีค่ามากกว่าหรือน้อยกว่าค่าเฉลี่ยของประชากรอีกกลุ่มหนึ่ง ทั้งนี้ต้องอาศัยหลักเกณฑ์ทางสถิติมาช่วยในการตัดสินใจ เพื่อการตัดสินใจมีหลักการและเหตุผลที่เชื่อถือได้

ให้ μ_1 เป็นค่าเฉลี่ยของประชากรกลุ่มที่หนึ่ง

μ_2 เป็นค่าเฉลี่ยของประชากรกลุ่มที่สอง

$\mu_1 - \mu_2$ เป็นผลต่างของค่าเฉลี่ยของประชากรกลุ่มที่หนึ่งและกลุ่มที่สอง

C เป็นค่าของผลต่างของค่าเฉลี่ยที่คาดว่าจะเป็น

การตั้งสมมติฐาน จะเป็นดังนี้

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$ และ $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$

หรือ $H_1 : \mu_1 > \mu_2$

หรือ $H_1 : \mu_1 < \mu_2$

โดยการทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับค่าเฉลี่ยของประชากร 2 กลุ่ม จะแบ่งออกเป็น 4 กรณี ดังนี้

2.1 การทดสอบสมมติฐานของประชากร 2 กลุ่ม เมื่อทราบค่าความแปรปรวนของประชากร

ถ้า $\bar{X}_1$ และ $\bar{X}_2$ เป็นค่าเฉลี่ยของตัวอย่างขนาด n_1 และ n_2 ที่สุ่มมาอย่างอิสระต่อกัน จากประชากรที่มีการแจกแจงแบบปกติสองชุด ที่มีค่าเฉลี่ย μ_1 และ μ_2 (ไม่ทราบค่า) และมีค่าความแปรปรวน σ_1^2 และ σ_2^2 ตามลำดับ

ตัวสถิติที่ใช้ทดสอบ คือ
$$Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

สรุปการตัดสินใจสำหรับการทดสอบ $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = C$ กับสมมติฐานทางเลือกต่างๆกันโดยกำหนดระดับนัยสำคัญ α ดังตาราง

H_1:	บริเวณอาณาเขตวิกฤต
$\mu_1 - \mu_2 > C$	$Z \geq Z_{\alpha}$
$\mu_1 - \mu_2 < C$	$Z \leq -Z_{\alpha}$
$\mu_1 - \mu_2 \neq C$	$Z \leq -Z_{\frac{\alpha}{2}}$ หรือ $Z \geq Z_{\frac{\alpha}{2}}$

ตัวอย่างที่ 4 นักวิจัยท่านหนึ่งต้องการศึกษาเพื่อเปรียบเทียบความสามารถทางคอมพิวเตอร์ระหว่างนักศึกษาชายและนักศึกษาหญิงในคณะวิทยาศาสตร์มหาวิทยาลัยแห่งหนึ่งว่า จะแตกต่างกันหรือไม่ จึงได้สุ่มนักศึกษาชายมาจำนวน 50 คน และนักศึกษาหญิงมาจำนวน 50 คน จากคณะวิทยาศาสตร์ เพื่อทดสอบความสามารถทางคอมพิวเตอร์ ผลการทดสอบนักศึกษาชายได้คะแนนเฉลี่ย 116 คะแนน นักศึกษาหญิงได้คะแนนเฉลี่ย 112 คะแนน

ถ้าจากประสบการณ์ที่ผ่านมาพบว่า คะแนนความสามารถทางคอมพิวเตอร์ของนักศึกษาชายและหญิง มีการแจกแจงแบบปกติ มีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากัน ซึ่งเท่ากับ 15 คะแนน จะสรุปผลการศึกษาอย่างไรที่ระดับนัยสำคัญ 0.05

วิธีทำ ให้ μ_1 = คะแนนเฉลี่ยความสามารถทางคอมพิวเตอร์ของนักศึกษาชายทั้งหมด

μ_2 = คะแนนเฉลี่ยความสามารถทางคอมพิวเตอร์ของนักศึกษาหญิงทั้งหมด

1. กำหนดสมมติฐาน

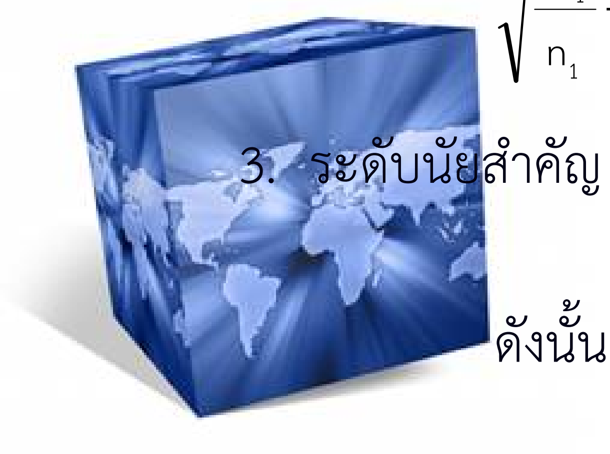
$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$$

$$H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0$$

2. ตัวสถิติทดสอบ เนื่องจากทราบค่าความแปรปรวนของประชากร ดังนั้น

ตัวสถิติทดสอบคือ

$$Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$



3. ระดับนัยสำคัญ α = 0.05 เป็นการทดสอบแบบสองข้าง

$$Z_{0.025} = 1.96 \quad , -Z_{0.025} = -1.96$$

ดังนั้น อาณาเขตวิกฤต คือ $Z \leq -1.96$ หรือ $Z \geq 1.96$

4. คำนวณค่าสถิติทดสอบ

จากโจทย์ทราบว่า $\bar{X}_1 = 116$, $\bar{X}_2 = 112$, $\sigma_1 = 15$, $\sigma_2 = 15$, $n_1=50$, $n_2 = 50$

แทนค่าต่างๆลงในสูตร ดังนี้

$$Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

$$= \frac{(116 - 112) - 0}{\sqrt{\frac{15^2}{50} + \frac{15^2}{50}}}$$

$$= 1.33$$

5. สรุป

ค่าสถิติทดสอบ $Z_{cal} = 1.33$ ซึ่งมีค่าอยู่ระหว่าง -1.96 และ 1.96 จึงไม่ตกอยู่ในบริเวณอาณาเขตวิกฤต ดังนั้นจะยอมรับ H_0 นั่นคือ ความสามารถทางคอมพิวเตอร์ของนักศึกษาชายและนักศึกษาหญิงไม่แตกต่างกันด้วยระดับนัยสำคัญ 0.05

2.2 การทดสอบสมมติฐานของประชากร 2 กลุ่ม เมื่อไม่ทราบค่าความแปรปรวนของประชากร และตัวอย่างมีขนาดใหญ่ ($n_1 \geq 30$และ $n_2 \geq 30$) จะใช้ตัวสถิติ Z ดังนี้

$$Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$$

ตัวอย่างที่ 5 ประธานบริษัทแห่งหนึ่ง มีความประสงค์ที่จะศึกษาว่า พนักงานคอมพิวเตอร์ที่จบการศึกษาจากมหาวิทยาลัยของรัฐบาล กับพนักงานคอมพิวเตอร์ที่จบการศึกษาจากมหาวิทยาลัยของเอกชนหลังจากปฏิบัติงานได้ 5 ปี ความสามารถทางคอมพิวเตอร์จะแตกต่างกันหรือไม่ จึงสุ่มตัวอย่างพนักงานกลุ่มแรกจำนวน 50 คน และกลุ่มที่สองจำนวน 60 คน ทดสอบความรู้ทางคอมพิวเตอร์ด้วยข้อสอบมาตรฐานปรากฏว่า ได้ผลสรุปคะแนนเบื้องต้น ดังนี้

กลุ่ม	คะแนนเฉลี่ย	ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน
มหาวิทยาลัยของรัฐบาล	52.5	10.5
มหาวิทยาลัยของเอกชน	49.6	11.2

อยากทราบว่าประธานบริษัทท่านนี้จะสรุปผลอย่างไรที่ระดับนัยสำคัญ 0.01

วิธีทำ ให้ μ_1 = ค่าเฉลี่ยของคะแนนทดสอบของกลุ่มจบการศึกษาจากมหาวิทยาลัยของรัฐบาล

μ_2 = ค่าเฉลี่ยของคะแนนทดสอบของกลุ่มจบการศึกษาจากมหาวิทยาลัยของเอกชน

1. กำหนดสมมติฐาน

$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$

$H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0$

2. ตัวสถิติทดสอบ คือ

$$Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$$

3. ระดับนัยสำคัญ 0.05 เป็นการทดสอบแบบสองข้าง ดังนั้นอาณาเขตวิกฤต คือ $Z \leq -2.575$ หรือ $Z \geq 2.575$

4. คำนวณค่าสถิติทดสอบ

จากโจทย์ทราบว่า $\bar{X}_1 = 52.5$, $\bar{X}_2 = 49.6$, $S_1 = 10.5$, $S_2 = 11.2$,n_1=50,n_2 = 60

แทนค่าต่างๆลงในสูตร ดังนี้

$$Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$$

$$= \frac{52.5 - 49.6}{\sqrt{\frac{10.5^2}{50} + \frac{11.2^2}{60}}} = 1.399$$

5. ค่าสถิติทดสอบ Z_{cal} = 1.399 ไม่ตกอยู่ในอาณาเขตวิกฤต ดังนั้นจะยอมรับ H_0 นั่นคือที่ระดับนัยสำคัญ 0.01 สรุปได้ว่า ความสามารถทางคอมพิวเตอร์ทั้งสองกลุ่มไม่แตกต่างกัน

3. ไม่ทราบค่าความแปรปรวนของประชากร และตัวอย่างมีขนาดเล็ก ($n_1<30$ หรือ $n_2<30$) และความแปรปรวนของประชากรทั้งสองกลุ่มเท่ากัน ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2$)

$$t = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_P\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

จะใช้ตัวสถิติ t ดังนี้

$$S_P^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

โดยที่

สรุปการตัดสินใจสำหรับการทดสอบ $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = C$ กับสมมติฐานทางเลือกต่างๆกัน โดยกำหนดระดับนัยสำคัญ α ดังตาราง

H_1:	บริเวณอาณาเขตวิกฤต
$\mu_1 - \mu_2 > C$	$t \geq t_{\alpha,(n_1+n_2-2)}$
$\mu_1 - \mu_2 < C$	$t \leq -t_{\alpha,(n_1+n_2-2)}$
$\mu_1 - \mu_2 \neq C$	$t \leq -t_{\frac{\alpha}{2},(n_1+n_2-2)}$ หรือ $t \geq t_{\frac{\alpha}{2},(n_1+n_2-2)}$

ตัวอย่างที่ 6 ฝ่ายวิจัยตลาดต้องการทดสอบคะแนนความนิยมของการใช้คอมพิวเตอร์สองยี่ห้อว่าแตกต่างกันหรือไม่ จึงสุ่มตัวอย่างผู้ใช้คอมพิวเตอร์ สองยี่ห้อคือ IBL กับ SP ได้ข้อมูลคะแนนความนิยมจากแบบสอบถามดังนี้

ยี่ห้อคอมพิวเตอร์	จำนวนตัวอย่าง (n)	คะแนนเฉลี่ย ($\bar{X}$)	ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (S)
IBL	10	80.7	10.646
SP	15	59.0	14.193

จะสรุปได้หรือไม่ว่า คะแนนความนิยมของการใช้คอมพิวเตอร์ยี่ห้อ IBL สูงกว่ายี่ห้อ SP 10 คะแนน ที่ระดับนัยสำคัญ 0.10 ถ้าทราบว่าความแปรปรวนของคะแนนความนิยมของการใช้คอมพิวเตอร์ทั้งสองยี่ห้อเท่ากัน

วิธีทำ ให้ μ_1 = คะแนนความนิยมเฉลี่ยของการใช้คอมพิวเตอร์ยี่ห้อ IBL

μ_2 = คะแนนความนิยมเฉลี่ยของการใช้คอมพิวเตอร์ยี่ห้อ SP

1. กำหนดสมมติฐาน

$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 10$

$H_1 : \mu_1 - \mu_2 > 10$

2. ตัวสถิติทดสอบคือ

จากข้อมูลไม่ทราบค่าความแปรปรวนของคะแนนความนิยมของการใช้คอมพิวเตอร์ทั้งสองยี่ห้อ แต่ทราบว่าเท่ากัน และขนาดตัวอย่างที่สุ่มมาทั้งสองกลุ่ม < 30

ดังนั้นสถิติที่ใช้ทดสอบคือ

$$t = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_P \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

โดยที่

$$S_P^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

3. ระดับนัยสำคัญ 0.10 มีองศาความเป็นอิสระ (ν) เท่ากับ 10 + 15 – 2 = 23 เป็นการทดสอบแบบข้างเดียวทางขวา ดังนั้นบริเวณอาณาเขตวิกฤต คือ $t \geq t_{0.10\,,\,(23)} = 1.319$

4. คำนวณค่าสถิติทดสอบ

$$S_P^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

$$= \frac{(10-1)(10.646)^2 + (15-1)(14.193)^2}{10+15-2} = 166.966$$

$$S_p = 12.922$$

$$t = \frac{(80.7-59.0)-10}{(12.922)\sqrt{\frac{1}{10}+\frac{1}{15}}} = 2.214$$

5. สรุป

จะเห็นว่า ค่า t ที่คำนวณได้เท่ากับ 2.214 ซึ่งมากกว่าค่า t ที่เปิดจากตาราง จึงตกอยู่ในบริเวณอาณาเขตวิกฤต ดังนั้นจะปฏิเสธสมมติฐาน H_0 นั่นคือ ที่ระดับนัยสำคัญ 0.10 คะแนนความนิยมของการใช้คอมพิวเตอร์ยี่ห้อ IBL สูงกว่ายี่ห้อ SP 10 คะแนน

4. ไม่ทราบค่าความแปรปรวนของประชากร และตัวอย่างมีขนาดเล็ก ($n_1<30$ หรือ $n_2<30$) และความแปรปรวนของประชากรทั้งสองกลุ่มไม่เท่ากัน $(\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2)$

จะใช้ตัวสถิติ t ดังนี้

$$t = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$$

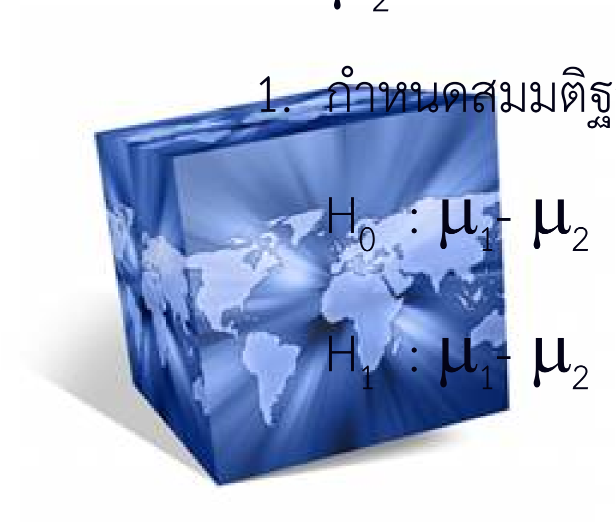
โดยที่

$$v = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2 - 1}}$$

ตัวอย่างที่ 7 จากข้อมูลสถิติ 15 ปีที่ผ่านมา พบว่า จังหวัดบุรีรัมย์มีฝนตกเฉลี่ยในเดือนพฤษภาคมเป็น 1.94 ลูกบาศก์ลิตร และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเป็น 0.45 ลูกบาศก์ลิตร จังหวัดสุรินทร์จากสถิติ 10 ปีที่ผ่านมามีฝนตกเฉลี่ยในเดือนพฤษภาคมเป็น 1.04 ลูกบาศก์ลิตร และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเป็น 0.26 ลูกบาศก์ลิตร จงใช้ระดับนัยสำคัญ 0.01 ทดสอบดูว่าปริมาณฝนตกเฉลี่ยในจังหวัดบุรีรัมย์มากกว่าจังหวัดสุรินทร์จริงหรือไม่ ถ้าทราบว่าความแปรปรวนของปริมาณน้ำฝนที่ตกในเดือนพฤษภาคมของทั้งสองจังหวัดไม่เท่ากัน

วิธีทำ ให้ μ_1 = ปริมาณฝนตกเฉลี่ยในเดือนพฤษภาคมของจังหวัดบุรีรัมย์

μ_2 = ปริมาณฝนตกเฉลี่ยในเดือนพฤษภาคมของจังหวัดสุรินทร์



1. กำหนดสมมติฐาน

$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$

$H_1 : \mu_1 - \mu_2 > 0$

2. เนื่องจากไม่ทราบความแปรปรวนของประชากร โดยทราบว่าความแปรปรวนไม่เท่ากัน และตัวอย่างมีขนาดเล็ก

สถิติที่ใช้ทดสอบ คือ $t = \dfrac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}}}$

โดยที่ t มีองศาความเป็นอิสระ ดังนี้

$$v = \frac{\left(\dfrac{S_1^2}{n_1} + \dfrac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\dfrac{\left(\dfrac{S_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1 - 1} + \dfrac{\left(\dfrac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2 - 1}}$$

$$= \frac{\left[\frac{0.45^2}{15} + \frac{0.26^2}{10}\right]^2}{\frac{\left[\frac{0.45^2}{15}\right]^2}{15-1} + \frac{\left[\frac{0.26^2}{10}\right]^2}{10-1}}$$

$$= \frac{0.00041}{0.000018 +} = 22.7 \approx 23$$

3. อาณาเขตวิกฤต

ที่ระดับนัยสำคัญ 0.01 เป็นการทดสอบแบบข้างเดียวทางขวา ดังนั้น บริเวณอาณาเขตวิกฤตคือ $t > t_{0.01\,,\,23} = 2.500$

4. คำนวณค่าสถิติทดสอบ

$$t = \frac{(1.94 - 1.04) - 0}{\sqrt{\frac{0.45^2}{15} + \frac{0.26^2}{10}}} = \frac{0.9}{0.142} = 6.338$$

5. สรุป ค่า t ที่คำนวณได้เท่ากับ 6.338 ซึ่งมากกว่าค่า t ที่เปิดจากตาราง จึงตกอยู่ในบริเวณอาณาเขตวิกฤต ดังนั้นจะปฏิเสธสมมติฐาน H_0 นั่นคือ ที่ระดับนัยสำคัญ 0.01 ปริมาณฝนตกเฉลี่ยในจังหวัดบุรีรัมย์มากกว่าจังหวัดสุรินทร์

3. การทดสอบสมติฐานเกี่ยวกับค่าเฉลี่ยของประชากรมากกว่า 2 กลุ่มขึ้นไป

ในการเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของประชากรที่มากกว่า 2 กลุ่มขึ้นไป หากจะใช้การทดสอบแบบ Z หรือการทดสอบแบบ t จะต้องเปรียบเทียบครั้งละคู่ ซึ่งจะยุ่งยากและสิ้นเปลืองและที่สำคัญจะทำให้ผลการสรุปเกิดความคลาดเคลื่อนสูงขึ้น จึงมีผู้คิดค้นหาวิธีที่จะใช้ทดสอบค่าเฉลี่ยของประชากรหลายๆกลุ่มโดยการทดสอบเพียงครั้งเดียวขึ้น โดยวิธีการทางสถิติที่นำมาวิเคราะห์นี้จะเรียกว่า การวิเคราะห์ความแปรปรวน (Analysis of variance, ANOVA) ซึ่งในบทนี้จะขอกล่าวเพียงการวิเคราะห์ความแปรปรวนแบบจำแนกทางเดียว (One – way analysis of variance) ดังนี้

สมมติฐานที่ใช้ในการทดสอบ คือ

H_0 : $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \ldots = \mu_k$

H_1 : มีค่าเฉลี่ยอย่างน้อย 2 ค่าไม่เท่ากัน

และมีขั้นตอนในการทดสอบดังนี้

1. กำหนดสมมติฐานเพื่อการทดสอบ
2. กำหนดระดับนัยสำคัญ (α)
3. กำหนดบริเวณอาณาเขตวิกฤต (บริเวณของการปฏิเสธ H_0)
4. โดยเปิดจากตาราง $F_{\alpha\,,\,(k-1,n-k)}$
5. คำนวณค่าสถิติ

สำหรับสูตรที่ใช้ในการคำนวณ จะเป็นดังนี้

$$SST = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij} - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}^2 - \frac{X_{..}^2}{\sum_{i=1}^{K} n_i}$$

$$SSTr = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(\bar{x}_{i.} - \bar{x}_{..})^2 = \sum_{i=1}^{k}\frac{x_{i.}^2}{n_i} - \frac{x_{..}^2}{\sum_{i=1}^{k} n_i}$$

$$SSE = SST - SSTr$$

โดยเพื่อความสะดวกในการวิเคราะห์ข้อมูล จะพิจารณาค่าของการวิเคราะห์ข้อมูลในรูปแบบของตารางการวิเคราะห์ความแปรปรวน (ANOVA Table) ดังนี้

ตารางวิเคราะห์ความแปรปรวน (ANOVA Table)

แหล่งของความแปรปรวน (Source of Variance : Sov)	องศาความเป็นอิสระ (degree of freedom :d.f)	Summation of Square : SS	Mean of Square : MS	F
กรรมวิธี (treatment)	k – 1	SSTr	$MSTr = \frac{SSTr}{k-1}$	$F = \frac{MSTr}{MSE}$
ความคลาดเคลื่อน (Error)	n – k	SSE	$MSE = \frac{SSE}{n-k}$	
รวม (Total)	n – 1	SST		

ตัวอย่างที่ 8 วิศวกรที่ทำหน้าที่ควบคุมคุณภาพของบริษัทผลิต Hard disk แห่งหนึ่ง ต้องการทดสอบ Bearing จาก Supplier 5 บริษัท เพื่อคัดเลือกว่า Bearing จากบริษัท (Brand) ใด ที่เมื่อประกอบเข้ากับชุด มอเตอร์ขับแล้วเกิดการสั่นสะเทือน (Vibration) น้อยที่สุด เนื่องจากปัจจัยที่สำคัญของคุณภาพ Hard disk คือการสั่นสะเทือน หรือ Noise ขณะทำงานของ Hard disk เขาจึงได้ออกแบบการทดลองโดยมีการสุ่มตัวอย่างมอเตอร์มา 30 ตัว และแบ่งออกเป็น 5 กลุ่มๆละ 6 ตัว โดยแต่ละกลุ่มก็ใช้กับ Bearing ตัวอย่างจากบริษัทเดียวกัน เมื่อประกอบเข้ากับมอเตอร์และเริ่มทำงานแล้วเขาได้ทำการการวัดความสั่นสะเทือนของมอเตอร์และได้ค่าออกมาดังตาราง

Brand 1	Brand 2	Brand 3	Brand 4	Brand 5
13.1	16.3	13.7	15.7	13.5
15.0	15.7	13.9	13.7	13.4
14.0	17.2	12.4	14.4	13.2
14.4	14.9	13.8	16.0	12.7
14.0	14.4	14.9	13.9	13.4
11.6	17.2	13.3	14.7	12.3
82.1	95.7	82	88.4	78.5

จงทดสอบว่าที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 Bearing จากทั้ง 5 บริษัท (Brand) นั้นให้ผลการสั่นสะเทือนต่างกันหรือไม่

วิธีทำ 1. กำหนดสมมติฐานเพื่อการทดสอบ

H_0 : $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5$

H_1 : มีค่าเฉลี่ยอย่างน้อย 2 ค่าไม่เท่ากัน

2. กำหนดระดับนัยสำคัญ (α)

$\alpha = 0.05$

3. กำหนดบริเวณอาณาเขตวิกฤต

ที่ $F_{\alpha, (k-1, n-k)} = F_{0.05, (4, 25)} = 2.76$ ดังนั้นบริเวณอาณาเขตวิกฤต คือ F คำนวณ $\geq$ 2.76

4. คำนวณค่าสถิติทดสอบ

$$SST = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij} - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}X_{ij}^2 - \frac{X_{..}^2}{\sum_{i=1}^{K} n_i}$$

$$=13.1^2+15.0^2+14.0^2+\ldots+12.3^2-\frac{(82.1+95.7+82+88.4+78.5)^2}{30}$$

$$=6122.79-\frac{(426.7)^2}{30}$$

$$=6122.79-6069.096$$

$$=53.694$$

$$SSTr=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(\bar{x}_{i.}-\bar{x}_{..})^2=\sum_{i=1}^{k}\frac{x_{i.}^2}{n_i}-\frac{x_{..}^2}{\sum_{i=1}^{k}n_i}$$

$$=\frac{82.1^2}{6}+\frac{95.7^2}{6}+\frac{82^2}{6}+\frac{88.4^2}{6}+\frac{78.5^2}{6}-\frac{(82.1+95.7+82+88.4+78.5)^2}{30}$$

$$=(1123.402+1526.415+1120.667+1302.427+1027.042)-\frac{(426.7)^2}{30}$$

$$=6099.953-6069.096$$

$$=30.857$$

SSE = SST – SSTr

= 53.694 – 30.857

= 22.837

จะได้ตารางการวิเคราะห์ความแปรปรวน (ANOVA Table) ดังนี้

แหล่งของความแปรปรวน (Source of Variance : Sov)	องศาความเป็นอิสระ (degree of freedom :d.f)	Summation of Square : SS	Mean of Square : MS	F
กรรมวิธี (treatment)	5 – 1 = 4	30.857	7.714	$F = \frac{7.714}{0.913}$ $= 8.449$
ความคลาดเคลื่อน (Error)	30 – 5 = 25	22.837	0.913	
รวม (Total)	30 – 1 = 29	53.694		

5. สรุปผล

ค่าสถิติทดสอบ F ที่คำนวณได้มีค่ามากกว่า 2.76 จึงตกอยู่ในบริเวณอาณาเขตวิกฤต ดังนั้นจะปฏิเสธสมมติฐาน H_0 นั่นคือ มี Bearing จากบริษัทอย่างน้อย 2 บริษัทที่ไม่เท่ากันที่ระดับนัยสำคัญ 0.05