บทที่ 1
แนวความคิดเบื้องต้น (Fundamental Concepts)

ความรู้เกี่ยวกับเรขาคณิตวิเคราะห์เป็นความรู้ที่เกิดจากการเชื่อมโยงระหว่างความรู้ทางด้านพีชคณิตกับเรขาคณิต เพื่อนำมาใช้อธิบายสมบัติทางเรขาคณิตของเส้นโค้งเมื่อกำหนดสมการมาให้ หรือใช้ในการหาสมการต่าง ๆ เมื่อกำหนดสมบัติทางเรขาคณิตมาให้ ในการพิจารณาสมบัติของฟังก์ชันในวิชาแคลคูลัสหลายครั้งพบว่า ถ้าพิจารณาจากกราฟหรือสมบัติทางเรขาคณิตของฟังก์ชันจะทำให้เข้าใจปัญหาได้ดีขึ้นและง่ายขึ้น

การกำหนดจุดบนระนาบด้วยคู่อันดับของจำนวนจริง สมาชิกตัวแรกของคู่อันดับเรียกว่า พิกัดที่หนึ่ง และสมาชิกตัวหลังของคู่อันดับเรียกว่า พิกัดที่สอง ซึ่งระนาบดังกล่าวเกิดจากเส้นจำนวนสองเส้นตัดกันและตั้งฉากซึ่งกันและกัน และเรียกจุดตัดนี้ว่าจุดกำเนิด สำหรับบทที่ 1 เป็นแนวความคิดเบื้องต้นสำหรับเรขาคณิตวิเคราะห์ที่กล่าวถึงในเรื่องการหาระยะระหว่างจุดสองจุด จุดแบ่งของส่วนของเส้นตรง ความชันของเส้นตรง และมุมระหว่างเส้นตรงสองเส้น ซึ่งจะเป็นตัวช่วยในการคำนวณเกี่ยวกับรูปเรขาคณิต โดยอาศัยการเขียนกราฟลงบนพิกัด และเป็นเครื่องมือพื้นฐานที่ช่วยแก้ปัญหาเรื่องความสัมพันธ์ได้ การหาที่ตั้งของจุดในระนาบ จำเป็นต้องใช้แกนพิกัดเป็นหลักในการหาจุดที่ตั้ง พิกัดที่นิยมในปัจจุบันมี 2 ระบบ คือ ระบบพิกัดฉาก และ ระบบพิกัดเชิงขั้ว สำหรับในบทนี้เราจะกล่าวถึงระบบพิกัดฉาก

1.1 ระบบพิกัดฉาก (Rectangular Coordinate System)

ศรีบุตร แววเจริญ และ ชนศักดิ์ บ่ายเที่ยง (2544 : 2) และ Gordon Fuller and Dalton Tarwater (1992 : 4-5) ได้กล่าวว่า ระบบพิกัดฉาก ประกอบด้วยเส้นตรง 2 เส้นตั้งฉากซึ่งกันและกัน ซึ่งเส้นตรง 2 เส้นนั้น เรียกว่า แกนพิกัด (Coordinate Axes)

แกนในแนวนอน (Abscissa Axis) เรียกว่า แกน X

แกนในแนวตั้ง (Ordinate Axis) เรียกว่า แกน Y

ระนาบที่มีแกนพิกัดทั้งสองอยู่เรียกว่า ระนาบพิกัด (Coordinate Plane) โดยแกนพิกัดตัดกันที่พิกัด $(0,0)$ ซึ่งเรียกว่า จุดกำเนิด (Origin Point)

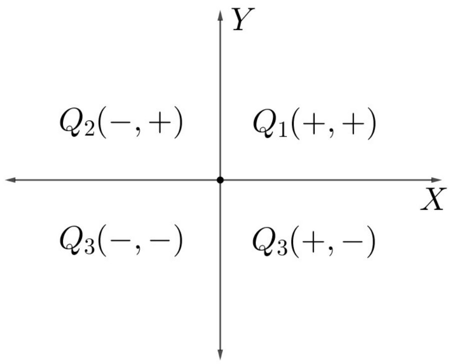
จุดบนแกน X ทางด้านขวาของจุดกำเนิด มีค่าความจริงเป็นบวก $(+)$

ทางด้านซ้ายของจุดกำเนิด มีค่าความจริงเป็นลบ $(-)$

จุดบนแกน Y ทางด้านบนของจุดกำเนิด มีค่าความจริงเป็นบวก $(+)$

ทางด้านล่างของจุดกำเนิด มีค่าความจริงเป็นลบ $(-)$

การตัดกันของแกนทั้งสองนี้ จะแบ่งพื้นที่ระนาบออกเป็น 4 ส่วน เรียกว่า จตุภาค (Quadrants) คือ จตุภาคที่ 1 (Q_1), จตุภาคที่ 2 (Q_2), จตุภาคที่ 3 (Q_3), จตุภาคที่ 4 (Q_4) ดังแสดงในรูปที่ 1.1

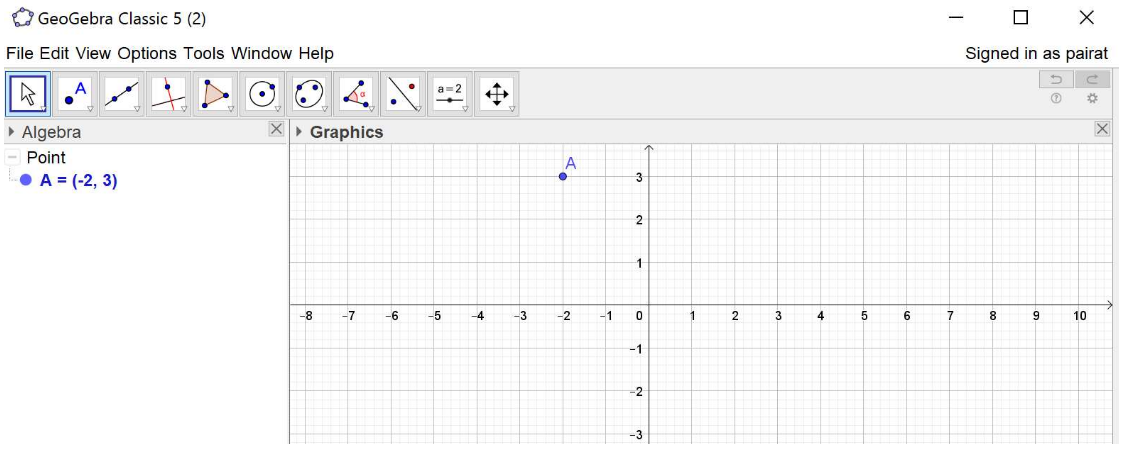


รูปที่ 1.1 จตุภาคบนระนาบ

สำหรับพิกัดในระนาบพิกัดฉาก จะเขียนพิกัดในรูปของคู่อันดับ (Ordered Pair) เช่น คู่อันดับ $(0,0)$ หมายถึง จุดกำเนิด, คู่อันดับ $(1,-2)$ หมายถึง ตำแหน่งซึ่งอยู่ห่างจากจุดกำเนิดมาทางขวาเป็นระยะ 1 หน่วย และอยู่ต่ำกว่า จุดกำเนิดลงมาเป็นระยะ 2 หน่วย หรือ กล่าวได้ว่า จุด $(1,-2)$ นี้ อยู่ตรงกับค่า x เป็น 1 และค่า y เป็น -2 นั้นเอง

ตัวอย่าง 1.1.1 จงลงจุด $A(-2,3)$ บนระนาบพิกัดฉาก

วิธีทำ จุดนี้มีค่าในแกน X เท่ากับ -2 หมายความว่าจุด A อยู่ห่างจากแกน Y ไปทางซ้ายเป็นระยะ 2 หน่วยและจุด A มีค่าในแกน Y เท่ากับ 3 หมายความว่าจุด A อยู่ห่างจากแกน X ขึ้นข้างบนเป็นระยะ 3 หน่วย ดังนั้นลงจุด A โดยลากจากจุดกำเนิดไปทางซ้ายตามแกน X เป็นระยะ 2 หน่วย แล้วลากขึ้นไป ข้างบนขนานกับแกน Y เป็นระยะ 3 หน่วย จุด A อยู่ในจตุภาคที่ 2 ดังรูปที่ 1.2
ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 1.1.1

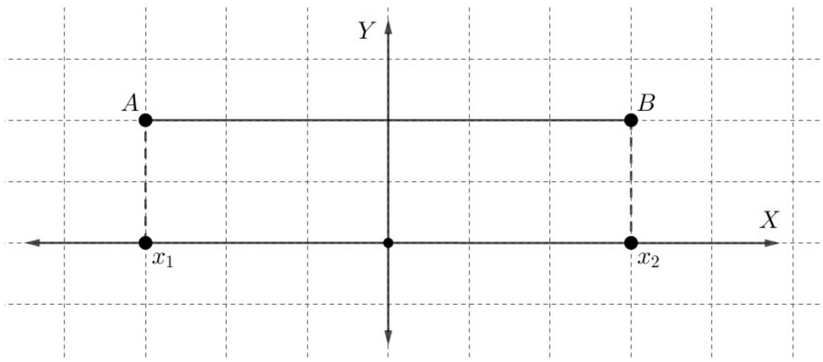


รูปที่ 1.2 จุด $A(-2,3)$ บนระนาบพิกัดฉาก

1.2 ระยะทางระหว่างจุดสองจุด (Distance Between Two Points)

Gordon Fuller and Dalton Tarwater (1992 : 4-5) ได้กล่าวว่า สัญลักษณ์ที่ใช้แทนระยะทางระหว่างจุด A กับ B คือ $\left|AB\right|$ หรือ AB

1.2.1 ระยะทางที่ขนานกับแกน X

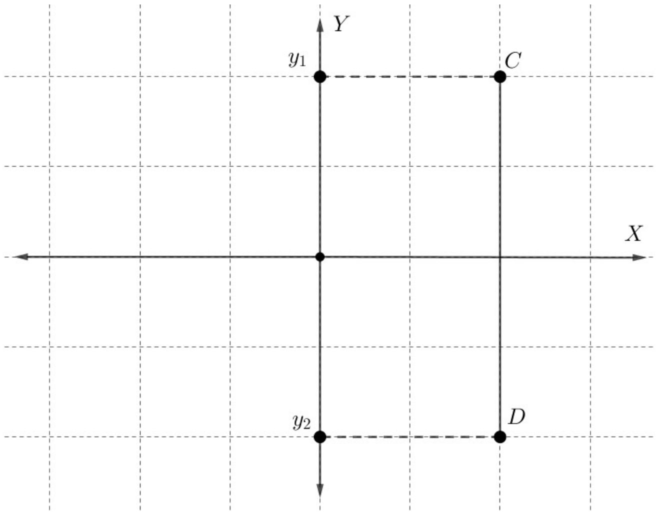


รูปที่ 1.3 ระยะทางที่วัดขนานกับแกน X

จากรูปที่ 1.3 ระยะทางระหว่างจุด A และ B คือ

$$AB = \left|x_1 - x_2\right| = \left|x_2 - x_1\right|$$

1.2.2 ระยะทางที่ขนานกับแกน Y



รูปที่ 1.4 ระยะทางที่วัดขนานกับแกน Y

จากรูป ระยะทางระหว่างจุด C และ D คือ

$$CD = \left|y_1 - y_2\right| = \left|y_2 - y_1\right|$$

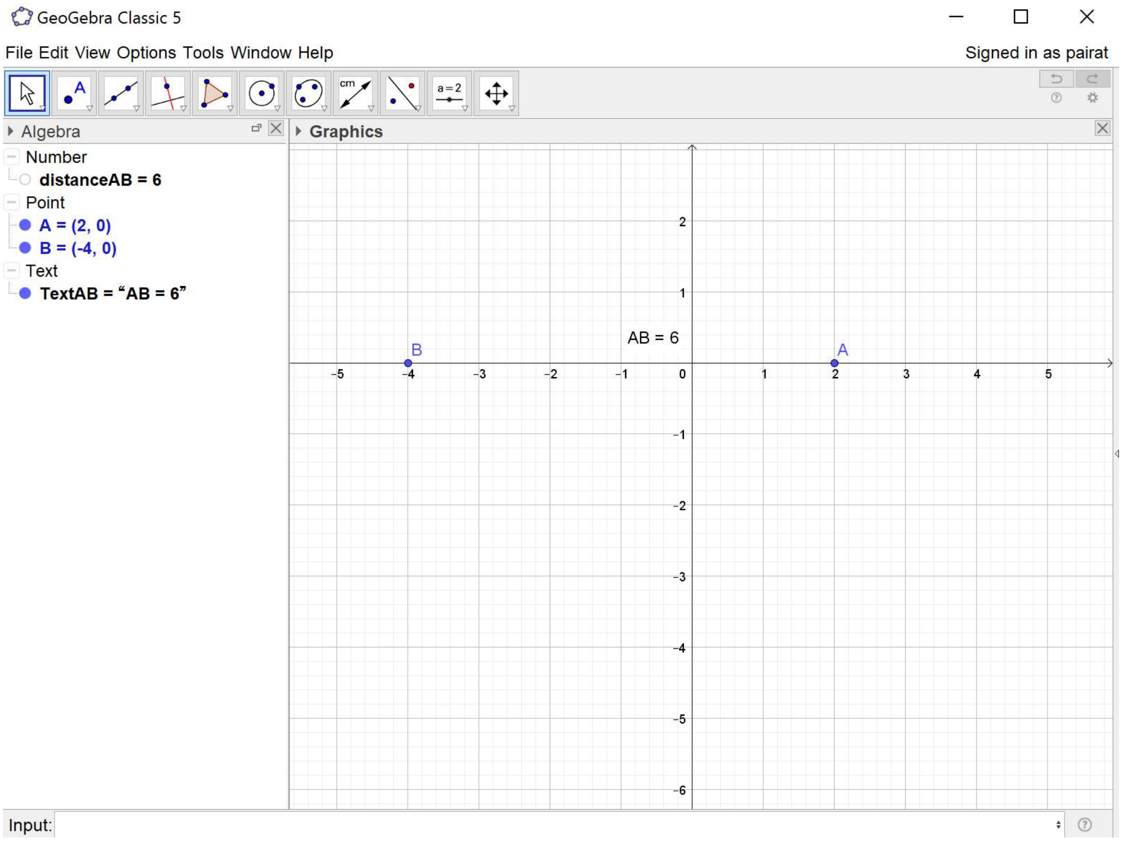
ตัวอย่าง 1.2.1 จงหาระยะทางระหว่างจุด $A(2,0)$ กับจุด $B(-4,0)$

วิธีทำ ให้ AB เป็นระยะทางระหว่างจุด A กับจุด B จะได้ว่าระยะทางระหว่างจุด A กับจุด B ขนานกับแกน X ดังนั้น

$$\begin{aligned} AB &= \left|x_1 - x_2\right| \\ &= \left|2-(-4)\right| \\ &= \left|2+4\right| \\ &= \left|6\right| \\ &= 6 \end{aligned}$$

ดังนั้น ระยะทางระหว่างจุด A กับจุด B ยาว 6 หน่วย

ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 1.2.1 ดังรูปที่ 1.5



รูปที่ 1.5 ระยะทางระหว่างจุด $A(2,0)$ กับจุด $B(-4,0)$

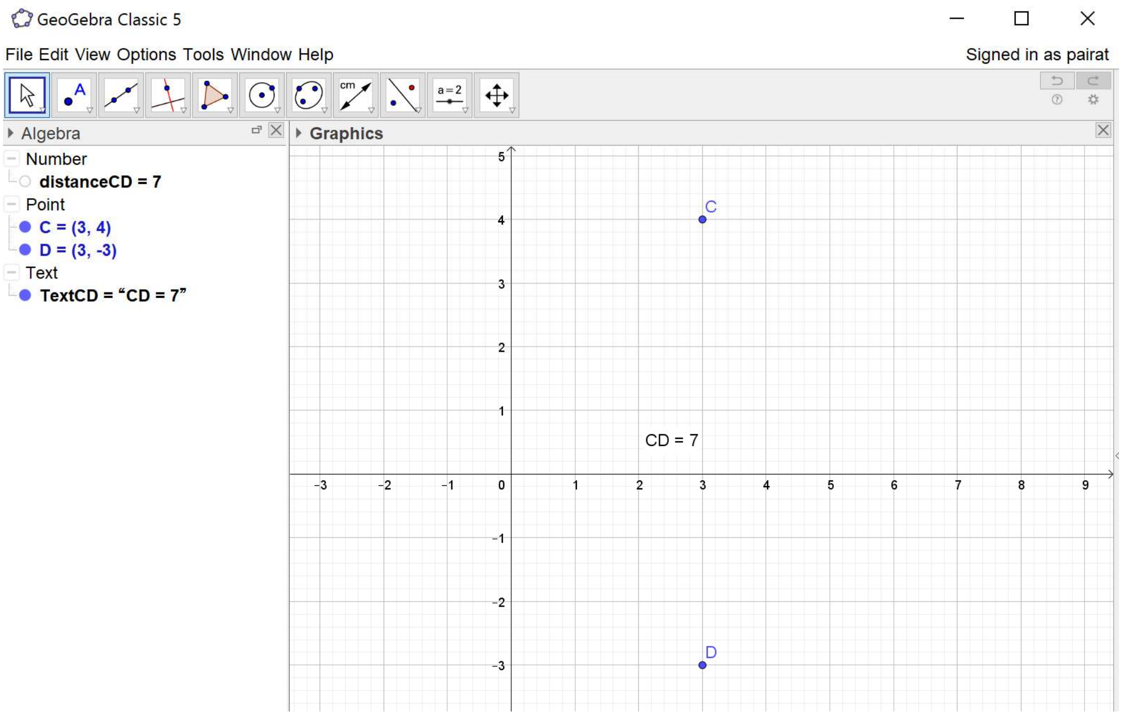
ตัวอย่าง 1.2.2 จงหาระยะทางระหว่างจุด $C(-3,3)$ กับจุด $D(4,3)$

วิธีทำ ให้ CD เป็นระยะทางระหว่างจุด C กับจุด D จะได้ว่าระยะทางระหว่างจุด A กับจุด B ขนานกับแกน Y ดังนั้น

$$\begin{aligned} CD &= \left|y_1 - y_2\right| \\ &= \left|-3-4\right| \\ &= 7 \end{aligned}$$

ดังนั้น ระยะทางระหว่างจุด C กับจุด D ยาว 7 หน่วย

ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 1.2.2 ดังรูปที่ 1.6



รูปที่ 1.6 ระยะทางระหว่างจุด $C(-3,3)$ กับจุด $D(4,3)$

ทฤษฎีบท 1.2.1 ให้จุด $P_1(x_1,y_1)$ และ $P_2(x_2,y_2)$ เป็นจุด 2 จุดใด ๆ บนระนาบ XY และ d แทนระยะทางระหว่างจุด P_1 กับ จุด P_2 จะได้

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

(วรรณี ธรรมโชติ, 2550 : 1-2 และ Douglas F. Riddle, 1996 : 5)

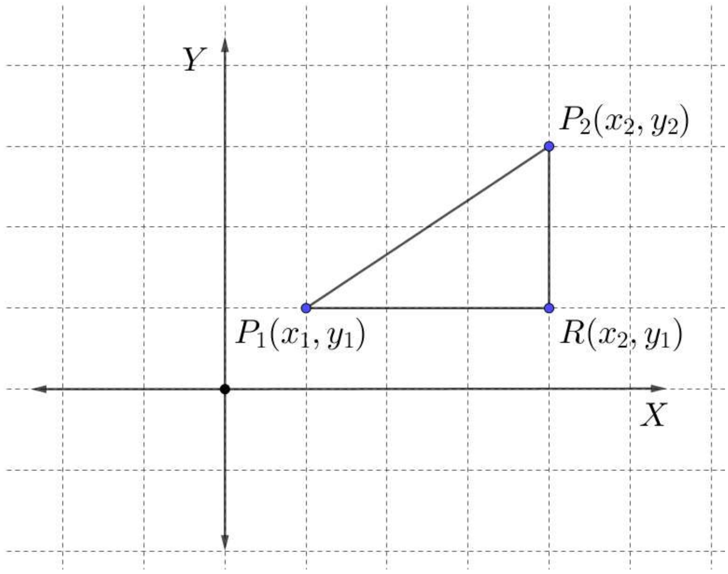
พิสูจน์ ให้จุด $P_1(x_1,y_1)$ และ $P_2(x_2,y_2)$ เป็นจุด บนระนาบ XY ลากส่วนของเส้นตรงจากจุด P_1 ขนานกับแกน X และส่วนของเส้นตรงขนานกับแกน Y ตัดกันที่จุด R ดังรูปที่ 1.8

ระยะ $P_1R=\left|x_2-x_1\right|$ และ $P_2R=\left|y_2-y_1\right|$ จะเห็นว่าสามเหลี่ยม P_1RP_2 เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก จากทฤษฎีบทปีทาโกรัส จะได้

$$\left|P_1P_2\right|^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$$

เมื่อ d แทนระยะทางระหว่างจุด P_1 และ P_2 จะได้ว่า

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



รูปที่ 1.7 แสดงจุด P_1, P_2 และจุด R บนระนาบพิกัดฉาก

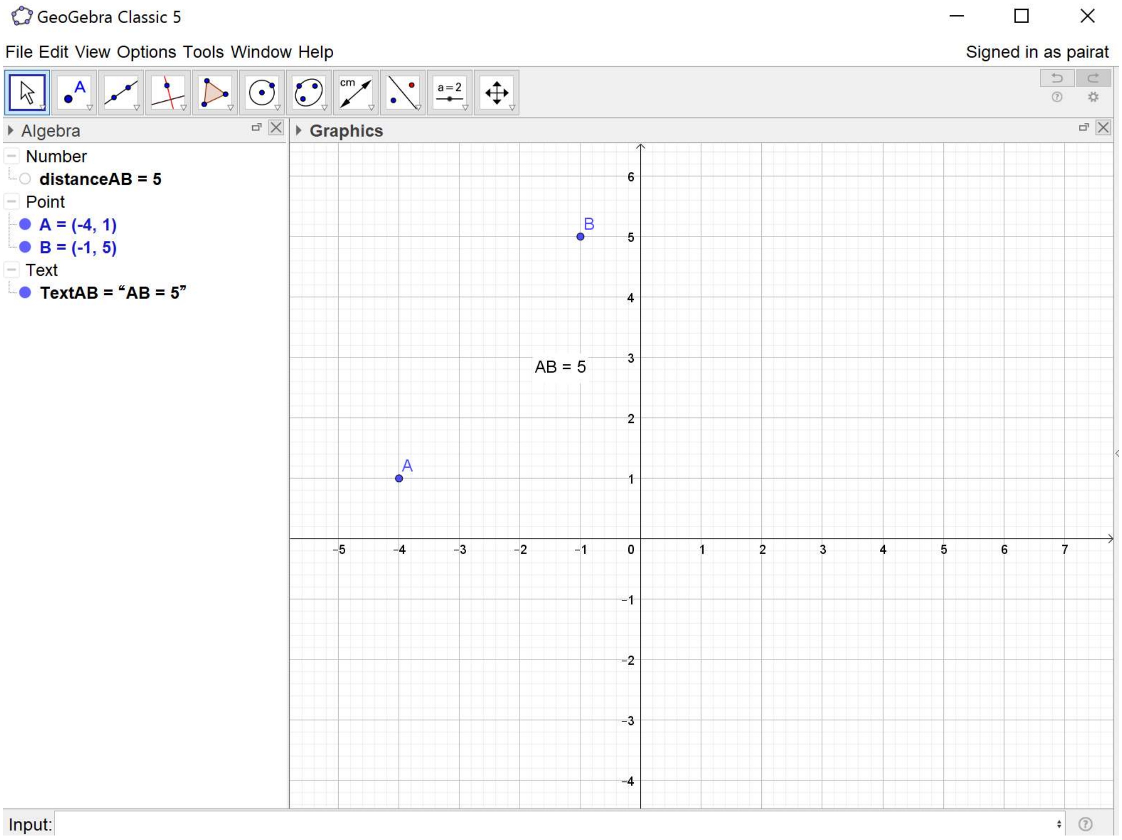
ตัวอย่าง 1.2.3 จงหาระยะทางระหว่างจุด $A(-4,1)$ กับจุด $B(-1,5)$

วิธีทำ จากทฤษฎีบท 1.2.1 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ d_{AB} &= \sqrt{(-1-(-4))^2 + (5-1)^2} \\ &= \sqrt{3^2 + 4^2} \\ &= \sqrt{9+16} \\ &= \sqrt{25} \\ &= 5 \end{aligned}$$

ดังนั้น ระยะทางระหว่างจุด $A(-4,1)$ กับจุด $B(-1,5)$ ยาว 5 หน่วย

ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 1.2.3 ดังรูปที่ 1.8



รูปที่ 1.8 ระยะทางระหว่างจุด $A(-4,1)$ กับจุด $B(-1,5)$

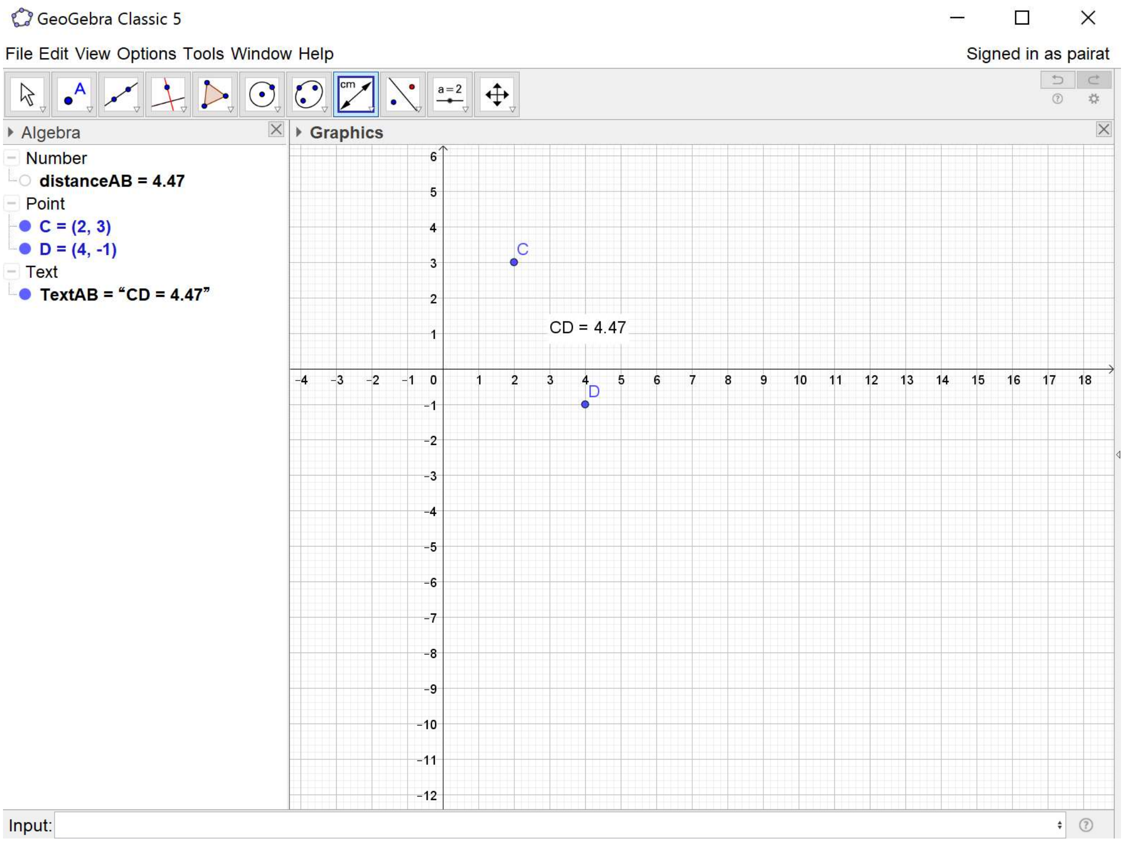
ตัวอย่าง 1.2.4 จงหาระยะทางระหว่างจุด $C(2,3)$ กับจุด $D(4,-1)$

วิธีทำ จากทฤษฎีบท 1.2.1 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ d_{CD} &= \sqrt{(4-2)^2 + (-1-3)^2} \\ &= \sqrt{2^2 + (-4)^2} \\ &= \sqrt{20} \\ &= 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

ดังนั้น ระยะทางระหว่างจุด $C(2,3)$ กับจุด $D(4,-1)$ ยาว $2\sqrt{5}$ หน่วย

ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 1.2.4 ดังรูปที่ 1.9



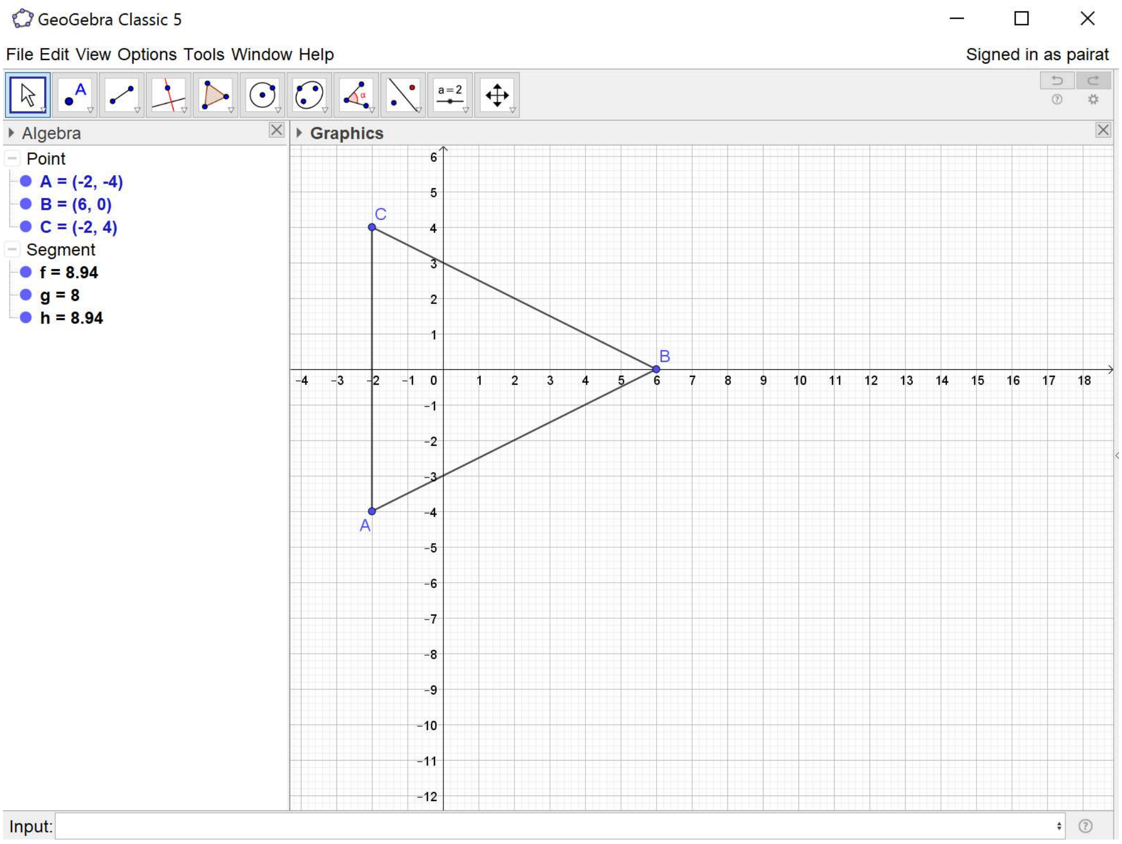
รูปที่ 1.9 ระยะทางระหว่างจุด $C(2,3)$ กับจุด $D(4,-1)$

ตัวอย่าง 1.2.5 จุดยอดของรูปสามเหลี่ยม ABC ซึ่งมีพิกัด $A(-2,-4), B(6,0)$ และ $C(-2,4)$ อยากทราบว่ารูปสามเหลี่ยม ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมชนิดใด

วิธีทำ จากทฤษฎีบท 1.2.1 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} d_{AB} &= \sqrt{(6-(-2))^2+(0-(-4))^2} \\ &= \sqrt{80} \approx 8.94 \\ d_{AC} &= \sqrt{(-2-(-2))^2+(4-(-4))^2} \\ &= \sqrt{64} = 8 \\ d_{BC} &= \sqrt{(-2-6)^2+(4-0)^2} \\ &= \sqrt{80} \approx 8.94 \end{aligned}$$

จะเห็นว่าความยาวด้าน AB เท่ากับความยาวด้าน BC
ดังนั้น รูปสามเหลี่ยม ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว
ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 1.2.5 ดังรูปที่ 1.10



รูปที่ 1.10 รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ABC

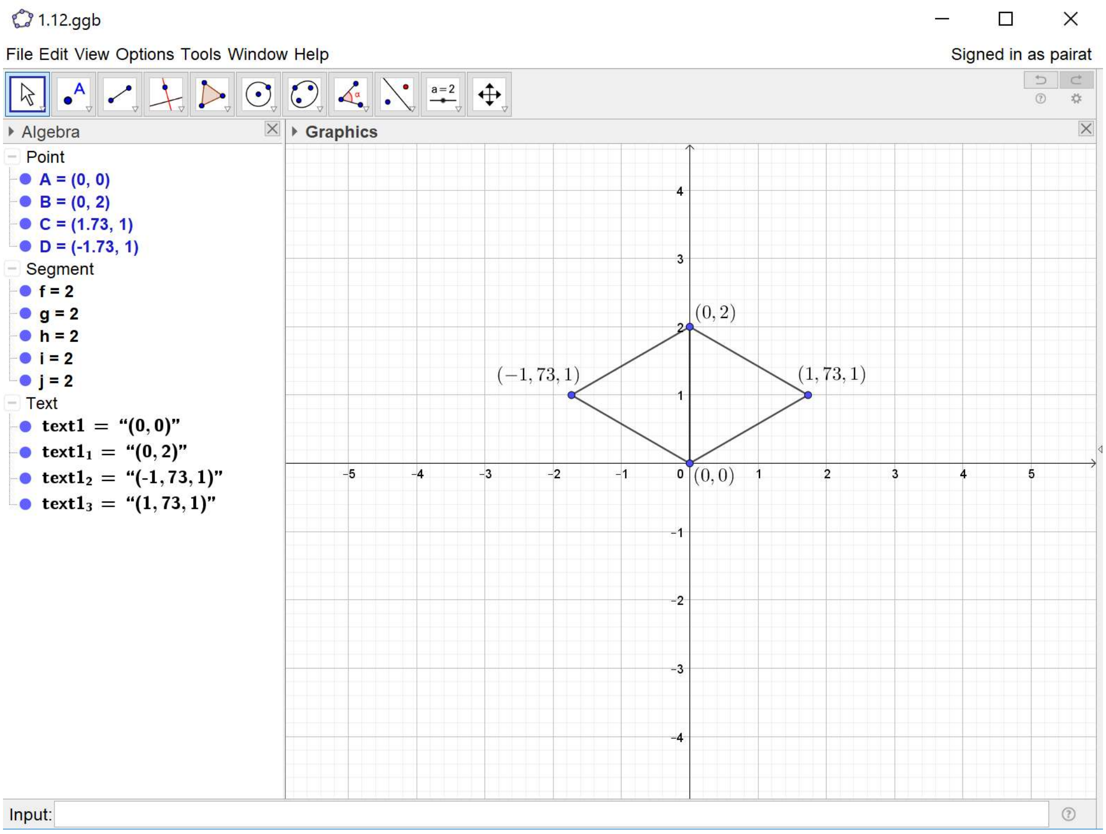
ตัวอย่าง 1.2.6 กำหนดให้จุดยอดของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าเป็น $(0,0)$ และ $(0,2)$ อยากทราบว่าจุดยอดที่เหลือของรูปสามเหลี่ยมนี้อยู่ที่พิกัดใด

วิธีทำ จากจุด $(0,0)$ และจุด $(0,2)$ มีระยะห่างกัน 2 หน่วย และจากรูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า จะได้ว่าด้านแต่ละด้านของรูปสามเหลี่ยมนี้ยาวด้านละ 2 หน่วย ดังนั้นค่าพิกัด y ของจุดยอดที่เหลือจะต้องอยู่ตรงจุดกึ่งกลางระหว่างจุด $(0,0)$ กับจุด $(0,2)$ นั่นก็คือ $y = 1$

เราจะได้ว่า จุดยอดที่เหลือมีพิกัดเป็น $(x,1)$ และระยะทางระหว่างจุด $(x,1)$ กับจุด $(0,0)$ คือ 2 หน่วย จากทฤษฎีบท 1.2.1 จะได้

$$\begin{aligned}
\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} &= d \\
\sqrt{(0-x)^2+(0-1)^2} &= 2 \\
\sqrt{(-x)^2+(-1)^2} &= 2 \\
\sqrt{x^2+1} &= 2 \\
x^2+1 &= 4 \\
x^2 &= 3 \\
x &= \pm\sqrt{3}
\end{aligned}$$

ดังนั้น จุดยอดที่เหลือของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่านี้คือจุด $(\sqrt{3},1)$ หรือจุด $(-\sqrt{3},1)$
ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 1.2.6 ดังรูปที่ 1.11



รูปที่ 1.11 รูปสามเหลี่ยมด้านเท่าจำนวน 2 รูป

ตัวอย่าง 1.2.7 รูปสามเหลี่ยม ABC มีมุม $A\hat{B}C$ เป็นมุมฉาก และด้านตรงข้ามมุมฉากยาว 10 หน่วย ถ้าพิกัดของจุด A และจุด B คือ $(-4,3)$ และ $(-1,2)$ ตามลำดับ จงหาพิกัดของจุด C

วิธีทำ จากโจทย์ความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก $AC = 10$

และความยาวด้าน
$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(-1-(-4))^2 + (2-3)^2} \\ &= \sqrt{3^2 + (-1)^2} \\ &= \sqrt{9+1} \\ &= \sqrt{10} \end{aligned}$$

เนื่องจาก ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก จะได้ว่า

$$\left|AC\right|^2 = \left|AB\right|^2 + \left|BC\right|^2$$

ดังนั้น
$$\begin{aligned} \left|BC\right|^2 &= \left|AC\right|^2 - \left|AB\right|^2 \\ \left|BC\right|^2 &= 10^2 - \sqrt{10}^2 \\ &= 100 - 10 \\ &= 90 \end{aligned}$$

หรือ
$$BC = \sqrt{90}$$

ให้พิกัดจุด C คือ (x,y) จะได้

$$\begin{aligned} (x+4)^2 + (y-3)^2 &= \left|AC\right|^2 \\ (x+4)^2 + (y-3)^2 &= 100 & \text{...(1)} \\ x^2 + 8x + 16 + y^2 - 6y + 9 &= 100 \\ x^2 + y^2 + 8x - 6y &= 75 & \text{...(2)} \end{aligned}$$

และ
$$\begin{aligned} (x+1)^2 + (y-2)^2 &= \left|BC\right|^2 \\ x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 &= 90 \\ x^2 + y^2 + 2x - 4y &= 85 & \text{...(3)} \end{aligned}$$

นำ $(2)-(3)$ จะได้

$$\begin{aligned} 6x - 2y &= -10 \\ 3x - y &= -5 \\ -y &= -5 - 3x \\ y &= 3x + 5 \end{aligned}$$

แทนค่า y ด้วย $3x+5$ ใน (1) จะได้

$$\begin{aligned}(x+4)^2+(3x+2)^2&=100\\(x^2+8x+16)+(9x^2+12x+4)&=100\\(x^2+9x^2)+(8x+12x)+(16+4)&=100\\10x^2+20x+20-100&=0\\10x^2+20x-80&=0\\x^2+2x-8&=0\\(x+4)(x-2)&=0\end{aligned}$$

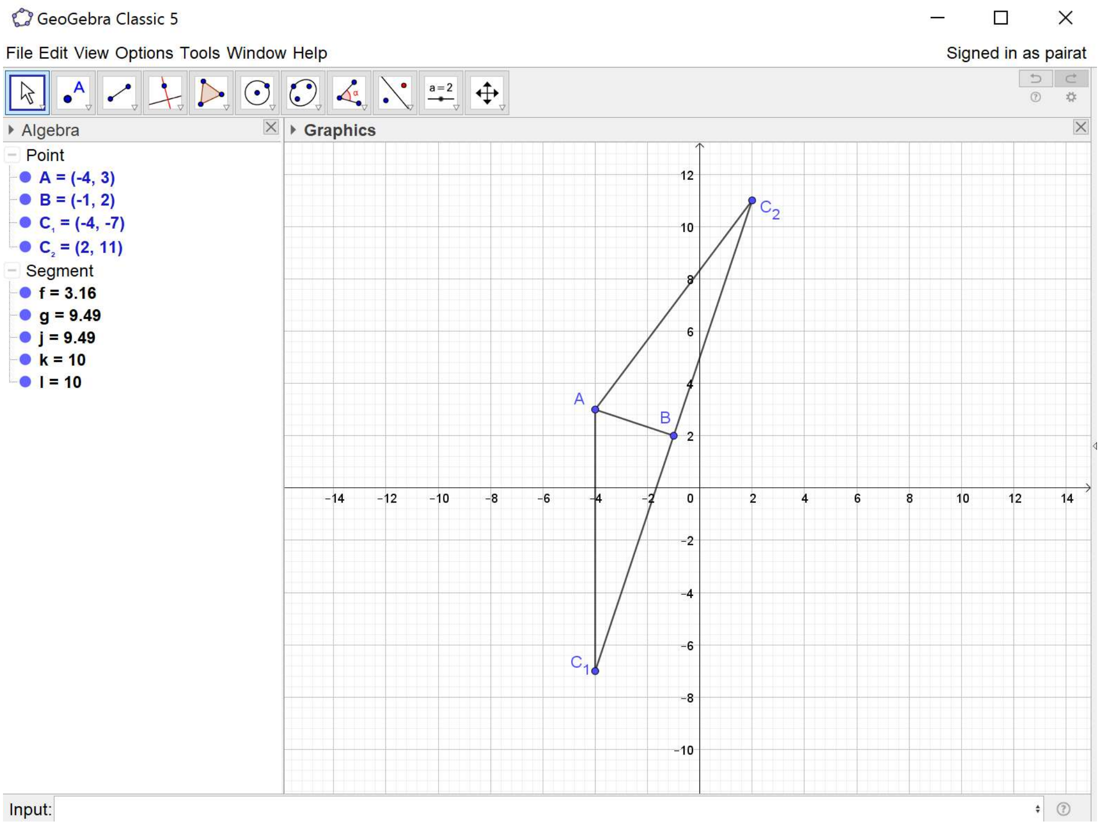
จะได้ $x=-4$ หรือ $x=2$

ถ้า $x=-4$ จะได้ $y=-7$

ถ้า $x=2$ จะได้ $y=11$

ดังนั้น พิกัดของจุด C คือ $(-4,-7)$ หรือ $(2,11)$

ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 1.2.7 ดังรูปที่ 1.12



รูปที่ 1.12 ผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 1.2.7

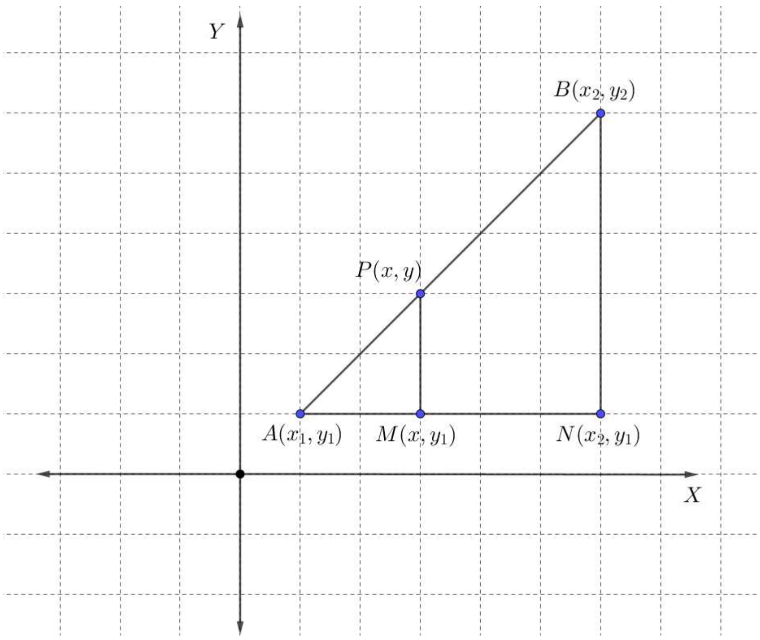
1.3 จุดแบ่งของส่วนของเส้นตรง (Division Point of Line Segment)

ทฤษฎีบท 1.3.1 กำหนดให้จุด $A(x_1, y_1)$ และ $B(x_2, y_2)$ เป็น 2 จุดใด ๆ บนระนาบ XY ให้จุด $P(x, y)$ แบ่งระยะ AB ออกเป็นอัตราส่วน $AP : PB = r_1 : r_2$ จะได้จุด $P(x, y)$ มีพิกัดดังนี้

$$x = \frac{r_1 x_2 + r_2 x_1}{r_1 + r_2},\ y = \frac{r_1 y_2 + r_2 y_1}{r_1 + r_2}$$

(วรรณี ธรรมโชติ, 2550 : 4 และ Protter, Murray H. & Morrer, Charles B. Jr., 1975 : 62-64)

พิสูจน์ ให้จุด $A(x_1, y_1)$ และ $B(x_2, y_2)$ เป็นจุดบนระนาบ XY ดังรูป 1.13



รูปที่ 1.13 กราฟแสดงจุด A, B, P, M และ N เป็นจุด บนระนาบ XY

จากรูป 1.13 จะได้

$$\begin{aligned} |AM| &= x - x_1 \\ |PM| &= y - y_1 \\ |AP| &= r_1 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\left|AB\right| &= r_1 + r_2 \\
\left|AN\right| &= x_2 - x_1 \\
\left|BN\right| &= y_2 - y_1
\end{aligned}
$$

และจากรูปสามเหลี่ยม APM คล้ายกับรูปสามเหลี่ยม ABN เราจะได้ว่า

$$\frac{AM}{AN} = \frac{PM}{BN} = \frac{AP}{AB}$$

พิจารณา

$$
\begin{aligned}
\frac{AM}{AN} &= \frac{AP}{AB} \\
\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} &= \frac{r_1}{r_1 + r_2} \\
x - x_1 &= \frac{r_1(x_2 - x_1)}{r_1 + r_2} \\
x &= \frac{r_1x_2 - r_1x_1 + r_1x_1 + r_2x_1}{r_1 + r_2} \\
x &= \frac{r_1x_2 + r_2x_1}{r_1 + r_2}
\end{aligned}
$$

และจาก

$$
\begin{aligned}
\frac{PM}{BN} &= \frac{AP}{AB} \\
\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} &= \frac{r_1}{r_1 + r_2} \\
y - y_1 &= \frac{r_1(y_2 - y_1)}{r_1 + r_2} \\
y &= \frac{r_1y_2 - r_1y_1 + r_1y_1 + r_2y_1}{r_1 + r_2} \\
y &= \frac{r_1y_2 + r_2y_1}{r_1 + r_2}
\end{aligned}
$$

ข้อสังเกต ถ้าจุด $P(x, y)$ เป็นจุดกึ่งกลางส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจุด $A(x_1, y_1)$ และ $B(x_2, y_2)$ เป็นแล้วจุด $P(x, y)$ มีพิกัดดังนี้

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},\ y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

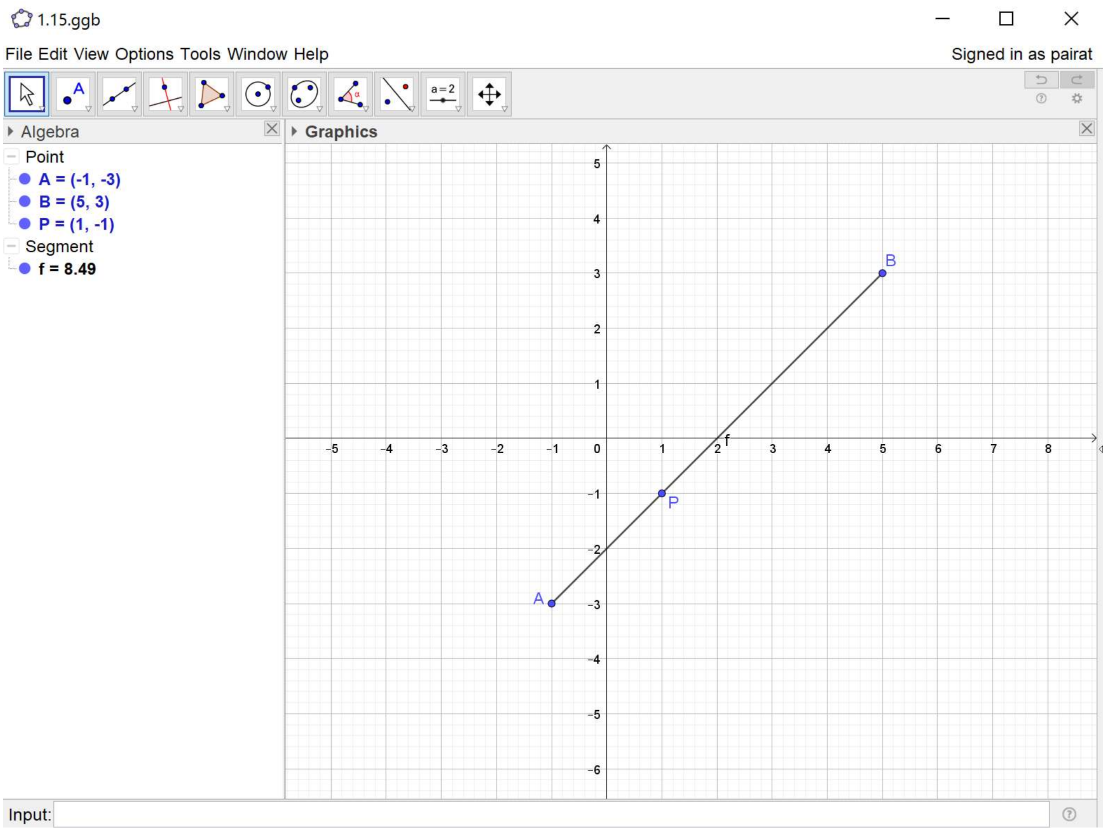
ตัวอย่าง 1.3.1 ให้จุด $A(-1,-3)$ และจุด $B(5,3)$ จงหาจุด $P(x,y)$ ซึ่งแบ่งส่วนของเส้นตรง AB ออกเป็นอัตราส่วน $AP:PB=1:2$

วิธีทำ ให้ $A(-1,-3)=A(x_1,y_1)$, $B(5,-3)=B(x_2,y_2)$ และจุด $P(x,y)$ เป็นจุดแบ่งส่วนของเส้นตรง AB ออกเป็นอัตราส่วน $AP:PB=r_1:r_2=1:2$ จากทฤษฎีบท 1.3.1 จะได้

$$x=\frac{r_1x_2+r_2x_1}{r_1+r_2}=\frac{1(5)+2(-1)}{1+2}=1 \quad \text{และ} \quad y=\frac{r_1y_2+r_2y_1}{r_1+r_2}=\frac{1(3)+2(-3)}{1+2}=-1$$

ดังนั้น เราจะได้ว่าจุด $P(1,-1)$ แบ่งส่วนของเส้นตรง AB ออกเป็นอัตราส่วน $1:2$

ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 1.3.1 ดังรูปที่ 1.14



รูปที่ 1.14 จุด $P(1,-1)$ แบ่งส่วนของเส้นตรง AB ออกเป็นอัตราส่วน $1:2$

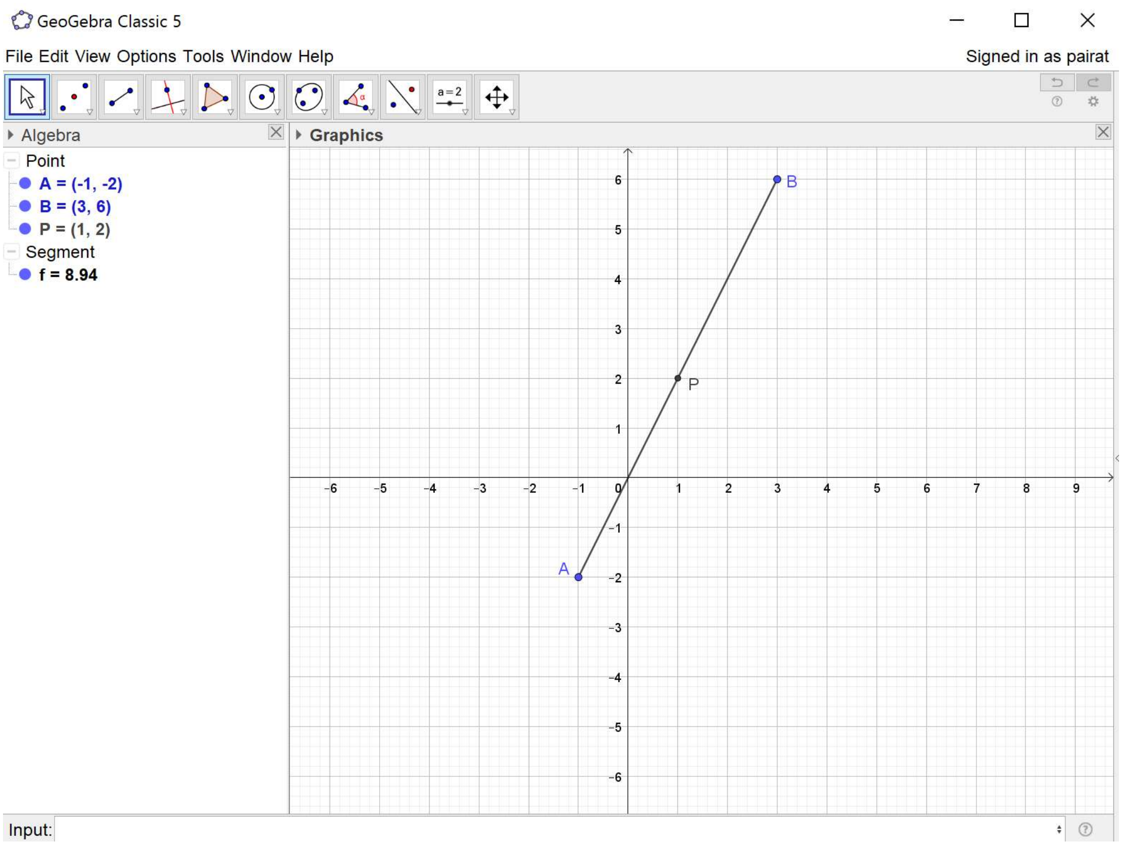
ตัวอย่าง 1.3.2 ให้จุด $A(-1,-2)$ และจุด $B(3,6)$ จงหาจุดกึ่งกลางระหว่างจุด A กับจุด B

วิธีทำ ให้ $A(-1,-2)=A(x_1,y_1)$, $B(3,6)=B(x_2,y_2)$ และจุด $P(x,y)$ เป็นจุดกึ่งกลางระหว่างจุด A กับจุด B จะได้ว่า

$$\begin{aligned} x &= \frac{x_1+x_2}{2} \\ &= \frac{-1+3}{2} \\ &= \frac{2}{2} \\ &= 1 \end{aligned} \qquad \text{และ} \qquad \begin{aligned} y &= \frac{y_1+y_2}{2} \\ &= \frac{-2+6}{2} \\ &= \frac{4}{2} \\ &= 2 \end{aligned}$$

ดังนั้น เราจะได้ว่าจุด $P(1,2)$ เป็นจุดกึ่งกลางระหว่างจุด A กับจุด B

ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 1.3.2 ดังรูปที่ 1.15



รูปที่ 1.15 จุด $P(1,2)$ เป็นจุดกึ่งกลางระหว่างจุด A กับจุด B

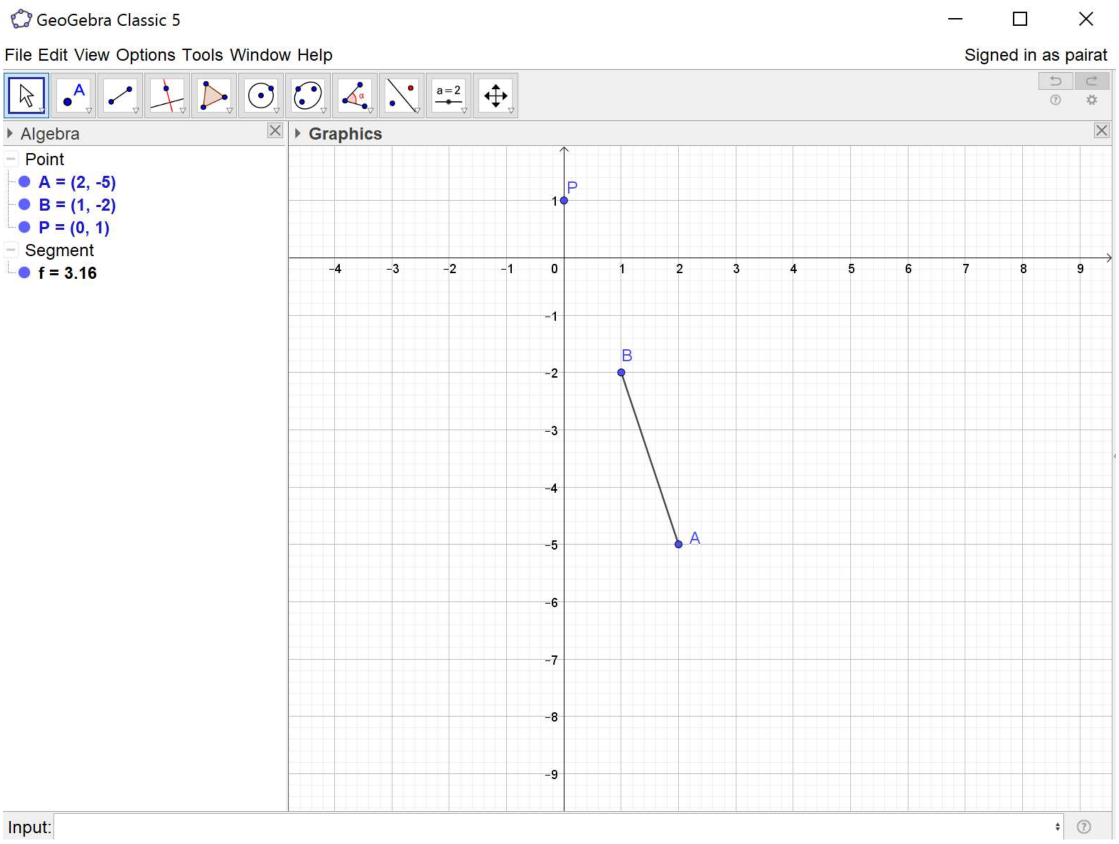
ตัวอย่าง 1.3.3 ให้จุด $A(2,-5)$ และจุด $B(1,-2)$ จงหาจุด $P(x,y)$ ซึ่งแบ่งส่วนของเส้นตรง AB ออกเป็นอัตราส่วน $AP:PB=2:(-1)$

วิธีทำ ให้ $A(2,-5)=A(x_1,y_1)$, $B(1,-2)=B(x_2,y_2)$ และจุด $P(x,y)$ เป็นจุดแบ่งส่วนของเส้นตรง AB ออกเป็นอัตราส่วน $AP:PB=r_1:r_2=2:(-1)$ จากทฤษฎีบท 1.3.1 จะได้

$$\begin{aligned} x &= \frac{r_1x_2+r_2x_1}{r_1+r_2} \\ &= \frac{2(1)+(-1)(2)}{2+(-1)} \\ &= 0 \end{aligned} \qquad \text{และ} \qquad \begin{aligned} y &= \frac{r_1y_2+r_2y_1}{r_1+r_2} \\ &= \frac{2(-2)+(-1)(-5)}{2+(-1)} \\ &= 1 \end{aligned}$$

ดังนั้น เราจะได้ว่าจุด $P(0,1)$ แบ่งส่วนของเส้นตรง AB ออกเป็นอัตราส่วน $2:(-1)$

ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 1.3.3 ดังรูปที่ 1.16



รูปที่ 1.16 จุด $P(0,1)$ แบ่งส่วนของเส้นตรง AB ออกเป็นอัตราส่วน $2:(-1)$

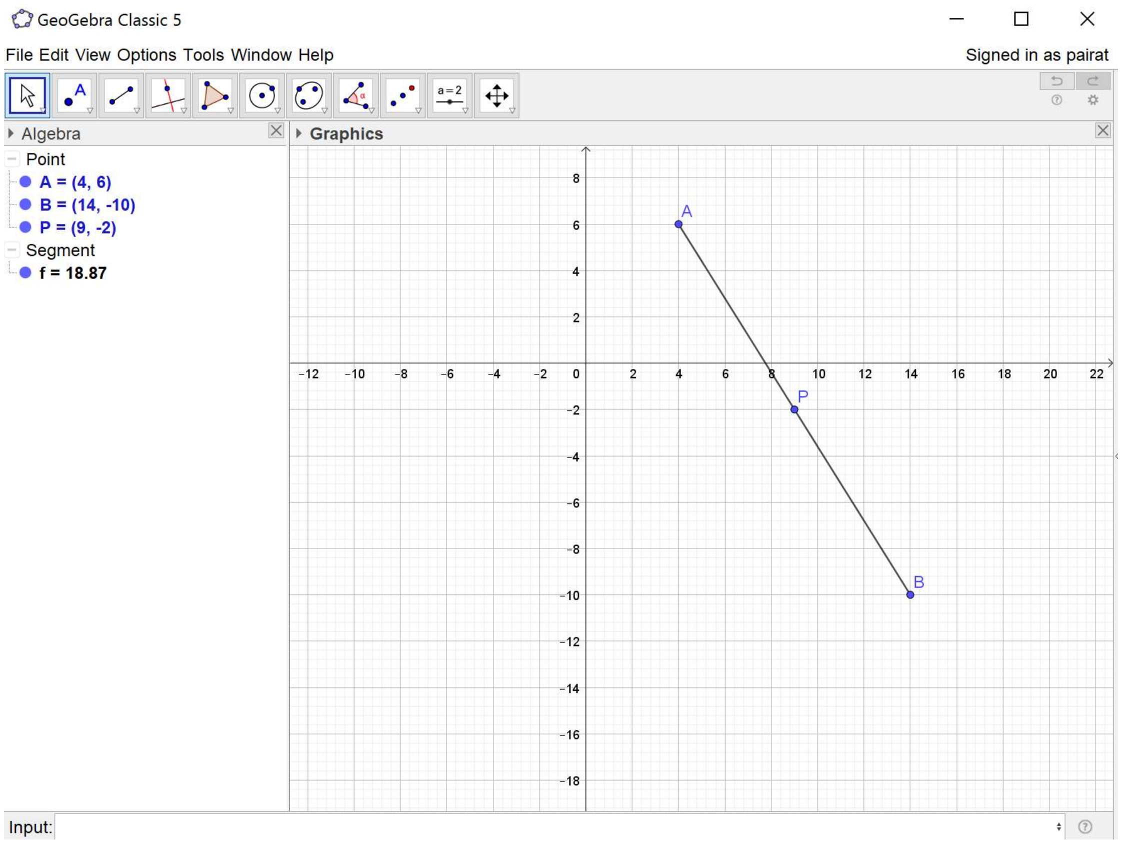
ตัวอย่าง 1.3.4 จุดปลายของส่วนของเส้นตรงเส้นหนึ่ง คือ $A(4,6)$ และจุดกึ่งกลางของส่วนของ เส้นตรง คือ $P(9,-2)$ จงหาพิกัดของจุดปลายอีกจุดหนึ่งของส่วนของเส้นตรง AB

วิธีทำ ให้จุด $B(x_2,y_2)$ จุดปลายอีกจุดหนึ่ง และจาก $P(9,-2)$ จุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง AB จะได้

$$\begin{aligned} x &= \frac{x_1+x_2}{2} & \qquad y &= \frac{y_1+y_2}{2} \\ 9 &= \frac{4+x_2}{2} \quad \text{และ} & -2 &= \frac{6+y_2}{2} \\ x_2 &= 14 & y_2 &= -10 \end{aligned}$$

ดังนั้น เราจะได้ว่า พิกัดจุดปลายอีกจุดหนึ่ง คือ $P(14,-10)$

ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 1.3.4 ดังรูปที่ 1.17



รูปที่ 1.17 แสดงการหาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 1.3.4

ตัวอย่าง 1.3.5 จงหาพิกัดจุด 2 จุด ที่แบ่งส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจุด $A(-3,-4)$ และจุด $B(6,11)$ ออกเป็นสามส่วนเท่า ๆ กัน

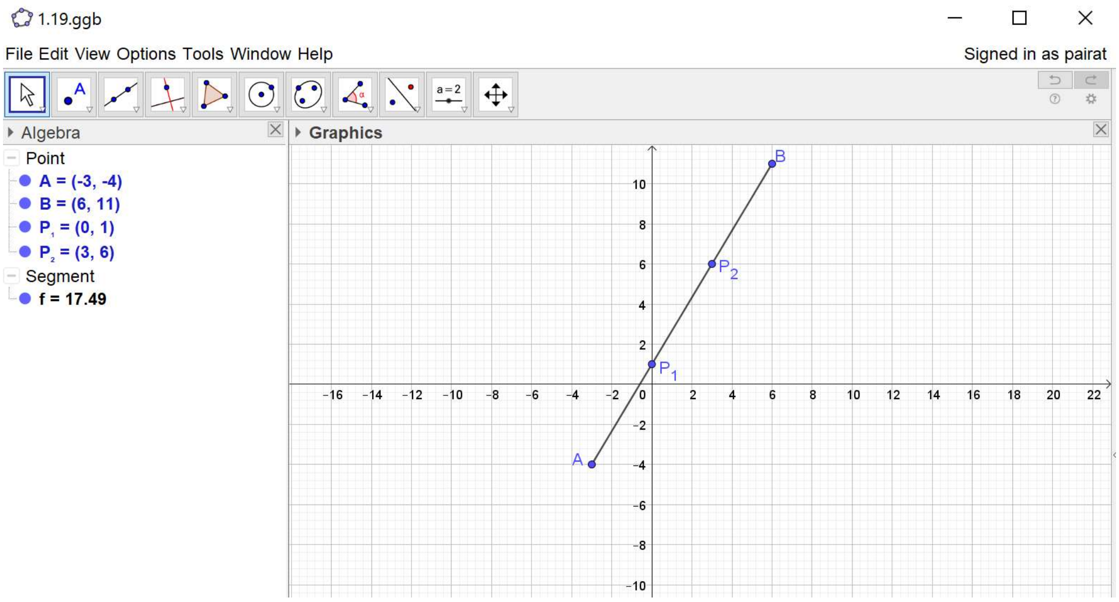
วิธีทำ ให้จุด $P_1(x_1,y_1)$ และจุด $P_2(x_2,y_2)$ เป็นจุดแบ่งส่วนของเส้นตรง AB ออกเป็นสามส่วนเท่า ๆ กัน หาจุด P_1 โดย $r_1:r_2=1:2$ จะได้

$$x=\frac{r_1x_2+r_2x_1}{r_1+r_2}=\frac{1(6)+2(-3)}{1+2}=0 \quad \text{และ} \quad y=\frac{r_1y_2+r_2y_1}{r_1+r_2}=\frac{1(11)+2(-4)}{1+2}=1$$

หาจุด P_2 โดย $r_1:r_2=2:1$ จะได้

$$x=\frac{r_1x_2+r_2x_1}{r_1+r_2}=\frac{2(6)+1(-3)}{2+1}=3 \quad \text{และ} \quad y=\frac{r_1y_2+r_2y_1}{r_1+r_2}=\frac{2(11)+1(-4)}{2+1}=6$$

ดังนั้น เราจะได้ว่า จุดแบ่งส่วนของส่วนของเส้นตรงทั้งสอง คือ $P_1(0,1)$ และ $P_2(3,6)$
ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 1.3.5 ดังรูปที่ 1.18



รูปที่ 1.18 แสดงการหาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 1.3.5

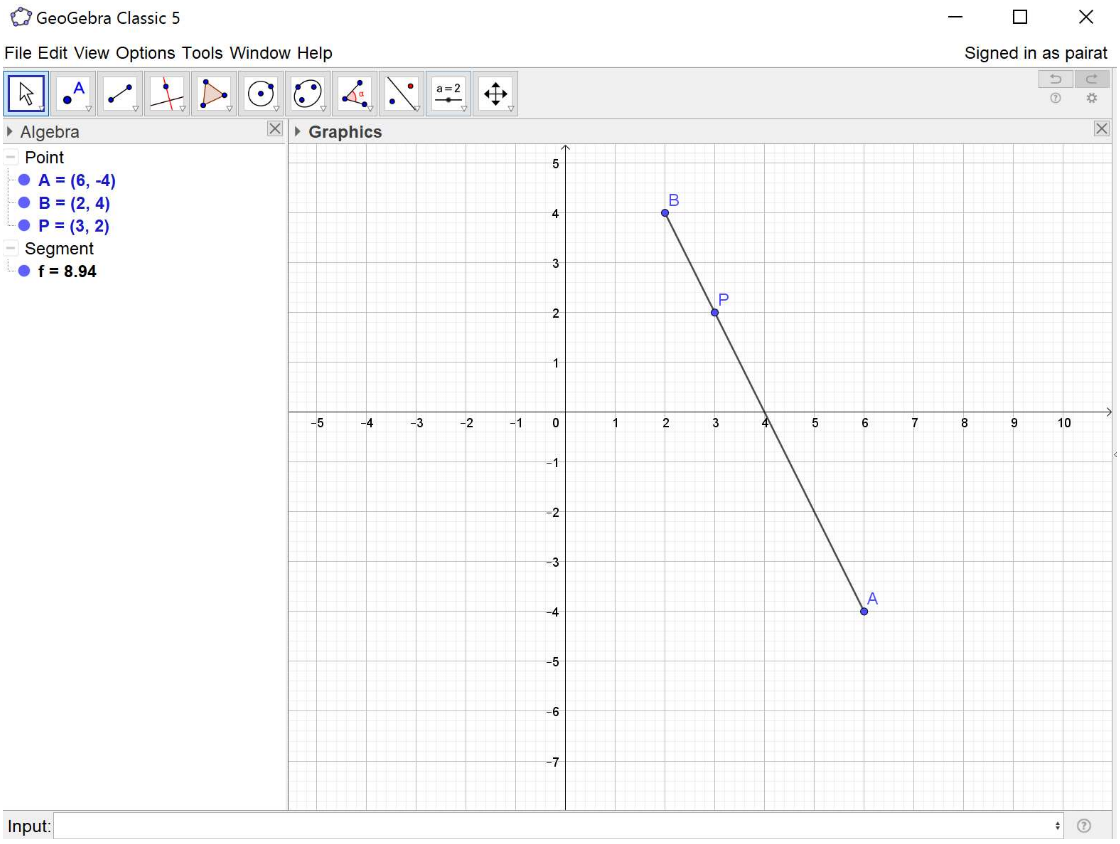
ตัวอย่าง 1.3.6 จงหาพิกัดของจุดซึ่งเป็น $\frac{3}{4}$ ของระยะจากจุด $A(6,-4)$ ไปยังจุด $B(2,4)$

วิธีทำ ให้จุด $P(x,y)$ เป็นพิกัดของจุดซึ่งเป็นระยะทางจากจุดจุด A ไปยังจุด B เป็น $\frac{3}{4}$ ของระยะทาง ดังนั้น $r_1 : r_2 = 3:1$ จะได้

$$x = \frac{r_1x_2 + r_2x_1}{r_1 + r_2} = \frac{3(2)+1(6)}{3+1} = 3 \qquad \text{และ} \qquad y = \frac{r_1y_2 + r_2y_1}{r_1 + r_2} = \frac{3(4)+1(-4)}{3+1} = 2$$

ดังนั้น เราจะได้ว่า พิกัดจุด $P(x,y)$ คือจุด $(3,2)$

ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 1.3.6 ดังรูปที่ 1.19



รูปที่ 1.19 แสดงการหาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 1.3.6

1.4 ความชันของเส้นตรง (Gradient of a Straight Line)

ความชันของเส้นตรง หรือมุมเอียงของเส้นตรงเป็นแนวคิดเกี่ยวกับการอธิบายเส้นตรงในระนาบที่นิยมใช้ในวิชาแคลคูลัส โดยการวัดมุมในทิศทางทวนเข็มนาฬิกามีค่าเป็นบวกและการวัดมุมในทิศทางตามเข็มนาฬิกามุมมีค่าเป็นลบที่ใช้หลักการเดียวกับการวัดมุมในวิชาตรีโกณมิติ

ความชันของเส้นตรง คืออัตราส่วนระหว่างค่า y ที่เปลี่ยนแปลงไปต่อค่า x ที่เปลี่ยนแปลงไปโดยใช้สัญลักษณ์แทนคือ m ซึ่งค่า m อาจเป็นบวก หรือเป็นลบ หรือเป็นศูนย์ก็ได้

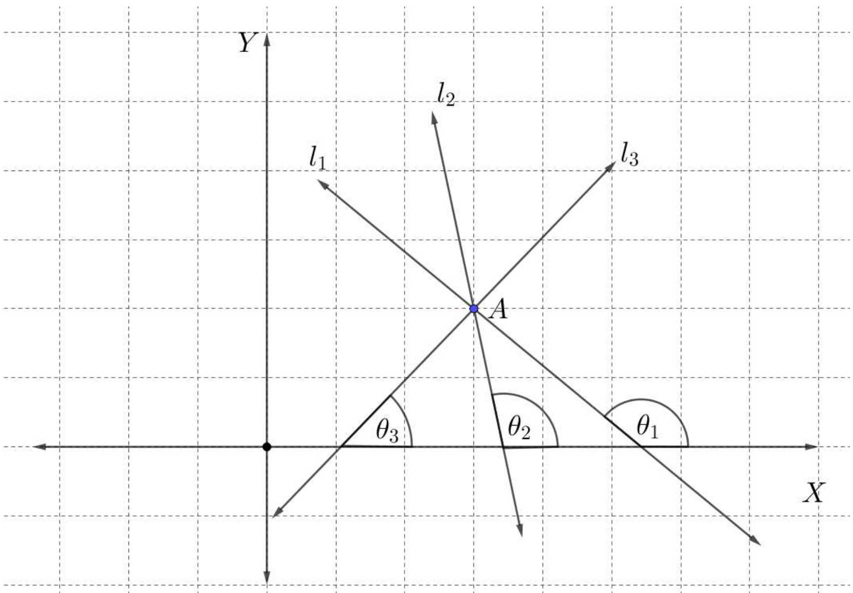
บทนิยาม 1.4.1 ความชัน (Slope) ของเส้นตรง คือ ค่าแทนเจนต์ (Tangent) ของมุม ถ้ากำหนดให้ m เป็นความชันของเส้นตรง จะได้

$$m = \tan\theta$$

เมื่อ θ เป็นมุมระหว่างเส้นตรงสองเส้น

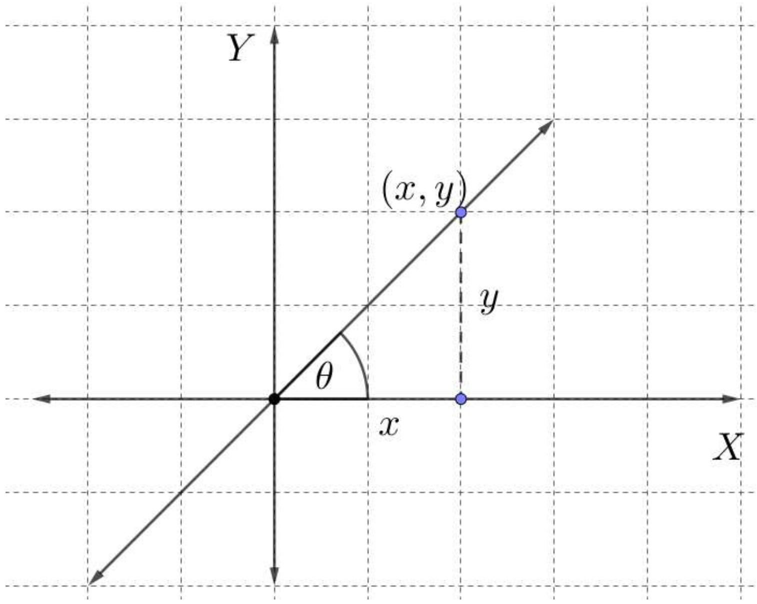
(Protter, Murray H. & Morrer, Charles B. Jr., 1975 : 45-46)

ให้ A เป็นจุดใด ๆ บนระนาบ XY ลากเส้นตรง $l_1, l_2, l_3 \dots$ ผ่านจุด A เส้นตรงเหล่านี้จะทำมุมเอียงกับแกน X ในทิศทวนเข็มนาฬิกา ด้วยขนาด $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \dots$ ตามลำดับ ซึ่งงสามารถกล่าวได้ว่า $l_1, l_2, l_3 \dots$ มีความชันต่างกัน ดังรูปที่ 1.20



รูปที่ 1.20 แสดงขนาดของมุมที่ต่างกัน ความชันของเส้นตรงก็จะต่างกันด้วย

ความชันของเส้นตรงใด ๆ แทนด้วยสัญลักษณ์ m มีค่าเท่ากับ $\tan\theta$ เมื่อ θ เป็นมุมที่เส้นตรงนั้นทำมุมกับแกน X ในทิศทวนเข็มนาฬิกา และ $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ จะได้ว่า $m = \tan\theta = \dfrac{y}{x}$ ดังรูปที่ 1.21



รูปที่ 1.21 แสดงความสัมพันธ์ของความชัน $m = \tan\theta = \dfrac{y}{x}$

จากนิยามของความเอียงหรือความชัน ทำให้เราได้ทฤษฎีบทเกี่ยวกับการขนานกันของเส้นตรงสองเส้น ถ้าเส้นตรงสองเส้นเส้นมีความชันเท่ากันแล้ว มุมเอียงของเส้นตรงทั้งสองย่อมเท่ากัน และในทางกลับกันถ้าเส้นตรงทั้งสองต่างขนานกันแล้ว มุมเอียงของเส้นตรงทั้งสองจะเท่ากัน ดังนั้นความชันย่อมเท่ากันด้วย

ทฤษฎีบท 1.4.1 เส้นตรงสองเส้นขนานกัน ก็ต่อเมื่อ ความชันของเส้นตรงทั้งสองเส้นเท่ากัน $(m_1 = m_2)$

(วรรณี ธรรมโชติ, 2550 : 15)

พิสูจน์ เราจะแบ่งการพิสูจน์ออกเป็น 2 กรณีดังนี้

กรณีที่ 1 กำหนดให้เส้น l_1 ขนานกับเส้นตรง l_2 จะได้ว่า

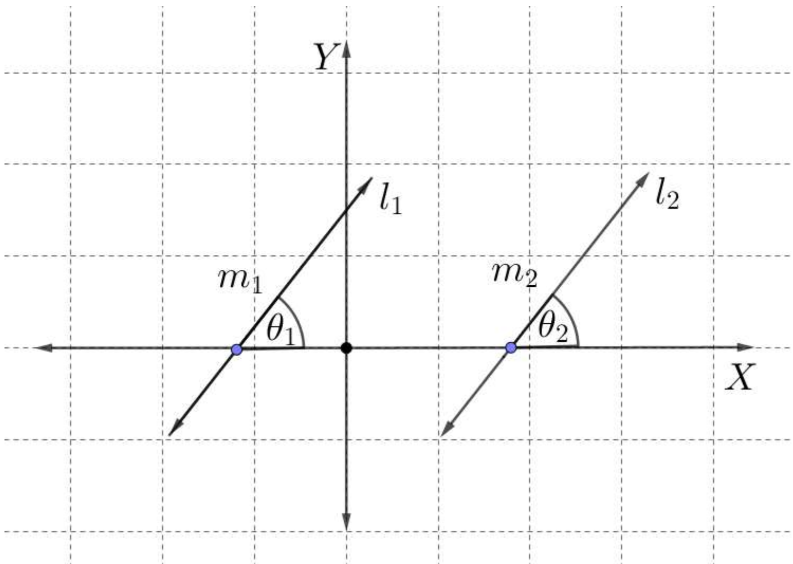
$$\begin{aligned} \theta_1 &= \theta_2 \\ \tan\theta_1 &= \tan\theta_2 \\ m_1 &= m_2 \end{aligned}$$

กรณีที่ 2 กำหนดให้ความชันของเส้นตรงเท่ากัน จะได้ว่า

$$\begin{aligned} m_1 &= m_2 \\ \tan\theta_1 &= \tan\theta_2 \\ \theta_1 &= \theta_2 \end{aligned}$$

ดังนั้น จากทั้ง 2 กรณี สามารถสรุปได้ว่า

เส้นตรงสองเส้นขนานกัน ก็ต่อเมื่อ ความชันของเส้นตรงทั้งสองเส้นเท่ากัน ดังรูปที่ 1.22



รูปที่ 1.22 แสดงการขนานกันของเส้นตรงสองเส้น

ทฤษฎีบท 1.4.2 ผลคูณของความชันของเส้นตรงทั้งสองเส้นเท่ากับ (-1) ก็ต่อเมื่อ เส้นตรงตั้งฉากซึ่งกันและกัน

(สนั่น มณีดำ, 2546 : 33 และ Murdoch D. C, 1967 : 52)

พิสูจน์ ให้ θ_1 และ m_1 แทนมุมเอียงและความชันของเส้นตรง l_1

ให้ θ_2 และ m_2 แทนมุมเอียงและความชันของเส้นตรง l_2

โดยที่ $\theta_1 < \theta_2$ และ $\theta_1 \neq 0^\circ$ จะได้ว่า $\theta_2 = \theta_1 + 90^\circ$ หรือ $\theta_2 = \theta_1 - 90^\circ$ ดังรูปที่ 1.23

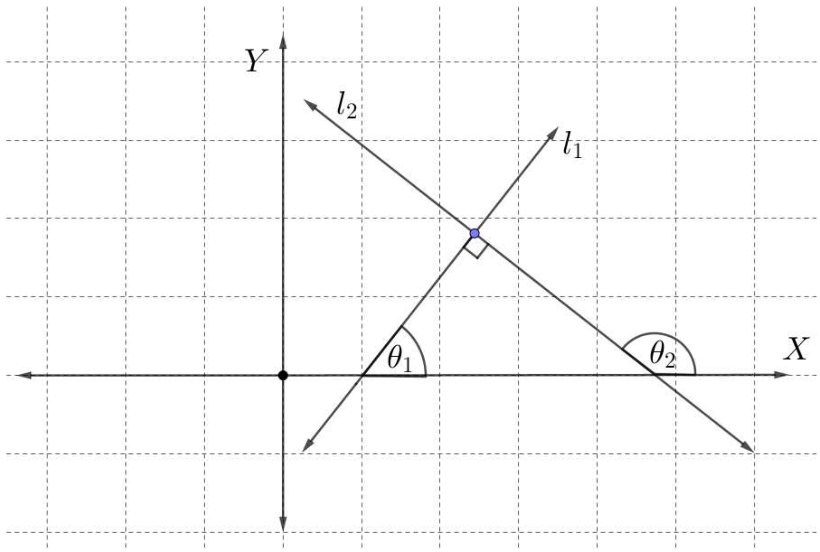
กรณีที่ 1 จาก

$$\begin{aligned}
m_1 m_2 &= -1 \\
m_2 &= -\frac{1}{m_1} \\
\tan\theta_2 &= -\frac{1}{\tan\theta_1} \\
&= -\cot\theta_1 \\
\tan\theta_2 &= \tan(\theta_1 + 90^\circ) \\
\theta_2 &= \theta_1 + 90^\circ
\end{aligned}$$

กรณีที่ 2 จาก

$$\begin{aligned}
\theta_2 &= \theta_1 + 90^\circ \\
\theta_2 &= \theta_1 + 90^\circ \\
\tan\theta_2 &= \tan(\theta_1 + 90^\circ) \\
&= -\cot\theta_1 \\
\tan\theta_2 &= -\frac{1}{\tan\theta_1} \\
m_2 &= -\frac{1}{m_1} \\
m_1 m_2 &= -1
\end{aligned}$$

ดังนั้น จากทั้ง 2 กรณี สามารถสรุปได้ว่า ผลคูณของความชันของเส้นตรงทั้งสองเส้นเท่ากับ (-1) ก็ต่อเมื่อ เส้นตรงทั้งสองเส้นตั้งฉากซึ่งกันและกัน



รูปที่ 1.23 แสดงการตั้งฉากของเส้นตรงสองเส้น

ทฤษฎีบท 1.4.3 ความชัน m ของเส้นตรง l ผ่านจุด $P_1(x_1, y_1)$ และจุด $P_2(x_2, y_2)$ เมื่อ $x_1 \neq x_2$ คือ

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

(วรรณี ธรรมโชติ, 2550 : 11 ; ศรีบุตร แววเจริญ และ ชนศักดิ์ บ่ายเที่ยง, 2544 : 25 และ Protter Murray H., 1975 : 47)

พิสูจน์ ให้เส้นตรง l ผ่านจุด $P_1(x_1, y_1)$ และจุด $P_2(x_2, y_2)$ ทำมุม θ กับแกน X ดังรูปที่ 1.24

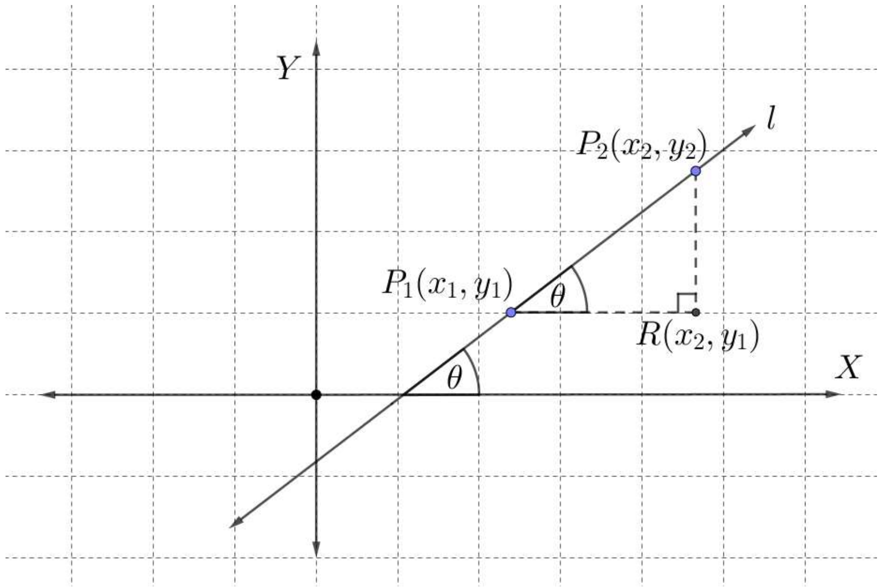
จาก $m = \tan\theta$

จะได้ $m = \dfrac{|P_2R|}{|P_1R|}$

$= \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ เมื่อ $x_1 \neq x_2$

ดังนั้น ความชัน คือ

$$
\begin{aligned}
m &= \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \\
&= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}
\end{aligned}
$$



รูปที่ 1.24 แสดงเส้นตรง l ผ่านจุด $P_1(x_1, y_1)$ และจุด $P_2(x_2, y_2)$ ทำมุม θ กับแกน X

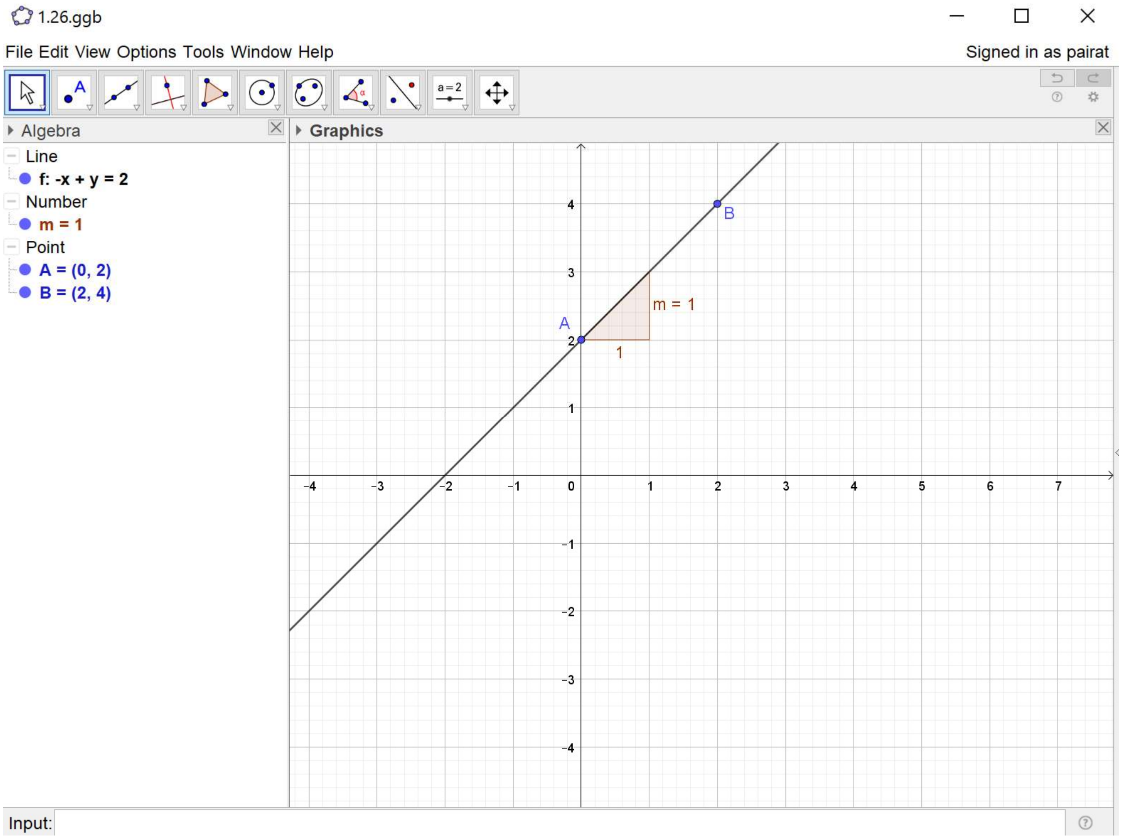
ตัวอย่าง 1.4.1 จงหาความชันของเส้นตรงที่เชื่อมจุด $A(0,2)$ และจุด $B(2,4)$

วิธีทำ จากทฤษฎีบท 1.4.3 $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$$
\begin{aligned}
m &= \frac{4-2}{2-0} \\
&= \frac{2}{2} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

ดังนั้น ความชันของเส้นตรงที่เชื่อมจุด $A(0,2)$ และจุด $B(2,4)$ คือ 1

ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 1.4.1 ดังรูปที่ 1.25



รูปที่ 1.25 ความชันของเส้นตรงที่เชื่อมจุด $A(0,2)$ และจุด $B(2,4)$

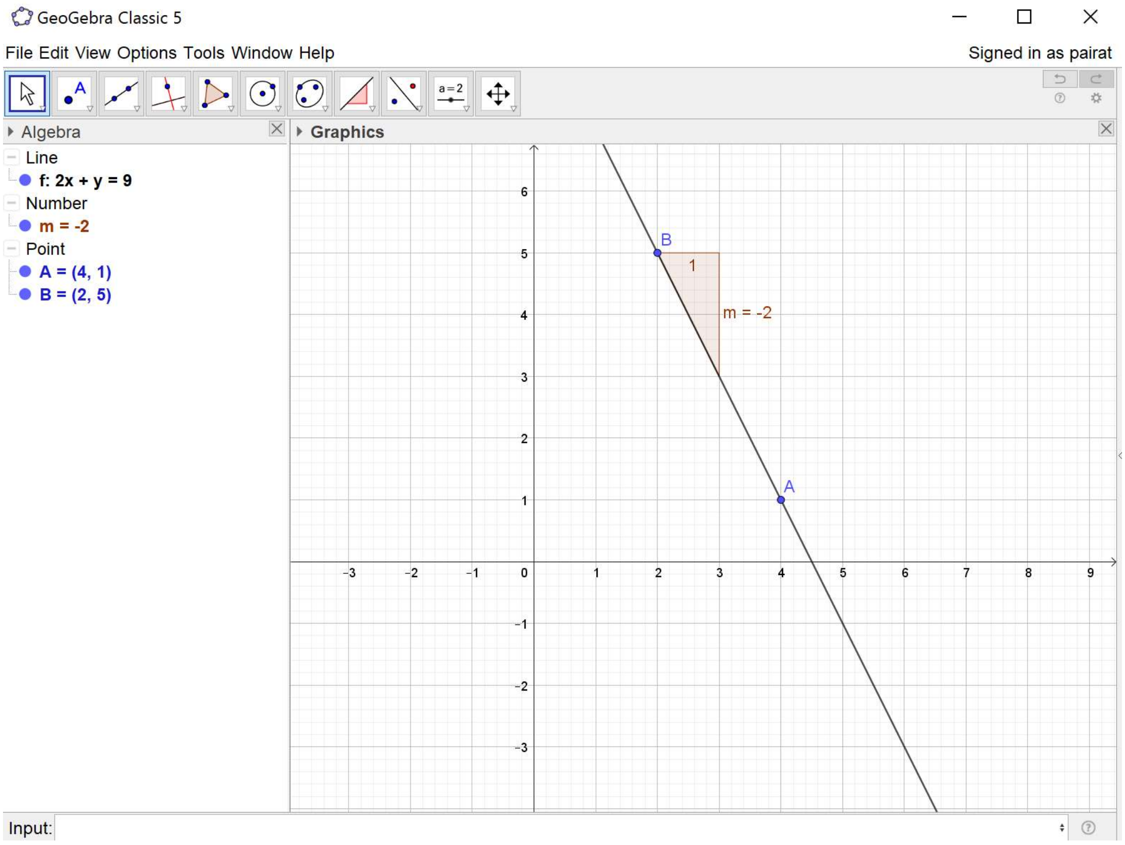
ตัวอย่าง 1.4.2 จงหาความชันของเส้นตรงที่เชื่อมจุด $A(4,1)$ และจุด $B(2,5)$

วิธีทำ จากทฤษฎีบท 1.4.3

$$\begin{aligned} m &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ m &= \frac{5-1}{2-4} \\ &= \frac{4}{-2} \\ &= -2 \end{aligned}$$

ดังนั้น ความชันของเส้นตรงที่เชื่อมจุด $A(4,1)$ และจุด $B(2,5)$ คือ -2

ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 1.4.2 ดังรูปที่ 1.26



รูปที่ 1.26 ความชันของเส้นตรงที่เชื่อมจุด $A(4,1)$ และจุด $B(2,5)$

ตัวอย่าง 1.4.3 จงหาความชันของเส้นตรงที่เชื่อมจุด $A(-4,-2)$ และจุด $B(3,-2)$

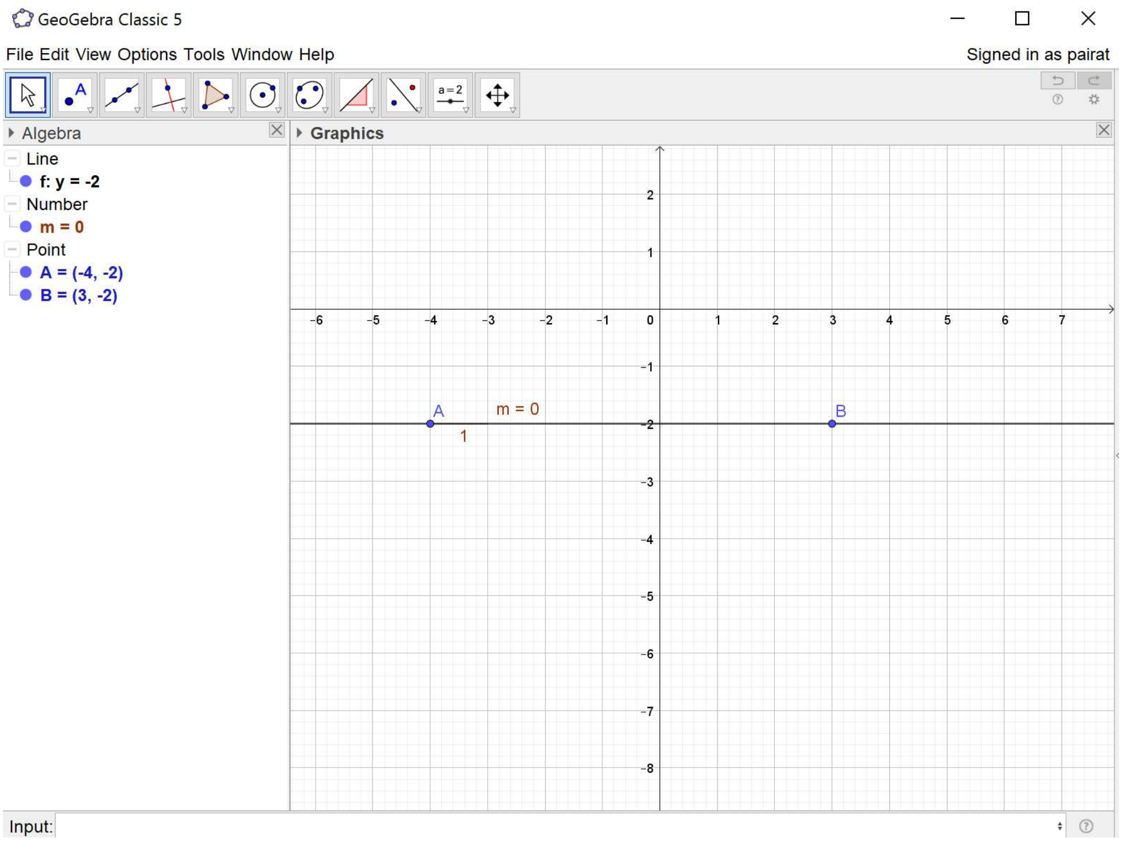
วิธีทำ จากทฤษฎีบท 1.4.3

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\begin{aligned} m &= \frac{-2-(-2)}{3-(-4)} \\ &= \frac{-2+2}{3+4} \\ &= \frac{0}{7} \\ &= 0 \end{aligned}$$

ดังนั้น ความชันของเส้นตรงที่เชื่อมจุด $A(-4,-2)$ และจุด $B(3,-2)$ คือ 0

ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 1.4.3 ดังรูปที่ 1.27



รูปที่ 1.27 ความชันของเส้นตรงที่เชื่อมจุด $A(-4,-2)$ และจุด $B(3,-2)$

ตัวอย่าง 1.4.4 จงหาความชันของเส้นตรงที่เชื่อมจุด $A(1,-2)$ และจุด $B(1,3)$

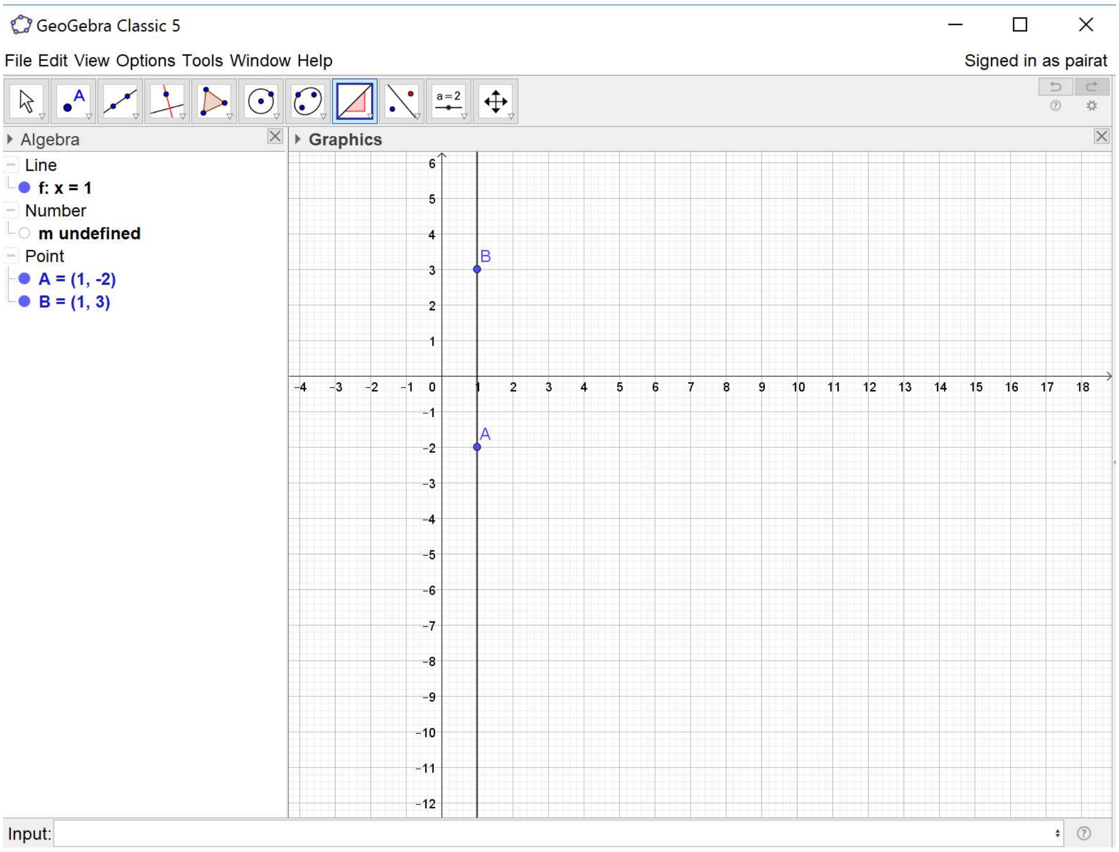
วิธีทำ จากทฤษฎีบท 1.4.3

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\begin{aligned} m &= \frac{3-(-2)}{1-1} \\ &= \frac{3+2}{0} \\ &= \frac{5}{0} \\ &= \text{หาค่าความชันไม่ได้} \end{aligned}$$

ดังนั้น ความชันของเส้นตรงที่เชื่อมจุด $A(1,-2)$ และจุด $B(1,3)$ หาค่าความชันไม่ได้

ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 1.4.4 ดังรูปที่ 1.28



รูปที่ 1.28 ความชันของเส้นตรงที่เชื่อมจุด $A(1,-2)$ และจุด $B(1,3)$

ตัวอย่าง 1.4.5 จงพิจารณาว่าเส้นตรง l_1 ที่ผ่านจุด $A(2,1)$ และจุด $B(4,2)$ และเส้นตรง l_2 ที่ผ่านจุด $C(-2,4)$ และจุด $D(-8,1)$ ขนานกัน หรือ ตั้งฉากกัน

วิธีทำ หาความชันของเส้นตรง l_1 และ l_2 ดังนี้

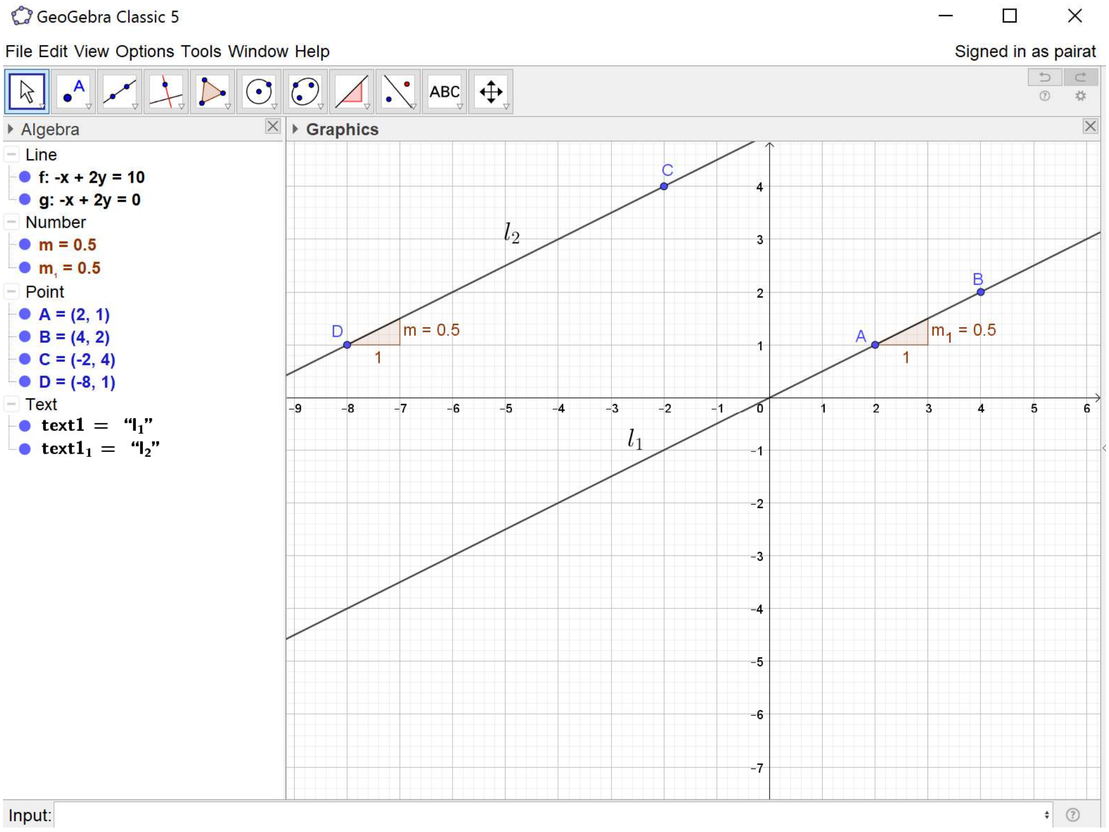
จากทฤษฎีบท 1.4.3 $$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m_{l_1} = \frac{2-1}{4-2} = 0.5 \quad \text{และ} \quad m_{l_2} = \frac{1-4}{-8-(-2)} = 0.5$$

จะเห็นว่า $m_{l_1} = m_{l_2}$

ดังนั้น เส้นตรง l_1 ขนานกับเส้นตรง l_2

ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 1.4.5 ดังรูปที่ 1.29



รูปที่ 1.29 เส้นตรง l_1 ขนานกับเส้นตรง l_2

ตัวอย่าง 1.4.6 จงพิจารณาว่าเส้นตรง l_1 ที่ผ่านจุด $A(2,3)$ และจุด $B(6,1)$ และเส้นตรง l_2 ที่ผ่านจุด $C(-2,-5)$ และจุด $D(1,1)$ ขนานกัน หรือ ตั้งฉากกัน

วิธีทำ หาความชันของเส้นตรง l_1 และ l_2 ดังนี้

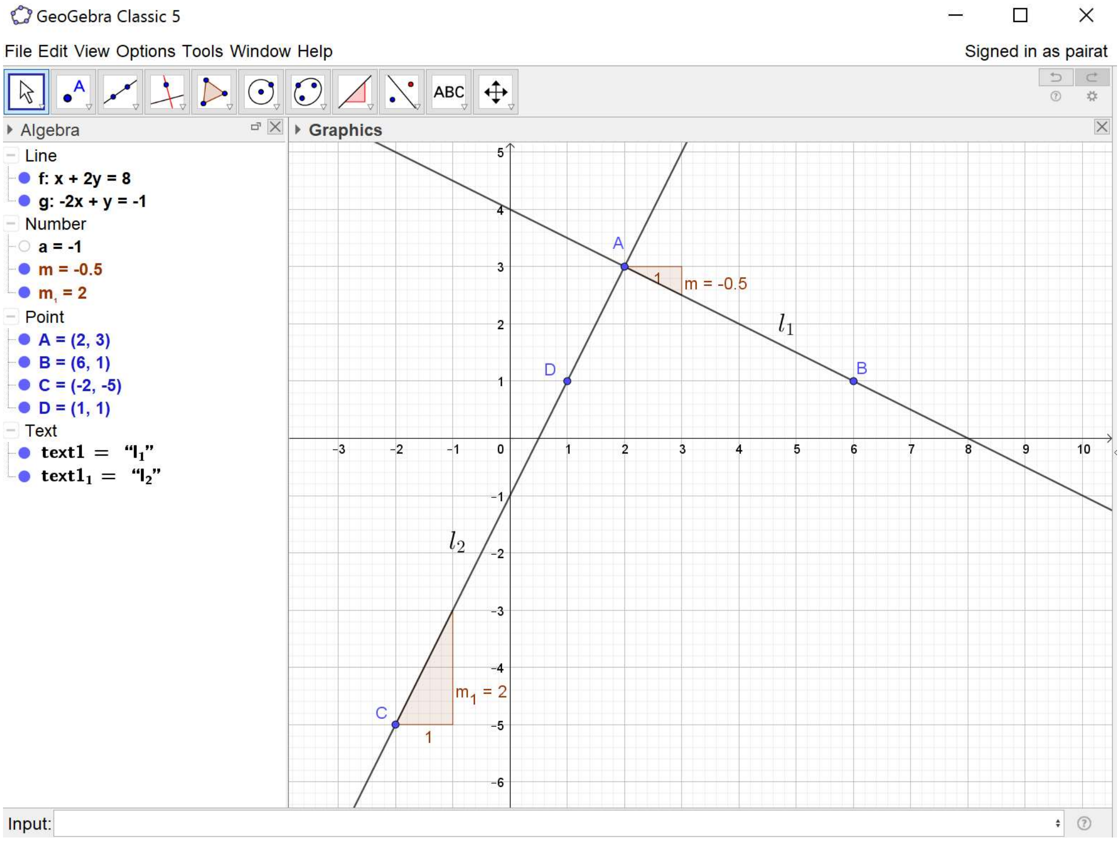
จากทฤษฎีบท 1.4.3 $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$$m_{l_1} = \frac{1-3}{6-2} = -\frac{1}{2} \quad \text{และ} \quad m_{l_2} = \frac{1-(-5)}{1-(-2)} = 2$$

จะเห็นว่า $m_{l_1} \cdot m_{l_2} = -1$

ดังนั้น เส้นตรง l_1 ตั้งฉากกับเส้นตรง l_2

ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 1.4.6 ดังรูปที่ 1.30



รูปที่ 1.30 เส้นตรง l_1 ตั้งฉากกับเส้นตรง l_2

ตัวอย่าง 1.4.7 จงแสดงว่ารูปสามเหลี่ยม ABC ซึ่งมีจุดยอดอยู่ที่ $A(-1,0), B(5,2)$ และ $C(2,11)$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

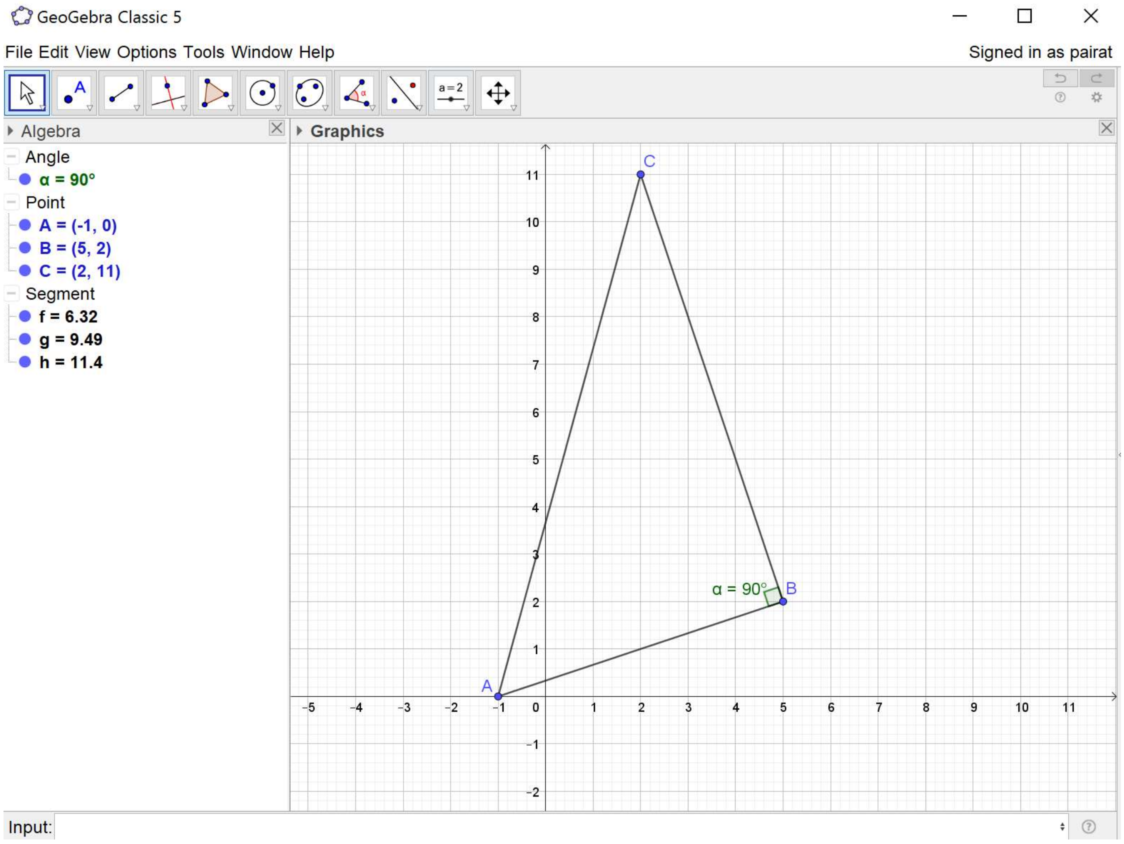
วิธีทำ หาความชันของเส้นตรงที่เชื่อมจุด A กับจุด B, จุด A กับจุด C และ จุด B กับจุด C ดังนี้

$$m_{AB} = \frac{2-0}{5-(-1)} = \frac{1}{3} \qquad m_{AC} = \frac{11-0}{2-(-1)} = \frac{11}{3} \qquad m_{BC} = \frac{11-2}{2-5} = -3$$

จะเห็นว่า $m_{AB} \cdot m_{BC} = -1$

ดังนั้น รูปสามเหลี่ยม ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 1.4.7 ดังรูปที่ 1.31



รูปที่ 1.31 รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC

ตัวอย่าง 1.4.8 จงแสดงว่ารูปสี่เหลี่ยม $PQRS$ ซึ่งมีจุดยอดอยู่ที่ $P(-7,-3), Q(6,5), R(11,-1)$ และ $S(-2,-9)$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

วิธีทำ หาความชันของเส้นตรงที่เชื่อมจุด P กับจุด Q, จุด Q กับจุด R, จุด R กับจุด S และจุด P กับจุด S ได้ดังนี้

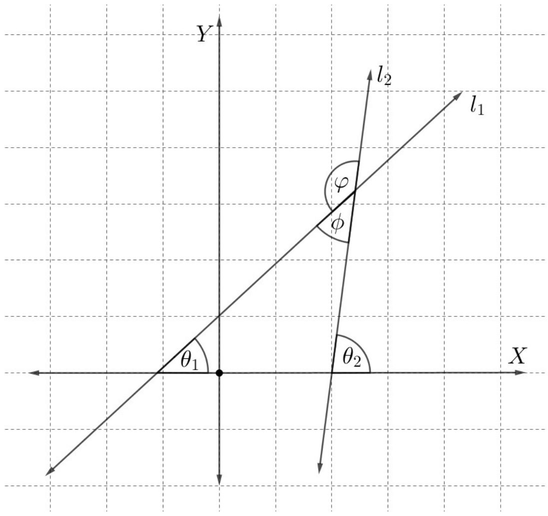
$$m_{PQ} = \frac{5-(-3)}{6-(-7)} = \frac{8}{13} \qquad m_{QR} = \frac{-1-5}{11-6} = \frac{-6}{5} \qquad m_{RS} = \frac{-9-(-1)}{-2-11} = \frac{8}{13} \qquad m_{PS} = \frac{-9-(-3)}{-2-(-7)} = \frac{-6}{5}$$

จะเห็นว่า $m_{PQ} = m_{RS}$ และ $m_{QR} = m_{PS}$

ดังนั้น รูปสี่เหลี่ยม $PQRS$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

1.5 มุมระหว่างเส้นตรงสองเส้น (Angle Between Two Line)

เมื่อเส้นตรง l_1 และ เส้นตรง l_2 ตัดกันจะเกิดมุมที่จุดตัด 2 มุม คือ ϕ และ φ ซึ่งเป็นมุมประกอบ 2 มุมฉาก ดังรูปที่ 1.32 ในที่นี้เราจะแสดงการหามุมตัดกันของเส้นตรง l_1 และ l_2 ในเทอมของความชันของเส้นตรงทั้งสอง



รูปที่ 1.32 เส้นตรง l_1 และ เส้นตรง l_2 ตัดกันเกิดมุมที่จุดตัด 2 มุม คือ ϕ และ φ

บทนิยาม 1.5.1 ให้ l_1 และ l_2 เป็นเส้นตรงที่มีมุมเอียง θ_1 และ θ_2 ตามลำดับ และ $\theta_1 \leq \theta_2$ ถ้า ϕ คือมุมระหว่าง l_1 และ l_2 แล้ว $\phi = \theta_2 - \theta_1$, $0 \leq \theta < \pi$

(ศรีบุตร แววเจริญ และ ชนศักดิ์ บ่ายเที่ยง, 2544 : 29)

ทฤษฎีบท 1.5.1 ถ้า l_1 และ l_2 เป็นเส้นตรง 2 เส้นที่ไม่ตั้งฉากซึ่งกันและกัน m_1 และ m_2 เป็นความชันของเส้นตรง l_1 และ l_2 ตามลำดับแล้ว

$$\tan\phi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

(Protter, Murray H. & Morrer, Charles B. Jr., 1975 : 73)

พิสูจน์ ให้ θ_1 และ θ_2 เป็นมุมเอียงของเส้นตรง l_1 และ l_2 ตามลำดับ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\phi &= \theta_2 - \theta_1 \\
\tan\phi &= \tan(\theta_2 - \theta_1) \\
&= \frac{\tan\theta_2 - \tan\theta_1}{1 + \tan\theta_2 \tan\theta_1} \\
&= \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1} \\
&= \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}
\end{aligned}$$

เมื่อ $m_1 \cdot m_2 \neq -1$

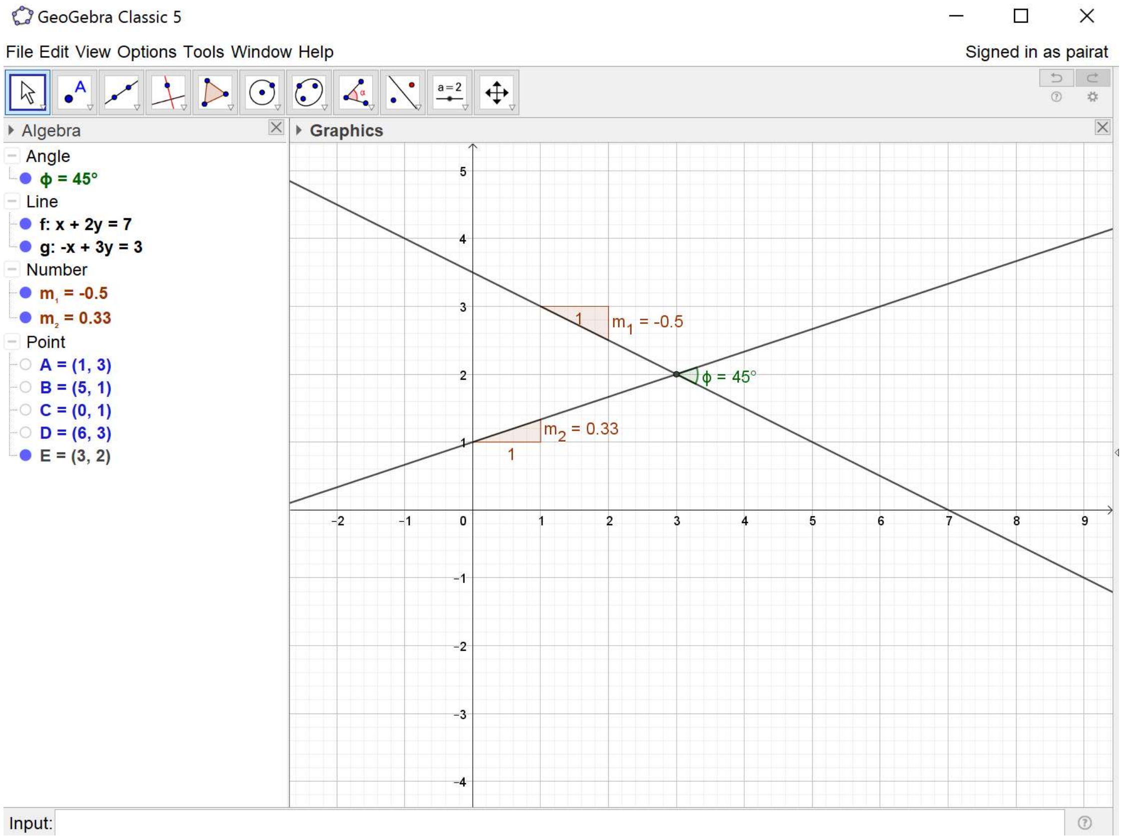
ตัวอย่าง 1.5.1 ถ้าเส้นตรง l_1 มีความชัน $\dfrac{-1}{2}$ และเส้นตรง l_2 มีความชัน $\dfrac{1}{3}$ จงหามุมแหลมระหว่างเส้นตรงสองเส้นนี้

วิธีทำ ให้ m_1 และ m_2 เป็นความชันของเส้นตรง l_1 และ l_2 ตามลำดับ และให้ ϕ เป็นมุมระหว่างเส้นตรง l_1 ไปยังเส้นตรง l_2 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\phi &= \theta_2 - \theta_1 \\
\tan\phi &= \frac{\frac{1}{3} - \left(\frac{-1}{2}\right)}{1 + \left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)} \\
&= \frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}} \\
&= 1 \\
\phi &= \tan^{-1}(1) \\
&= \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

ดังนั้น มุมแหลมระหว่างเส้นตรง l_1 และ l_2 คือ $\dfrac{\pi}{4}$ หรือ 45°

ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 1.5.1 ดังรูปที่ 1.33



รูปที่ 1.33 มุมระหว่างเส้นตรง l_1 และ l_2 คือ 45°

ตัวอย่าง 1.5.2 จงหามุมภายในของรูปสามเหลี่ยมซึ่งมีจุดยอดดังนี้ $A(-2,2), B(5,1)$ และ $C(1,-3)$

วิธีทำ ในการหามุมภายในของรูปสามเหลี่ยม เราต้องทราบความชันก่อน

จากทฤษฎีบท 1.4.3 $\quad m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

หาความชันของ AB

$$\begin{aligned} m_{AB} &= \frac{1-2}{5-(-2)} \\ &= \frac{-1}{5+2} \\ &= -\frac{1}{7} \end{aligned}$$

จะได้ ความชันของ AB เท่ากับ $-\dfrac{1}{7}$

หาความชันของ AC

$$\begin{aligned} m_{AC} &= \frac{-3-2}{1-(-2)} \\ &= \frac{-5}{1+2} \\ &= -\frac{5}{3} \end{aligned}$$

จะได้ ความชันของ AC เท่ากับ $-\frac{5}{3}$

หาความชันของ BC

$$\begin{aligned} m_{BC} &= \frac{-3-1}{1-5} \\ &= \frac{-4}{-4} \\ &= 1 \end{aligned}$$

จะได้ ความชันของ BC เท่ากับ 1

หามุมภายในของมุม A จะได้

$$\begin{aligned} \tan A &= \frac{m_{AB} - m_{AC}}{1 + m_{AB}m_{AC}} \\ &= \frac{-\frac{1}{7} - \left(-\frac{5}{3}\right)}{1 + \left(-\frac{1}{7}\right)\left(-\frac{5}{3}\right)} \\ &= \frac{-\frac{3}{21} + \frac{35}{21}}{1 + \frac{5}{21}} \\ &= \frac{32}{26} \end{aligned}$$

ดังนั้น มุมภายในของมุม $A = \tan^{-1}\left(\frac{32}{26}\right) \approx 50.91^\circ$

หามุมภายในของมุม B จะได้

$$\tan B = \frac{m_{BC} - m_{AB}}{1 + m_{BC}m_{AB}}$$

$$\tan B = \frac{4}{3}$$

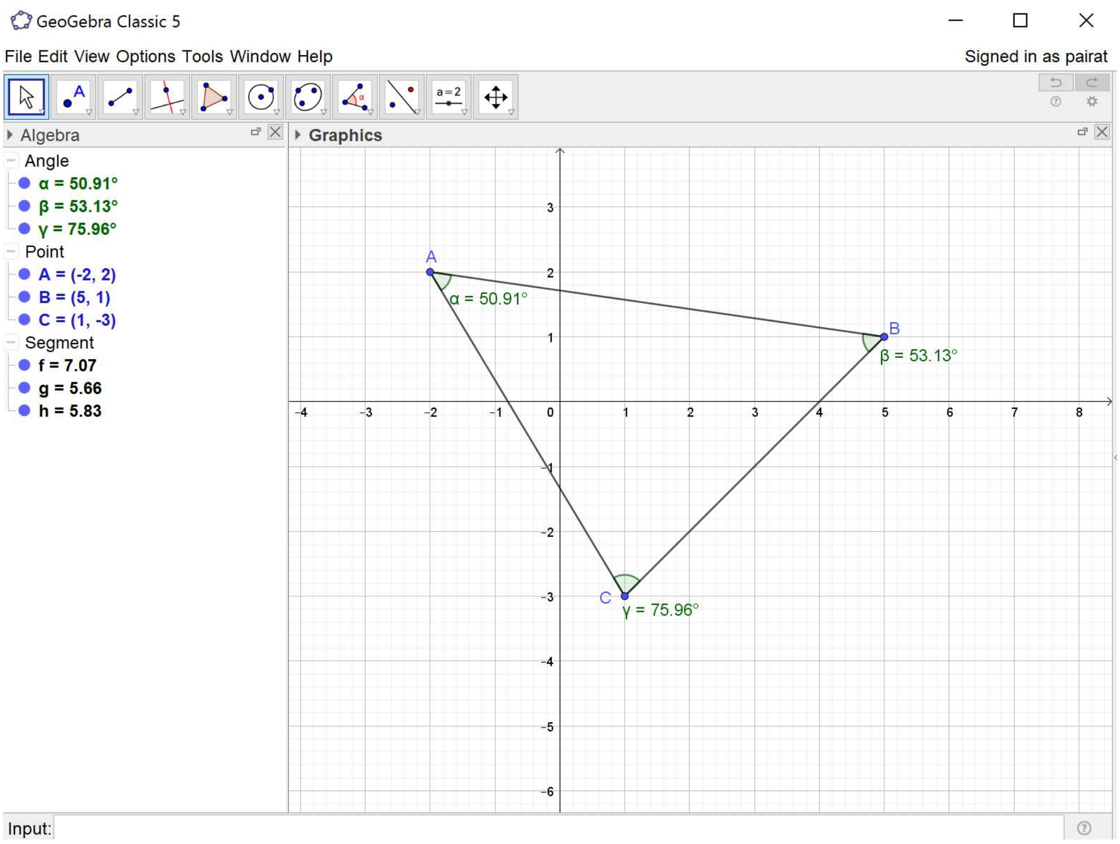
ดังนั้น มุมภายในของมุม $B = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) \approx 53.13^{\circ}$

หามุมภายในของมุม C จะได้

$$\tan C = \frac{m_{AC} - m_{BC}}{1 + m_{AC}m_{BC}}$$
$$= 4$$

ดังนั้น มุมภายในของมุม $C = \tan^{-1}(4) \approx 75.96^{\circ}$

ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 1.5.2 ดังรูปที่ 1.34



รูปที่ 1.34 มุมภายในของรูปสามเหลี่ยม ABC

ตัวอย่าง 1.5.3 จงหามุมแหลมที่เกิดจากการตัดกันของเส้นตรง l_1 ที่ผ่านจุด $(-1,3)$ และ $(3,5)$ กับเส้นตรง l_2 ที่ผ่านจุด $(-2,8)$ และ $(-3,5\sqrt{3})$

วิธีทำ ให้ m_1 และ m_2 เป็นความชันของเส้นตรง l_1 และ l_2 ตามลำดับ จะได้

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \\ &= \frac{5-3}{3-(-1)} \\ &= \frac{1}{2} \\ m_2 &= \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \\ &= \frac{5\sqrt{3}-8}{-3-(-2)} \\ &= 8-5\sqrt{3} \end{aligned}$$

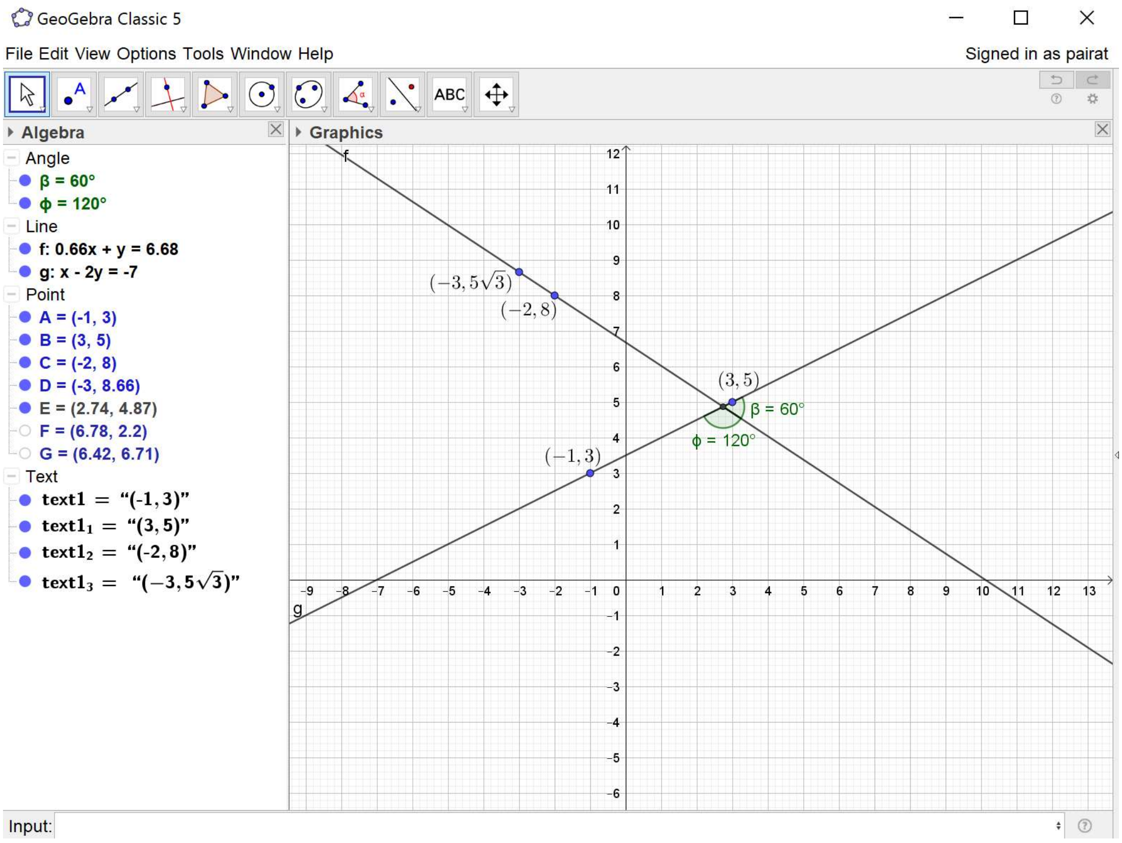
และให้ ϕ เป็นมุมตัดกันของเส้นตรง l_1 และ l_2 จะได้

$$\begin{aligned} \tan\phi &= \frac{m_2-m_1}{1+m_1m_2} \\ &= \frac{(8-5\sqrt{3})-\frac{1}{2}}{1+\left(\frac{1}{2}\right)(8-5\sqrt{3})} \\ &= \frac{\frac{15-10\sqrt{3}}{2}}{\frac{10-5\sqrt{3}}{2}} \\ &= \frac{3-2\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} \\ &= -\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\therefore \phi = \tan^{-1}(-\sqrt{3}) = 120^\circ$$

ดังนั้น มุมแหลมที่เกิดจากการตัดกันของเส้นตรง l_1 กับเส้นตรง l_2 คือ $180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$

ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 1.5.3 ดังรูปที่ 1.35



รูปที่ 1.35 มุมที่เกิดจากการตัดกันของเส้นตรง l_1 กับเส้นตรง l_2

สรุปท้ายบทที่ 1

สำหรับในบทที่ 1 นั้นเราได้ศึกษาระบบพิกัดฉาก ระยะทางระหว่างจุดสองจุด จุดแบ่งของส่วนของเส้นตรง ความชันของเส้นตรง มุมระหว่างเส้นตรงสองเส้น ซึ่งมีสูตรที่สำคัญดังนี้

ระยะทางระหว่างจุดสองจุด $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

จุดแบ่งของส่วนของเส้นตรง $x = \dfrac{r_1 x_2 + r_2 x_1}{r_1 + r_2},\ y = \dfrac{r_1 y_2 + r_2 y_1}{r_1 + r_2}$

ความชันของเส้นตรง $m = \tan\theta = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

มุมระหว่างเส้นตรงสองเส้น $\tan\phi = \dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$

แบบฝึกหัดบทที่ 1

จงหาระยะทางระหว่างจุด 2 จุดที่กำหนดให้ต่อไปนี้ (ข้อ 1.1 - 1.10)

1.1 $(1,2),(1,3)$ 1.2 $(5,3),(-3,3)$ 1.3 $(0,1),(0,5)$

1.4 $(-2,8),(5,8)$ 1.5 $(3,10),(7,4)$ 1.6 $(-3,-3),(2,2)$

1.7 $(2,3),(-1,0)$ 1.8 $(5,6),(-6,5)$ 1.9 $(3,-7),(2,-8)$

1.10 $\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right),\left(\frac{5}{3},\frac{-7}{5}\right)$

จงวาดรูปสามเหลี่ยมโดยให้จุดยอดดังต่อไปนี้ พร้อมทั้งหาความยาวของแต่ละด้าน (ข้อ 1.11 1.12)

1.11 $A(-1,-1),B(2,3),C(3,8)$

1.12 $A(2,4),B(-3,1),C(5,6)$

1.13 จงแสดงว่าจุด $A(-2,0),B(5,2)$ และ $C(0,2\sqrt{3})$ เป็นจุดของมุมรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า

1.14 จงแสดงว่าจุด $A(-\sqrt{3},1),B(2\sqrt{3},-2)$ และ $C(2\sqrt{3},4)$ เป็นจุดของมุมรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า

1.15 จุดยอดของสามเหลี่ยม ABC ซึ่งมีพิกัด $A(3,-4),B(6,2)$ และ $C(-5,0)$ สามเหลี่ยม ABC เป็นสามเหลี่ยมชนิดใด

1.16 จงแสดงว่าจุด $A(1,-1),B(5,2),C(2,6)$ และจุด $D(-2,3)$ ที่กำหนดให้เป็นจุดยอดของรูปสี่เหลี่ยมด้านเท่า

จงแสดงว่าจุดแต่ละจุดที่กำหนดให้ต่อไปนี้ อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน (ข้อ 1.17 - 1.23)

1.17 $A(1,1),B(2,2),C(3,5)$

1.18 $A(3,1),B(6,3),C(-3,-3)$

1.19 $A(1,2),B(-5,-2),C(-2,5)$

1.20 ถ้า $(x,4)$ อยู่ห่างจาก $(5,-2)$ และ $(3,4)$ เป็นระยะทางเท่ากัน จงหาค่า x

1.21 ถ้า $(-3,y)$ อยู่ห่างจาก $(2,6)$ และ $(7,-2)$ เป็นระยะทางเท่ากัน จงหาค่า y

1.22 จงหาจุดบนแกน x ที่ห่างจาก $(-2,5)$ และ $(4,1)$ เป็นระยะทางเท่ากัน

1.23 จงหาจุดบนแกน y ที่ห่างจาก $(-4,-2)$ และ $(3,1)$ เป็นระยะทางเท่ากัน

จงหาพิกัดจุดกึ่งกลางระหว่างจุด 2 จุดที่กำหนดให้ต่อไปนี้ (ข้อ 1.24 - 1.33)

1.24 $(2,3),(3,2)$ 1.25 $(-1,2),(-3,1)$ 1.26 $(4,11),(12,-3)$

1.27 $(-5,-3),(-2,1)$ 1.28 $(3,8),(-6,-5)$ 1.29 $(3,1),(3,5)$

1.30 $\left(\frac{3}{2},1\right),\left(1,\frac{7}{8}\right)$ 1.31 $\left(-\frac{5}{6},7\right),\left(\frac{6}{8},5\right)$ 1.32 $\left(-\frac{2}{5},\frac{1}{2}\right),\left(\frac{3}{2},\frac{7}{6}\right)$

1.33 $\left(\frac{9}{5},7\right),\left(-3,\frac{1}{2}\right)$

1.34 ถ้าจุดปลายของเส้นตรง $(x_1,3)$ และ $(-3,y_2)$ แบ่งครึ่งตรงจุด $(2,7)$ พอดี จงหาค่าของ x_1 และ y_2

จงหาจุด $P(x,y)$ โดยที่อัตราส่วนของ $AP:AB$ มีค่าเท่ากับ r (ข้อ 1.35 - 1.40)

1.35 $A(2,-4),B(5,6),r=\frac{2}{3}$ 1.36 $A(-1,-2),B(4,-2),r=\frac{1}{5}$

1.37 $A(-7,11),B(5,6),r=\frac{3}{4}$ 1.38 $A\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{8}\right),B(-1,-3),r=\frac{5}{7}$

1.39 $A\left(\frac{7}{11},-2\right),B\left(2,\frac{-2}{3}\right),r=\frac{9}{11}$ 1.40 $A\left(\frac{11}{12},2\right),B\left(\frac{1}{2},\frac{2}{-3}\right),r=\frac{-2}{5}$

จงหาความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด 2 จุดต่อไปนี้ (ข้อ 1.40 - 1.45)

1.40 $(2,1),(-5,7)$ 1.41 $(7,11),(7,8)$ 1.42 $(5,-6),(9,-6)$

1.43 $\left(\frac{3}{2},5\right),\left(7,\frac{9}{5}\right)$ 1.44 $\left(-\frac{1}{2},3\right),(9,4)$ 1.45 $\left(-\frac{1}{2},3\right),\left(\frac{5}{6},\frac{4}{3}\right)$

จงพิสูจน์ว่าจุดยอดที่กำหนดให้เป็นจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยใช้ความชัน (ข้อ 1.46 - 1.48)

1.46 $(4,-4),(4,4),(0,0)$ 1.47 $(-1,2),(3,-6),(3,4)$

1.48 $(7,1),(0,-2),(5,-4)$

จงหามุมภายในทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม ABC เมื่อกำหนดจุดยอดให้ดังต่อไปนี้ (ข้อ 1.49 - 1.50)

1.49 $A(1,1),B(5,2),C(3,5)$ 1.50 $A(2,2),B(-4,-1),C(6,-5)$

จงหาความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด 2 จุดของเส้นตรง 2 เส้น แล้วพิจารณาว่า เส้นตรงขนานกัน เส้นตรงตั้งฉากกัน หรือทำมุมเท่าไร (ข้อ 1.51 - 1.53)

1.51 $(1,-1),(-4,-4)$ และ $(1,1),(4,-4)$

1.52 $(2,-3),(0,2)$ และ $(1,0),(6,2)$

1.53 $(-6,-4),(22,8)$ และ $(-5,7),(7,-8)$

จงแสดงว่าจุด 4 จุดที่กำหนดให้ต่อไปนี้ เป็นจุดยอดของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า $ABCD$
(ข้อ 1.53 - 1.56)

1.53 $A(-4,3),B(0,-2),C(5,2),D(1,7)$ 1.54 $A(2,2),B(7,-3),C(10,0),D(5,5)$

1.55 $A(5,-1),B(7,6),C(0,8),D(-2,1)$ 1.56 $A(5,7),B(1,1),C(4,-1),D(8,5)$

จงแสดงว่าจุด 4 จุดกำหนดให้ต่อไปนี้ เป็นจุดยอดของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน $ABCD$
(ข้อ 1.57 - 1.60)

1.57 $A(3,0),B(7,0),C(5,3),D(1,3)$

1.58 $A(-2,3),B(6,1),C(5,-2),D(-3,0)$

1.59 $A(-1,-2),B(3,-6),C(11,-1),D(7,3)$

1.60 $A(0,0),B(6,3),C(9,9),D(3,6)$