บทที่ 2
สมการเส้นตรง (Line Equation)

การศึกษาเกี่ยวกับสมการเส้นตรงในวิชาเรขาคณิตวิเคราะห์ เป็นการศึกษาถึงวิธีการกำหนดสมการให้สอดคล้องกับกราฟของเส้นตรงที่กำหนดให้ หรือเขียนกราฟของเส้นตรงตามสมการที่กำหนดให้ได้ สมการที่เขียนแทนกราฟของเส้นตรงเรียกว่าสมการเส้นตรงซึ่งมีลักษณะแตกต่างกันออกไปตามเงื่อนไขของเส้นตรงแต่ละเส้น ในบทที่ 1 เราได้ทราบความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับระบบพิกัดฉากกันมาแล้ว ส่วนในบทนี้เราจะหาสมการเส้นตรง จากความชันและจุดที่อยู่บนเส้นตรงนั้น 1 จุด หรือ หาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุดสองจุดที่อยู่บนเส้นตรงนั้น เป็นต้น สมการของเส้นตรง จะประกอบด้วยเทอม x และเทอม y และจุด (x,y) ที่อยู่บนเส้นตรงจะต้องสอดคล้องกับสมการของเส้นตรงนั้นด้วย ดังรายละเอียดต่อไปนี้

2.1 สมการของเส้นตรง (Equation of a Straight Line)

ทฤษฎีบท 2.1.1 สมการของเส้นตรง l ที่มีความชัน m และผ่านจุด $P_1(x_1,y_1)$ คือ

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

(วรรณี ธรรมโชติ, 2550 : 22 ; ศรีบุตร แววเจริญ และ ชนศักดิ์ บ่ายเที่ยง, 2544 : 44 ; สนั่น มณีดำ, 2546 : 37 และ Protter, Murray H. & Morrer, Charles B. Jr., 1975 : 52)

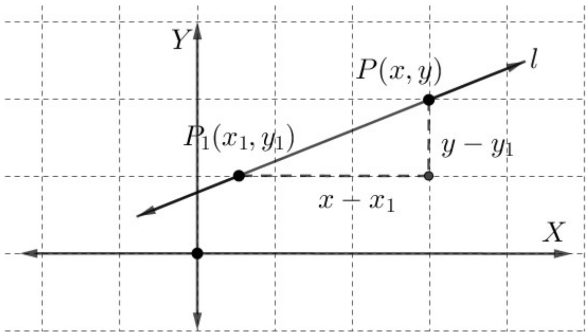
พิสูจน์ ให้จุด $P(x,y)$ และจุด $P_1(x_1,y_1)$ เป็นจุดใด ๆ บนเส้นตรง l ซึ่งจุด P และจุด P_1 ไม่ใช่จุดเดียวกันและ $x \neq x_1$ จะได้ความชันคือ

$$m=\frac{y-y_1}{x-x_1}$$

$$m(x-x_1)=y-y_1$$

หรือ
$$y-y_1=m(x-x_1)$$

ดังนั้น สมการของเส้นตรง l คือ $y-y_1=m(x-x_1)$



รูปที่ 2.1 จุด $P(x,y)$ และจุด $P_1(x_1,y_1)$ เป็นจุดใด ๆ บนเส้นตรง l

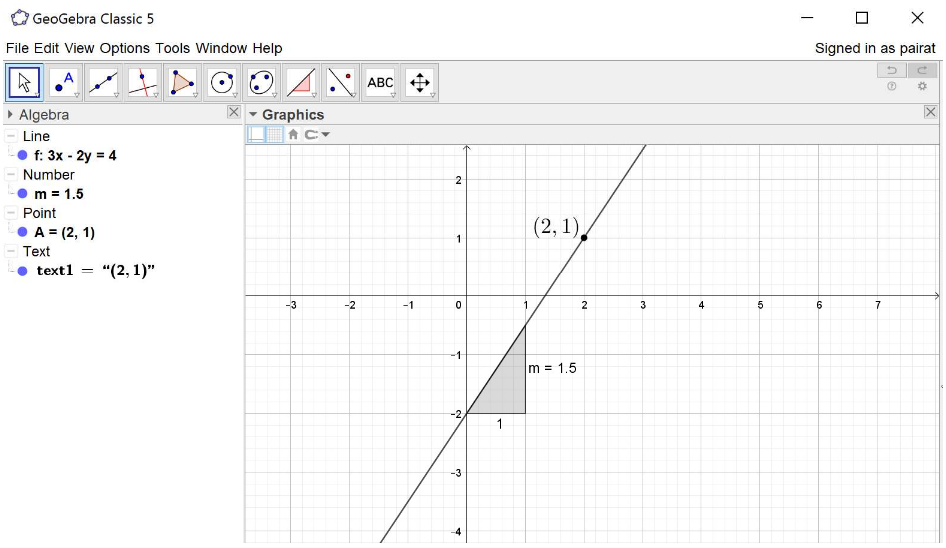
ตัวอย่าง 2.1.1 จงหาสมการเส้นตรงที่มีความชันเท่ากับ $\dfrac{3}{2}$ และผ่านจุด $(2,1)$

วิธีทำ จากทฤษฎีบท 2.1 เราจะได้ว่า

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 1 = \frac{3}{2}(x - 2)$$
$$3x - 2y = 4$$

ดังนั้น สมการเส้นตรงคือ $3x - 2y - 4 = 0$ หรือ $3x - 2y = 4$

ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 2.1.1 ดังรูปที่ 2.2



รูปที่ 2.2 สมการเส้นตรง $3x - 2y - 4 = 0$

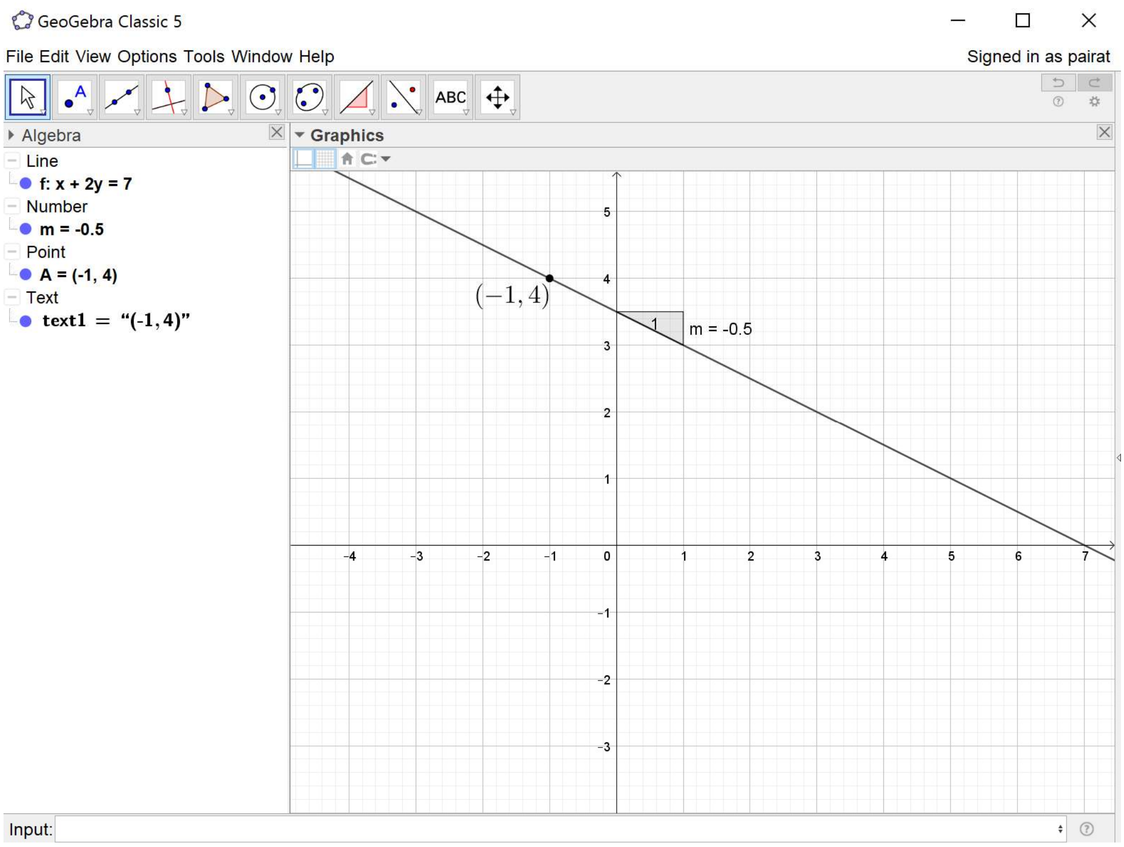
ตัวอย่าง 2.1.2 จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(-1,4)$ และมีความชันเท่ากับ $-\frac{1}{2}$

วิธีทำ จากทฤษฎีบท 2.1 เราจะได้ว่า

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1) \\ y - 4 &= -\frac{1}{2}(x - (-1)) \\ -2(y-4) &= x + 1 \\ -2y + 8 &= x + 1 \\ x + 2y - 7 &= 0 \\ x + 2y &= 7 \end{aligned}$$

ดังนั้น สมการเส้นตรงคือ $x + 2y - 7 = 0$ หรือ $x + 2y = 7$

ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 2.1.2 ดังรูปที่ 2.3



รูปที่ 2.3 สมการเส้นตรง $x + 2y - 7 = 0$

แต่สมการ $y-y_1=m(x-x_1)$ เราไม่สามารถใช้กับเส้นตรงในแนวตั้งได้ เพราะว่าเส้นตรงนี้หาความชันไม่ได้ แต่สามารถเขียนสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $P_1(x_1,y_1)$ และขนานกับแกน Y คือ

$$x=x_1$$

ส่วนเส้นตรงในแนวนอนที่ขนานกับแกน X จะมีความชัน $m=0$ สามารถเขียนสมการเส้นตรงคือ

$$y=y_1$$

ทฤษฎีบท 2.1.2 สมการของเส้นตรง l ที่มีความชัน m และส่วนตัดแกน Y เท่ากับ b คือ

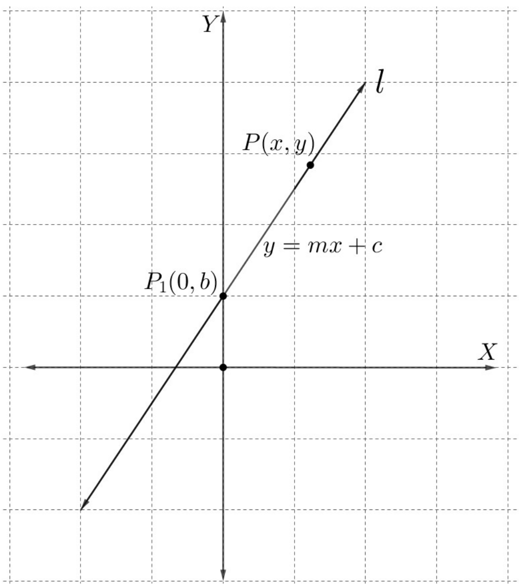
$$y=mx+b$$

(Protter, Murray H. & Morrer, Charles B. Jr., 1975 : 53)

พิสูจน์ ให้จุด $P(x,y)$ เป็นจุดใด ๆ ที่ต่างจากจุด $P_1(0,b)$ ซึ่งเป็นจุดตัดแกน Y บนเส้นตรง l ดังรูปที่ 2.4 จากทฤษฎีบท 2.1 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} y-y_1 &= m(x-x_1) \\ y-b &= m(x-0) \\ y &= mx+b \end{aligned}$$

ดังนั้น สมการของเส้นตรง l คือ $y=mx+b$



รูปที่ 2.4 สมการเส้นตรง $y=mx+b$

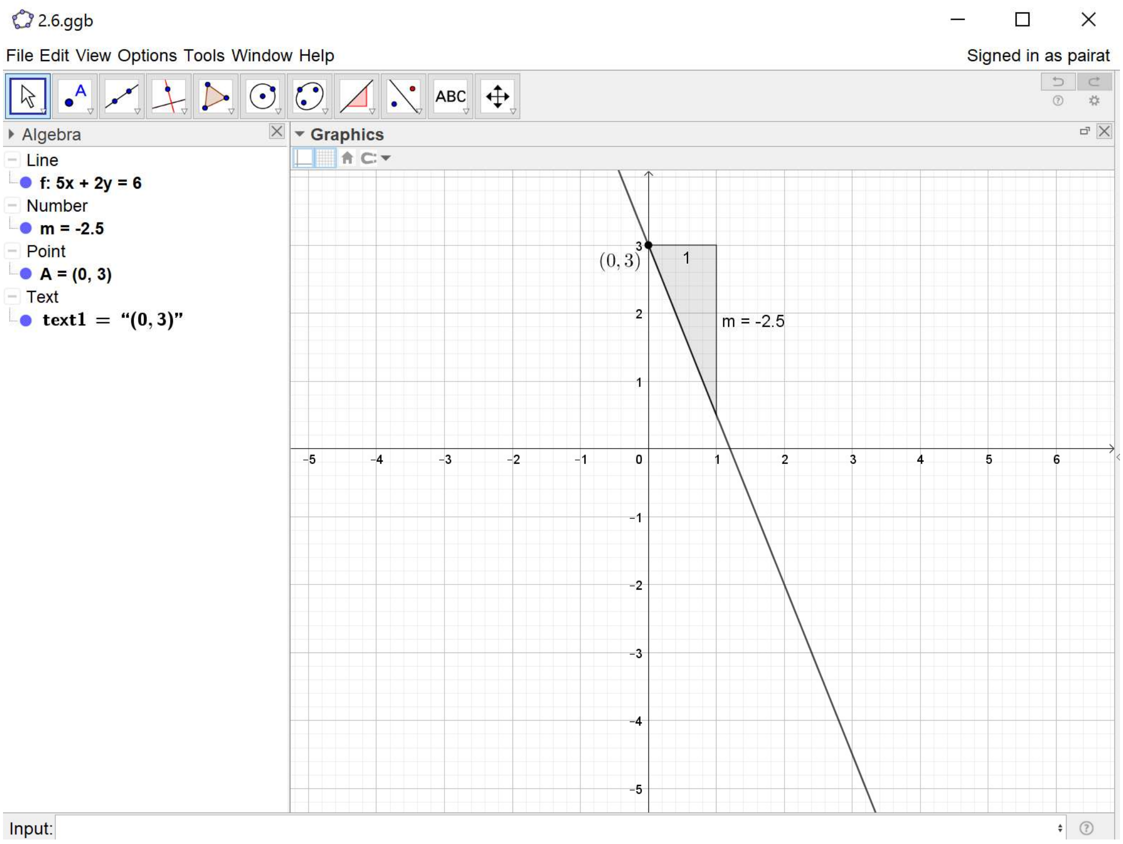
ตัวอย่าง 2.1.3 จงหาสมการเส้นตรงที่มีความชันเท่ากับ $-\dfrac{5}{2}$ และตัดแกน Y ที่จุด $(0,3)$

วิธีทำ จากทฤษฎีบท 2.2 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} y &= mx+b \\ y &= -\frac{5}{2}x+3 \\ y-3 &= -\frac{5}{2}x \\ -2(y-3) &= 5x \\ -2y+6 &= 5x \\ 5x+2y &= 6 \end{aligned}$$

ดังนั้น สมการเส้นตรงคือ $5x+2y-6=0$ หรือ $5x+2y=6$

ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 2.1.3 ดังรูปที่ 2.5



รูปที่ 2.5 สมการเส้นตรง $5x+2y-6=0$

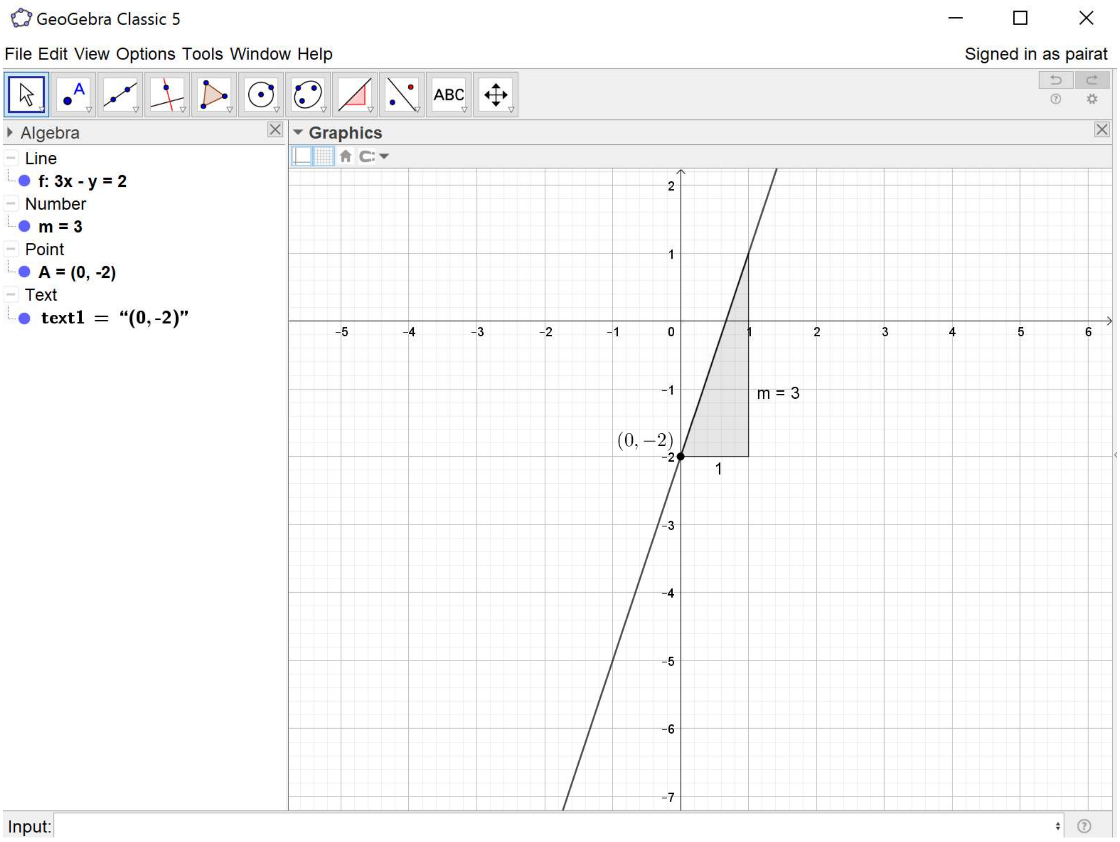
ตัวอย่าง 2.1.4 จากสมการเส้นตรง $9x-3y-6=0$ จงหาความชัน และจุดตัดแกน Y

วิธีทำ จัดสมการเส้นตรงให้อยู่ในรูป $y=mx+b$ จะได้

$$\begin{aligned} 9x-3y-6&=0\\ 9x-6&=3y\\ 3y&=9x-6\\ y&=\frac{9x-6}{3}\\ y&=\frac{3(3x-2)}{3}\\ y&=3x-2 \end{aligned}$$

ดังนั้น เส้นตรงนี้มีความชันเท่ากับ 3 และตัดแกน Y ที่จุด $(0,-2)$

ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 2.1.4 ดังรูปที่ 2.6



รูปที่ 2.6 เส้นตรงมีความชันเท่ากับ 3 และตัดแกน Y ที่จุด $(0,2)$

ทฤษฎีบท 2.1.3 สมการของเส้นตรงที่ผ่านจุด $P_1(x_1, y_1)$ และ $P_2(x_2, y_2)$ คือ

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

(สนั่น มณีดำ, 2546 : 36 และ Protter, Murray H. & Morrer, Charles B. Jr., 1975 : 53)

พิสูจน์ ให้ $P(x, y)$ เป็นจุดใด ๆ บนเส้นตรงที่ต่างจากจุด P_1 และ P_2 ลากเส้นตรง PM และเส้นตรง P_1N ให้ขนานกับแกน Y และลากเส้นตรง P_1M และเส้นตรง P_2N ให้ขนานกับแกน X

จะได้ เส้นตรง PM และเส้นตรง P_1M ตัดกันที่จุด M

และ เส้นตรง P_1N และเส้นตรง P_2N ตัดกันที่จุด N

จะเห็นว่า รูปสามเหลี่ยม PP_1M **คล้ายกับ** รูปสามเหลี่ยม P_1P_2N ดังรูปที่ 2.7

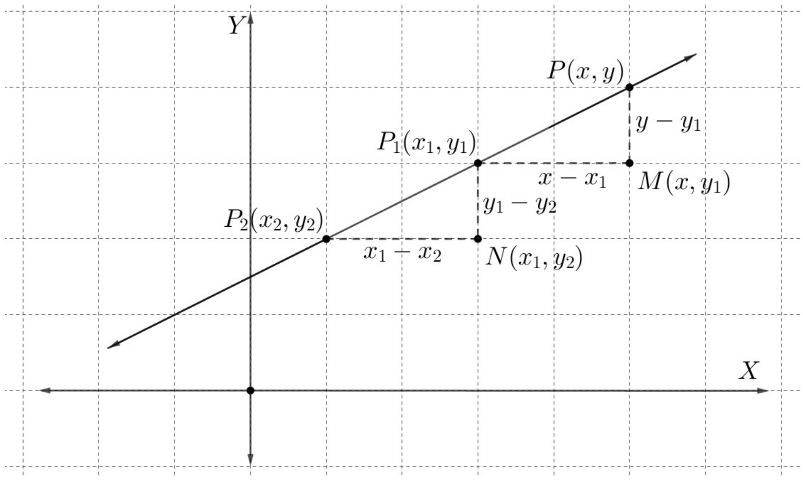
จากสมบัติของรูปสามเหลี่ยมคล้าย จะได้ว่า

$$\frac{PM}{P_1N} = \frac{P_1M}{P_2N}$$

$$\frac{y - y_1}{y_1 - y_2} = \frac{x - x_1}{x_1 - x_2}$$

$$y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1)$$

ดังนั้น สมการของเส้นตรงที่ผ่านจุด $P_1(x_1, y_1)$ และ $P_2(x_2, y_2)$ คือ $y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$



รูปที่ 2.7 รูปสามเหลี่ยม PP_1M คล้ายกับ รูปสามเหลี่ยม P_1P_2N

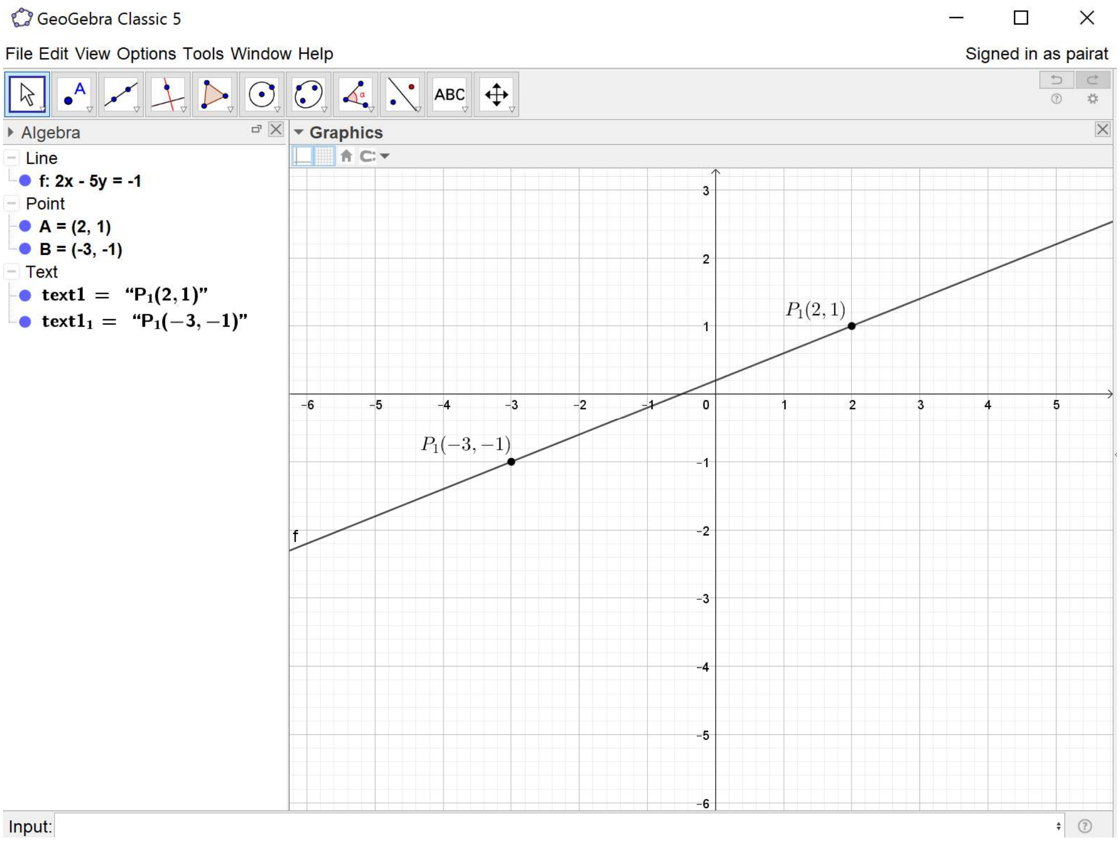
ตัวอย่าง 2.1.5 จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $P_1(2,1)$ และ $P_2(-3,-1)$

วิธีทำ ทฤษฎีบท 2.1.3 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} y - y_1 &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \\ y - 1 &= \frac{-1-1}{-3-2}(x-2) \\ y - 1 &= \frac{2}{5}(x-2) \\ 5(y-1) &= 2(x-2) \\ 2x - 5y &= -1 \end{aligned}$$

ดังนั้น สมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $P_1(2,1)$ และ $P_2(-3,-1)$ คือ $2x - 5y + 1 = 0$

ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 2.1.5 ดังรูปที่ 2.8



รูปที่ 2.8 เส้นตรง $2x - 5y + 1 = 0$

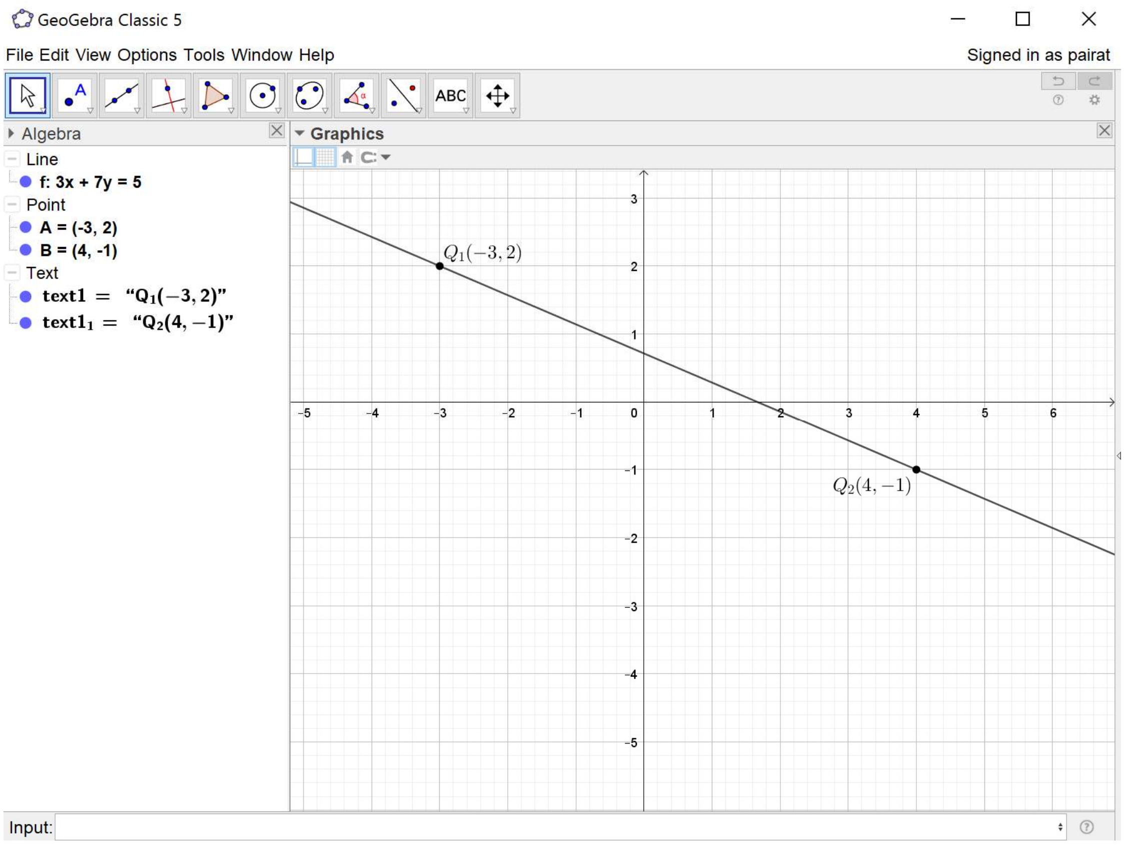
ตัวอย่าง 2.1.6 จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $Q_1(-3,2)$ และ $Q_2(4,-1)$

วิธีทำ ทฤษฎีบท 2.1.3 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} y - y_1 &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \\ y - 2 &= \frac{-1-2}{4-(-3)}(x-(-3)) \\ y - 2 &= \frac{-3}{7}(x+3) \\ 7(y-2) &= -3(x+3) \\ 3x + 7y &= 5 \end{aligned}$$

ดังนั้น สมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $Q_1(-3,2)$ และ $Q_2(4,-1)$ คือ $3x+7y-5=0$

ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 2.1.6 ดังรูปที่ 2.9



รูปที่ 2.9 เส้นตรง $3x+7y-5=0$

ทฤษฎีบท 2.1.4 สมการเส้นตรงที่มีส่วนตัดแกน X และส่วนตัดแกน Y เป็น a และ b ตามลำดับ โดยที่ $a,b \neq 0$ คือ

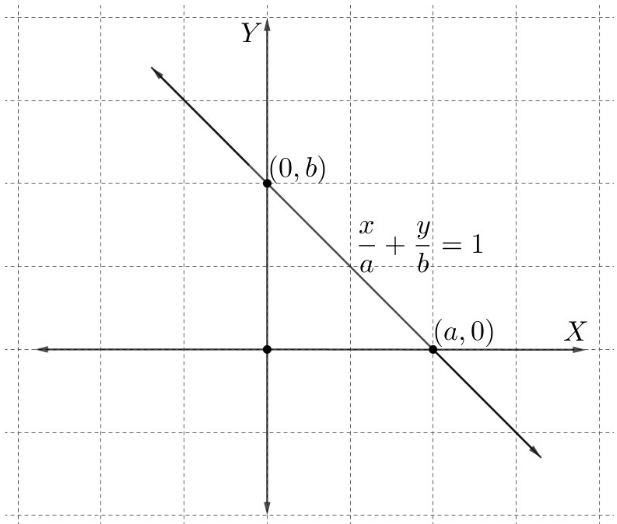
$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

(วรรณี ธรรมโชติ, 2550 : 25 และ Protter, Murray H. & Morrer, Charles B. Jr., 1975 : 54)

พิสูจน์ ให้จุดตัดแกน X คือ $(a,0)$ และจุดตัดแกน Y คือ $(0,b)$ จะได้จุด $(a,0)$ และ $(0,b)$ อยู่บนเส้นตรง ดังรูปที่ 2.7 จากทฤษฎีบท 2.1.4 จะได้

$$\begin{aligned} y-y_1 &= \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1) \\ y-0 &= \frac{b-0}{0-a}(x-a) \\ \frac{y}{b} &= -\frac{x}{a}+1 \\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b} &= 1 \end{aligned}$$

ดังนั้น สมการเส้นตรงที่มีส่วนตัดแกน X และส่วนตัดแกน Y คือ $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$



รูปที่ 2.10 เส้นตรงตัดแกน X และตัดแกน Y ที่จุด $(a,0)$ และจุด $(0,b)$ ตามลำดับ

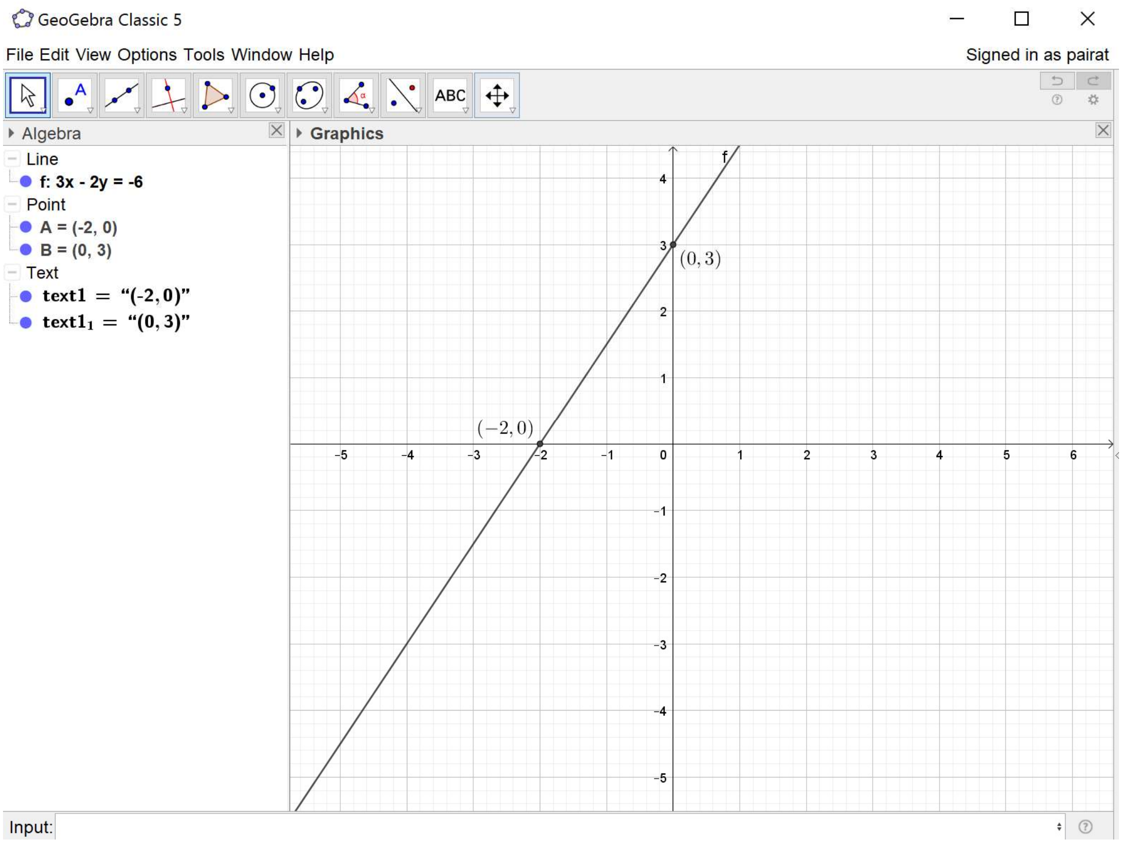
ตัวอย่าง 2.1.7 จงหาสมการเส้นตรงที่ตัดแกน X ที่จุด $(-2,0)$ และตัดแกน Y ที่จุด $(0,3)$

วิธีทำ ทฤษฎีบท 2.1.4 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \frac{x}{a}+\frac{y}{b} &= 1 \\ \frac{x}{-2}+\frac{y}{3} &= 1 \\ -3x+2y &= 6 \\ 3x-2y+6 &= 0 \\ 3x-2y &= -6 \end{aligned}$$

ดังนั้น สมการเส้นตรง คือ $3x-2y+6=0$ หรือ $3x-2y=-6$

ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 2.1.7 ดังรูปที่ 2.11



รูปที่ 2.11 เส้นตรง $3x-2y+6=0$

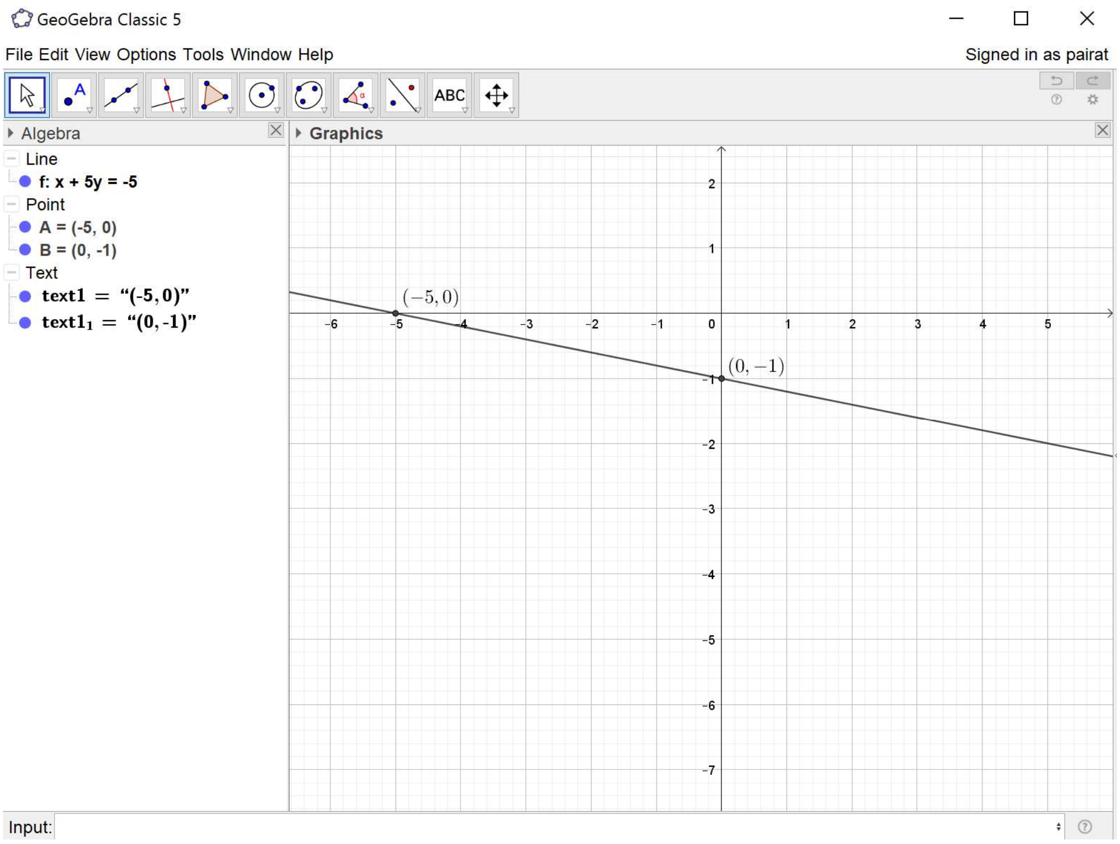
ตัวอย่าง 2.1.8 จงหาสมการเส้นตรงที่ตัดแกน Y ที่จุด $(0,-1)$ และตัดแกน X ที่จุด $(-5,0)$

วิธีทำ ทฤษฎีบท 2.1.4 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\frac{x}{a}+\frac{y}{b}&=1\\ \frac{x}{(-5)}+\frac{y}{(-1)}&=1\\ -x-5y&=5\\ x+5y+5&=0\\ x+5y&=-5\end{aligned}$$

ดังนั้น สมการเส้นตรง คือ $x+5y+5=0$ หรือ $x+5y=-5$

ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 2.1.8 ดังรูปที่ 2.12



รูปที่ 2.12 เส้นตรง $x+5y+5=0$

บทนิยาม 2.1.1 เราแทนเส้นตรงทุกเส้นด้วยสมการเชิงเส้นของตัวแปร x และ y คือ

$$Ax + By + C = 0$$

เมื่อ A และ B ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน เรียกสมการนี้ว่า *สมการทั่วไปของเส้นตรง*

(ศรีบุตร แววเจริญ และ ชนศักดิ์ บ่ายเที่ยง, 2544 : 54)

ข้อสังเกต

1. ถ้า $C = 0$ แล้วเส้นตรงจะผ่านจุดกำเนิด $(0,0)$
2. ถ้า $B = 0$ แล้วเส้นตรงมีสมการ $x = -\dfrac{C}{A}$ และขนานกับแกน Y
3. ถ้า $B \neq 0$ แล้วเส้นตรงมีความชัน $m = -\dfrac{A}{B}$ และตัดแกน Y ที่ $b = -\dfrac{C}{B}$
4. ถ้า $A = 0$ แล้วเส้นตรงมีสมการ $y = -\dfrac{C}{B}$ และขนานกับแกน X

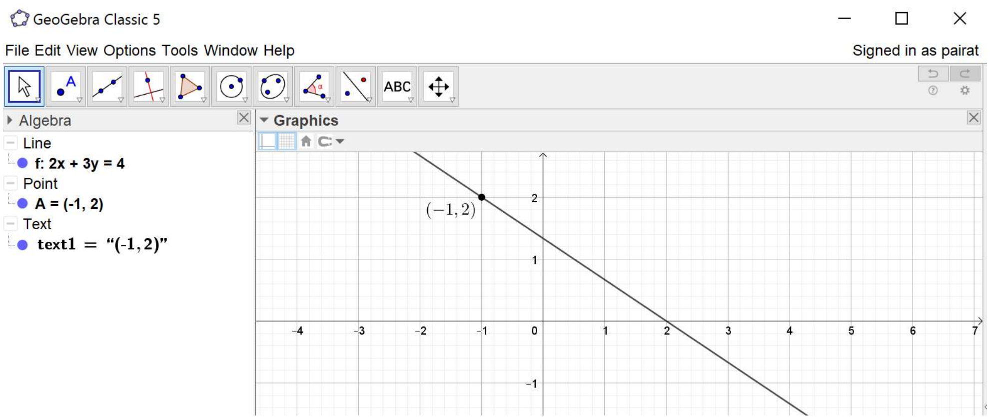
ตัวอย่าง 2.1.9 จากสมการเส้นตรง $2x + 3y + k = 0$ ผ่านจุด $(-1,2)$ จงหาค่า k

วิธีทำ จากสมการเส้นตรงผ่านจุด $(-1,2)$ แสดงว่าจุดอยู่บนเส้นตรง จะได้

$$\begin{aligned} 2x + 3y + k &= 0 \\ 2(-1) + 3(2) + k &= 0 \\ k &= -4 \end{aligned}$$

ดังนั้น k มีค่าเท่ากับ -4

ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 2.1.9 ดังรูปที่ 2.13



รูปที่ 2.13 เส้นตรง $2x + 3y - 4 = 0$

ตัวอย่าง 2.1.10 จงหาสมการเส้นตรงที่ขนานกับเส้นตรง $l: x+3y-8=0$ และผ่านจุด $(2,3)$

วิธีทำ เส้นตรงที่ขนานกับเส้นตรง l แสดงว่าเส้นตรงทั้งสองมีความชันเท่ากันคือ

$$\begin{aligned} m &= \frac{-A}{B} \\ &= \frac{-1}{3} \end{aligned}$$

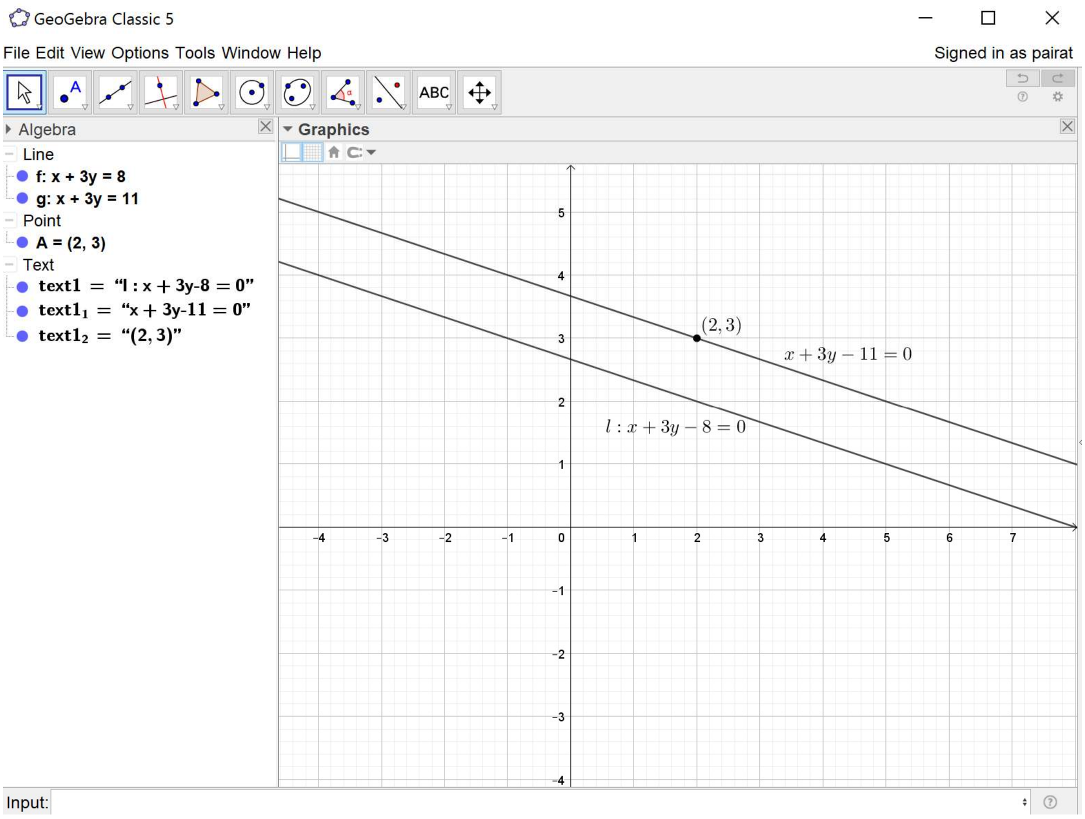
สมการเส้นตรงมีความชันเท่ากับ $-\frac{1}{3}$ มีสมการเป็น $x+3y+C=0$

หาค่า C โดยใช้จุดผ่าน $(2,3)$ จะได้

$$\begin{aligned} 2+3(3)+C &= 0 \\ C &= -11 \end{aligned}$$

ดังนั้น สมการเส้นตรง คือ $x+3y-11=0$

ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 2.1.10 ดังรูปที่ 2.14



รูปที่ 2.14 เส้นตรง $l: x+3y-8=0$ ขนานกับเส้นตรง $x+3y-11=0$

ตัวอย่าง 2.1.11 จงหาสมการเส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นตรง $l_1 : x + 3y - 8 = 0$ และผ่านจุด $(1,2)$

วิธีทำ ให้ l_2 เป็นเส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นตรง l_1 แสดงว่าผลคูณของความชันเท่ากับ -1

จาก $$m_1 \cdot m_2 = -1$$

เส้นตรง l_1 มีความชัน $m_1 = -\dfrac{1}{3}$ และให้ m_2 เป็นความชันของเส้นตรง l_2 จะได้

$$m_1 \cdot m_2 = -1$$
$$m_2 = 3$$

จากเส้นตรงที่มีความชันเท่ากับ 3 มีสมการเป็น

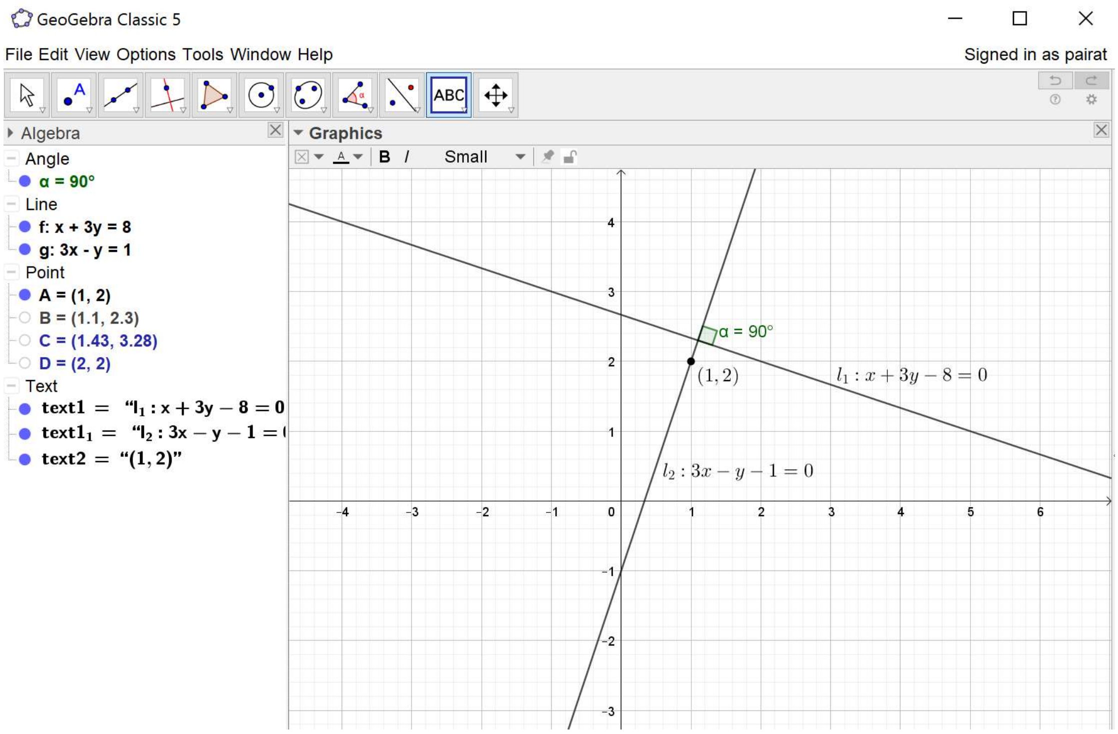
$$3x - y + C = 0$$

หาค่า C จากจุดที่เส้นตรงผ่าน จะได้

$$3(1) - 2 + C = 0$$
$$C = -1$$

ดังนั้น สมการเส้นตรง l_2 มีสมการเป็น $3x - y - 1 = 0$

ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 2.1.11 ดังรูปที่ 2.15



รูปที่ 2.15 เส้นตรง $l_1 : x + 3y - 8 = 0$ ตั้งฉากกับเส้นตรง $3x - y - 1 = 0$

ตัวอย่าง 2.1.12 กำหนดให้จุด $P(0,2)$ และจุด $Q(3,4)$ จงหาจุด R ที่อยู่บนแกน X ที่ทำให้ $PR+RQ$ มีค่าน้อยที่สุด

วิธีทำ ให้ P' เป็นจุดที่เกิดจากการสะท้อนจุด P โดยมีแกน X เป็นเส้นสะท้อน จะได้

พิกัดจุด P' คือ $(0,-2)$

หาสมการเส้นตรงที่เชื่อม จุด $Q(3,4)$ และจุด $P'(0,-2)$ จะได้ว่า

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

$$y-4=\frac{-2-4}{0-3}(x-3)$$

$$2x-y-2=0$$

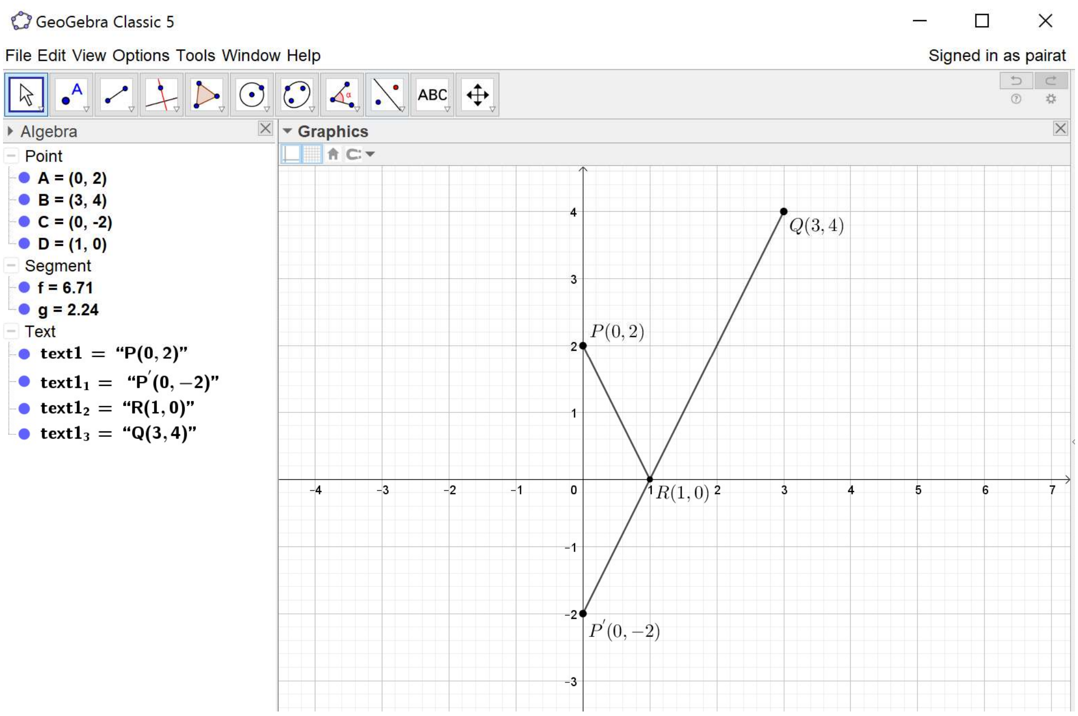
หาจุด R นั่นคือ จุดตัดบนแกน X โดยที่ $y=0$ จะได้

$$2x-(0)-2=0$$

$$x=1$$

ดังนั้น พิกัดจุด R คือ $(1,0)$

ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 2.1.12 ดังรูปที่ 2.16



รูปที่ 2.16 จุด R ที่อยู่บนแกน X ที่ทำให้ $PR+RQ$ มีค่าน้อยที่สุด

ตัวอย่าง 2.1.13 กำหนดให้เส้นตรง $3x-4y-6=0$ ตั้งฉากกับเส้นตรง $x+ay+3=0$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริง ถ้าเส้นตรงทั้งสองตัดกันที่จุด A และตัดแกน X ที่จุด B และจุด C ตามลำดับ แล้ว พื้นที่รูปสามเหลี่ยม ABC มีค่าเท่าใด

วิธีทำ จากเส้นตรง $3x-4y-6=0$ มีความชันเท่ากับ $\dfrac{3}{4}$

และเส้นตรง $x+ay+3=0$ มีความชันเท่ากับ $-\dfrac{1}{a}$

จากเส้นตรงสองเส้นตั้งฉากกัน จะได้

$$\left(\frac{3}{4}\right)\cdot\left(-\frac{1}{a}\right)=-1$$

$$-\frac{3}{4a}=-1$$

$$a=\frac{3}{4}$$

หาจุดตัด A จากสมการเส้นตรงทั้งสองเส้น จะได้

$$3x-4y-6=0 \quad \text{..........}(1)$$

$$4x+3y+12=0 \quad \text{..........}(2)$$

นำสมการ $(1)\times 4$ และ $(2)\times 3$ จะได้

$$12x-16y-24=0 \quad \text{..........}(3)$$

$$12x+9y+36=0 \quad \text{..........}(4)$$

นำสมการ $(4)-(3)$ จะได้

$$25y+60=0$$

$$y=-\frac{12}{5}$$

แทนค่า y ด้วย $-\dfrac{12}{5}$ ใน (1) จะได้

$$3x-4\left(-\frac{12}{5}\right)-6=0$$

$$3x=6-\frac{48}{5}$$

$$x=-\frac{6}{5}$$

$\therefore$ จุดตัด A คือ $\left(-\dfrac{6}{5},-\dfrac{12}{5}\right)$

หาจุด B จากเส้นตรง $3x-4y-6=0$ ตัดแกน X ที่จุด B โดยแทน $y=0$ จะได้

$$3x-4(0)-6=0$$
$$x=2$$

$\therefore$ จุด B คือ $(2,0)$

หาจุด C จากเส้นตรง $x+\frac{3}{4}y+3=0$ ตัดแกน X ที่จุด C โดยแทน $y=0$ จะได้

$$x+\frac{3}{4}(0)+3=0$$
$$x=-3$$

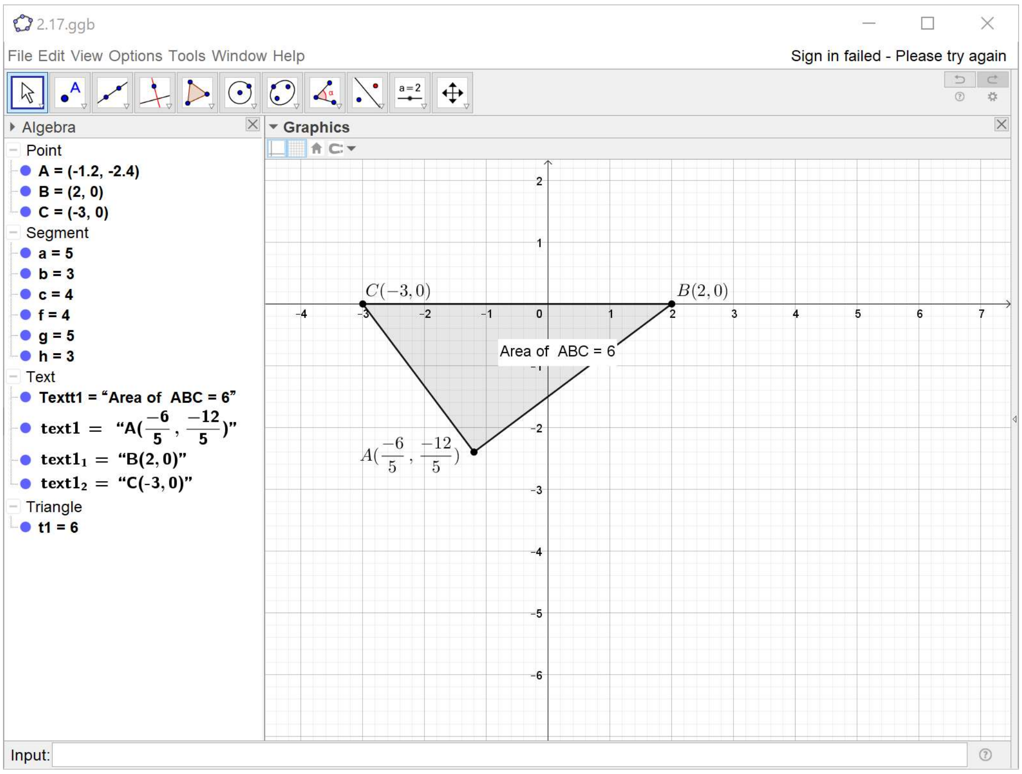
$\therefore$ จุด C คือ $(-3,0)$

หาพื้นที่รูปสามเหลี่ยม ABC จากจุด A,B และจุด C จะได้

พื้นที่รูปสามเหลี่ยม $ABC = \frac{1}{2}\times 5\times\left(\frac{12}{5}\right)=6$

ดังนั้น พื้นที่รูปสามเหลี่ยม ABC คือ 6 ตารางหน่วย

ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 2.1.13 ดังรูปที่ 2.17



รูปที่ 2.17 พื้นที่รูปสามเหลี่ยม ABC

2.2 ระยะทางจากจุดไปยังเส้นตรง (Distance from a Point to a Line)

ทฤษฎีบท 2.2.1 ระยะตั้งฉากจากจุด $P_1(x_1, y_1)$ ไปยังเส้นตรง $Ax + By + C = 0$ คือ

$$d = \frac{\left|Ax_1 + By_1 + C\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

(Protter, Murray H. & Morrer, Charles B. Jr., 1975 : 65)

พิสูจน์ ให้เส้นตรง l_1 มีสมการคือ $Ax + By + C = 0$ และจุด $P_1(x_1, y_1)$ ที่ไม่ได้อยู่บนเส้นตรง l_1 ลากเส้นตรง l_2 ผ่านจุด $P_1(x_1, y_1)$ ตั้งฉากกับเส้นตรง $Ax + By + C = 0$ ที่จุด $P(x, y)$

จากเส้นตรง $l_1 : Ax + By + C = 0$ จะได้

$$y = \frac{-A}{B}x - \frac{C}{B} \quad \text{...(1)}$$

จากเส้นตรง l_2 ผ่านจุด $P_1(x_1, y_1)$ และมีความชัน $m = \dfrac{B}{A}$ จะได้

$$y - y_1 = \frac{B}{A}(x - x_1)$$

$$y = \frac{B}{A}(x - x_1) + y_1 \quad \text{...(2)}$$

นำสมการ $(1) = (2)$ จะได้

$$\frac{-A}{B}x - \frac{C}{B} = \frac{B}{A}(x - x_1) + y_1$$

$$-\frac{C}{B} - y_1 = \frac{B}{A}(x - x_1) + \frac{A}{B}x$$

$$\frac{B}{A}(x - x_1) + \frac{A}{B}x - \frac{A}{B}x_1 = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B} - \frac{By_1}{B}$$

$$\frac{B}{A}(x - x_1) + \frac{A}{B}(x - x_1) = -\frac{A}{B}x_1 - \frac{By_1}{B} - \frac{C}{B}$$

$$\left(\frac{B}{A} + \frac{A}{B}\right)(x - x_1) = -\frac{1}{B}\left(Ax_1 + By_1 + C\right)$$

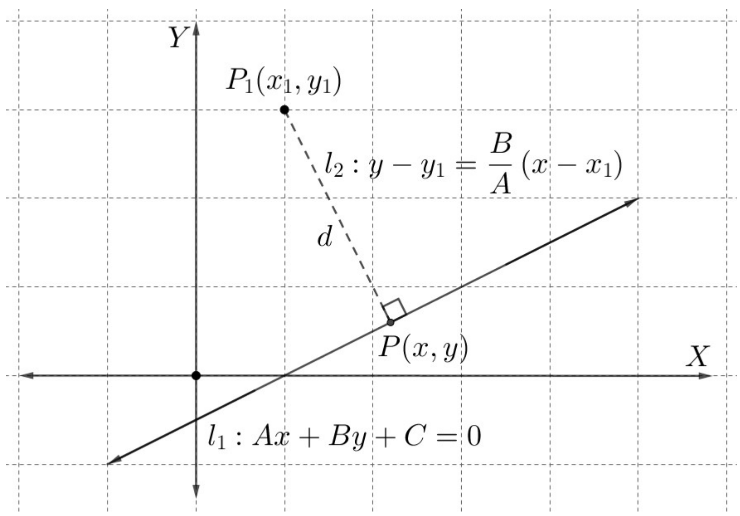
$$\left(\frac{A^2 + B^2}{AB}\right)(x - x_1) = -\frac{1}{B}\left(Ax_1 + By_1 + C\right)$$

$$x - x_1 = -\frac{A}{A^2 + B^2}\left(Ax_1 + By_1 + C\right)$$

จากทฤษฎีบท 1.2.1 จะได้ระยะทางจากจุด $P_1(x_1,y_1)$ ไปยังจุด $P(x,y)$ ดังนี้

$$
\begin{aligned}
d &= \sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2} \\
&= \sqrt{(x-x_1)^2+\left(\frac{B}{A}(x-x_1)\right)^2} \\
&= \sqrt{(x-x_1)^2+\frac{B^2}{A^2}(x-x_1)^2} \\
&= \sqrt{\left(1+\frac{B^2}{A^2}\right)(x-x_1)^2} \\
&= \sqrt{\left(1+\frac{B^2}{A^2}\right)\left(-\frac{A}{A^2+B^2}\left(Ax_1+By_1+C\right)\right)^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{A^2+B^2}{A^2}\right)\left(-\frac{A}{A^2+B^2}\left(Ax_1+By_1+C\right)\right)^2} \\
&= \sqrt{\frac{\left(Ax_1+By_1+C\right)^2}{A^2+B^2}} \\
&= \frac{\left|Ax_1+By_1+C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}
\end{aligned}
$$

ดังนั้น ระยะทางจากจุด $P_1(x_1,y_1)$ ไปยังเส้นตรง $Ax+By+C=0$ คือ $d=\dfrac{\left|Ax_1+By_1+C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}$



รูปที่ 2.18 ระยะตั้งฉากจากจุด $P_1(x_1,y_1)$ ไปยังเส้นตรง $Ax+By+C=0$

ตัวอย่าง 2.2.1 จงหาระยะทางจากจุด $(1,3)$ ไปยังเส้นตรง $l: -3x+4y+16=0$

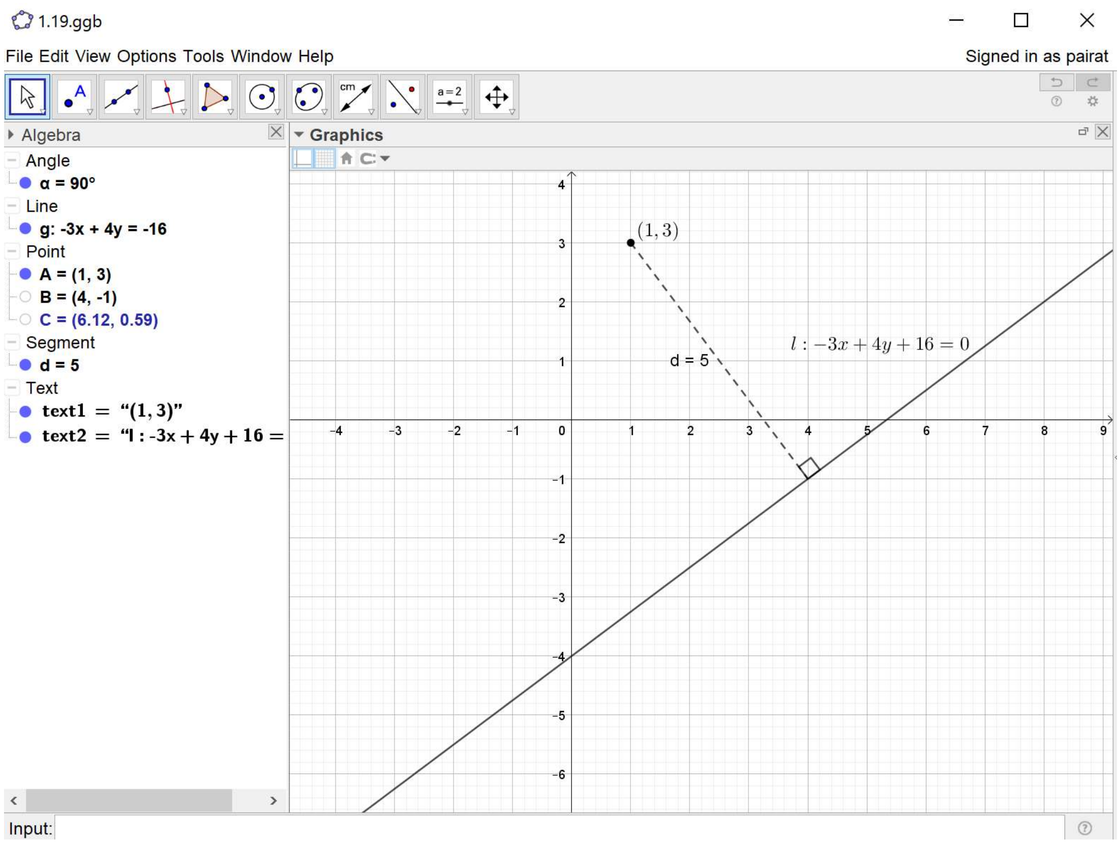
วิธีทำ ให้ d เป็นระยะทางจากจุด $(1,3)$ ไปยังเส้นตรง $l: -3x+4y+16=0$

จากทฤษฎีบท 2.2.1 จะได้

$$\begin{aligned} d &= \frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} \\ &= \frac{|(-3)(1)+4(3)+16|}{\sqrt{(-3)^2+4^2}} \\ &= \frac{|25|}{\sqrt{25}} \\ &= 5 \end{aligned}$$

ดังนั้น ระยะทางจากจุด $(1,3)$ ไปยังเส้นตรง $-3x+4y+16=0$ คือ 5 หน่วย

ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 2.2.1 ดังรูปที่ 2.19



รูปที่ 2.19 ระยะทางจากจุด $(1,3)$ ไปยังเส้นตรง $l: -3x+4y+16=0$

ตัวอย่าง 2.2.2 จงหาระยะทางจากเส้นตรง $l: 3x+4y-5=0$ ไปยังจุด $(-7,-6)$

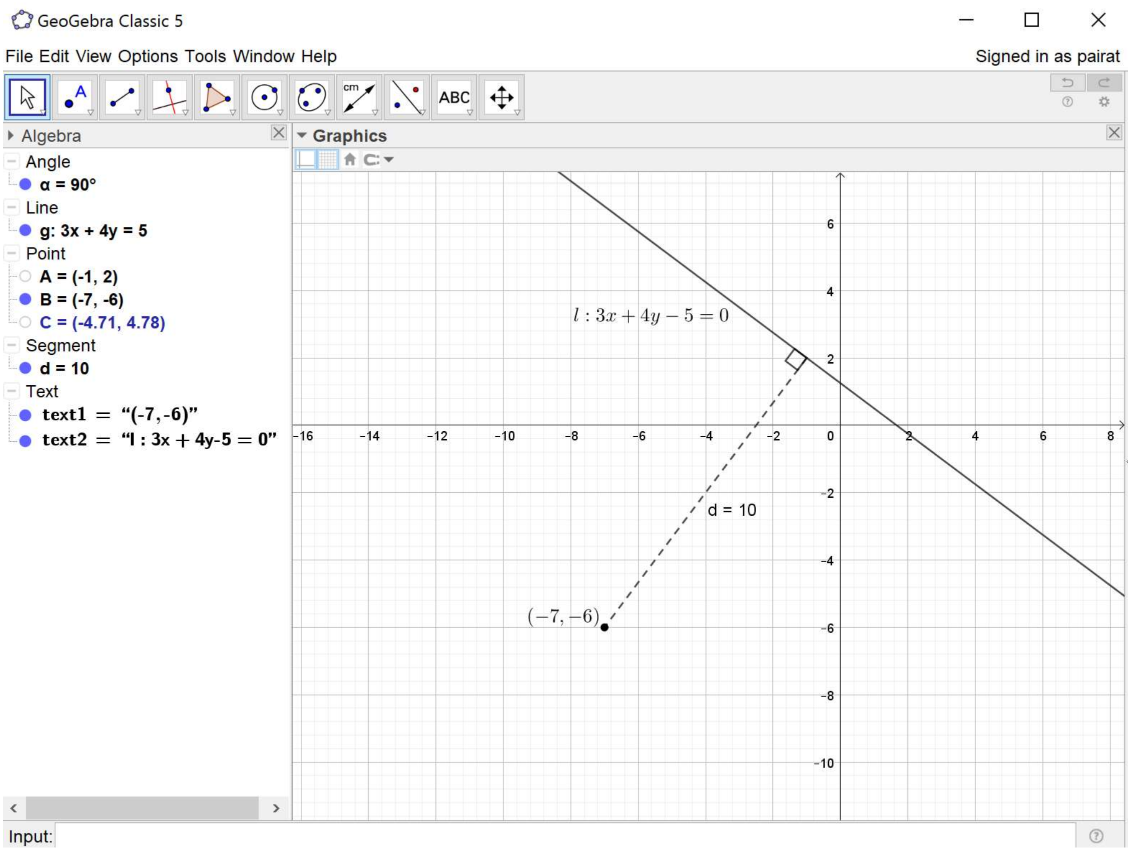
วิธีทำ ให้ d เป็นระยะทางจากจุด $(-7,-6)$ ไปยังเส้นตรง $l: 3x+4y-5=0$

จากทฤษฎีบท 2.2.1 จะได้

$$\begin{aligned} d &= \frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} \\ &= \frac{|3(-7)+4(-6)+(-5)|}{\sqrt{3^2+4^2}} \\ &= 10 \end{aligned}$$

ดังนั้น ระยะทางจากจุด $(-7,-6)$ ไปยังเส้นตรง $l: 3x+4y-5=0$ คือ 10 หน่วย

ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 2.2.2 ดังรูปที่ 2.20



รูปที่ 2.20 ระยะทางจากจุด $(-7,-6)$ ไปยังเส้นตรง $l: 3x+4y-5=0$

ตัวอย่าง 2.2.3 จงหาสมการเส้นตรงที่มีความชัน $\frac{3}{4}$ และอยู่ห่างจากจุด $(2,1)$ เป็นระยะทาง 2 หน่วย

วิธีทำ ให้ d เป็นระยะทางจากจุด $(2,1)$ ไปยังเส้นตรง l และเส้นตรงมีความชัน $m=\frac{3}{4}$

จากทฤษฎีบท 2.1.2 จะได้

$$y=mx+b$$

$$y=\frac{3}{4}x+b$$

$$3x-4y+4b=0$$

หาระยะทางจากจุด $(2,1)$ ไปยังเส้นตรง $3x-4y+4b=0$ จากทฤษฎีบท 2.2.1 จะได้

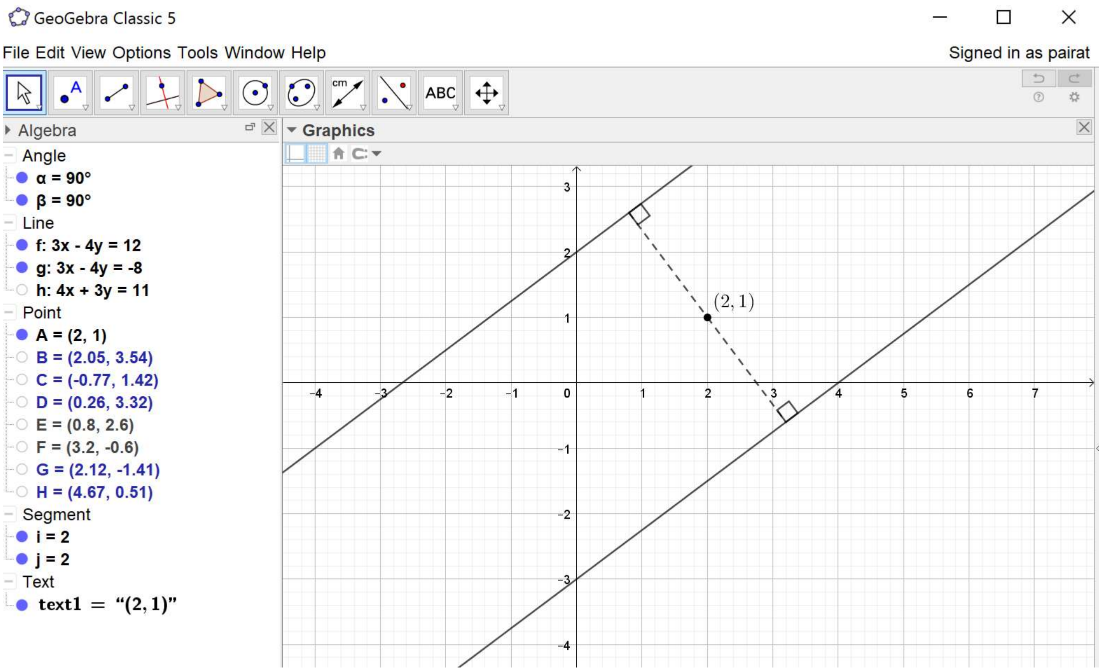
$$d=\frac{\left|3(2)+(-4)(1)+(4b)\right|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}$$

$$\left|4b+2\right|=10$$

$$b=-3,2$$

ดังนั้น สมการของเส้นตรงคือ $3x-4y-12=0$ และ $3x-4y+8=0$

ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 2.2.3 ดังรูปที่ 2.21



รูปที่ 2.21 สมการของเส้นตรง $3x-4y-12=0$ และ $3x-4y+8=0$

2.3 ระยะทางระหว่างเส้นตรงคู่ขนาน (Distance Between Parallel Lines)

ทฤษฎีบท 2.3.1 ให้เส้นตรง $l_1 : Ax+By+C_1=0$ และ $l_2 : Ax+By+C_2=0$ เป็นสมการเส้นตรงที่ขนานกัน และ d แทนระยะทางระหว่างเส้นตรงทั้งสอง จะได้

$$d=\frac{\left|C_1-C_2\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

(วรรณี ธรรมโชติ, 2550 : 36)

พิสูจน์ ให้เส้นตรง l_1 มีสมการเป็น $Ax+By+C_1=0$

เส้นตรง l_2 มีสมการเป็น $Ax+By+C_2=0$ และ d แทนระยะทางระหว่างเส้นตรงทั้งสอง

จะเห็นว่าพิกัดจุด $\left(x,\dfrac{-Ax-C_2}{B}\right)$ อยู่บนเส้นตรง l_2

จากทฤษฎีบท 2.2.1 จะได้

ระยะทางจาก จุด $\left(x,\dfrac{-Ax-C_2}{B}\right)$ ไปยังเส้นตรง $l_1 : Ax+By+C_1=0$ คือ

$$\begin{aligned}
d &= \frac{\left|Ax+By+C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}\\
&= \frac{\left|Ax+B\left(\dfrac{-Ax-C_2}{B}\right)+C_1\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}\\
&= \frac{\left|Ax-Ax-C_2+C_1\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}\\
&= \frac{\left|-C_2+C_1\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}\\
&= \frac{\left|C_1-C_2\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}
\end{aligned}$$

ดังนั้น ระยะทางระหว่างเส้นตรง $l_1 : Ax+By+C_1=0$ และ $l_2 : Ax+By+C_2=0$ คือ

$$d=\frac{\left|C_1-C_2\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

ตัวอย่าง 2.3.1 จงหาระยะทางระหว่างเส้นตรง $l_1 : 2x + y + 3 = 0$ และ $l_2 : 2x + y - 7 = 0$

วิธีทำ ให้ d เป็นระยะทางระหว่างเส้นตรง $l_1 : 2x + y + 3 = 0$ และ $l_2 : 2x + y - 7 = 0$

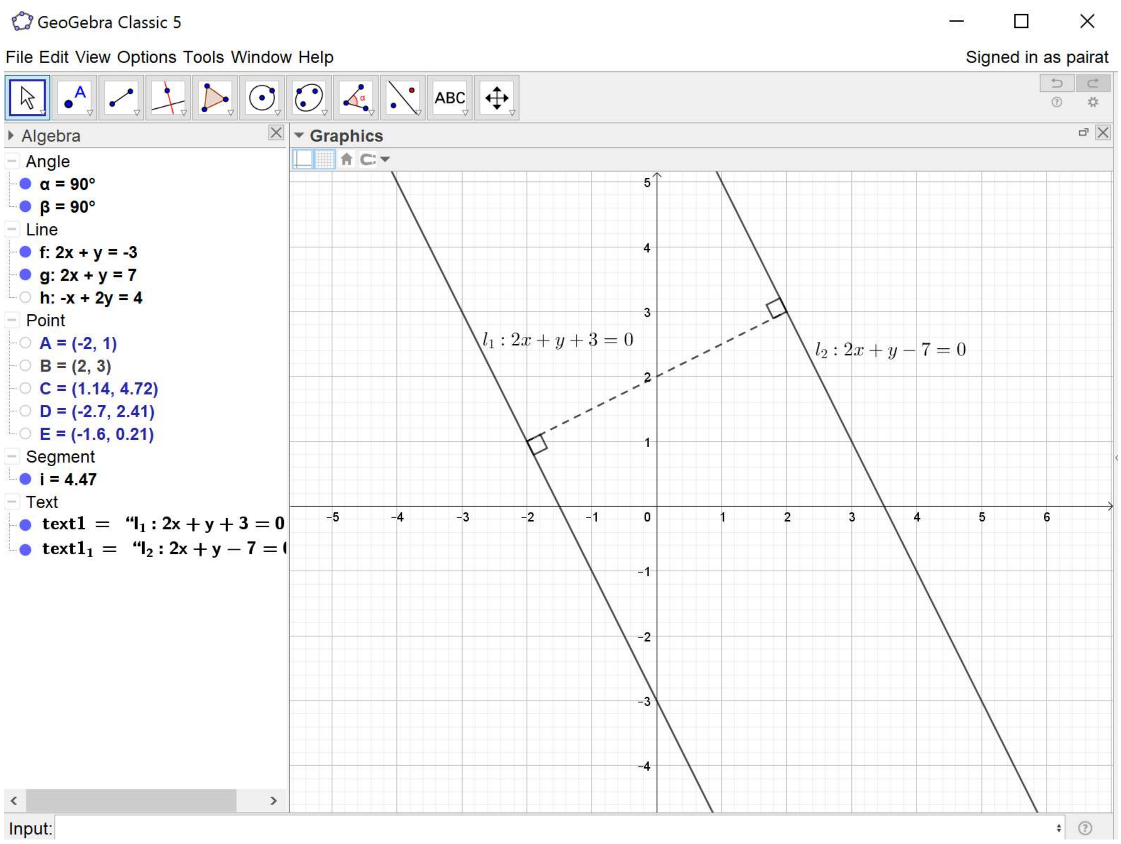
เส้นตรง l_1 มีความชัน $m_{l_1} = -2$ และเส้นตรง l_2 มีความชัน $m_{l_2} = -2$

จะเห็นว่า $m_{l_1} = m_{l_2}$ แสดงว่า เส้นตรง l_1 ขนานกันกับเส้นตรง l_2 จากทฤษฎีบท 2.3.1 จะได้

$$\begin{aligned} d &= \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \\ &= \frac{|3 - (-7)|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} \\ &= 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

ดังนั้น ระยะทางระหว่างเส้นตรง $l_1 : 2x + y + 3 = 0$ และ $l_2 : 2x + y - 7 = 0$ คือ $2\sqrt{5}$ หน่วย

ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 2.3.1 ดังรูปที่ 2.22



รูปที่ 2.22 ระยะทางระหว่างเส้นตรง $l_1 : 2x + y + 3 = 0$ และ $l_2 : 2x + y - 7 = 0$

ตัวอย่าง 2.3.2 จงหาระยะทางระหว่างเส้นตรง $l_1 : x + 3y - 4 = 0$ และ $l_2 : 2x + 6y + 10 = 0$

วิธีทำ ให้ d เป็นระยะทางระหว่างเส้นตรง $l_1 : x + 3y - 4 = 0$ และ $l_2 : 2x + 6y + 10 = 0$

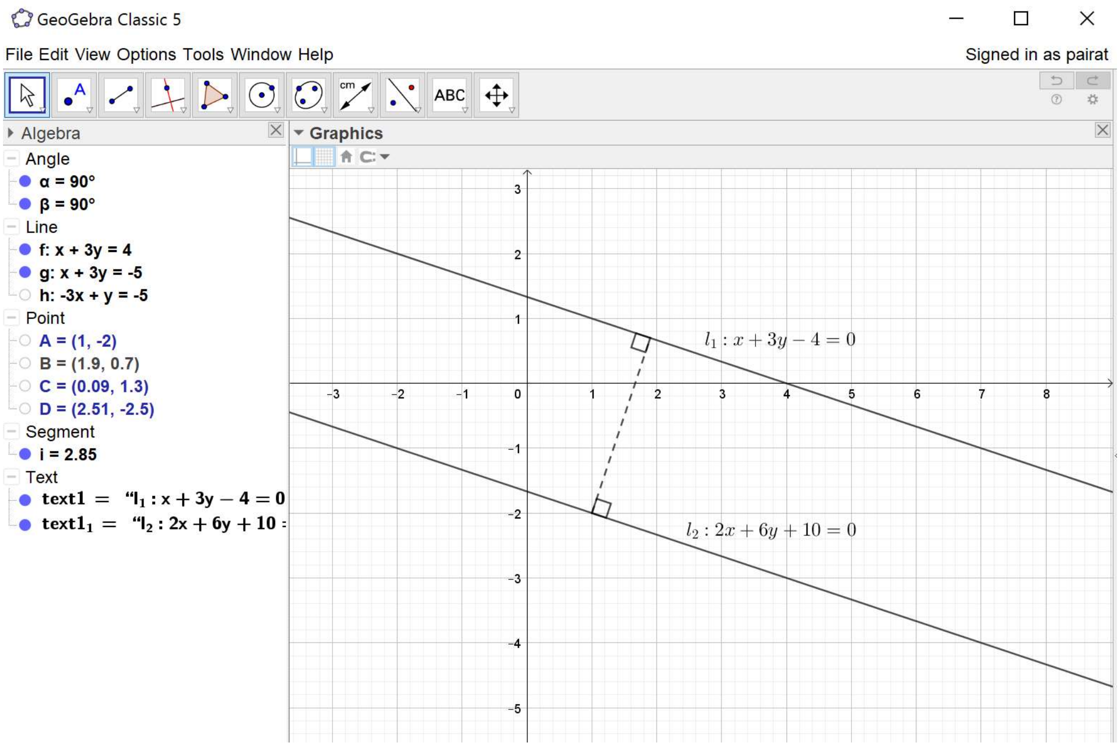
เส้นตรง l_1 มีความชัน $m_{l_1} = -\frac{1}{3}$ และเส้นตรง l_2 มีความชัน $m_{l_2} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$

จะเห็นว่า $m_{l_1} = m_{l_2}$ แสดงว่า เส้นตรง l_1 ขนานกันกับเส้นตรง l_2 จากทฤษฎีบท 2.3.1 จะได้

$$
\begin{aligned}
d &= \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \\
&= \frac{|-4 - 5|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} \\
&= \frac{9}{\sqrt{10}}
\end{aligned}
$$

ดังนั้น ระยะทางระหว่างเส้นตรง $l_1 : x + 3y - 4 = 0$ และ $l_2 : 2x + 6y + 10 = 0$ คือ $\frac{9}{\sqrt{10}}$ หน่วย

ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 2.3.1 ดังรูปที่ 2.23



รูปที่ 2.23 ระยะทางระหว่างเส้นตรง $l_1 : x + 3y - 4 = 0$ และ $l_2 : 2x + 6y + 10 = 0$

สรุปท้ายบทที่ 2

สำหรับในบทที่ 2 นั้นเราได้ศึกษาสมการเส้นตรง ระยะทางจากจุดไปยังเส้นตรง และระยะทางระหว่างเส้นตรงคู่ขนาน ซึ่งมีสูตรที่สำคัญดังนี้

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y = mx + b$$

สมการเส้นตรงที่ผ่านจุด 2 จุด $$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

ระยะทางจากจุดไปยังเส้นตรง $$d = \frac{\left|Ax_1 + By_1 + C\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

ระยะทางระหว่างเส้นตรงคู่ขนาน $$d = \frac{\left|C_1 - C_2\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

แบบฝึกหัดบทที่ 2

จงวาดเส้นตรงให้สอดคล้องกับเงื่อนไขที่กำหนดให้ พร้อมทั้งหาสมการของเส้นตรงแต่ละข้อ (ข้อ 2.1 - 2.7)

2.1 เส้นตรงที่อยู่เหนือแกน X เป็นระยะ 6 หน่วย

2.2 เส้นตรงที่ตั้งฉากกับแกน X และผ่านจุด $(2,7)$

2.3 เส้นตรงที่ผ่านจุดกำเนิดและมีความชันเท่ากับ $-\frac{7}{8}$

2.4 เส้นตรงที่ผ่านจุด $(-1,5)$ และมีความชันเท่ากับ $\frac{5}{12}$

2.5 เส้นตรงแนวนอนและผ่านจุด $(4,4)$

2.6 เส้นตรงที่อยู่ทางด้านซ้ายของแกน Y เป็นระยะ 3 หน่วย

2.7 เส้นตรงที่อยู่ทางด้านล่างของแกน X และผ่านจุด $(9,-7)$

จงหาสมการเส้นตรงเมื่อทราบจุดที่ผ่าน A และมีความชัน m พร้อมทั้งวาดกราฟประกอบ (ข้อ 2.8-2.17)

2.8 $A(1,2), m=-2$

2.9 $A\left(0,-3\right), m=0$

2.10 $A\left(-4,6\right), m=1$

2.11 $A\left(4,0\right), m=-3$

2.12 $A\left(0,0\right), m=0$

2.13 $A\left(-\frac{3}{2},\frac{7}{6}\right), m=\frac{5}{3}$

2.14 $A\left(\frac{1}{5},-\frac{3}{8}\right), m=\frac{4}{5}$

2.15 $A\left(-2,\frac{24}{35}\right), m=7$

2.16 $A\left(-\frac{5}{3},-\frac{3}{5}\right), m=-12$

2.17 $A\left(0,0\right), m=\frac{11}{-3}$

จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด A และจุด B ที่กำหนดให้ต่อไปนี้ พร้อมทั้งวาดกราฟ (ข้อ 2.18-2.22)

2.18 $A(1,2), B(3,4)$

2.19 $A(3,2), B(-4,5)$

2.20 $A(-5,4), B(-5,6)$

2.21 $A(0,0), B(3,1)$

2.22 $A(-5,\sqrt{5}), B(\sqrt{6},0)$

จงหาสมการเส้นตรงเมื่อทราบจุดตัดแกน $X(a)$ และจุดตัดแกน $Y(b)$ ดังข้อต่อไปนี้ พร้อมทั้งวาดกราฟ (ข้อ 2.23 - 2.27)

2.23 $a = 1, b = 2$

2.24 $a = -3, b = 5$

2.25 $a = -\frac{3}{5}, b = \frac{7}{3}$

2.26 $a = -\frac{1}{4}, b = \frac{1}{3}$

2.27 $a = -\sqrt{2}, b = 4$

จงหาสมการของเส้นตรงที่ผ่านจุด A และขนานกับเส้นตรงที่กำหนดให้ต่อไปนี้ (ข้อ 2.28 - 2.32)

2.28 $A(1,2), x + y - 10 = 0$

2.29 $A(-4,0), 5x + 2y - 1 = 0$

2.30 $A(-2,1), 2x + 8y + 2 = 0$

2.31 $A\left(-\frac{1}{2},5\right), 6x - 3y - 15 = 0$

2.32 $A\left(-\frac{4}{7},\sqrt{3}\right), x + 8y = 0$

จงหาสมการของเส้นตรงที่ผ่านจุด A และตั้งฉากกับเส้นตรงที่กำหนดให้ต่อไปนี้ (ข้อ 2.33 - 2.37)

2.33 $A(1,2), x+y-10=0$

2.34 $A(-4,0), 5x+2y-1=0$

2.35 $A(-2,1), 2x+8y+2=0$

2.36 $A\left(-\frac{1}{2},5\right), 6x-3y-15=0$

2.37 $A\left(-\frac{4}{7},\sqrt{3}\right), x+8y=0$

จงหาจุดตัดของเส้นตรงสองเส้นที่กำหนดให้ต่อไปนี้ (ถ้ามี) (ข้อ 2.38 - 2.40)

2.38 $x+y=1, 2x-y=2$

2.39 $3x+y=7, 2x-y=0$

2.40 $\frac{1}{2}x-5y=7, \frac{3}{2}x+y=2$

จงหาระยะทางระหว่างจุดกับเส้นตรงที่กำหนดให้ต่อไปนี้ (ข้อ 2.41 - 2.44)

2.41 $x+y=1, (1,2)$

2.42 $3x-y-2=0, (2,3)$

2.43 $y=0, (-5,3)$

2.44 $x+2=0, (3,6)$

จงหาระยะทางระหว่างเส้นตรง 2 เส้นที่กำหนดให้ต่อไปนี้ (ข้อ 2.45 - 2.47)

2.45 $x+y+1=0, x+y+2=0$

2.46 $9x+10y=7, 18x+20y=32$

2.47 $12x+5y=15, 12x+5y=12$