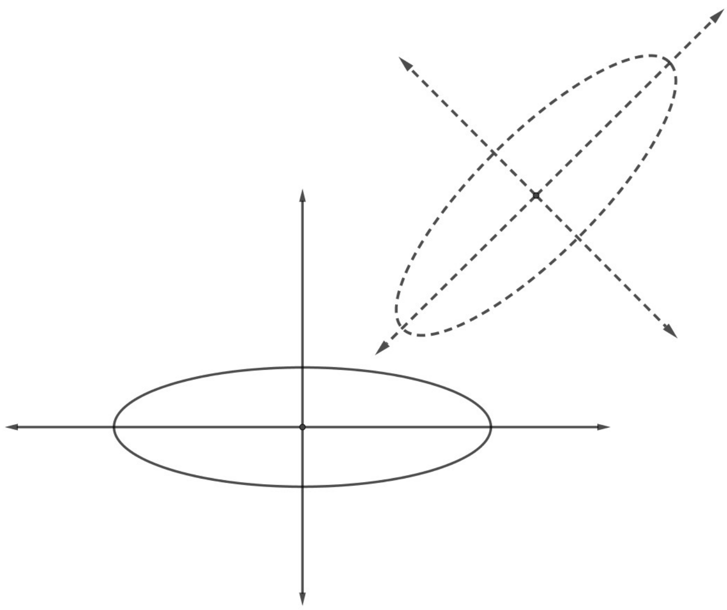
บทที่ 4
การปรับสมการให้เป็นรูปอย่างง่าย (Simplification of Equation)

การจัดรูปสมการให้อยู่ในรูปสมการมาตรฐานของภาคตัดกรวยในบทที่ 3 เราจะสังเกตเห็นว่ารูปเรขาคณิตแต่ละรูปนั้นมีสมมาตรกับแกน X และแกน Y หรือมีสมมาตรกับเส้นตรงที่ขนานกับแกน X และแกน Y เท่านั้น แต่ถ้ารูปเรขาคณิตดังกล่าวไม่ได้มีสมมาตรกับเส้นตรงที่ขนานกับแกน X และแกน Y แล้วจะมีพจน์ที่มีตัวแปร x กับตัวแปร y คูณกันอยู่ในสมการนั้น ซึ่งเป็นเรื่องยากที่เราจะจัดสมการให้อยู่ในรูปมาตรฐานของภาคตัดกรวย ซึ่งในบทที่ 4 จะแสดงถึงวิธีที่ทำให้การจัดรูปสมการให้อยู่ในรูปอย่างง่าย และนำไปสู่การวาดกราฟได้ง่ายขึ้น และวิธีดังกล่าวก็คือการเลื่อนแกน และการหมุนแกน

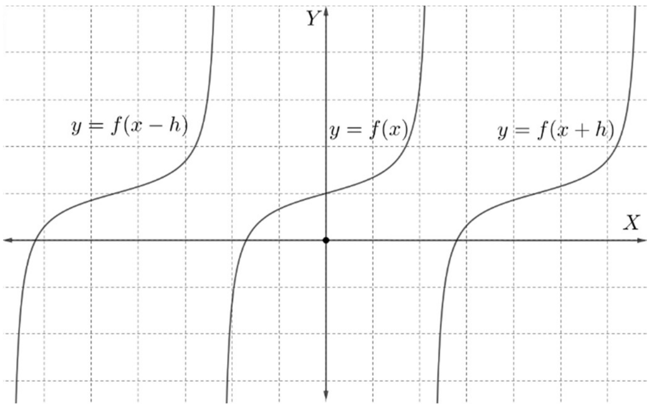
การย้ายแกนเป็นการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งจุดเริ่มต้นไปอยู่ ณ ตำแหน่งใหม่ที่จุดใดจุดหนึ่งเพื่อที่จะทำให้สมการของกราฟอยู่ในรูปที่ง่ายขึ้น ซึ่งโดยปกติจะเป็นการย้ายจุดเริ่มต้นไปยังจุดศูนย์กลางของกราฟนั่นเอง ดังนั้นกราฟของสมการจะอยู่ในรูปที่ไม่มีเทอมกำลังหนึ่งของตัวแปร การหมุนแกนเป็นการเปลี่ยนแปลงระบบพิกัดโดยหมุนแกน X และแกน Y ไปเป็นมุม θ ขณะที่มีจุดเริ่มต้นคือจุด $(0,0)$ ทั้งนี้เพื่อจะกำจัดเทอม xy ของสมการนั่นเอง



รูปที่ 4.1 แสดงการหมุนและเลื่อนแกน

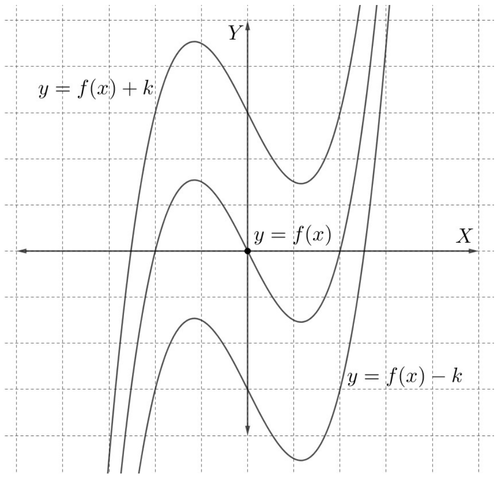
4.1 การเลื่อนแกน (Translation of Axes)

ศรีบุตร แววเจริญ และ ชนศักดิ์ บ่ายเที่ยง (2544 : 154 -155) ได้กล่าวว่า ในการเลื่อนแกนนั้นจะเกี่ยวข้องกับการแปลง (Transformation) อยู่สองลักษณะ คือ การเลื่อนตามแนวนอน (Horizontal Shift) และการเลื่อนตามแนวดิ่ง (Vertical Shift) เช่น สมการ $y = f(x+h)$ จะมีลักษณะกราฟสมภาค (Congruence) กับสมการ $y = f(x)$ โดยถ้า $h > 0$ เลื่อนกราฟไปทางขวา $|h|$ หน่วย ถ้า $h < 0$ เลื่อนไปทางซ้าย $|h|$ หน่วย ดังรูปที่ 4.2



รูปที่ 4.2 แสดงการเลื่อนตามแนวนอน

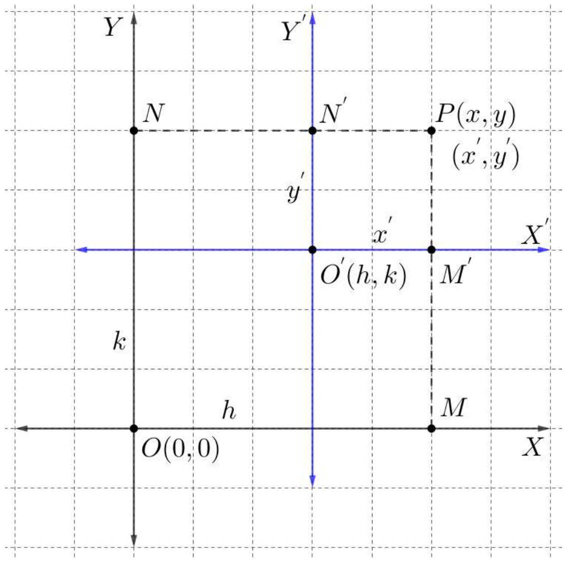
ในทำนองเดียวกัน กราฟ $y - k = f(x)$ หรือ $y = f(x) + k$ จะมีลักษณะของกราฟสมภาคกับ $y = f(x)$ โดยถ้า $k > 0$ เลื่อนกราฟขึ้นไปข้างบน $|k|$ หน่วย ถ้า $h < 0$ เลื่อนกราฟลงข้างล่าง $|k|$ หน่วย ดังรูปที่ 4.3



รูปที่ 4.3 แสดงการเลื่อนตามแนวดิ่ง

Protter, Murray H. & Morrer, Charles B. Jr. (1975 : 140-141) & Riddle, Douglas F. (1996 :186-187) ได้กล่าวว่า สำหรับกราฟที่มีรูปสมการเป็น $f(x-h,\, y-k)=c$ กราฟจะสมภาคกับ $f(x,\, y)=c$ โดย ต้องเลื่อนตามแนวแกนนอนไป h หน่วย และเลื่อนตามแนวแกนตั้งไป k หน่วย

สมมติให้แกน OX และ OY เป็นแกนชุดเดิม และให้แกน $O'X'$ และ $O'Y'$ เป็นแกนชุดใหม่ ซึ่งมีจุดพิกัดของ O' คือจุด (h,k) เมื่อเทียบกับแกนชุดเก่า ดังรูปที่ 4.4



รูปที่ 4.4 แกนชุดเก่าเทียบกับแกนชุดใหม่

ให้ P เป็นจุดหนึ่งซึ่งมีพิกัดเป็น (x,y) เมื่อเทียบกับแกนชุดเก่า และ P เป็นจุดพิกัด (x',y') เมื่อเทียบกับแกนชุดใหม่ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} PN &= PN' + N'N \\ x &= x' + h \\ PM &= PM' + M'M \\ y &= y' + k \end{aligned}$$

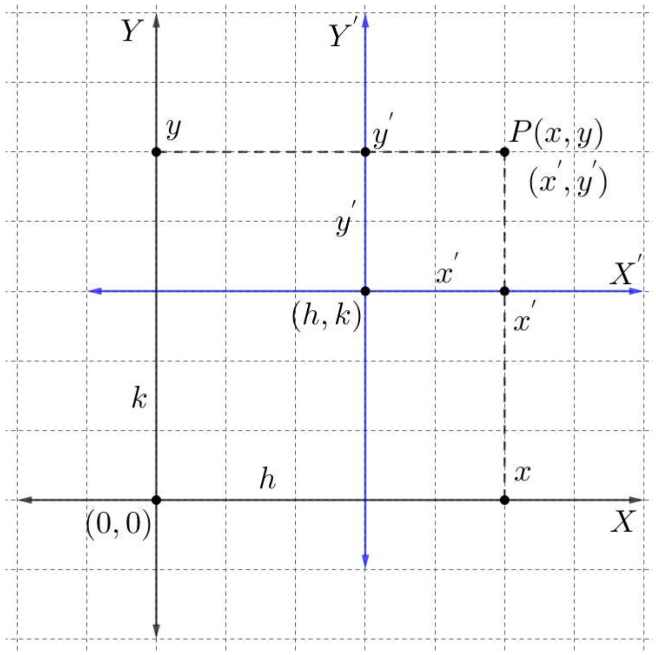
นั่นคือ

$$x = x' + h,\, y = y' + k$$

ความสัมพันธ์ระหว่างระบบพิกัดเก่า (x,y) กับระบบพิกัดใหม่ (x',y') เมื่อมีการเลื่อนแกน X ไป h หน่วย เลื่อนแกน Y ไป k หน่วย เป็น

$$x' = x - h,\;\; y' = y - k$$

ในการเลื่อนย้ายจุดกำเนิด $(0,0)$ ไปอยู่ที่จุดกำเนิดใหม่ (h,k) ซึ่งแกนของพิกัดใหม่ $O'X'$ และ $O'Y'$ ยังคงขนานกับแกนชุดเดิมอยู่เขียนพิกัด (x',y') เมื่อเทียบกับแกนพิกัดใหม่ และเขียนพิกัด (x,y) เมื่อเทียบกับแกนพิกัดเดิม เมื่อต้องการอ่านพิกัด (x',y') เทียบกับแกนพิกัดเดิม (x,y) ให้ใช้ความสัมพันธ์ใน $x = x'+h, y = y'+k$ ในทำนองเดียวกัน เมื่อต้องการอ่านพิกัด (x,y) เมื่อเทียบกับแกนพิกัดใหม่ให้ใช้ความสัมพันธ์ใน $x' = x-h,\ y' = y-k$ ดังรูปที่ 4.5



รูปที่ 4.5 แกนชุดใหม่เทียบกับแกนชุดเก่า

ตัวอย่าง 4.1.1 จงเปลี่ยนสมการเส้นตรง $2x+3y-4=0$ ให้มาเทียบกับแกนชุดใหม่ $X'Y'$ ซึ่งขนานกับแกนชุดเก่าโดยมีจุดกำเนิดใหม่ที่ $(3,4)$

วิธีทำ สร้างแกนพิกัดใหม่โดยมีจุดกำเนิดใหม่อยู่ที่จุด $(3,4)$ จะได้

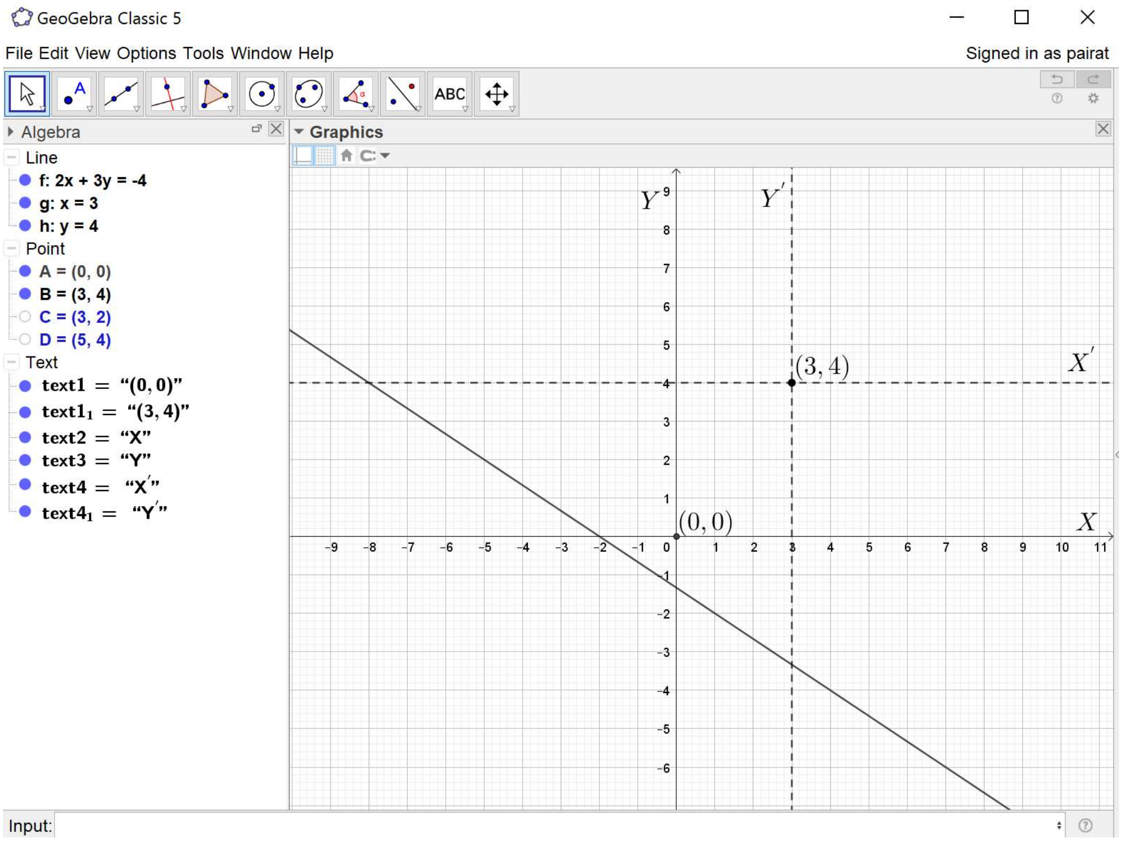
$$\begin{aligned} x &= x'+h \\ &= x'+3 \\ y &= y'+k \\ &= y'+4 \end{aligned}$$

จัดสมการเส้นตรงใหม่จะได้

$$x + 3y - 4 = 0$$
$$2(x' + 3) + 3(y' + 4) - 4 = 0$$
$$2x' + 3y' + 14 = 0$$

ดังนั้น $2x' + 3y' + 14 = 0$ เป็นสมการเส้นตรงเมื่อเทียบกับแกนพิกัดใหม่

ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 4.1.1 ดังรูปที่ 4.6



รูปที่ 4.6 กราฟเส้นตรง $2x' + 3y' + 14 = 0$ เทียบกับแกน $X'Y'$

ตัวอย่าง 4.1.2 จงเลื่อนแกนให้เหมาะสมเพื่อจัดสมการวงกลม $x^2+y^2-8x+2y+8=0$ ให้อยู่ในรูปมาตรฐาน $(x')^2+(y')^2=r^2$ พร้อมทั้งหาจุดกำเนิดของพิกัดใหม่

วิธีทำ จัดสมการวงกลมให้อยู่ในรูปมาตรฐาน จะได้

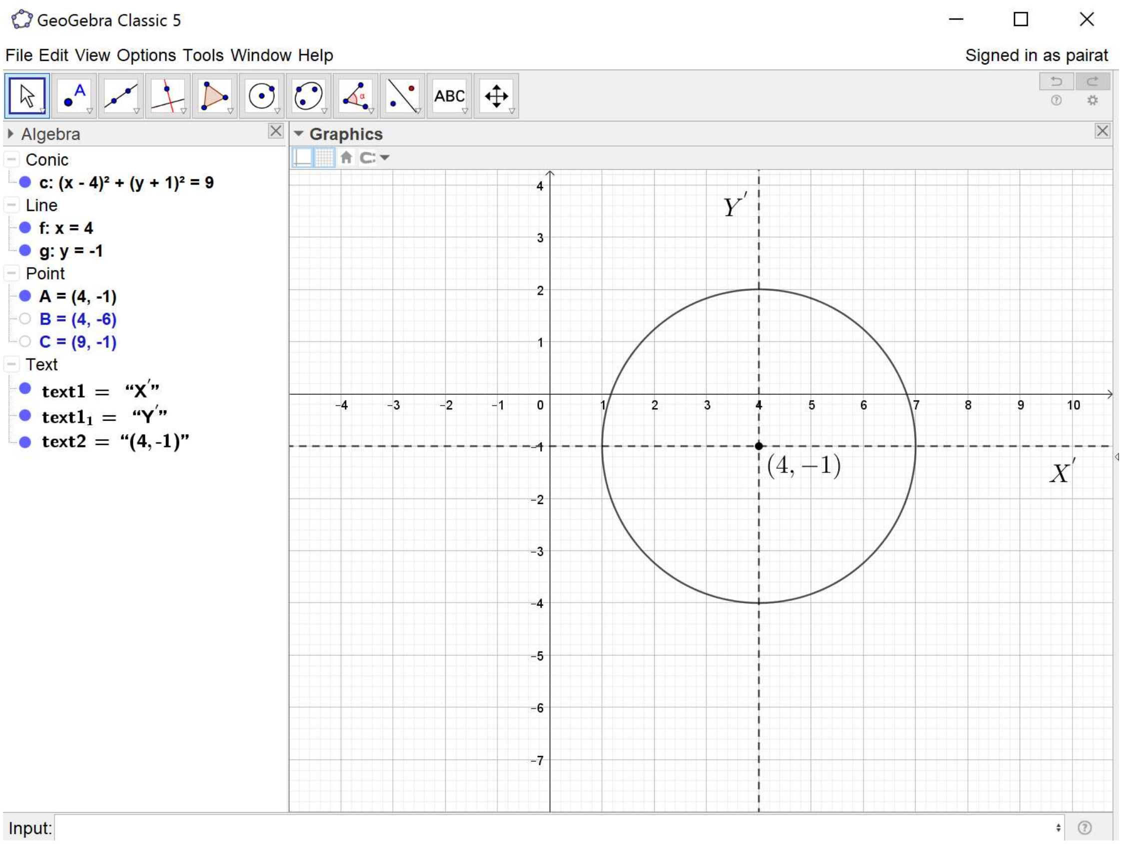
$$x^2+y^2-8x+2y+8=0$$
$$x^2-8x+16+y^2+2y+1=-8+16+1$$
$$(x-4)^2+(y+1)^2=9 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

ให้ $x=x'+4,\ y=y'-1$ แทนลงในสมการ (1) จะได้

$$(x-4)^2+(y+1)^2=9$$
$$((x'+4)-4)^2+((y'-1)+1)^2=9$$
$$(x')^2+(y')^2=3^2$$

ดังนั้น สมการวงกลมคือ $(x')^2+(y')^2=3^2$ จุดกำเนิดของพิกัดใหม่คือจุด $(4,-1)$

ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 4.1.2 ดังรูปที่ 4.7



รูปที่ 4.7 กราฟวงกลม $(x')^2+(y')^2=3^2$ เทียบกับแกน $X'Y'$

ตัวอย่าง 4.1.3 จงเลื่อนแกนของสมการ $x^2 - 6x - 6y + 15 = 0$ ให้อยู่ในรูปสมการมาตรฐานของภาคตัดกรวย

วิธีทำ จัดสมการให้อยู่ในรูปมาตรฐาน จะได้

$$x^2 - 6x - 6y + 15 = 0$$

$$x^2 - 6x + 9 = 6y - 15 + 9$$

$$(x-3)^2 = 6(y-1) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

เป็นกราฟพาราโบลา ซึ่งมีจุดยอดอยู่ที่จุด $(3,1)$

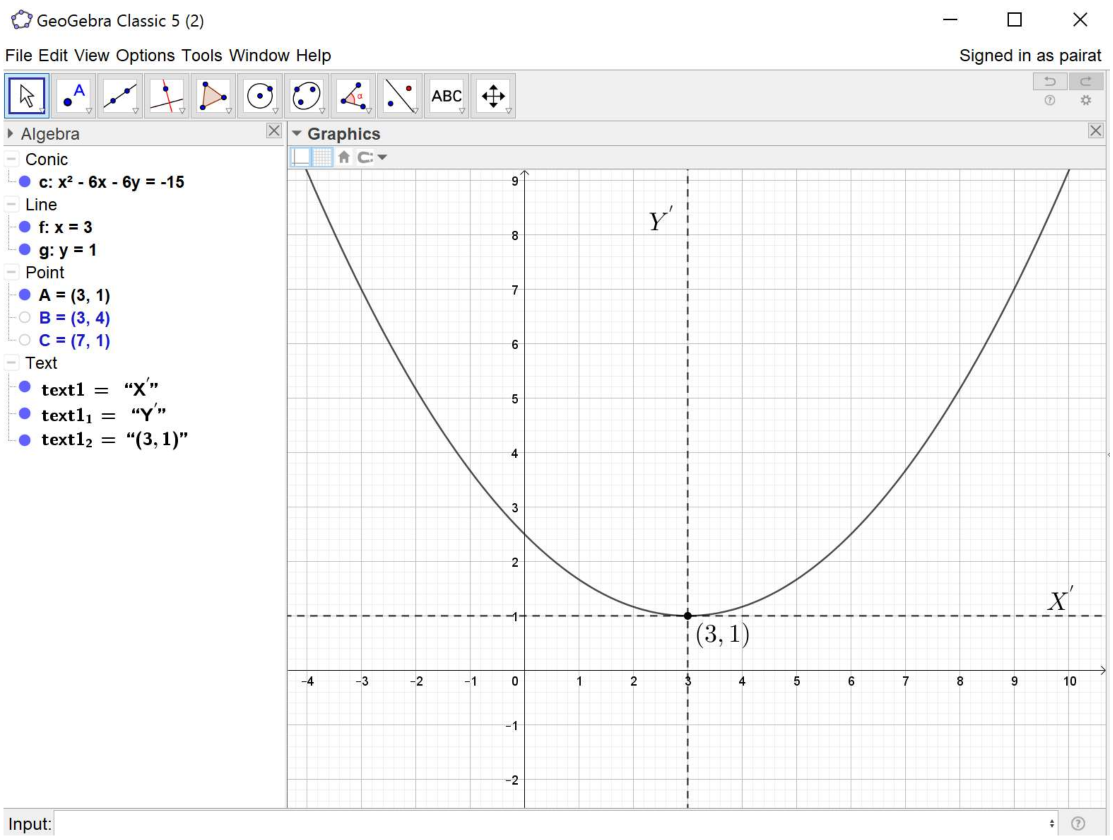
ให้ $x = x' + 3,\ y = y' + 1$ แทนลงในสมการ (2) จะได้

$$((x'+3)-3)^2 = 6((y'+1)-1)$$

$$(x')^2 = 6(y')$$

ดังนั้น สมการอยู่ในรูปพิกัดใหม่คือ $(x')^2 = 6(y')$

ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 4.1.3 ดังรูปที่ 4.8



รูปที่ 4.8 กราฟพาราโบลา $(x')^2 = 6(y')$ เทียบกับแกน $X'Y'$

ตัวอย่าง 4.1.4 จงเลื่อนแกนของสมการ $25x^2 - 16y^2 + 150x + 32y - 191 = 0$ ให้อยู่ในรูปสมการมาตรฐานของภาคตัดกรวย

วิธีทำ จัดสมการให้อยู่ในรูปมาตรฐาน จะได้

$$25x^2 - 16y^2 + 150x + 32y - 191 = 0$$

$$25(x^2 + 6x + 9) - 16(y^2 - 2y + 1) = 191 + 225 - 16$$

$$\frac{(x+3)^2}{16} - \frac{(y-1)^2}{25} = 1 \quad \text{..}(3)$$

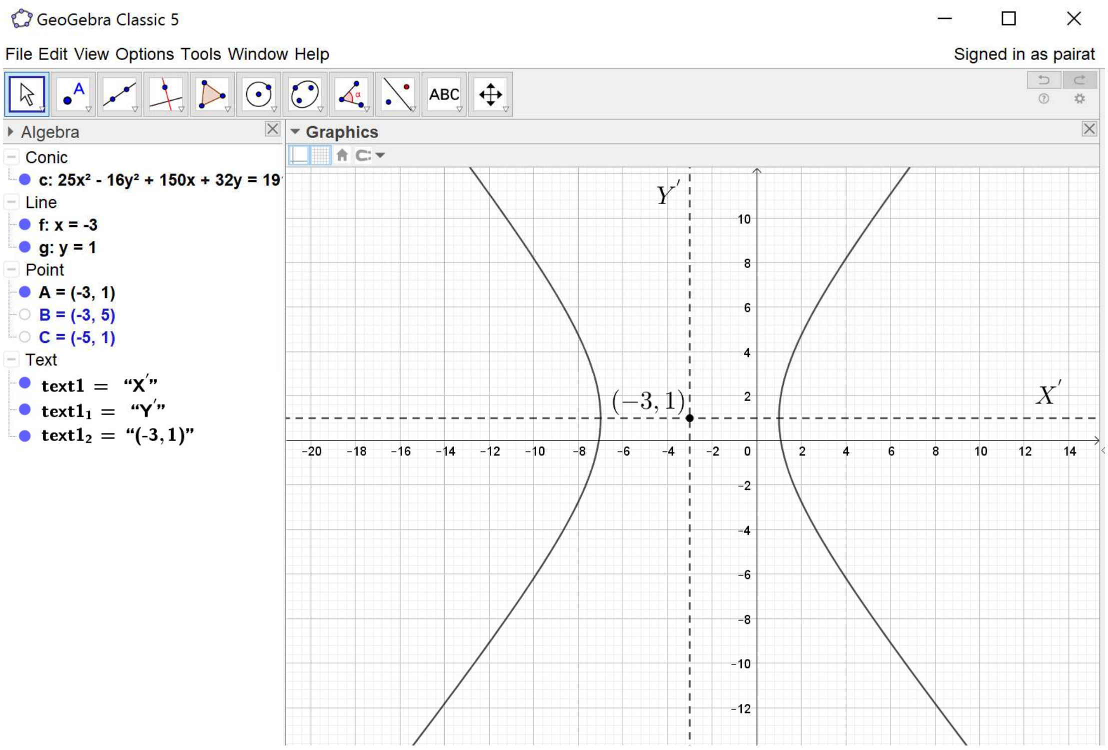
เป็นกราฟไฮเพอร์โบลา ซึ่งมีจุดยอดอยู่ที่จุด $(3,1)$

ให้ $x = x' - 3,\ y = y' + 1$ แทนลงในสมการ (3) จะได้

$$\frac{(x')^2}{16} - \frac{(y')^2}{25} = 1$$

ดังนั้น สมการอยู่ในรูปพิกัดใหม่คือ $\dfrac{(x')^2}{4^2} - \dfrac{(y')^2}{5^2} = 1$

ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 4.1.4 ดังรูปที่ 4.9



รูปที่ 4.9 กราฟไฮเพอร์โบลา $\dfrac{(x')^2}{16} - \dfrac{(y')^2}{25} = 1$ เทียบกับแกน $X'Y'$

ตัวอย่าง 4.1.5 จงเลื่อนแกนของสมการ $2x^2+3y^2+8x-18y=-11$ ให้อยู่ในรูปสมการมาตรฐานของภาคตัดกรวย

วิธีทำ จัดสมการให้อยู่ในรูปมาตรฐาน จะได้

$$\begin{aligned}2x^2+3y^2+8x-18y&=-11\\2(x^2+4x+4)+3(y^2-6y+9)&=-11+8+27\\2(x+2)^2+3(y-3)^2&=24\\\frac{(x+2)^2}{12}+\frac{(y-3)^2}{8}&=1 \qquad \text{.......................................}(4)\end{aligned}$$

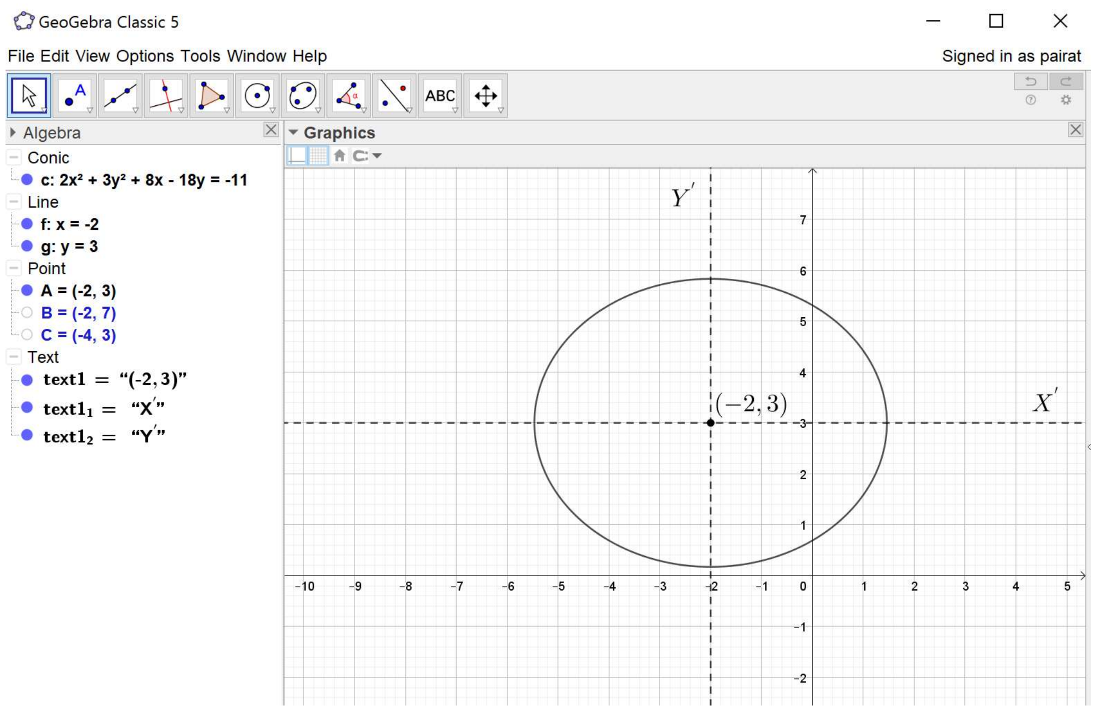
เป็นกราฟวงรี ซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(-2,3)$

ให้ $x=x'-2,\ y=y'+3$ แทนลงในสมการ (4) จะได้

$$\frac{(x')^2}{12}+\frac{(y')^2}{8}=1$$

ดังนั้น สมการอยู่ในรูปพิกัดใหม่คือ $\dfrac{(x')^2}{12}+\dfrac{(y')^2}{8}=1$

ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 4.1.5 ดังรูปที่ 4.10



รูปที่ 4.10 กราฟวงรี $\dfrac{(x')^2}{12}+\dfrac{(y')^2}{8}=1$ เทียบกับแกน $X'Y'$

ตัวอย่าง 4.1.6 จงเลื่อนแกนของสมการ $9x^2 - 4y^2 + 18x - 16y = 7$ ให้อยู่ในรูปสมการมาตรฐานของภาคตัดกรวย

วิธีทำ จัดสมการให้อยู่ในรูปมาตรฐาน จะได้

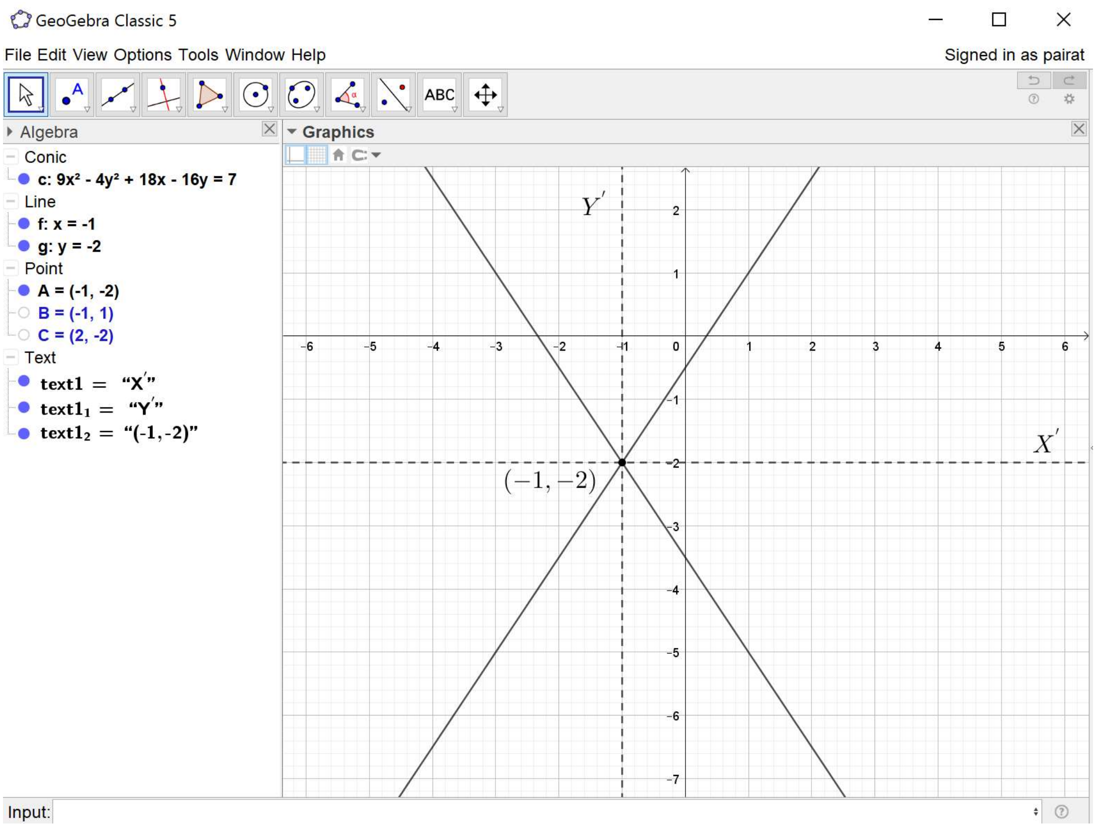
$$9x^2 - 4y^2 + 18x - 16y - 7 = 0$$
$$9(x^2 + 2x + 1) - 4(y^2 + 4y + 4) = 7 + 9 - 16$$
$$9(x+1)^2 - 4(y+2)^2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

ให้ $x = x' - 1,\ y = y' - 2$ แทนลงในสมการ (5) จะได้

$$9(x+1)^2 - 4(y+2)^2 = 0$$
$$9((x'-1)+1)^2 - 4((y'-2)+2)^2 = 0$$
$$(3x' - 2y')(2x' + 2y') = 0$$

ดังนั้น สมการอยู่ในรูปพิกัดใหม่คือ $3x' - 2y' = 0$ หรือ $2x' + 2y' = 0$

ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 4.1.6 ดังรูปที่ 4.11



รูปที่ 4.11 กราฟเส้นตรง $3x' - 2y' = 0$ หรือ $2x' + 2y' = 0$ เทียบกับแกน $X'Y'$

4.2 การหมุนแกน (Rotation of Axes)

บทนิยาม 4.2.1 การหมุนแกน คือ การแปลงระบบแกนพิกัด ซึ่งจุดกำเนิด (Origin) อยู่ตำแหน่งเดิม และหมุนแกนไปเป็นมุมคงที่มุมหนึ่งรอบจุดคงที่

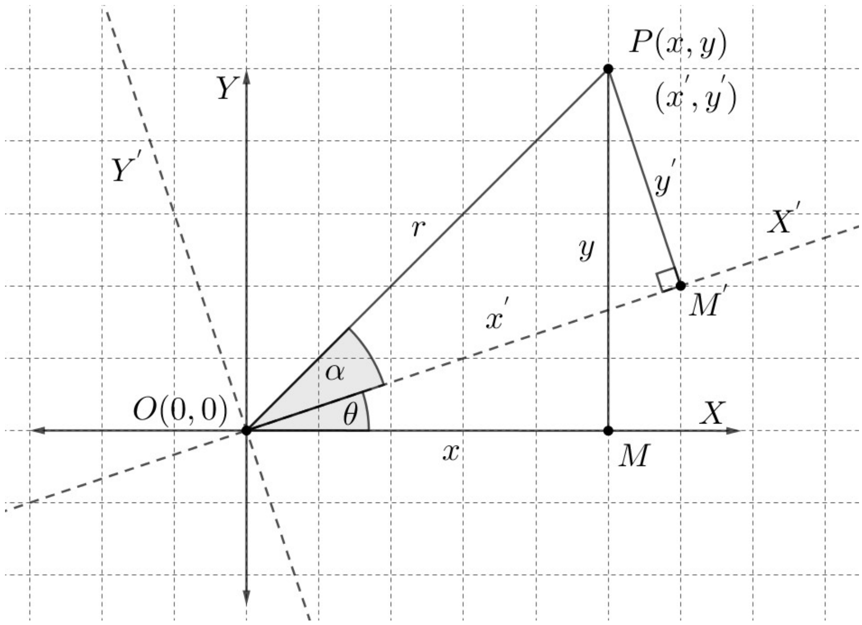
(สุเทพ ลิ่มอรุณ, 2542 : 45 และ Riddle, Douglas F, 1996 : 200)

เราทราบว่า ภาคตัดกรวยใด ๆ ที่มีแกนขนานกับแกนพิกัด สามารถแทนในรูปสมการระดับขั้นสอง

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

สำหรับสมการระดับขั้นสองใด ๆ $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ โดยที่ $B \neq 0$ ยังแทนภาคตัดกรวย หรือ ภาคตัดกรวยลดรูป (Degenerate Conic) ที่มีแกนขนานกับแกนพิกัดได้ ในการศึกษาการวาดกราฟของสมการระดับขั้นที่สองใด ๆ โดยที่ $B \neq 0$ เราสามารถกำจัดเทอม Bxy ออกไปจากสมการได้โดยใช้วิธีการหมุนแกน สมมติสมการระดับขั้นที่สองใด ๆ ที่ $B \neq 0$ คือ

สมมติว่าหมุนแกน OX และแกน OY ไปเป็นมุม θ โดย $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ ดังรูปที่ 4.12



รูปที่ 4.12 แสดงหมุนแกน OX และแกน OY ไปเป็นมุม θ โดย $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$

Protter, Murray H. & Morrer, Charles B. Jr. (1975 : 145-146) ได้กล่าวว่า ถ้า (x', y') เป็นพิกัดของจุด P เมื่อเทียบกับแกน OX' และ OY' ใหม่

และ (x, y) เป็นพิกัดของจุด P เมื่อเทียบกับแกน OX และ OY เดิม

เพราะว่า $OM' = OP\cos\alpha$ และ $PM' = OP\sin\alpha$

จะได้ $x' = r\cos\alpha$ และ $y' = r\sin\alpha$

เพราะว่า $OM = OP\cos(\theta+\alpha)$ และ $PM = OP\sin(\theta+\alpha)$ จะได้

$$\begin{aligned} OM &= r(\cos\theta\cos\alpha - \sin\theta\sin\alpha) \\ &= (r\cos\alpha)\cos\theta - (r\sin\alpha)\sin\theta \\ &= x'\cos\theta - y'\sin\theta \end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned} PM &= r(\sin\theta\cos\alpha + \cos\theta\sin\alpha) \\ &= (r\cos\alpha)\sin\theta + (r\sin\alpha)\cos\theta \\ &= x'\sin\theta + y'\cos\theta \end{aligned}$$

นั่นคือ

$$x = x'\cos\theta - y'\sin\theta,\ y = x'\sin\theta + y'\cos\theta \quad \text{..................................}(5)$$

เมื่อต้องการเขียน x' และ y' ในเทอมของ x, y ก็สามารถหาได้จากระบบสมการ (5) ดังนี้

$$x' = \frac{\begin{vmatrix} x & -\sin\theta \\ y & \cos\theta \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}}$$

$$x' = x\cos\theta + y\sin\theta$$

$$y' = \frac{\begin{vmatrix} \cos\theta & x \\ \sin\theta & y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}}$$

$$y' = -x\sin\theta + y\cos\theta$$

นั่นคือ

$$x' = x\cos\theta + y\sin\theta,\ y' = -x\sin\theta + y\cos\theta \quad \text{..............................}(6)$$

แทน x และ y ในเทอมของ x' และ y' ลงในสมการ $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

จัดสมการใหม่ได้ดังนี้

$$A(x'\cos\theta - y'\sin\theta)^2 + B\Big(x'\cos\theta - y'\sin\theta\Big)(x'\sin\theta + y'\cos\theta) +$$
$$+C(x'\sin\theta + y'\cos\theta)^2 + D\Big(x'\cos\theta - y'\sin\theta\Big) + E(x'\sin\theta + y'\cos\theta) + F = 0$$

ซึ่งจัดใหม่ได้เป็น $A'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$

โดยที่

$$\begin{aligned} A' &= A\cos^2\theta + B\sin\theta\cos\theta + C\sin^2\theta \\ B' &= \frac{B}{2}(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + (C-A)\sin\theta\cos\theta \\ C' &= A\sin^2 - B\sin\theta\cos\theta + C\cos^2\theta \\ D' &= D\cos\theta + E\sin\theta \\ E' &= E\cos\theta - D\sin\theta \\ F' &= F \end{aligned}$$

แต่เราต้องการหมุนแกนให้เทอม xy หายไป หรือสัมประสิทธิ์ของเทอม xy เท่ากับศูนย์ จะต้องเลือก θ ที่ทำให้ $B' = 0$ เราจะได้

$$\begin{aligned} B(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + 2(C-A)\sin\theta\cos\theta &= 0 \\ B\cos 2\theta + (C-A)2\sin\theta\cos\theta &= 0 \\ B\cos 2\theta &= (A-C)\sin 2\theta \\ \frac{\cos 2\theta}{\sin 2\theta} &= \frac{A-C}{B} \\ \cot 2\theta &= \frac{A-C}{B} \end{aligned}$$

สมการ $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ อาจจะแปลงเป็นสมการรูปใหม่เป็น $A'x'^2 + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$ ได้ ถ้าเราหมุนแกนไปเป็นมุม θ ซึ่ง θ หาได้จากสูตร $\cot 2\theta = \dfrac{A-C}{B}$ ก่อนแล้วจึงหา $\sin\theta$ และ $\cos\theta$ จากสูตรตรีโกณมิติ ดังนี้

$$\sin\theta = \sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{2}} \quad \text{และ} \quad \cos\theta = \sqrt{\frac{1+\cos 2\theta}{2}} \quad \text{เมื่อ } 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

ข้อสังเกต สมการระดับขั้นที่สอง ถ้า $B \neq 0$ และ $A = C$ ให้ใช้การหมุนแกนเป็นมุม $\theta = 45^\circ$ แล้วสามารถกำจัดเทอม xy ได้

ตัวอย่าง 4.2.1 จงหาสมการใหม่ของสมการ $x^2 + xy + y^2 = 8$ หลังจากการหมุนแกนเป็นมุม 45°

วิธีทำ จากสูตรการหมุนแกน $x = x'\cos\theta - y'\sin\theta$ และ $y = x'\sin\theta + y'\cos\theta$ ในที่นี้ $\theta = 45^\circ$

เนื่องจาก $\cos 45^\circ = \sin 45^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ จะได้ว่า $x = \dfrac{x' - y'}{\sqrt{2}}$ และ $y = \dfrac{x' + y'}{\sqrt{2}}$

แทนค่า x และ y ลงในสมการจะได้

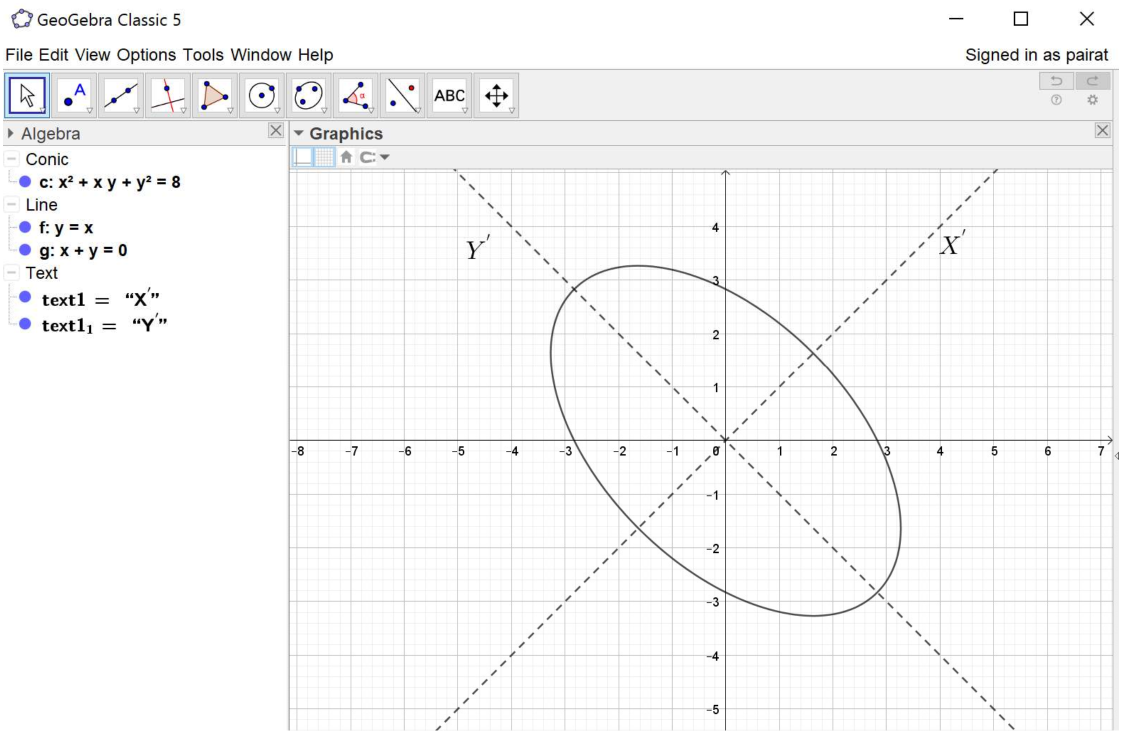
$$\left(\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right)^2 = 8$$

$$\frac{x'^2 - 2x'y' + y'^2}{2} + \frac{x'^2 - y'^2}{2} + \frac{x'^2 + 2x'y' + y'^2}{2} = 8$$

$$\frac{3x'^2}{16} + \frac{y'^2}{16} = 1$$

ดังนั้น สมการอยู่ในรูปพิกัดใหม่คือ $\dfrac{3x'^2}{16} + \dfrac{y'^2}{16} = 1$

ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 4.2.1 ดังรูปที่ 4.13



รูปที่ 4.13 กราฟวงรี $\dfrac{3x'^2}{16} + \dfrac{y'^2}{16} = 1$ เทียบกับแกน $X'Y'$

ตัวอย่าง 4.2.2 จงหามุม θ ของการหมุนแกนของสมการ $x^2+y^2+2xy-x+y=0$ ให้ไม่มีเทอม $x'y'$ พร้อมวาดกราฟ

วิธีทำ หามุม θ ที่ทำให้ไม่มีเทอม $x'y'$ จาก $\cot 2\theta = \dfrac{A-C}{B}$

เนื่องจาก $A=1, B=2$ และ $C=1$ แล้วจะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\cot 2\theta &= \frac{A-C}{B} \\
&= \frac{1-1}{2} \\
&= 0 \\
2\theta &= 90^\circ \\
\theta &= 45^\circ
\end{aligned}$$

จากสูตรการหมุนแกน $x=x'\cos\theta - y'\sin\theta$ และ $y=x'\sin\theta + y'\cos\theta$ จะได้ว่า

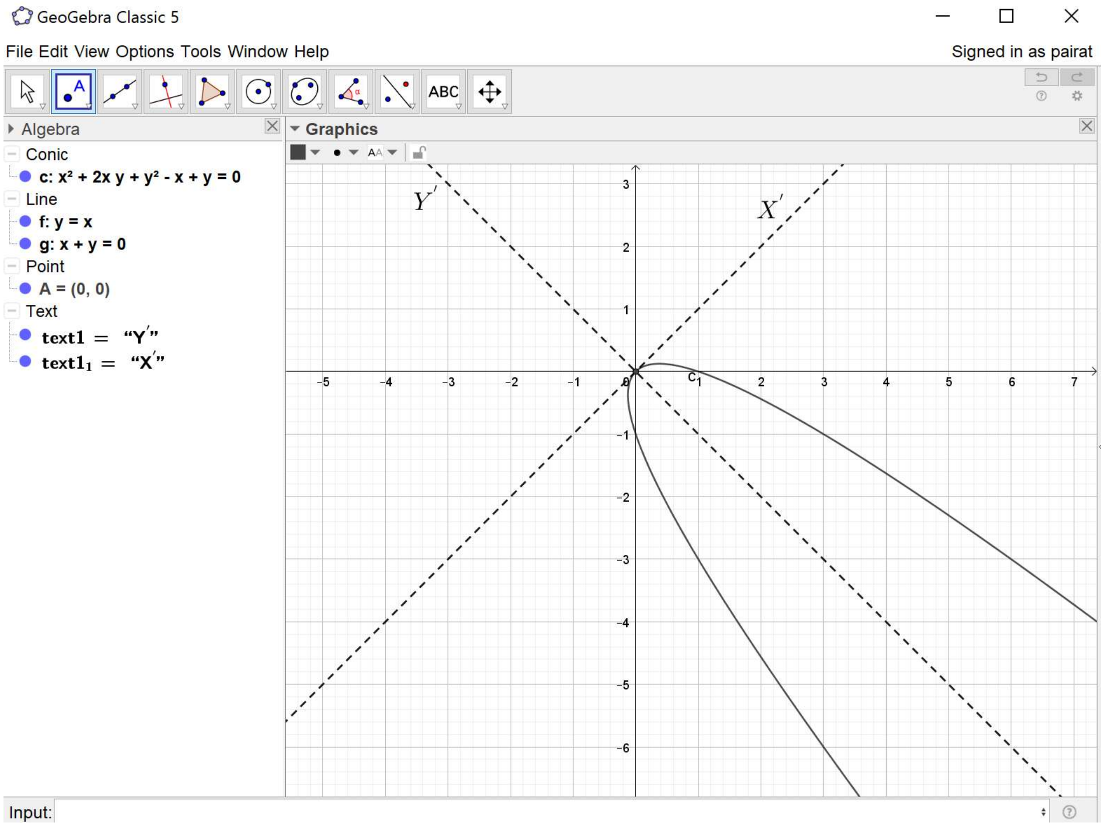
$$\begin{aligned}
x &= x'\cos\theta - y'\sin\theta \\
&= x'\cos 45^\circ - y'\sin 45^\circ \\
&= \frac{x'-y'}{\sqrt{2}} \\
y &= x'\sin\theta + y'\cos\theta \\
&= x'\sin 45^\circ + y'\cos 45^\circ \\
&= \frac{x'+y'}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

แทนค่า x และ y ลงในสมการจะได้

$$\begin{aligned}
x^2+y^2+2xy-x+y &= 0 \\
\left(\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right)^2 + 2\left(\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right) - \left(\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right) &= 0 \\
\frac{x'^2-2x'y'+y'^2}{2} + \frac{x'^2+2x'y'+y'^2}{2} + x'^2 - y'^2 + \frac{-x'+y'+x'+y'}{\sqrt{2}} &= 0 \\
2x'^2 + \frac{2y'}{\sqrt{2}} &= 0 \\
2x'^2 &= -\sqrt{2}y'
\end{aligned}$$

ดังนั้น สมการอยู่ในรูปพิกัดใหม่คือ $x'^2 = \dfrac{-\sqrt{2}}{2}y'$

ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 4.2.2 ดังรูปที่ 4.14



รูปที่ 4.14 กราฟพาราโบลา $x'^2 = \dfrac{-\sqrt{2}}{2}y'$ เทียบกับแกน $X'Y'$

ตัวอย่าง 4.2.3 จงหามุม θ ของการหมุนแกนของสมการ $3x^2 - y^2 + 4\sqrt{3}\,xy = 15$ ให้ไม่มีเทอม $x'y'$ พร้อมวาดกราฟ

วิธีทำ หามุม θ ที่ทำให้ไม่มีเทอม $x'y'$ จาก $\cot 2\theta = \dfrac{A-C}{B}$

เนื่องจาก $A = 3, B = 4\sqrt{3}$ และ $C = -1$ แล้วจะได้ว่า

$$\begin{aligned}\cot 2\theta &= \frac{3-(-1)}{4\sqrt{3}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\\ 2\theta &= 60^\circ\\ \theta &= 30^\circ\end{aligned}$$

จากสูตรการหมุนแกน $x = x'\cos\theta - y'\sin\theta$ และ $y = x'\sin\theta + y'\cos\theta$ จะได้ว่า

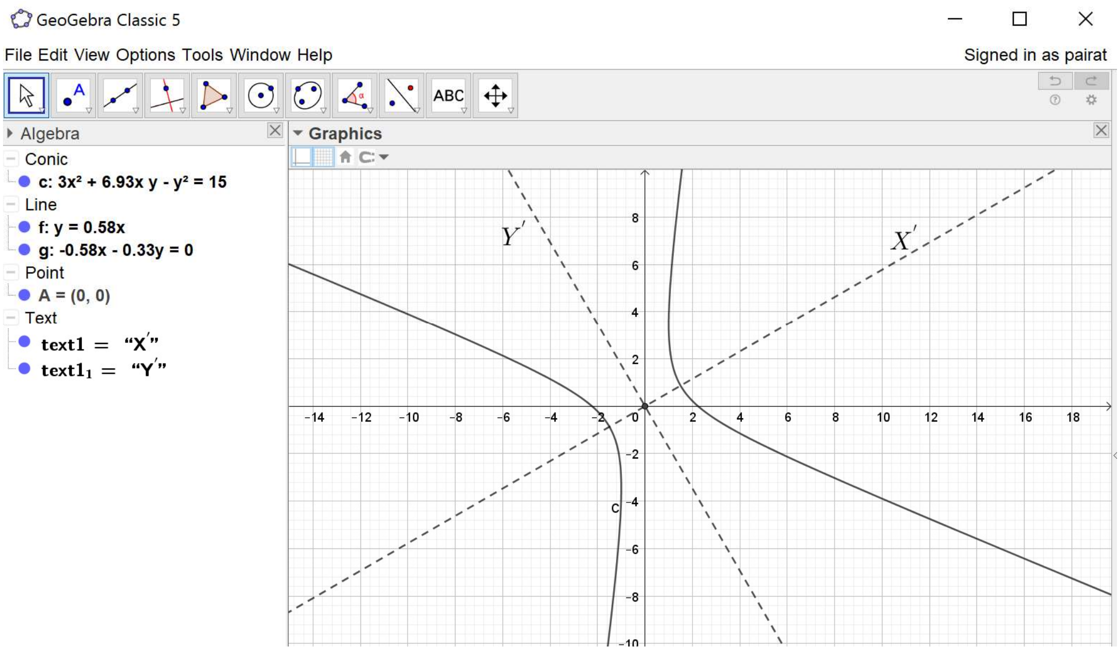
$$
\begin{aligned}
x &= x'\cos 30^\circ - y'\sin 30^\circ \\
&= \frac{\sqrt{3}x' - y'}{2} \\
y &= x'\sin 30^\circ + y'\cos 30^\circ \\
&= \frac{x' + \sqrt{3}y'}{2}
\end{aligned}
$$

แทนค่า x และ y ลงในสมการจะได้

$$
\begin{aligned}
3x^2 - y^2 + 4\sqrt{3}\,xy &= 15 \\
3\left(\frac{\sqrt{3}x' - y'}{2}\right)^2 - \left(\frac{x' + \sqrt{3}y'}{2}\right)^2 + 4\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}x' - y'}{2}\right)\left(\frac{x' + \sqrt{3}y'}{2}\right) &= 15 \\
\frac{9x'^2 - 6\sqrt{3}x'y' + 3y'^2}{4} - \frac{x'^2 + 2\sqrt{3}x'y' + 3y'^2}{4} + \frac{12x'^2 + 8\sqrt{3}x'y' - 12y'^2}{4} &= 15 \\
5x'^2 - 3y'^2 &= 15
\end{aligned}
$$

ดังนั้น สมการอยู่ในรูปพิกัดใหม่คือ $\dfrac{x'^2}{3} - \dfrac{y'^2}{5} = 1$

ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 4.2.3 ดังรูปที่ 4.15



รูปที่ 4.15 กราฟไฮเพอร์โบลา $\dfrac{x'^2}{3} - \dfrac{y'^2}{5} = 1$ เทียบกับแกน $X'Y'$

ตัวอย่าง 4.2.4 จงหามุม θ ของการหมุนแกนของสมการ $x^2+\sqrt{3}\,xy+2y^2-16=0$ ให้ไม่มีเทอม $x'y'$ พร้อมวาดกราฟ

วิธีทำ หามุม θ ที่ทำให้ไม่มีเทอม $x'y'$ จาก $\cot 2\theta=\dfrac{A-C}{B}$

เนื่องจาก $A=1, B=\sqrt{3}$ และ $C=2$ แล้วจะได้ว่า

$$\begin{aligned}\cot 2\theta &= \frac{1-2}{\sqrt{3}}\\ &= -\frac{1}{\sqrt{3}}\\ 2\theta &= 120^\circ\\ \theta &= 60^\circ\end{aligned}$$

จากสูตรการหมุนแกน $x=x'\cos\theta-y'\sin\theta$ และ $y=x'\sin\theta+y'\cos\theta$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}x &= x'\cos 60^\circ-y'\sin 60^\circ\\ &= \frac{x'-\sqrt{3}y'}{2}\end{aligned}$$

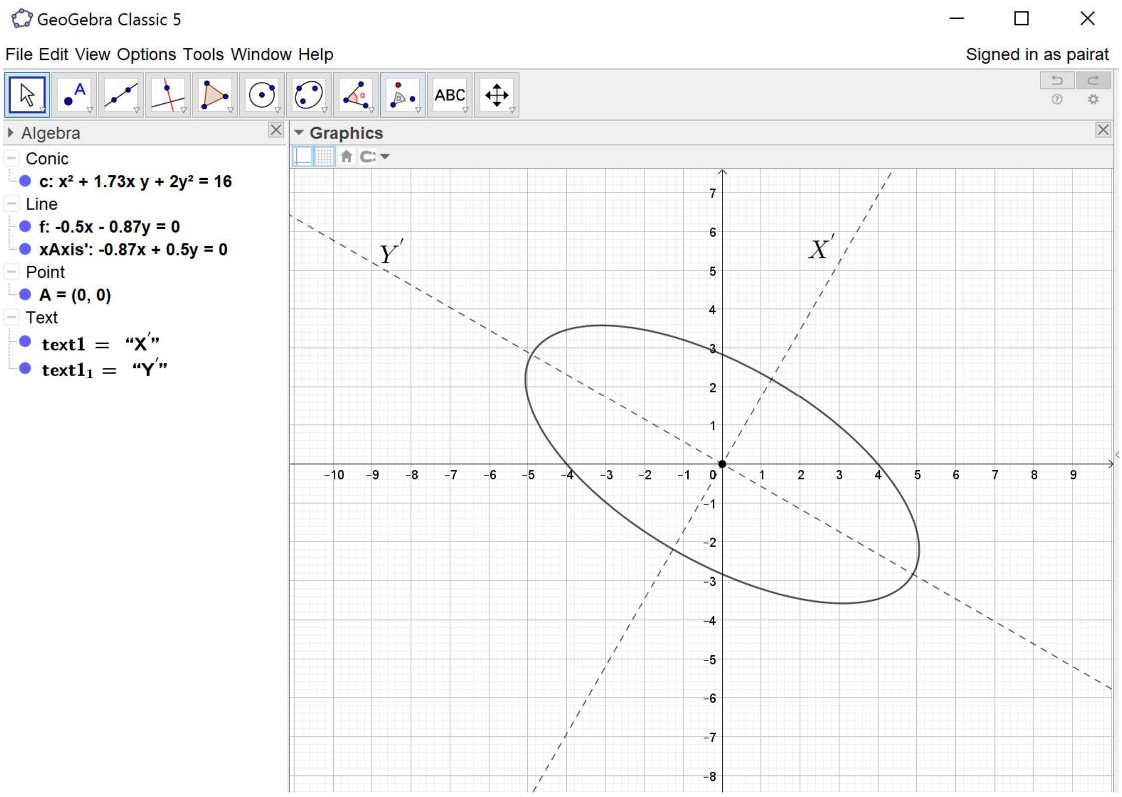
$$\begin{aligned}y &= x'\sin 60^\circ+y'\cos 60^\circ\\ &= \frac{\sqrt{3}x'+y'}{2}\end{aligned}$$

แทนค่า x และ y ลงในสมการจะได้

$$\begin{aligned}x^2+\sqrt{3}\,xy+2y^2-16&=0\\ \left(\frac{x'-\sqrt{3}y'}{2}\right)^2+\sqrt{3}\left(\frac{x'-\sqrt{3}y'}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}x'+y'}{2}\right)+2\left(\frac{\sqrt{3}x'+y'}{2}\right)^2&=16\\ \frac{x'^2-2\sqrt{3}x'y'+3y'^2}{4}-\frac{3x'^2-2\sqrt{3}x'y'-3y'^2}{4}+\frac{6x'^2+4\sqrt{3}x'y'+2y'^2}{4}&=16\\ \frac{x'^2+3y'^2}{4}-\frac{3x'^2-3y'^2}{4}+\frac{6x'^2+2y'^2}{4}&=16\\ x'^2+\frac{y'^2}{2}&=16\\ \frac{x'^2}{16}+\frac{y'^2}{32}&=1\end{aligned}$$

ดังนั้น สมการอยู่ในรูปพิกัดใหม่คือ $\dfrac{x'^2}{16}+\dfrac{y'^2}{32}=1$

ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 4.2.4 ดังรูปที่ 4.16

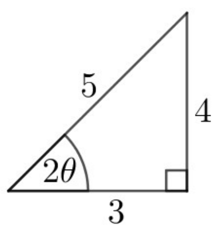


รูปที่ 4.16 กราฟวงรี $\dfrac{x'^2}{16}+\dfrac{y'^2}{32}=1$ เทียบกับแกน $X'Y'$

ตัวอย่าง 4.2.5 จงหมุนแกนของสมการ $4x^2+4xy+y^2=0$ ให้ไม่มีเทอม $x'y'$ พร้อมวาดกราฟ

วิธีทำ หามุม θ ที่ทำให้ไม่มีเทอม $x'y'$ จาก $\cot 2\theta=\dfrac{A-C}{B}$

เนื่องจาก $A=4, B=4$ และ $C=1$ แล้วจะได้ว่า



$$\cot 2\theta=\frac{4-1}{4}=\frac{3}{4} \quad \therefore 2\theta\approx 53.1301^\circ \text{ หรือ } \theta\approx 26.5651^\circ$$

จาก $\cot 2\theta=\dfrac{3}{4}$ จะได้ $\cos 2\theta=\dfrac{3}{5}$

หา $\sin\theta$ และ $\cos\theta$ จาก $\sin\theta=\sqrt{\dfrac{1-\cos 2\theta}{2}}$ และ $\cos\theta=\sqrt{\dfrac{1+\cos 2\theta}{2}}$ จะได้ว่า

$$\sin\theta=\sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{2}}=\frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{และ} \quad \cos\theta=\sqrt{\frac{1+\cos 2\theta}{2}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

จากสูตรการหมุนแกน $x = x'\cos\theta - y'\sin\theta$ และ $y = x'\sin\theta + y'\cos\theta$ จะได้ว่า

$$x = x'\cos\theta - y'\sin\theta \qquad\qquad y = x'\sin\theta + y'\cos\theta$$

$$= \frac{2x' - y'}{\sqrt{5}} \qquad \text{และ} \qquad = \frac{x' + 2y'}{\sqrt{5}}$$

แทนค่า x และ y ลงในสมการจะได้

$$4x^2 + 4xy + y^2 = 0$$

$$4\left(\frac{2x' - y'}{\sqrt{5}}\right)^2 + 4\left(\frac{2x' - y'}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{x' + 2y'}{\sqrt{5}}\right) + \left(\frac{x' + 2y'}{\sqrt{5}}\right)^2 = 0$$

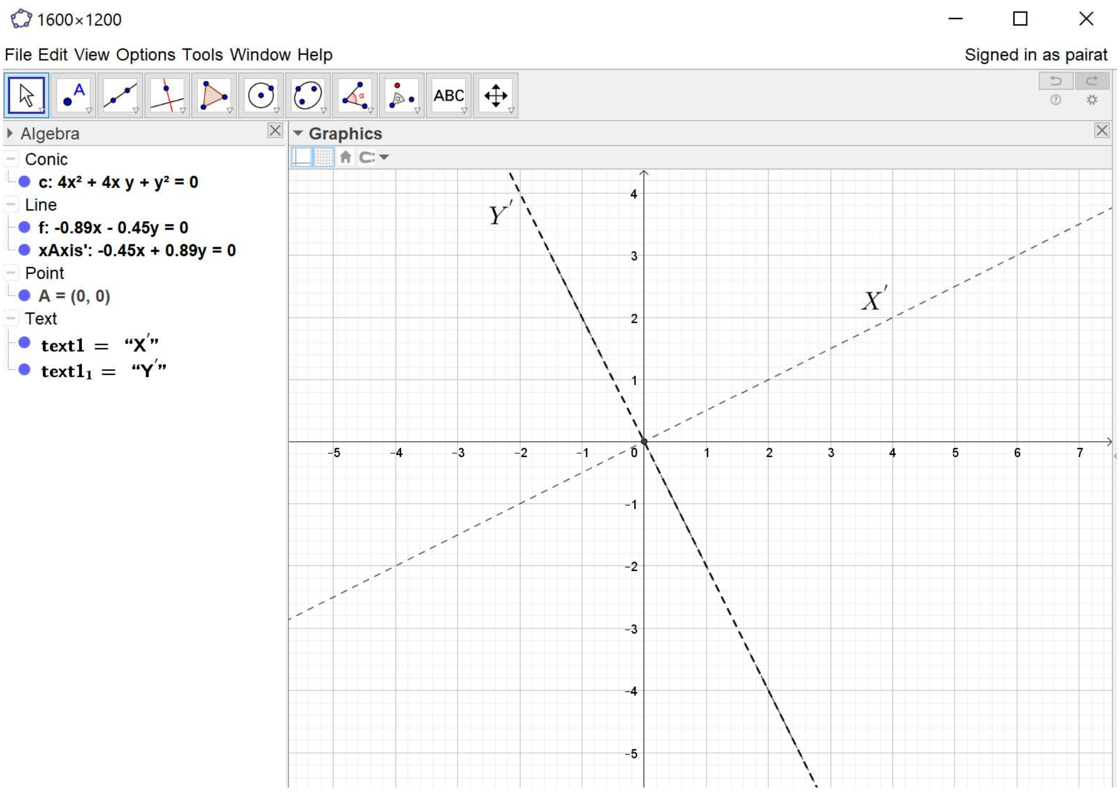
$$\frac{16x'^2 - 16x'y' + 4y'^2}{5} + \frac{8x'^2 + 12x'y' - 8y'^2}{5} + \frac{x'^2 + 4x'y' + 4y'^2}{5} = 0$$

$$x'^2 = 0$$

$$x' = 0$$

ดังนั้น สมการอยู่ในรูปพิกัดใหม่คือ $x' = 0$

ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 4.2.5 ดังรูปที่ 4.17



รูปที่ 4.17 กราฟเส้นตรง $x' = 0$ เทียบกับแกน $X'Y'$

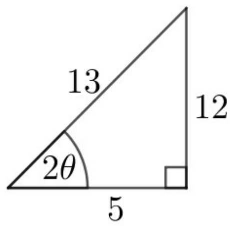
ตัวอย่าง 4.2.6 จงหมุนแกนของสมการ $12xy - 5y^2 + 48y - 36 = 0$ ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

วิธีทำ หามุม θ ที่ทำให้ไม่มีเทอม $x'y'$ จาก $\cot 2\theta = \dfrac{A-C}{B}$

เนื่องจาก $A = 0, B = 12$ และ $C = -5$ แล้วจะได้ว่า

$$\cot 2\theta = \frac{0-(-5)}{12} = \frac{5}{12}$$

$\therefore 2\theta \approx 67.3801^\circ$ หรือ $\theta \approx 33.6901^\circ$



จาก $\cot 2\theta = \dfrac{5}{12}$ จะได้ $\cos 2\theta = \dfrac{5}{13}$

หา $\sin\theta$ และ $\cos\theta$ จาก

$\sin\theta = \sqrt{\dfrac{1-\cos 2\theta}{2}}$ และ $\cos\theta = \sqrt{\dfrac{1+\cos 2\theta}{2}}$ จะได้ว่า

$$\sin\theta = \sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1-\left(\frac{5}{13}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{8}{13}}{2}} = \sqrt{\frac{4}{13}} = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

และ

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{1+\cos 2\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1+\left(\frac{5}{13}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{18}{13}}{2}} = \sqrt{\frac{9}{13}} = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

จากสูตรการหมุนแกน $x = x'\cos\theta - y'\sin\theta$ และ $y = x'\sin\theta + y'\cos\theta$ จะได้ว่า

$$x = x'\cos\theta - y'\sin\theta = x'\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right) - y'\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right) = \frac{3x'}{\sqrt{13}} - \frac{2y'}{\sqrt{13}} = \frac{3x'-2y'}{\sqrt{13}}$$

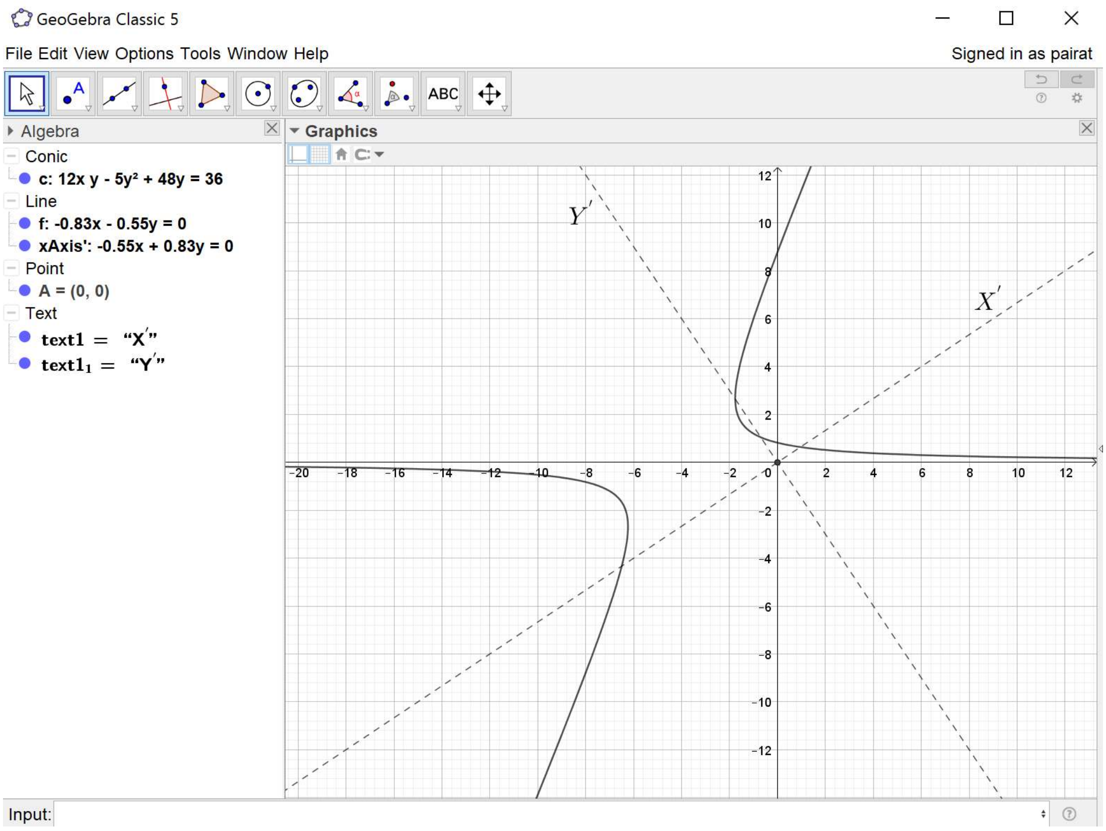
และ

$$y = x'\sin\theta + y'\cos\theta = x'\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right) + y'\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right) = \frac{2x'}{\sqrt{13}} + \frac{3y'}{\sqrt{13}} = \frac{2x'+3y'}{\sqrt{13}}$$

แทนค่า x และ y ลงในสมการจะได้

$$
\begin{aligned}
12xy-5y^2+48y-36&=0\\
12\left(\frac{3x'-2y'}{\sqrt{13}}\right)\left(\frac{2x'+3y'}{\sqrt{13}}\right)-5\left(\frac{2x'+3y'}{\sqrt{13}}\right)^2+48\left(\frac{2x'+3y'}{\sqrt{13}}\right)&=36\\
12\left(\frac{6x'^2+5x'y'-6y'^2}{13}\right)-5\left(\frac{4x'^2+12x'y'+9y'^2}{13}\right)+48\left(\frac{2x'+3y'}{\sqrt{13}}\right)&=36\\
\frac{72x'^2-60x'y'-72y'^2}{13}-\frac{20x'^2+60x'y'+45y'^2}{13}+\frac{96x'+144y'}{\sqrt{13}}&=36\\
\frac{52x'^2}{13}-\frac{117y'^2}{13}+\frac{96x'+144y'}{\sqrt{13}}&=36\\
52x'^2-117y'^2+96\sqrt{13}x'+144\sqrt{13}y'&=468
\end{aligned}
$$

ดังนั้น สมการอยู่ในรูปพิกัดใหม่คือ $52x'^2-117y'^2+96\sqrt{13}x'+144\sqrt{13}y'-468=0$
ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 4.2.6 ดังรูปที่ 4.18



รูปที่ 4.18 กราฟไฮเพอร์โบลา $52x'^2-117y'^2+96\sqrt{13}x'+144\sqrt{13}y'-468=0$

4.3 การหมุนแกนและการเลื่อนแกน (Rotations of axes and Translation of axes)

ศรีบุตร แววเจริญ และ ชนศักดิ์ บ่ายเที่ยง (2544 : 173 -175) ได้กล่าวว่า ในการวาดกราฟของสมการระดับขั้นที่สอง เราอาจหมุนแกนก่อนเพื่อกำจัดเทอม xy แล้วย้ายแกนต่อเพื่อกำจัดเทอม x และเทอม y หรือเราจะย้ายแกนก่อนเพื่อกำจัดเทอม x และเทอม y แต่เทอม xy ยังอยู่ แล้วหมุนแกนต่อเพื่อกำจัดเทอมเทอม xy

ตัวอย่าง 4.3.1 จงหามุมของการหมุนแกนซึ่งเปลี่ยนสมการ $3x^2+2\sqrt{3}xy+y^2-2x+2\sqrt{3}y=4$ ให้ไม่มีเทอม $x'y'$ และเลื่อนแกนให้อยู่ในรูปมาตรฐานของภาคตัดกรวย

วิธีทำ หามุม θ ที่ทำให้ไม่มีเทอม $x'y'$ จาก $\cot 2\theta = \dfrac{A-C}{B}$

เนื่องจาก $A=3, B=2\sqrt{3}$ และ $C=1$ แล้วจะได้ว่า

$$\begin{aligned}\cot 2\theta &= \frac{3-1}{2\sqrt{3}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\\ 2\theta &= 60^\circ\\ \theta &= 30^\circ\end{aligned}$$

จากสูตรการหมุนแกน $x=x'\cos\theta - y'\sin\theta$ และ $y=x'\sin\theta + y'\cos\theta$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}x &= x'\cos 30^\circ - y'\sin 30^\circ\\ &= \frac{\sqrt{3}x'-y'}{2}\\ y &= x'\sin 30^\circ + y'\cos 30^\circ\\ &= \frac{x'+\sqrt{3}y'}{2}\end{aligned}$$

แทนค่า x และ y ลงในสมการจะได้

$$3x^2+2\sqrt{3}xy+y^2-2x+2\sqrt{3}y=4$$

$$3\left(\frac{\sqrt{3}x'-y'}{2}\right)^2+2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}x'-y'}{2}\right)\left(\frac{x'+\sqrt{3}y'}{2}\right)$$
$$+\left(\frac{x'+\sqrt{3}y'}{2}\right)^2-2\left(\frac{\sqrt{3}x'-y'}{2}\right)+2\sqrt{3}\left(\frac{x'+\sqrt{3}y'}{2}\right)=4$$

$$\frac{9x'^2-6\sqrt{3}x'y'+3y'^2}{4}+\frac{6x'^2+4\sqrt{3}x'y'-6y'^2}{4}$$
$$+\frac{x'^2+2\sqrt{3}x'y'+3y'^2}{4}-\sqrt{3}x'+y'+\sqrt{3}x'+3y'=4$$

$$4x'^2=-4y'+4$$

$$x'^2=-(y'-1) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

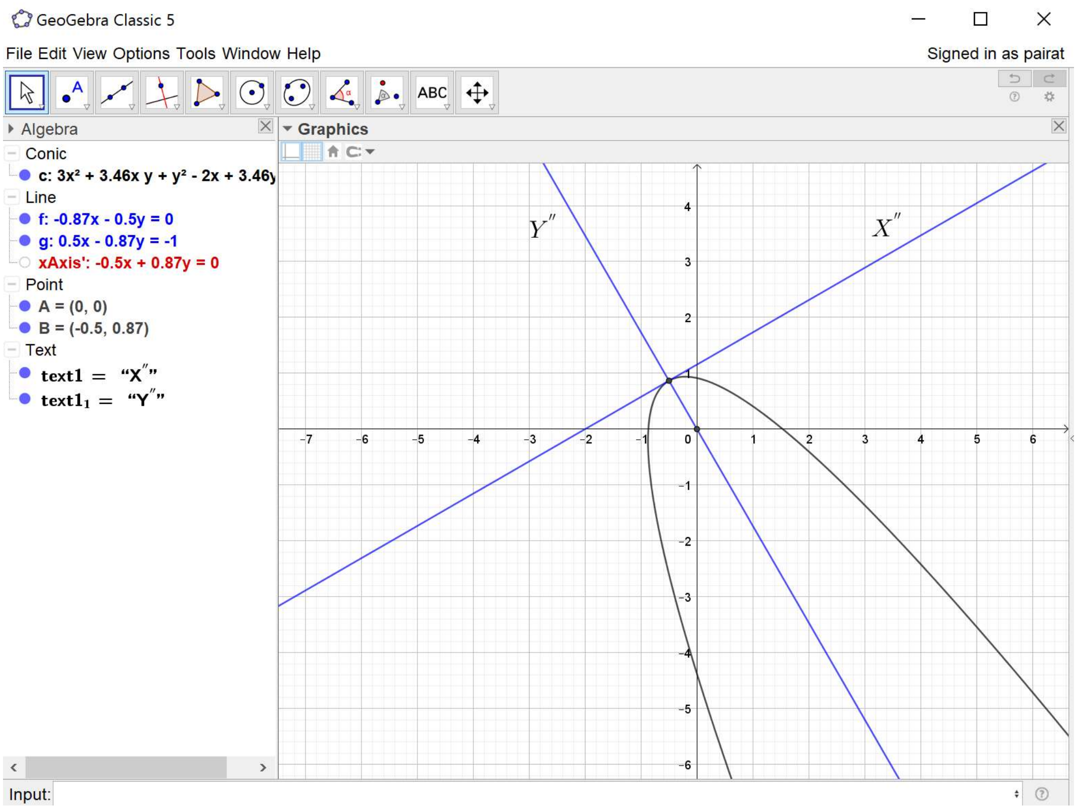
เลื่อนแกนให้จุดยอดไปที่จุด $(0,1)$

โดยให้ $x'=x''$, $y'=y''+1$ แทนลงในสมการ (1) จะได้

$$x'^2=-(y'-1)$$
$$x''^2=-((y''+1)-1)$$
$$x''^2=-y''$$

ดังนั้น สมการหลังการหมุนแกนและเลื่อนแกนคือ $x''^2=-y''$

ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 4.3.1 ดังรูปที่ 4.19



รูปที่ 4.19 กราฟพาราโบลา $x''^2=-4y''$ เทียบกับแกน $X''Y''$

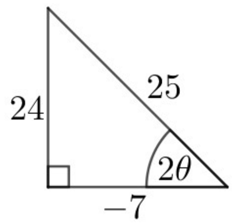
ตัวอย่าง 4.3.2 จงจัดสมการโดยการหมุนแกนและเลื่อนแกนให้อยู่ในรูปมาตรฐานของสมการ

$$73x^2 - 72xy + 52y^2 + 100x - 200y + 100 = 0$$

วิธีทำ หามุม θ ที่ทำให้ไม่มีเทอม $x'y'$ จาก $\cot 2\theta = \dfrac{A-C}{B}$

เนื่องจาก $A = 73, B = -72$ และ $C = 52$ แล้วจะได้ว่า

$$\begin{aligned}\cot 2\theta &= \frac{73-52}{72} \\ &= -\frac{7}{24}\end{aligned}$$



$\therefore 2\theta \approx 106.2602^\circ$ หรือ $\theta \approx 53.1301^\circ$

จาก $\cot 2\theta = -\dfrac{7}{24}$ จะได้ $\cos 2\theta = -\dfrac{7}{25}$

หา $\sin\theta$ และ $\cos\theta$ จาก

$\sin\theta = \sqrt{\dfrac{1-\cos 2\theta}{2}}$ และ $\cos\theta = \sqrt{\dfrac{1+\cos 2\theta}{2}}$ จะได้ว่า

$\sin\theta = \sqrt{\dfrac{1-\left(-\dfrac{7}{25}\right)}{2}} = \dfrac{4}{5}$ และ $\cos\theta = \sqrt{\dfrac{1+\left(-\dfrac{7}{25}\right)}{2}} = \dfrac{3}{5}$

จากสูตรการหมุนแกน $x = x'\cos\theta - y'\sin\theta$ และ $y = x'\sin\theta + y'\cos\theta$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}x &= x'\cos\theta - y'\sin\theta \\ &= \frac{3x'-4y'}{5} \\ y &= x'\sin\theta + y'\cos\theta \\ &= \frac{4x'+3y'}{5}\end{aligned}$$

แทนค่า x และ y ลงในสมการจะได้

$$73x^2 - 72xy + 52y^2 + 100x - 200y + 100 = 0$$

$$73\left(\frac{3x'-4y'}{5}\right)^2 - 72\left(\frac{3x'-4y'}{5}\right)\left(\frac{4x'+3y'}{5}\right)$$
$$+52\left(\frac{4x'+3y'}{5}\right)^2 + 100\left(\frac{3x'-4y'}{5}\right) - 200\left(\frac{4x'+3y'}{5}\right) = -100$$

$$\frac{657x'^2-1752x'y'+1168y'^2}{25}-\frac{864x'^2-504x'y'-864y'^2}{25}$$
$$+\frac{832x'^2+1248x'y'+468y'^2}{25}+60x'-80y'-160x'-120y'=-100$$
$$x'^2+4y'^2-4x'-8y'=-4$$
$$\frac{(x'-2)^2}{4}+(y'-1)^2=1 \quad \text{......................(2)}$$

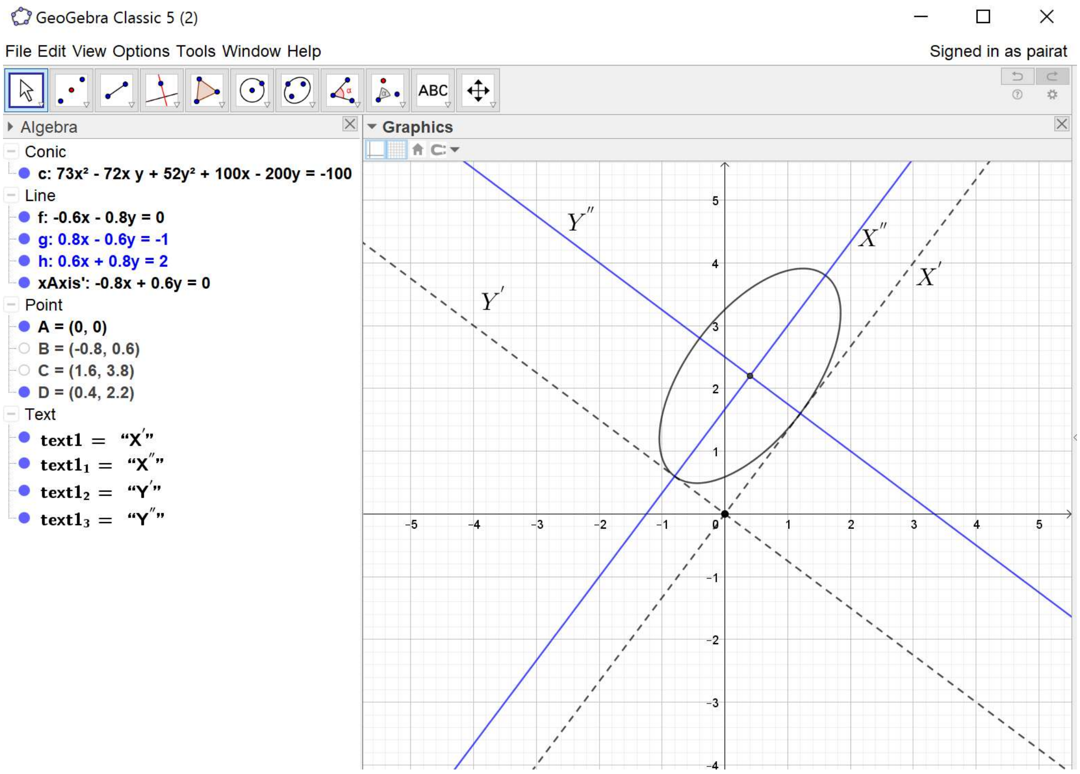
เลื่อนแกนให้จุดศูนย์กลางไปที่จุด $(2,1)$

โดยให้ $x'=x''+2,\ y'=y''+1$ แทนลงในสมการ (2) จะได้

$$\frac{x''^2}{4}+\frac{y''}{1}+=1$$

ดังนั้น สมการหลังการหมุนแกนและเลื่อนแกนคือ $\dfrac{x''^2}{4}+\dfrac{y''}{1}=1$

ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 4.3.2 ดังรูปที่ 4.20



รูปที่ 4.20 กราฟพาราโบลา $\dfrac{x''^2}{4}+\dfrac{y''}{1}=1$ เทียบกับแกน $X''Y''$

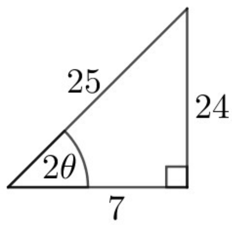
ตัวอย่าง 4.3.3 จงจัดสมการโดยการหมุนแกนและเลื่อนแกนให้อยู่ในรูปมาตรฐานของสมการ

$$6x^2 + 24xy - y^2 - 12x + 26y + 11 = 0$$

วิธีทำ หามุม θ ที่ทำให้ไม่มีเทอม $x'y'$ จาก $\cot 2\theta = \dfrac{A-C}{B}$

เนื่องจาก $A = 6, B = 24$ และ $C = -1$ แล้วจะได้ว่า

$$\begin{aligned}\cot 2\theta &= \frac{6-(-1)}{24} \\ &= \frac{7}{24}\end{aligned}$$



$\therefore 2\theta \approx 73.7398^\circ$ หรือ $\theta \approx 36.8699^\circ$

จาก $\cot 2\theta = \dfrac{7}{24}$ จะได้ $\cos 2\theta = \dfrac{7}{25}$

หา $\sin\theta$ และ $\cos\theta$ จาก

$\sin\theta = \sqrt{\dfrac{1-\cos 2\theta}{2}}$ และ $\cos\theta = \sqrt{\dfrac{1+\cos 2\theta}{2}}$ จะได้ว่า

$$\sin\theta = \sqrt{\frac{1-\left(\frac{7}{25}\right)}{2}} \quad \text{และ} \quad \cos\theta = \sqrt{\frac{1+\left(\frac{7}{25}\right)}{2}}$$

$$= \frac{3}{5} \qquad\qquad = \frac{4}{5}$$

จากสูตรการหมุนแกน $x = x'\cos\theta - y'\sin\theta$ และ $y = x'\sin\theta + y'\cos\theta$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}x &= x'\cos\theta - y'\sin\theta \\ &= \frac{4x'-3y'}{5} \\ y &= x'\sin\theta + y'\cos\theta \\ &= \frac{3x'+4y'}{5}\end{aligned}$$

แทนค่า x และ y ลงในสมการจะได้

$$6x^2 + 24xy - y^2 - 12x + 26y + 11 = 0$$

$$6\left(\frac{4x'-3y'}{5}\right)^2 + 24\left(\frac{4x'-3y'}{5}\right)\left(\frac{3x'+4y'}{5}\right)$$
$$-\left(\frac{3x'+4y'}{5}\right)^2 - 12\left(\frac{4x'-3y'}{5}\right) + 26\left(\frac{3x'+4y'}{5}\right) = -11$$

$$\frac{96x'^2-144x'y'+54y'^2}{25}+\frac{288x'^2+168x'y'-288y'^2}{25}$$

$$-\frac{9x'^2+24x'y'+16y'^2}{25}-\frac{48x'-36y'}{5}+\frac{78x'+104y'}{5}=-11$$

$$15x'^2-10y'^2+6x'-28y'=-11$$

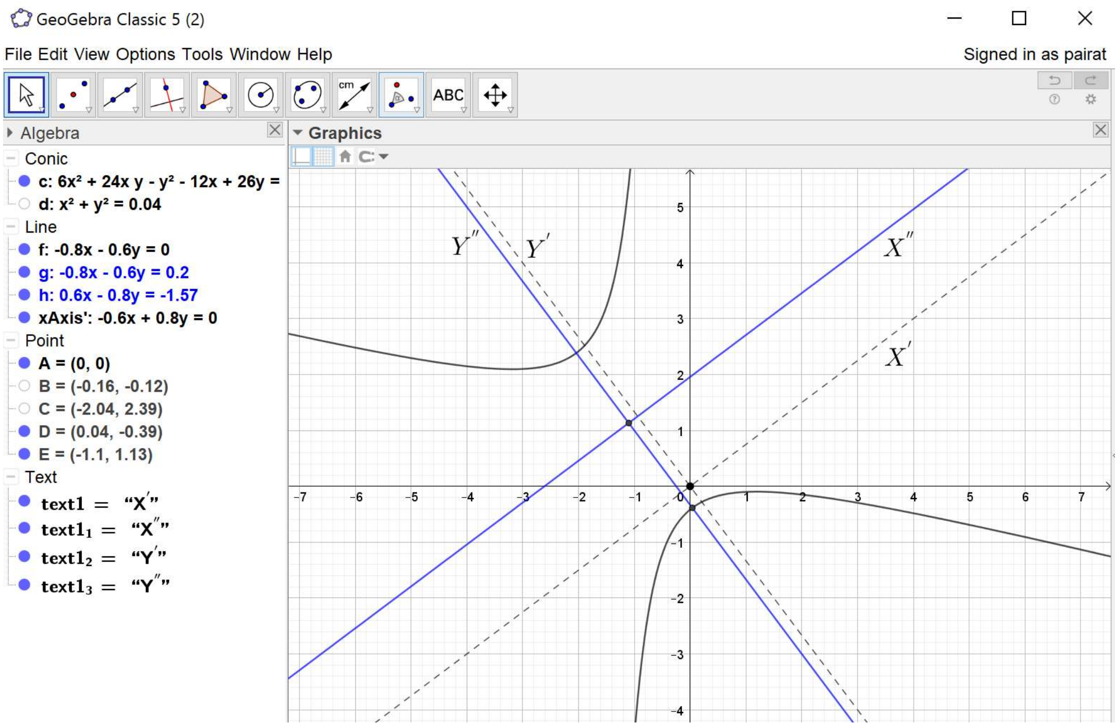
$$\frac{\left(y'-\frac{7}{5}\right)^2}{3}-\frac{\left(x'+\frac{1}{5}\right)^2}{2}=1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

เลื่อนแกนให้จุดศูนย์กลางไปที่จุด $\left(-\frac{1}{5},\frac{7}{5}\right)$

โดยให้ $x'=x''-\frac{1}{5}$, $y'=y''+\frac{7}{5}$ แทนลงในสมการ (3) จะได้ $\frac{y''^2}{3}-\frac{x''^2}{2}=1$

ดังนั้น สมการหลังการหมุนแกนและเลื่อนแกนคือ $\frac{y''^2}{3}-\frac{x''^2}{2}=1$

ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 4.3.3 ดังรูปที่ 4.21



รูปที่ 4.21 กราฟพาราโบลา $\frac{y''^2}{3}-\frac{x''^2}{2}=1$ เทียบกับแกน $X''Y''$

4.4 การจำแนกประเภทของภาคตัดกรวย (Identification of A Conic)

ทฤษฎีบท 4.4.1 ถ้าสมการ $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ เป็นสมการที่มีกราฟเป็นภาคตัดกรวยแบบใดแบบหนึ่งเราจะได้ว่า

- ถ้า $B^2 - 4AC < 0$ แล้ว กราฟจะเป็นรูปวงรี
- ถ้า $B^2 - 4AC = 0$ แล้ว กราฟจะเป็นรูปพาราโบลา
- ถ้า $B^2 - 4AC > 0$ แล้ว กราฟจะเป็นรูปไฮเพอร์โบลา

(Fuller, Gordon & Tarwater, Dolton, 1992 : 156)

ในกรณีที่สมการระดับขั้นที่สอง (Second Degree) สามารถแยกตัวประกอบให้อยู่ในรูปของสมการระดับขั้นที่หนึ่ง (First Degree) จะเป็นกราฟของเส้นตรง

ตัวอย่าง 4.4.1 กำหนดให้สมการ $x^2 + xy + y^2 = 8$ มีกราฟเป็นภาคตัดกรวยแบบใด

วิธีทำ เนื่องจาก $1 = 6, B = 1$ และ $C = 1$ แล้วจะได้ว่า

$$\begin{aligned} B^2 - 4AC &= 1^2 - 4(1)(1) \\ &= -3 \\ &< 0 \end{aligned}$$

ดังนั้น สมการ $x^2 + xy + y^2 = 8$ มีกราฟเป็นวงรี แสดงกราฟตามตัวอย่าง 4.2.1

ตัวอย่าง 4.4.2 กำหนดให้สมการ $x^2 + y^2 + 2xy - x + y = 0$ มีกราฟเป็นภาคตัดกรวยแบบใด

วิธีทำ เนื่องจาก $A = 1, B = 2$ และ $C = 1$ แล้วจะได้ว่า

$$\begin{aligned} B^2 - 4AC &= 2^2 - 4(1)(1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

ดังนั้น สมการ $x^2 + y^2 + 2xy - x + y = 0$ มีกราฟเป็นพาราโบลา แสดงกราฟตามตัวอย่าง 4.2.2

ตัวอย่าง 4.4.3 กำหนดให้สมการ $3x^2 - y^2 + 4\sqrt{3}\,xy = 15$ มีกราฟเป็นภาคตัดกรวยแบบใด

วิธีทำ เนื่องจาก $A = 3, B = 4\sqrt{3}$ และ $C = -1$ แล้วจะได้ว่า

$$\begin{aligned} B^2 - 4AC &= \left(4\sqrt{3}\right)^2 - 4(3)(-1) \\ &= 156 > 0 \end{aligned}$$

ดังนั้น สมการ $3x^2 - y^2 + 4\sqrt{3}\,xy = 15$ มีกราฟเป็นไฮเพอร์โบลา แสดงกราฟตามตัวอย่าง 4.2.3

ตัวอย่าง 4.4.4 กำหนดให้สมการ $x^2 + \sqrt{3}\,xy + 2y^2 - 16 = 0$ มีกราฟเป็นภาคตัดกรวยแบบใด

วิธีทำ เนื่องจาก $A = 1, B = \sqrt{3}$ และ $C = 2$ แล้วจะได้ว่า

$$\begin{aligned} B^2 - 4AC &= \left(\sqrt{3}\right)^2 - 4(1)(2) \\ &= -5 \\ &< 0 \end{aligned}$$

ดังนั้น สมการ $3x^2 - y^2 + 4\sqrt{3}\,xy = 15$ มีกราฟเป็นวงรี แสดงกราฟตามตัวอย่าง 4.2.4

ตัวอย่าง 4.4.5 กำหนดให้สมการ $4x^2 + 4xy + y^2 = 0$ มีกราฟเป็นภาคตัดกรวยแบบใด

วิธีทำ เนื่องจาก $A = 4, B = 4$ และ $C = 1$ แล้วจะได้ว่า

$$\begin{aligned} B^2 - 4AC &= 4^2 - 4(4)(1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

แต่

$$\begin{aligned} 4x^2 + 4xy + y^2 &= (2x + y)^2 \\ &= (2x + y)(2x + y) \end{aligned}$$

ดังนั้น สมการ $4x^2 + 4xy + y^2 = 0$ มีกราฟเป็นเส้นตรง แสดงกราฟตามตัวอย่าง 4.2.5

ตัวอย่าง 4.4.6 กำหนดให้สมการ $12xy - 5y^2 + 48y = 36$ มีกราฟเป็นภาคตัดกรวยแบบใด

วิธีทำ เนื่องจาก $A = 0, B = 12$ และ $C = -5$ แล้วจะได้ว่า

$$\begin{aligned} B^2 - 4AC &= 12^2 - 4(0)(-5) \\ &= 144 \\ &> 0 \end{aligned}$$

ดังนั้น สมการ $12xy - 5y^2 + 48y = 36$ มีกราฟเป็นไฮเพอร์โบลาแสดงกราฟตามตัวอย่าง 4.2.6

ตัวอย่าง 4.4.7 ให้สมการ $3x^2 + 2\sqrt{3}xy + y^2 - 2x + 2\sqrt{3}y = 4$ มีกราฟเป็นภาคตัดกรวยแบบใด

วิธีทำ เนื่องจาก $A = 3, B = 2\sqrt{3}$ และ $C = 1$ แล้วจะได้ว่า

$$\begin{aligned} B^2 - 4AC &= \left(2\sqrt{3}\right)^2 - 4(3)(1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

ดังนั้น สมการ $3x^2 + 2\sqrt{3}xy + y^2 - 2x + 2\sqrt{3}y = 4$ มีกราฟเป็นพาราโบลาแสดงกราฟตามตัวอย่าง 4.3.1

ตัวอย่าง 4.4.8 จงวาดกราฟของสมการ $x^2 - 2xy + y^2 = 4$

วิธีทำ เนื่องจาก $A = 1, B = -2$ และ $C = 1$ แล้วจะได้ว่า

$$B^2 - 4AC = (-2)^2 - 4(1)(1) = 0$$

$\therefore x^2 - 2xy + y^2 = 2$ อาจจะมีกราฟเป็นพาราโบลา แต่

$$\begin{aligned} x^2 - 2xy + y^2 - 4 &= (x-y)^2 - 2^2 \\ &= \big((x-y)-2\big)\big((x-y)+2\big) \end{aligned}$$

นั่นคือ สมการ $x^2 - 2xy + y^2 = 4$ มีกราฟเป็นเส้นตรง

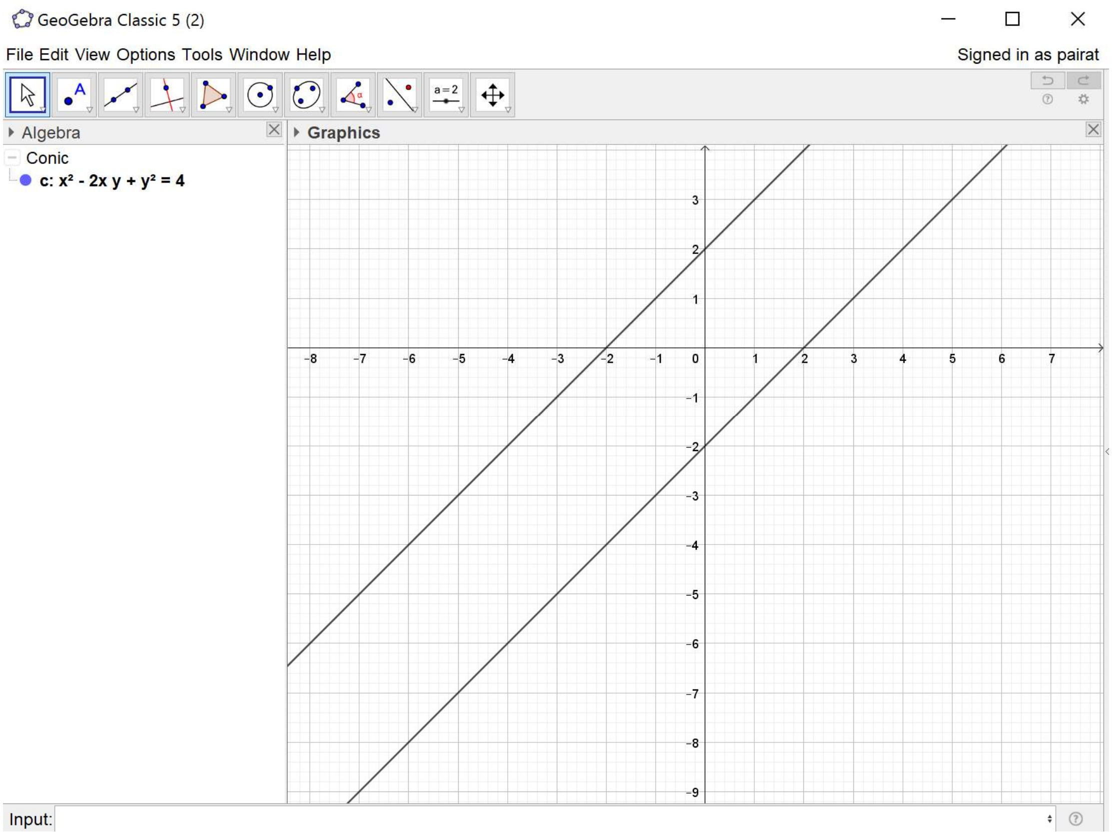
จาก $\big((x-y)-2\big)\big((x-y)+2\big) = 0$ จะได้

$(x-y) - 2 = 0$ หรือ $(x-y) + 2 = 0$

$y = x - 2$ $y = x + 2$

ดังนั้น กราฟของสมการคือ $y = x - 2$ และ $y = x + 2$

ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 4.4.8 ดังรูปที่ 4.22



รูปที่ 4.22 กราฟของสมการ $x^2 - 2xy + y^2 = 4$

ตัวอย่าง 4.4.9 จงวาดกราฟของสมการ $2x^2+7xy+3y^2+x-7y=6$

วิธีทำ เนื่องจาก $A=2, B=7$ และ $C=3$ แล้วจะได้ว่า

$$B^2-4AC=7^2-4(2)(3)$$
$$=25>0$$

$\therefore 2x^2+7xy+3y^2+x-7y=6$ อาจจะมีกราฟเป็นไฮเพอร์โบลา แต่

$$2x^2+7xy+3y^2+x-7y-6=(2x+y-3)(x+3y+2)$$

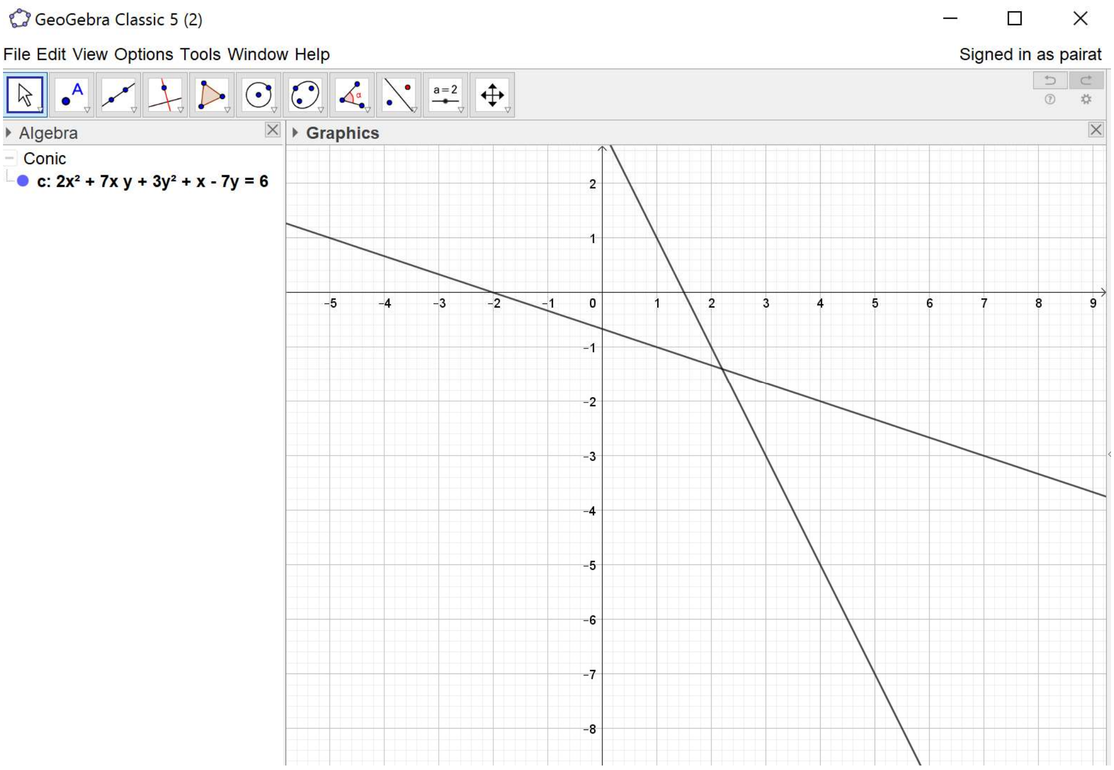
นั่นคือ สมการ $2x^2+7xy+3y^2+x-7y=6$ มีกราฟเป็นเส้นตรง

จาก $(2x+y-3)(x+3y+2)=0$ จะได้

$$2x+y-3=0 \qquad\qquad x+3y+2=0$$
$$y=-2x+3 \qquad \text{หรือ} \qquad y=\frac{-x-2}{3}$$

ดังนั้น กราฟของสมการคือ $y=-2x+3$ และ $y=\dfrac{-x-2}{3}$

ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 4.4.9 ดังรูปที่ 4.23



รูปที่ 4.23 กราฟของสมการ $2x^2+7xy+3y^2+x-7y=6$

ตัวอย่าง 4.4.10 จงวาดกราฟของสมการ $x^2 + 3xy + 3y^2 - x + 1 = 0$

วิธีทำ เนื่องจาก $A = 1, B = 3$ และ $C = 3$ แล้วจะได้ว่า

$$B^2 - 4AC = 3^2 - 4(1)(3)$$
$$= -3 < 0$$

$\therefore x^2 + 3xy + 3y^2 - x + 1 = 0$ อาจจะมีกราฟเป็นวงรี แต่

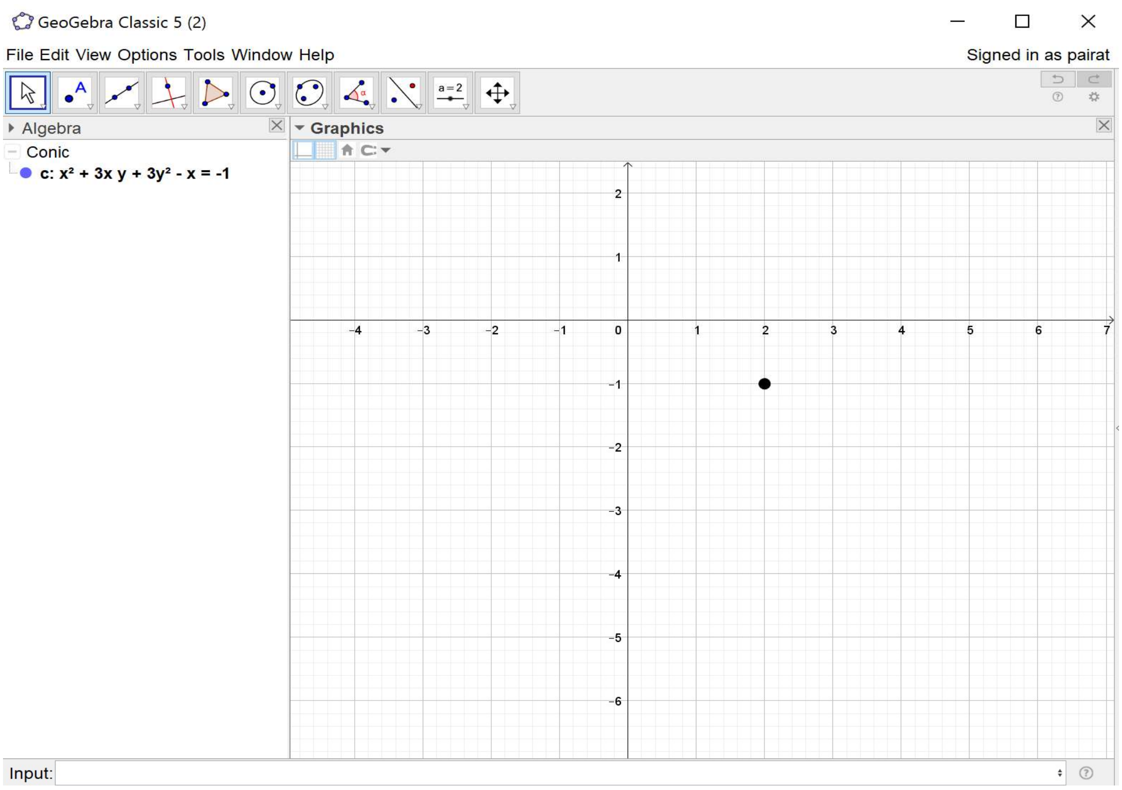
$$x^2 + (3y - 1)x + 3y^2 + 1 = 0$$

$$x = \frac{(1 - 3y) \pm \sqrt{(3y - 1)^2 - 4(1)(3y^2 + 1)}}{2(1)}$$
$$= \frac{(1 - 3y) \pm (y + 1)\sqrt{-3}}{2}$$

เราจะเห็นว่า x เป็นจำนวนเชิงซ้อน เมื่อ $y \in \mathbb{R}$ แต่ถ้า $y = -1$ จะได้ $x = 2$

ดังนั้น กราฟของสมการนี้เป็นจุด $(2, -1)$ เพียงจุดเดียวเท่านั้น

ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 4.4.10 ดังรูปที่ 4.24



รูปที่ 4.24 กราฟของสมการ $x^2 + 3xy + 3y^2 - x + 1 = 0$

ตัวอย่าง 4.4.11 จงพิจารณาสมการ $3x^2 + 3y^2 - 6xy + \sqrt{2}x = 4$ ว่ามีกราฟเป็นลักษณะใด พร้อมทั้งวาดกราฟประกอบ

วิธีทำ เนื่องจาก $A = 3, B = -6$ และ $C = 3$ แล้วจะได้ว่า

$$\begin{aligned} B^2 - 4AC &= (-6)^2 - 4(3)(3) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\therefore 3x^2 + 3y^2 - 6xy + \sqrt{2}x = 4$ มีกราฟเป็นพาราโบลา

หามุม θ ที่ทำให้ไม่มีเทอม $x'y'$ จาก $\cot 2\theta = \dfrac{A-C}{B}$ จะได้

$$\begin{aligned} \cot 2\theta &= \frac{3-3}{-6} \\ &= 0 \\ 2\theta &= 90^\circ \\ \theta &= 45^\circ \end{aligned}$$

จากสูตรการหมุนแกน $x = x'\cos\theta - y'\sin\theta$ และ $y = x'\sin\theta + y'\cos\theta$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\theta - y'\sin\theta \\ &= x'\cos 45^\circ - y'\sin 45^\circ \\ &= \frac{x' - y'}{\sqrt{2}} \\ y &= x'\sin\theta + y'\cos\theta \\ &= x'\sin 45^\circ + y'\cos 45^\circ \\ &= \frac{x' + y'}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

แทนค่า x และ y ลงในสมการจะได้

$$\begin{aligned} 3x^2 + 3y^2 - 6xy + \sqrt{2}x &= 4 \\ 3\left(\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\right)^2 + 3\left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right)^2 - 6\left(\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right) + \sqrt{2}\left(\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\right) &= 4 \\ \frac{3x'^2 - 6x'y' + 3y'^2}{2} + \frac{3x'^2 + 6x'y' + 3y'^2}{2} - 3x'^2 + 3y'^2 + x' - y' &= 4 \\ 3y'^2 + x' - y' &= 4 \\ 3y'^2 - y' &= -x' + 4 \\ 3\left(y'^2 - \frac{1}{3}y' + \left(-\frac{1}{6}\right)^2\right) &= -x' + 4 + \frac{1}{12} \end{aligned}$$

$$\left(y'-\frac{1}{6}\right)^2=-\frac{1}{3}\left(x'-\frac{49}{12}\right) \quad \text{.......................................(4)}$$

เลื่อนแกนให้จุดศูนย์กลางไปที่จุด $\left(\frac{49}{12},\frac{1}{6}\right)$

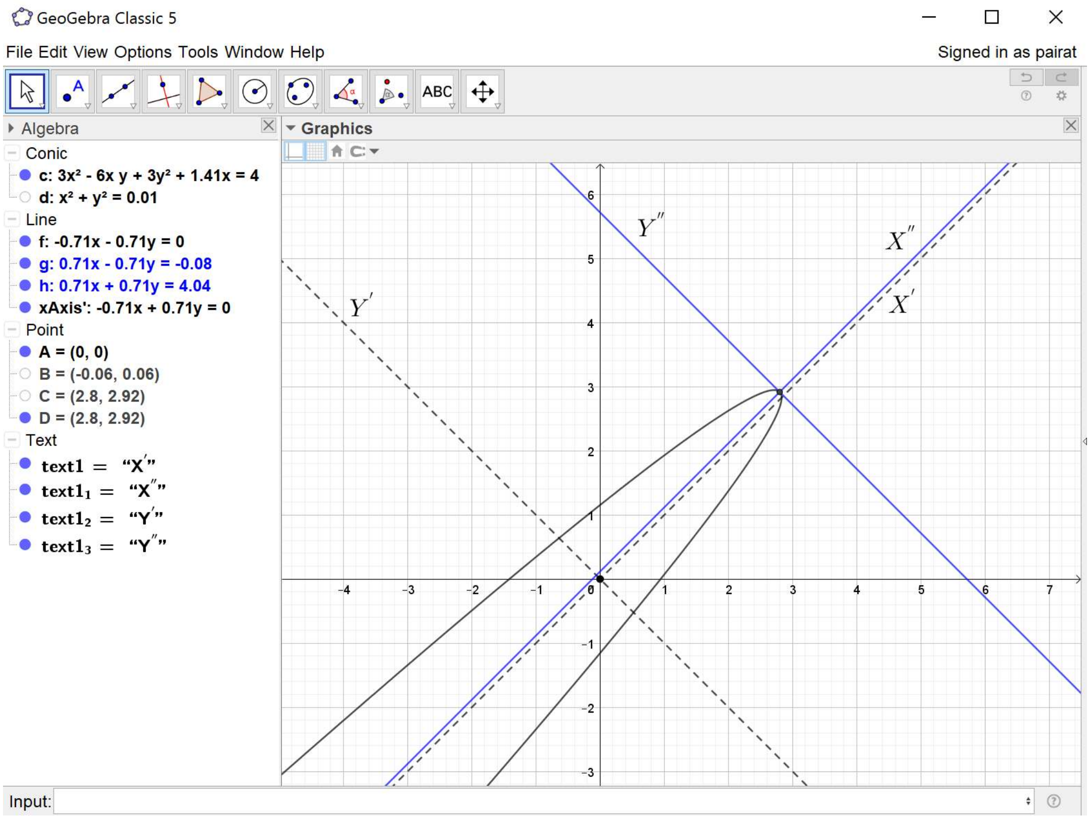
โดยให้ $x'=x''+\frac{25}{6}$, $y'=y''+\frac{1}{6}$ แทนลงในสมการ (4) จะได้

$$\left(\left(y''+\frac{1}{6}\right)-\frac{1}{6}\right)^2=-\frac{1}{3}\left(\left(x''+\frac{49}{12}\right)-\frac{49}{12}\right)$$

$$y''^2=-\frac{1}{3}x''$$

ดังนั้น สมการหลังการหมุนแกนและเลื่อนแกนคือ $y''^2=-\frac{1}{3}x''$

ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 4.4.11 ดังรูปที่ 4.25



รูปที่ 4.25 กราฟพาราโบลา $y''^2=-\frac{1}{3}x''$ เทียบกับแกน $X''Y''$

ตัวอย่าง 4.4.12 จงหาสมการพาราโบลาที่มีจุดโฟกัสอยู่ที่จุด $F(1,4)$ และสมการไดเรกตริกซ์(Directrix) คือเส้นตรง $D: 3x+4y=4$ พร้อมทั้งวาดกราฟประกอบ

วิธีทำ ให้พิกัดจุด $P(x,y)$ เป็นจุดใด ๆ บนเส้นโค้งพาราโบลา จะได้ $FP=\sqrt{(x-1)^2+(y-4)^2}$

และระยะตั้งฉากจากจุด P ไปยังเส้นตรง D ยาวเท่ากับ $\dfrac{|3x+4y-4|}{\sqrt{3^2+4^2}}$

จากนิยามพาราโบลา จะได้ว่า

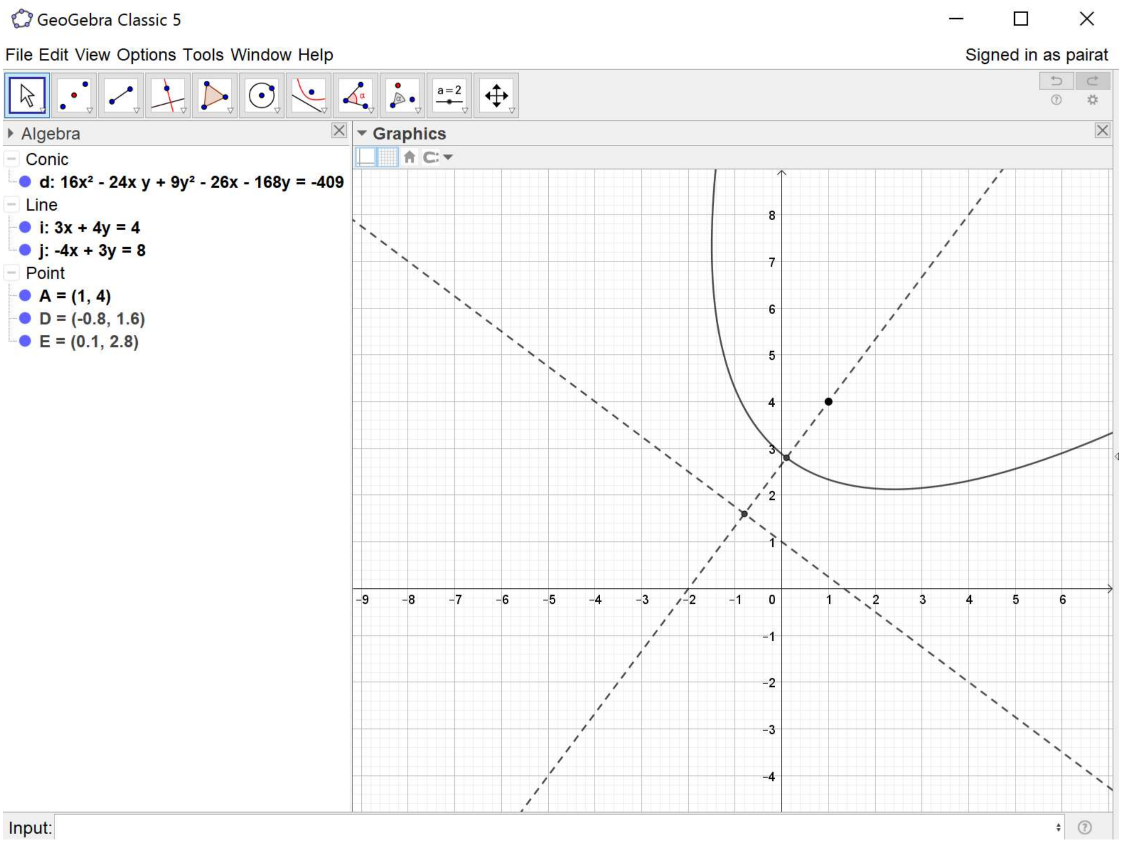
$$\sqrt{(x-1)^2+(y-4)^2}=\frac{|3x+4y-4|}{\sqrt{3^2+4^2}}$$

$$25(x^2-2x+1+y^2-8y+16)=9x^2+16y^2+24xy-24x-32y+16$$

$$16x^2+9y^2+24xy-26x-168y=16$$

ดังนั้น สมการพาราโบลาคือ $16x^2+9y^2+24xy-26x-168y=-409$

ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 4.4.12 ดังรูปที่ 4.26



รูปที่ 4.26 กราฟพาราโบลา $16x^2+9y^2+24xy-26x-168y=-409$

สรุปท้ายบทที่ 4

สำหรับในบทที่ 4 นั้นเราได้ศึกษาการปรับสมการให้เป็นรูปอย่างง่าย ซึ่งมีวิธี 2 แบบ คือ การปรับโดยการเลื่อนแกนและการปรับโดยการหมุนแกน

การปรับสมการให้เป็นรูปอย่างง่ายโดยการเลื่อนแกนนั้น ก็คือการปรับให้สมการมีจุดยอดหรือจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิดของแกนพิกัดใหม่ $X'Y'$ เราสามารถปรับได้โดยการสร้างแกน $X'Y'$ ขึ้นมาใหม่ให้มีจุดกำเนิดที่จุดยอดหรือที่จุดศูนย์กลางของกราฟนั้น ๆ สมการใหม่จะปรับโดยการแทนค่าดังนี้

ให้ $x = x' + h$

และ $y = y' + k$

เมื่อกำหนดให้จุดยอดหรือจุดศูนย์กลาง คือจุด (h,k)

สำหรับการปรับสมการให้เป็นรูปอย่างง่ายโดยการหมุนแกนนั้น คือการกำจัดเทอม xy ในสมการนั้นออกไป โดยการหมุนแกนในมุมที่ไม่มีเทอม xy โดยเราสามารถหามุมดังกล่าวได้จากสูตรหมุนแกนดังนี้

$\cot 2\theta = \dfrac{A-C}{B}$ โดยค่า A, B และ C หาได้จากสมการระดับขั้นที่สอง

$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ เมื่อ $B \neq 0$

เมื่อได้มุมที่ต้องการก็จะปรับสมการใหม่โดยใช้สูตรหมุนแกนดังนี้

ให้ $x = x'\cos\theta - y'\sin\theta$

และ $x = x'\sin\theta + y'\cos\theta$

ในการวาดกราฟของสมการระดับขั้นที่สอง เราอาจหมุนแกนก่อนเพื่อกำจัดเทอม xy แล้วย้ายแกนต่อเพื่อกำจัดเทอม x และเทอม y หรือเราจะย้ายแกนก่อนเพื่อกำจัดเทอม x และเทอม y แต่เทอม xy ยังอยู่ แล้วหมุนแกนต่อเพื่อกำจัดเทอมเทอม xy

ถ้าสมการ $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ เป็นสมการที่มีกราฟเป็นภาคตัดกรวยแบบใดแบบหนึ่งเราจะได้ว่า

- ถ้า $B^2 - 4AC < 0$ แล้ว กราฟจะเป็นรูปวงรี
- ถ้า $B^2 - 4AC = 0$ แล้ว กราฟจะเป็นรูปพาราโบลา
- ถ้า $B^2 - 4AC > 0$ แล้ว กราฟจะเป็นรูปไฮเพอร์โบลา

ในกรณีที่สมการระดับขั้นที่สอง (Second Degree) สามารถแยกตัวประกอบให้อยู่ในรูปของสมการระดับขั้นที่หนึ่ง (First Degree) จะเป็นกราฟของเส้นตรงสองเส้นขนานกัน

แบบฝึกหัดบทที่ 4

จงหาสมการใหม่เมื่อย้ายจากจุดกำเนิดไปยังจุดที่กำหนดให้ต่อไปนี้ (ข้อ 4.1-4.7)

4.1 $2x + y + 5 = 0$ เมื่อจุดใหม่คือ $(2,8)$

4.2 $2x^2 + 8x - y + 5 = 0$ เมื่อจุดใหม่คือ $(-2,4)$

4.3 $9x^2 + y^2 + 3x + 8y + 43 = 0$ เมื่อจุดใหม่คือ $(5,-1)$

4.4 $14x^2 - 4y^2 - 160x + 24y + 300 = 0$ เมื่อจุดใหม่คือ $(-3,-5)$

4.5 $3xy - 21x - 6y - 47 = 0$ เมื่อจุดใหม่คือ $(2,7)$

4.6 $x^2 + y^2 = 9$ เมื่อจุดใหม่คือ $(-3,2)$

4.7 จงอธิบายว่ากราฟ $y + 4(x-1)^2 = 0$ มาจากการย้ายแกนของกราฟ $y = x^2$

จงหาจุดกำเนิดใหม่เมื่อย้ายแกนของสมการแล้วจะไม่มีเทอมดีกรีหนึ่ง (ข้อ 4.8-4.12)

4.8 $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 4$

4.9 $x^2 + 2y^2 + 6x - 4y + 2 = 0$

4.10 $2y^2 - 3x^2 - 12x - 16y + 14 = 0$

4.11 $2x^2 - 3xy - y^2 + x - 5y - 3 = 0$

4.12 $x^2 + y^2 - 12x = 0$

จงหาสมการใหม่เมื่อหมุนแกนด้วยมุม θ (ข้อ 4.13-4.20)

4.13 $\sqrt{3}x - y = 4$ เมื่อ $\theta = 60^\circ$

4.14 $xy = 1$ เมื่อ $\theta = 45^\circ$

4.15 $x^2 + xy + y^2 = 5$ เมื่อ $\theta = 45^\circ$

4.16 $2x^2 + xy + 2y^2 = 2$ เมื่อ $\theta = 45^\circ$

4.17 $6x^2 - 2\sqrt{3}xy + 8y^2 = 5$ เมื่อ $\theta = 30^\circ$

4.18 $x^2 + \sqrt{3}xy + 2y^2 = 2$ เมื่อ $\theta = 60^\circ$

4.19 $xy = 4$ เมื่อ $\theta = 45^\circ$

4.20 $x^2 - 4xy + 4y^2 - 8\sqrt{5}x = 0$ เมื่อ $\theta = \arctan\dfrac{1}{2}$

จงหาสมการ ในการหมุนแกนโดยแปลงสมการนั้นให้ไม่มีเทอม $x'y'$ พร้อมวาดกราฟ (ข้อ 4.21-4.32)

4.21 $6x^2 + 4xy + 3y^2 = 2$

4.22 $8x^2 - 8xy - 7y^2 = 3$

4.23 $15x^2 + 7xy - 9y^2 = 1$

4.24 $9x^2 + 20xy - 12y^2 = 1$

4.25 $9x^2 - 21xy - 11y^2 = 2$

4.26 $3xy + y - 2 = 0$

4.27 $x^2 - 3xy + 4y^2 + 7 = 0$

4.28 $x^2 - 2xy + y^2 - 8\sqrt{2}x - 8 = 0$

4.29 $xy + x + y = 0$

4.30 $3x^2 - 10xy + 3y^2 + 22x - 26y + 43 = 0$

4.31 $73x^2 - 72xy + 52y^2 + 380x - 160y + 400 = 0$

4.32 $104x^2 + 60xy + 41y^2 - 60x - 82y - 75 = 0$

จงบอกว่า สมการที่กำหนดให้ต่อไปนี้เป็นกราฟชนิดใดของภาคตัดกรวย (ข้อ 4.33-4.36)

4.33 $2x^2 - 4xy + 8y^2 + 7 = 0$

4.34 $2xy - x + y + 1 = 0$

4.35 $x^2 - y^2 + 4 = 0$

4.36 $3x^2 + 6xy + 5y^2 - x + y = 0$

จงปรับสมการที่กำหนดให้ต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย (ข้อ 4.37-4.43)

4.37 $7x^2 - 3xy + 3y^2 = 1$

4.38 $15x^2 + 7xy - 9y^2 = 1$

4.39 $12xy - 5y^2 + 48x - 36 = 0$

4.40 $9x^2 - 21xy - 11y^2 = 2$

4.41 $x^2 + 3xy + y^2 + x - y - 1 = 0$

4.42 $x^2 - 2xy + y^2 - 8x + 16y = 0$

4.43 $5x^2 + 2xy + 5y^2 - 12x - 12y = 0$

จงหาว่าต้องย้ายจุดเริ่มต้นไปที่จึงจะทำให้เทอม x และ y ของสมการหมดไป (ข้อ 4.44-4.46)

4.44 $y^2 - 4y - 8x - 20 = 0$

4.45 $9x^2 + 4y^2 - 36x + 8y + 4 = 0$

4.46 $4y^2 - x^2 - 24y - 8x + 16 = 0$

จงพิจารณาการหมุนแกนเพื่อให้ไม่มีเทอม xy พร้อมวาดกราฟของสมการต่อไปนี้ (ข้อ 4.47-4.52)

4.47 $8x^2 + 5xy - 4y^2 + 2 = 0$

4.48 $2x^2 + 9xy + 14y^2 + 5 = 0$

4.49 $x^2 + 12xy + 6y^2 - 2x + 5y + 1 = 0$

4.50 $x^2 + 14xy + 49y^2 + \sqrt{2}y + 1 = 0$

4.51 $27x^2 + 5xy + 15y^2 - 2 = 0$

4.52 $x^2 + 14xy + 49y^2 + \sqrt{2}y + 1 = 0$

4.53 $4x^2 - 4xy + y^2 - 8\sqrt{5}x - 16\sqrt{5}y = 0$

4.54 $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 4x + 4y - 4 = 0$

จงหาสมการของเส้นตรง $x - y + 2\sqrt{2} = 0$ เมื่อหมุนแกนไปเป็นมุม 30°

จงหาสมการของวงกลม $x^2 + y^2 = 36$ เมื่อหมุนแกนไปเป็นมุม 60°

จงหาสมการของ $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 120x - 90y = 0$ เมื่อหมุนแกนไปเป็นมุม $\tan\theta = \dfrac{3}{4}$