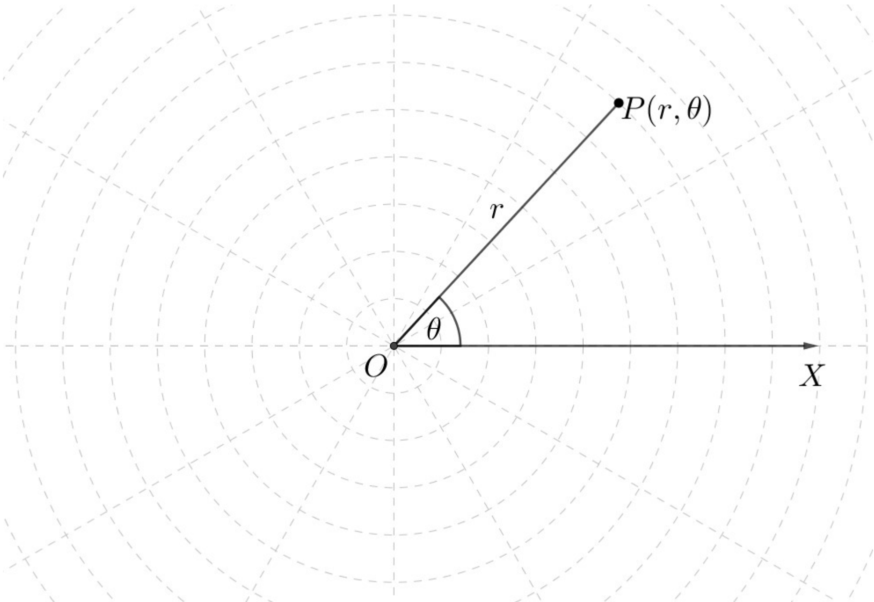
บทที่ 5
ระบบพิกัดเชิงขั้ว (Polar Coordinate System)

มีการนำแนวคิดเรื่องมุมและรัศมีมาใช้ตั้งแต่สมัยโบราณ ในหนึ่งสหัสวรรษก่อนคริสต์ศักราช นักดาราศาสตร์ชาวกรีกที่ชื่อฮิปปาร์คัส (Hipparchus 190-120 ปีก่อนคริสตกาล) สร้างตารางฟังก์ชันคอร์ดที่ให้ความยาวของคอร์ดสำหรับแต่ละมุม และมีการอ้างอิงว่าเขาใช้ระบบพิกัดเชิงขั้วในการพิสูจน์ตำแหน่งของดวงดาว On Spirals (ว่าด้วยเส้นเกลียว) อาร์คิมิดีส (Archimedes; 287-212 ปีก่อนคริสตกาล) บรรยายถึงวงก้นหอยอาร์คิมิดีสว่ารัศมีของฟังก์ชันขึ้นกับมุม อย่างไรก็ตามสิ่งที่ชาวกรีกเหล่านี้ทำก็ยังไม่ขยายออกไปถึงระบบพิกัดเชิงขั้วที่สมบูรณ์ ในคริสต์ศตวรรษที่ 9 นักคณิตศาสตร์ชาวเปอร์เซียที่ชื่อ ฮะบัซ อัล-ฮะซับ อัล-มาร์วะซิ (Habash al-Hasib al-Marwazi) ใช้วิธีตรีโกณมิติเชิงทรงกลมและการฉายแผนที่เพื่อที่จะแปลงผันพิกัดเชิงขั้วไปเป็นระบบพิกัดที่แตกต่างโดยมุ่งความสนใจไปยังจุดจำเพาะบนรูปทรงกลม

Origin of Polar Coordinates (กำเนิดพิกัดเชิงขั้ว) ประวัติของพิกัดนี้ถูกบรรยายโดยจูเลียน โลเวล โคล์ลิดจ์ (Julian Lowell Coolidge 1873 –1954) เกรกัวร์ เดอ แซง-แวงซอง (Grégoire de Saint-Vincent 1584 - 1667) และ โบนาเวนตูรา คาวาลิเอริ (Bonaventura Cavalieri 1598 - 1647) ต่างเริ่มนำแนวคิดมาใช้ในกลางคริสต์ศตวรรษที่ 7 แซง-แวงซองเขียนถึงพิกัดเชิงขั้วโดยการส่วนตัวในปี ค.ศ. 1625 และตีพิมพ์งานของเขาในปี ค.ศ. 1647 ขณะที่คาวาลิเอริตีพิมพ์ในปี ค.ศ. 1635 และฉบับที่ถูกต้องในปี ค.ศ. 1653 คาวาลิเอริเป็นบุคคลแรกที่ใช้พิกัดเชิงขั้วแก้ปัญหาเกี่ยวกับพื้นที่ในวงก้นหอยอาร์คิมิดีส ต่อมาแบลส ปาสกาล (Blaise Pascal 1623 - 1662) ได้ใช้พิกัดเชิงขั้วคำนวณหาความยาวของส่วนโค้งของรูปพาราโบลา เซอร์ไอแซก นิวตัน พิเคราะห์การแปลงระหว่างพิกัดเชิงขั้วซึ่งเขาได้อิงตาม "รูปแบบที่ 7 สำหรับวงก้นหอย" และพิกัดอื่น ๆ อีก 9 พิกัดในวารสาร Acta Eruditorum (1691) เจคอบ เบอร์โนลลี (Jacob Bernoulli 1654 - 1705) ใช้ระบบร่วมกับจุดบนเส้นที่เรียกว่าขั้ว และแกนเชิงขั้วตามลำดับ พิกัดเป็นระยะทางจากขั้วและมุมจากแกนเชิงขั้ว งานของเบอร์โนลลีครอบคลุมไปถึงการพบรัศมีความโค้งของเส้นโค้งที่อยู่ในพิกัดนี้ คำว่า พิกัดเชิงขั้ว โดยแท้จริงแล้วน่าจะมาจากเกโกรีโอ ฟอนตานา (Gregorio Fontana) นักคณิตศาสตร์ชาวอิตาลีในสมัยคริสต์ศตวรรษที่ 18 และคำนี้ปรากฏเป็นภาษาอังกฤษในงานแปลของ จอร์จ พีคอก (George Peacock) ที่ชื่อ แคลคูลัสเชิงอนุพันธ์และปริพันธ์ของลากรัซ (Lacroix) ในปี ค.ศ. 1816 อเล็กซิส คลาเราต์เป็นคนแรกที่คิดพิกัดเชิงขั้วในรูปแบบสามมิติ และเลออนฮาร์ด ออยเลอร์เป็นคนแรกที่นำมาใช้งานจริง

5.1 ระบบพิกัดเชิงขั้ว (Polar Coordinate System)

ดำรง ทิพย์โยธา สุรชัย สมบัติบริบูรณ์ และ นัฏฐนาถ ไตรภพ (2558 : 233-234) ได้กล่าวว่า ในระบบพิกัดเชิงขั้วนี้ประกอบไปด้วย แกนเชิงขั้ว (Polar Axis) ซึ่งเป็นรังสี $\overrightarrow{OX}$ บนระนาบ เรียกจุด O ว่า จุดกำเนิด (Origin) หรือ ขั้ว (Pole) และส่วนของเส้นตรง OP เขียนแทนด้วย r เรียกว่า เวกเตอร์รัศมี (Radius Vector) θ เรียกว่า มุมเชิงขั้ว (Polar Angle) ดังรูปที่ 5.1

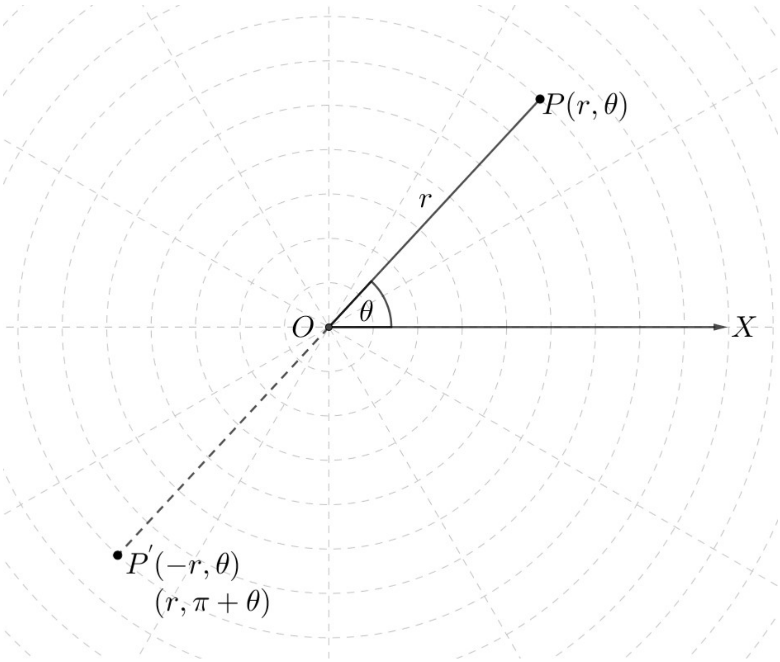


รูปที่ 5.1 แสดงพิกัดเชิงขั้ว

พิกัดของจุด P เขียนแทนด้วย $P(r,\theta)$ หรือ (r,θ)

- ระยะ r มีค่าเป็นบวก ถ้าวัดจากจุดขั้วไปในทิศเดียวกับรังสีของมุม
- ระยะ r มีค่าเป็นลบ ถ้าวัดจากจุดขั้วไปในทิศตรงข้ามกับรังสีของมุม
- มุม θ มีค่าเป็นบวก ถ้าวัดทวนเข็มนาฬิกาจากแกนเชิงขั้ว
- มุม θ มีค่าเป็นลบ ถ้าวัดตามเข็มนาฬิกาจากแกนเชิงขั้ว

การบอกพิกัดของจุด P' ซึ่งอยู่ตรงกันข้ามกับจุด P เมื่อเทียบกับจุดขั้วเราใช้พิกัด $(r,\pi+\theta)$ หรือใช้ระยะทางเป็น $-r$ ก็ได้ แต่ต้องใช้มุมที่วัดจากแกนเชิงขั้วกับเส้นตรงที่ต่อจาก OP' ไปยังจุด P เป็นมุม θ เขียนแทนด้วยพิกัด $(-r,\theta)$ ดังรูปที่ 5.2



รูปที่ 5.2 แสดงพิกัดของจุด $P'(-r,\theta)$

นอกจากนี้มุมที่ใช้แทนจุด P หรือ P' ยังใช้มุมได้เกิน 1 รอบ เช่น

- ใช้พิกัดเป็น $(r,\, \theta \pm 2n\pi)$ เมื่อ $n = 1,2,3,\ldots$ แทนจุด P
- ใช้พิกัดเป็น $(-r,\, \theta \pm 2n\pi)$ เมื่อ $n = 1,2,3,\ldots$ แทนจุด P'

ซึ่งจะเห็นว่า พิกัดเชิงขั้วของจุด P มีหลายแบบคือ

$$\begin{aligned}(r,\, \theta) &= (-r,\, \theta + \pi)\\ &= (-r,\, \theta - \pi)\\ &= (r,\, \theta + 2n\pi)\end{aligned}$$

เมื่อ n คือจำนวนเต็ม

เราสามารถเขียนรวมในรูปทั่วไปได้เป็น

$$((-1)^n r,\, \theta + n\pi)$$

เมื่อ $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

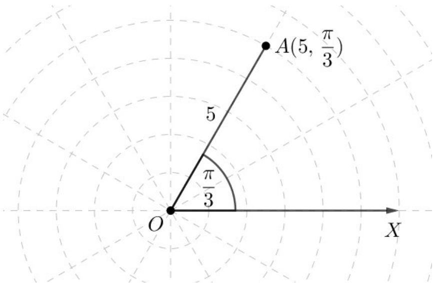
ตัวอย่าง 5.1.1 จงลงจุด $A\left(5, \dfrac{\pi}{3}\right)$ ในระบบพิกัดเชิงขั้ว

วิธีทำ ลงจุด A โดยลากเส้นรัศมียาว 5 หน่วย แล้วหมุนเส้นรัศมีจากแกนเชิงขั้ว OX ไปในทิศทวนเข็มนาฬิกาเป็นมุม $\dfrac{\pi}{3}$ เรเดียน จะได้จุด $A\left(5, \dfrac{\pi}{3}\right)$ ดังรูปที่ 5.3.1

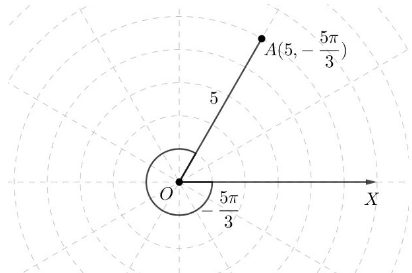
ลงจุด A โดยลากเส้นรัศมียาว 5 หน่วย แล้วหมุนเส้นรัศมีจากแกนเชิงขั้ว OX ไปในทิศตามเข็มนาฬิกาเป็นมุม $-\dfrac{5\pi}{3}$ เรเดียน จะได้จุด $A\left(5, -\dfrac{5\pi}{3}\right)$ ดังรูปที่ 5.3.2

ลงจุด A โดยลากเส้นรัศมียาว 5 หน่วย แล้วหมุนเส้นรัศมีจากแกนเชิงขั้ว OX ไปในทิศทวนเข็มนาฬิกาเป็นมุม $\dfrac{4\pi}{3}$ เรเดียน จะได้จุด $A\left(-5, \dfrac{4\pi}{3}\right)$ ดังรูปที่ 5.3.3

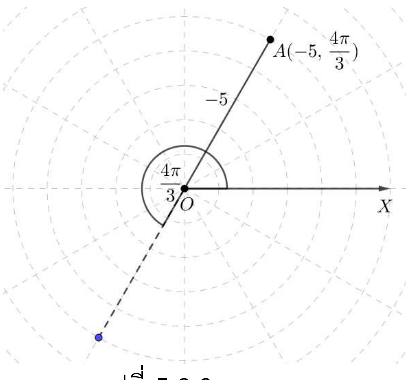
ลงจุด A โดยลากเส้นรัศมียาว 5 หน่วย แล้วหมุนเส้นรัศมีจากแกนเชิงขั้ว OX ไปในทิศตามเข็มนาฬิกาเป็นมุม $-\dfrac{2\pi}{3}$ เรเดียน จะได้จุด $A\left(-5, -\dfrac{2\pi}{3}\right)$ ดังรูปที่ 5.3.4



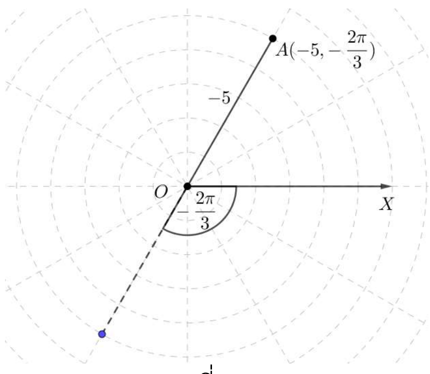
รูปที่ 5.3.1



รูปที่ 5.3.2



รูปที่ 5.3.3



รูปที่ 5.3.4

รูปที่ 5.3 แสดงพิกัดจุด A ในระบบพิกัดเชิงขั้ว

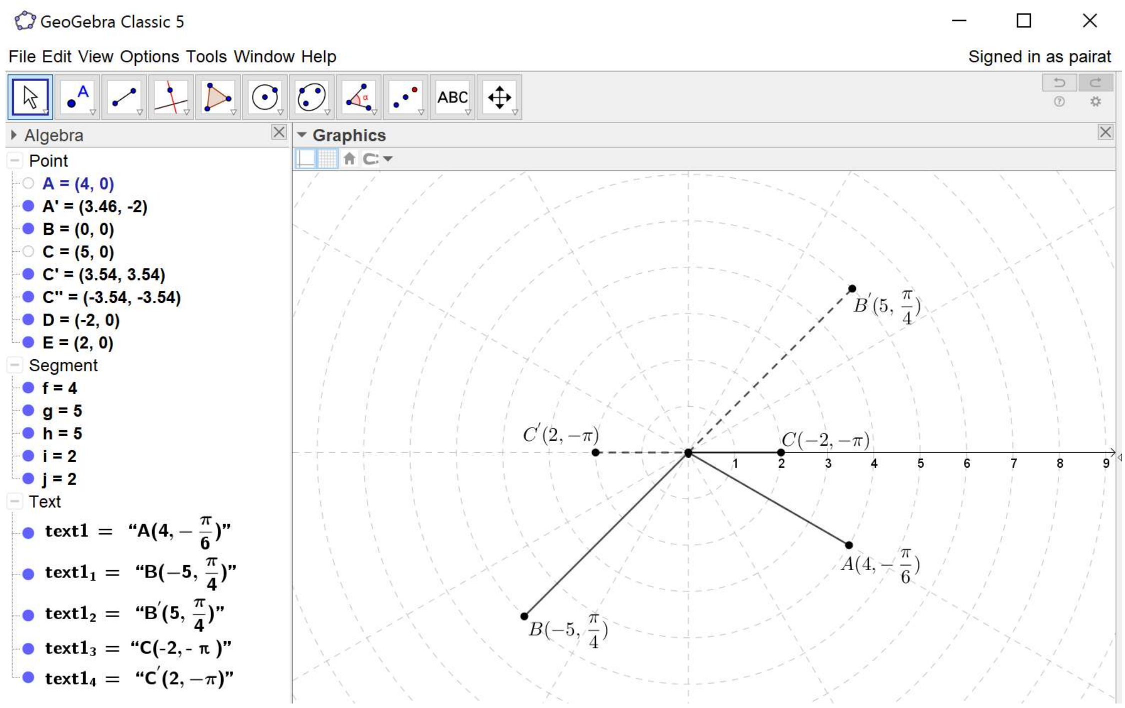
ตัวอย่าง 5.1.2 จงลงจุดซึ่งกำหนดโดยพิกัดเชิงขั้วต่อไปนี้ $A\left(3, -\dfrac{\pi}{6}\right)$, $B\left(-5, \dfrac{\pi}{4}\right)$ และ $C(-2, -\pi)$

วิธีทำ ลงจุด A โดยลากเส้นรัศมียาว 3 หน่วย แล้วหมุนเส้นรัศมีจากแกนเชิงขั้ว OX ไปในทิศตามเข็มนาฬิกาเป็นมุม $-\dfrac{\pi}{6}$ เรเดียน จะได้จุด $A\left(3, -\dfrac{\pi}{6}\right)$

ลงจุด B โดยลากเส้นรัศมียาว 5 หน่วย แล้วหมุนเส้นรัศมีจากแกนเชิงขั้ว OX ไปในทิศทวนเข็มนาฬิกาเป็นมุม $\dfrac{\pi}{4}$ เรเดียนได้จุด $B'\left(5, \dfrac{\pi}{4}\right)$ แล้วส่วนของลากเส้นตรง OB' ผ่านจุดกำเนิดไปยังจุด B ซึ่งอยู่ตรงข้ามกับจุด B' มีระยะ $OB = 5$ หน่วย จะได้จุด $B\left(-5, \dfrac{\pi}{4}\right)$

ลงจุด C โดยลากเส้นรัศมียาว 2 หน่วย แล้วหมุนเส้นรัศมีจากแกนเชิงขั้ว OX ไปในทิศตามเข็มนาฬิกาเป็นมุม $-\pi$ เรเดียน จะได้จุด $C'\left(2, -\pi\right)$ แล้วลากส่วนของเส้นตรง OC' ผ่านจุดกำเนิดไปยังจุด C ซึ่งอยู่ตรงข้ามกับจุด C' มีระยะ $OC = 2$ หน่วย จะได้จุด $C\left(-2, -\pi\right)$

ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 5.1.2 ดังรูปที่ 5.4



รูปที่ 5.4 พิกัดจุด A, B และ C ในระบบพิกัดเชิงขั้ว

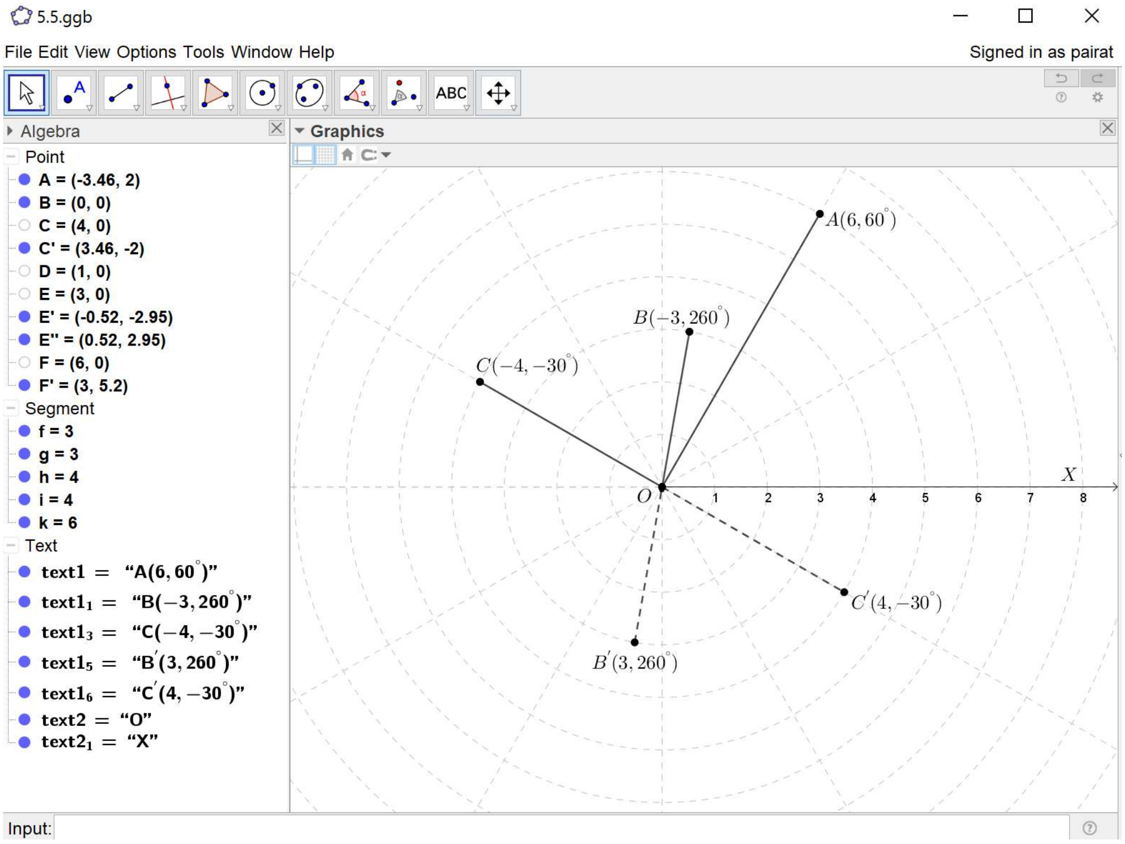
ตัวอย่าง 5.1.3 จงลงจุด $A(6,\ 60^\circ)$, $B(-3, 260^\circ)$ และ $C(-4, -30^\circ)$

วิธีทำ ลงจุด A โดยลากเส้นรัศมียาว 6 หน่วย แล้วหมุนเส้นรัศมีจากแกนเชิงขั้ว OX ไปในทิศทวนเข็มนาฬิกาเป็นมุม 60° จะได้จุด $A(6,\ 60^\circ)$

ลงจุด B โดยลากเส้นรัศมียาว 3 หน่วย แล้วหมุนเส้นรัศมีจากแกนเชิงขั้ว OX ไปในทิศทวนเข็มนาฬิกาเป็นมุม 260° จะได้จุด $B'(3,\ 260^\circ)$ แล้วลากส่วนของเส้นตรง OB' ผ่านจุดกำเนิดไปยังจุด B ซึ่งอยู่ตรงข้ามกับจุด B' มีระยะ $OB = 3$ หน่วย จะได้จุด $B(-3,\ 260^\circ)$

ลงจุด C โดยลากเส้นรัศมียาว 4 หน่วย แล้วหมุนเส้นรัศมีจากแกนเชิงขั้ว OX ไปในทิศตามเข็มนาฬิกาเป็นมุม 30° จะได้จุด $C'(4,\ -30^\circ)$ แล้วลากส่วนของเส้นตรง OC' ผ่านจุดกำเนิดไปยังจุด C ซึ่งอยู่ตรงข้ามกับจุด C' มีระยะ $OC = 4$ หน่วย จะได้จุด $C(-4,\ -30^\circ)$

ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 5.1.3 ดังรูปที่ 5.5



รูปที่ 5.5 พิกัดจุด A, B และ C ในระบบพิกัดเชิงขั้ว

ตัวอย่าง 5.1.4 จงบอกพิกัดเชิงขั้วที่อยู่ตรงข้ามกับจุดที่กำหนดให้ต่อไปนี้

ก. จุด $A\left(1, \dfrac{\pi}{4}\right)$ ข. จุด $B\left(2, -\dfrac{\pi}{3}\right)$ ค. จุด $C\left(-4, \dfrac{5\pi}{6}\right)$ ง. จุด $D\left(-3, 181^\circ\right)$

วิธีทำ ก. จุด $A\left(1, \dfrac{\pi}{4}\right)$

จากจุด A เป็นจุดที่อยู่ในจตุภาคที่ 1 หาจุด A' ที่อยู่ในจตุภาคที่ 3 ที่มีรัศมียาว 2 หน่วย โดยหมุนเส้นรัศมีจากแกนเชิงขั้ว OX ไปในทิศทวนเข็มนาฬิกาเป็นมุม $\dfrac{5\pi}{4}$ เรเดียน ได้จุด $A'\left(1, \dfrac{5\pi}{4}\right)$

ดังนั้น พิกัดจุด $A'\left(1, \dfrac{5\pi}{4}\right)$ เป็นจุดที่อยู่ตรงข้ามกับจุด $A\left(1, \dfrac{\pi}{4}\right)$

ข. จุด $B\left(2, -\dfrac{\pi}{3}\right)$

วิธีทำ จุด B เป็นจุดที่อยู่ในจตุภาคที่ 2 หาจุด B' ที่อยู่ในจตุภาคที่ 4 ที่มีรัศมียาว 2 หน่วย โดยหมุนเส้นรัศมีจากแกนเชิงขั้ว OX ไปในทิศทวนเข็มนาฬิกาเป็นมุม $\dfrac{2\pi}{3}$ เรเดียน ได้จุด $B'\left(2, \dfrac{2\pi}{3}\right)$

ดังนั้น พิกัดจุด $B'\left(2, \dfrac{2\pi}{3}\right)$ เป็นจุดที่อยู่ตรงข้ามกับจุด $B\left(2, -\dfrac{\pi}{3}\right)$

ค. จุด $C\left(-4, \dfrac{5\pi}{6}\right)$

วิธีทำ จุด C เป็นจุดที่อยู่ในจตุภาคที่ 4 หาจุด C' ที่อยู่ในจตุภาคที่ 2 ที่มีรัศมียาว 4 หน่วย โดยหมุนเส้นรัศมีจากแกนเชิงขั้ว OX ไปในทิศทวนเข็มนาฬิกาเป็นมุม $\dfrac{5\pi}{6}$ เรเดียน ได้จุด $C'\left(4, \dfrac{5\pi}{6}\right)$

ดังนั้น พิกัดจุด $C'\left(4, \dfrac{5\pi}{6}\right)$ เป็นจุดที่อยู่ตรงข้ามกับจุด $C\left(-4, \dfrac{5\pi}{6}\right)$

ง. จุด $D\left(-3, 181^\circ\right)$

วิธีทำ จุด D เป็นจุดที่อยู่ในจตุภาคที่ 3 หมุนเส้นรัศมีจากแกนเชิงขั้ว OX ซึ่งมีรัศมียาว 3 หน่วย ไปในทิศทวนเข็มนาฬิกาเป็นมุม 1° ได้จุด $D\left(3, 1^\circ\right)$

ดังนั้น พิกัดจุด $D\left(3, 1^\circ\right)$ เป็นจุดที่อยู่ตรงข้ามกับจุด $D\left(-3, 181^\circ\right)$

ตัวอย่าง 5.1.5 จงบอกพิกัดเชิงขั้วอีกรูปแบบหนึ่งของจุดที่กำหนดให้ต่อไปนี้

ก. จุด $A\left(2, \dfrac{\pi}{4}\right)$ ข. จุด $B\left(6, \dfrac{-2\pi}{3}\right)$ ค. จุด $C\left(-1, \dfrac{5\pi}{6}\right)$ ง. จุด $D(-3, 50^\circ)$

วิธีทำ จุด A เป็นจุดที่อยู่ในจตุภาคที่ 1 หาจุด A' ที่อยู่ในจตุภาคที่ 3 มีรัศมียาว 2 หน่วย หมุนเส้นรัศมีจากแกนเชิงขั้ว OX ไปในทิศทวนเข็มนาฬิกาเป็นมุม $\dfrac{5\pi}{4}$ เรเดียน ได้จุด $A'\left(2, \dfrac{5\pi}{4}\right)$ ซึ่งเป็นจุดที่อยู่ตรงข้ามกับจุด A แล้วสะท้อนจุด $A'\left(2, \dfrac{5\pi}{4}\right)$ ผ่านจุดกำเนิด จะได้จุด $A\left(-2, \dfrac{5\pi}{4}\right)$

ดังนั้น พิกัดจุด $A\left(2, \dfrac{\pi}{4}\right)$ อีกรูปแบบหนึ่งคือจุด $A\left(-2, \dfrac{5\pi}{4}\right)$

ข. จุด $B\left(6, \dfrac{-2\pi}{3}\right)$

วิธีทำ จุด B เป็นจุดที่อยู่ในจตุภาคที่ 3 หาจุด B' ที่อยู่ในจตุภาคที่ 1 มีรัศมียาว 6 หน่วย หมุนเส้นรัศมีจากแกนเชิงขั้ว OX ไปในทิศทวนเข็มนาฬิกาเป็นมุม $\dfrac{\pi}{3}$ เรเดียน ได้จุด $B'\left(6, \dfrac{\pi}{3}\right)$ ซึ่งเป็นจุดที่อยู่ตรงข้ามกับจุด B แล้วสะท้อนจุด $B'\left(6, \dfrac{-2\pi}{3}\right)$ ผ่านจุดกำเนิด จะได้จุด $B\left(-6, \dfrac{\pi}{3}\right)$

ดังนั้น พิกัดจุด $B\left(6, \dfrac{-2\pi}{3}\right)$ อีกรูปแบบหนึ่งคือจุด $B\left(-6, \dfrac{\pi}{3}\right)$

ค. จุด $C\left(-1, \dfrac{5\pi}{6}\right)$

วิธีทำ จุด C เป็นจุดที่อยู่ในจตุภาคที่ 4 หมุนเส้นรัศมีจากแกนเชิงขั้ว OX ซึ่งมีรัศมียาว 1 หน่วย ไปในทิศตามเข็มนาฬิกาเป็นมุม $-\dfrac{\pi}{6}$ เรเดียน ได้จุด $C\left(1, -\dfrac{\pi}{6}\right)$

ดังนั้น พิกัดจุด $C\left(-1, \dfrac{5\pi}{6}\right)$ อีกรูปแบบหนึ่งคือจุด $C\left(1, -\dfrac{\pi}{6}\right)$

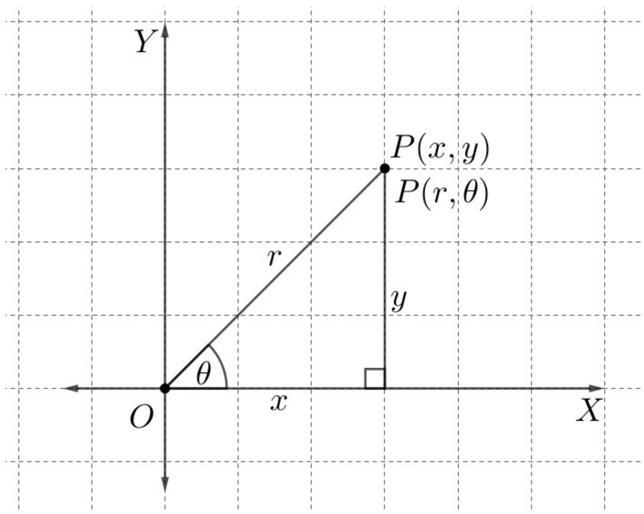
ง. จุด $D(-3, 50^\circ)$

วิธีทำ จุด D เป็นจุดที่อยู่ในจตุภาคที่ 3 หมุนเส้นรัศมีจากแกนเชิงขั้ว OX ซึ่งมีรัศมียาว 3 หน่วย ไปในทิศทวนเข็มนาฬิกาเป็นมุม 230° ได้จุด $D(3, 230^\circ)$

ดังนั้น พิกัดจุด $D(-3, 50^\circ)$ อีกรูปแบบหนึ่งคือจุด $D(3, 230^\circ)$

5.2 ความสัมพันธ์ระหว่างพิกัดฉากและพิกัดเชิงขั้ว (Relations Between Rectangular and Polar Coordinates)

Fuller, Gordon & Tarwater, Dolton. (1992 : 212-213) และ Riddle, Douglas F. (1996 : 294) ได้กล่าวว่า ความสัมพันธ์ระหว่างพิกัดฉากกับพิกัดเชิงขั้วพิจารณาได้จากรูปที่ 5.6 ซึ่งขั้วของระบบพิกัดเชิงขั้วทับกับจุดกำเนิดของระบบพิกัดฉาก และแกนเชิงขั้วของระบบพิกัดเชิงขั้วทับกับแกน X ด้านบวกของระบบพิกัดฉาก โดยกำหนดจุด P ให้มีพิกัดเป็น (x, y) ในระบบพิกัดฉาก และมีพิกัด (r, θ) ในระบบพิกัดเชิงขั้ว



รูปที่ 5.6 ความสัมพันธ์ระหว่างพิกัดฉากกับพิกัดเชิงขั้ว

จากรูปที่ 5.6 จะได้ความสัมพันธ์ของ x และ y ในเทอมของ r และ θ ดังนี้

$$x = r\cos\theta \text{ และ } y = r\sin\theta \quad \text{...}(1)$$

ถึงแม้ว่าเราจะได้สมการ (1) จากการพิจารณารูปที่ 5.6 ซึ่งแสดงเฉพาะกรณีเมื่อ $r > 0$ และ $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ แต่สมการ (1) เป็นจริงสำหรับทุกค่าของ r และ θ ดังนั้นสมการดังกล่าวทำให้เราสามารถหาพิกัดฉากได้เมื่อทราบพิกัดเชิงขั้ว ในทางกลับกัน เมื่อทราบพิกัดฉาก เราสามารถหาพิกัดเชิงขั้วได้จากความสัมพันธ์ของ r และ θ ในเทอมของ x และ y ดังนี้

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ และ } \tan\theta = \frac{y}{x} \quad \text{...}(2)$$

สังเกตว่า θ ที่สอดคล้องกับสมการ (2) มีได้หลายค่า ในการหาพิกัดเชิงขั้วจากพิกัดฉาก เราจึงจะไม่เพียงแค่เลือกค่า θ ใดๆ ที่สอดคลองกับ $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$ แต่จะต้องเลือก θ ที่ทำให้จุด $(r,\, \theta)$ อยู่ในจตุภาคที่ตรงกับที่ต้องการด้วย

ค่ามุม θ คือ $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ ดังนั้นค่าของ θ ในสมการ $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$ และ r ในสมการ $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ จะไม่แสดงจุดใด ๆ ที่อยู่ทางซ้ายของแกน X ในการหา θ จึงแยกเป็นสองส่วนโดยพิจารณาค่าของ x ดังนี้

$$\theta = \begin{cases} \tan^{-1}\dfrac{y}{x} & , x > 0 \\ \pi + \tan^{-1}\dfrac{y}{x} & , x < 0 \end{cases}$$

ในการคำนวณ θ เมื่อเปลี่ยนจากพิกัดฉากไปยังพิกัดเชิงขั้ว

$$\theta = \begin{cases} \tan^{-1}\dfrac{y}{x} & , (x,y) \in Q_1,\, Q_4 \\ \pi + \tan^{-1}\dfrac{y}{x} & , (x,y) \in Q_3 \\ -\pi + \tan^{-1}\dfrac{y}{x} & , (x,y) \in Q_2 \end{cases}$$

เราอาจให้ทั้ง r และ θ มีค่าเป็นบวกโดยใช้สมการ (2) และ

$$\theta = \begin{cases} \tan^{-1}\dfrac{y}{x} & , (x,y) \in Q_1 \\ \pi + \tan^{-1}\dfrac{y}{x} & , (x,y) \in Q_2, Q_3 \\ -\pi + \tan^{-1}\dfrac{y}{x} & , (x,y) \in Q_4 \end{cases}$$

ข้อสังเกต ถ้า $x = 0$ แล้ว $\tan^{-1}\dfrac{y}{x}$ หาค่าไม่ได้ ดังนั้น

ถ้า $y > 0$ เราให้ $r = \left|y\right|$ และ $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ และ

ถ้า $y < 0$ เราให้ $r = \left|y\right|$ และ $\theta = -\dfrac{\pi}{2}$ หรือ $\theta = \dfrac{3\pi}{2}$

ตัวอย่าง 5.2.1 จงหาพิกัดฉากของจุดซึ่งมีพิกัดเชิงขั้วเป็นดังนี้

ก. จุด $A\left(6, \dfrac{2\pi}{3}\right)$ ข. จุด $B\left(-6, \dfrac{\pi}{4}\right)$ ค. จุด $C\left(4, -\dfrac{11\pi}{6}\right)$ ง. จุด $D(8,\ 330^{\circ})$

วิธีทำ ก. เนื่องจาก $r = 6$ และ $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$ จะได้

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ &= 6\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\ &= 6\left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= r\sin\theta \\ &= 6\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\ &= 6\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= 3\sqrt{3} \end{aligned}$$

ดังนั้น จุด A ในพิกัดฉากคือจุด $(-3, 3\sqrt{3})$

ข. เนื่องจาก $r = -6$ และ $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ จะได้

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ &= -6\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= -3\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= r\sin\theta \\ &= -6\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= -3\sqrt{2} \end{aligned}$$

ดังนั้น จุด B ในพิกัดฉากคือจุด $(-3\sqrt{2}, -3\sqrt{2})$

ค. เนื่องจาก $r = 4$ และ $\theta = -\dfrac{11\pi}{6}$ จะได้

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta & \qquad & y = r\sin\theta \\ &= 4\cos\left(-\frac{11\pi}{6}\right) & \text{และ} \qquad & = 4\sin\left(-\frac{11\pi}{6}\right) \\ &= 2\sqrt{3} & & = 2 \end{aligned}$$

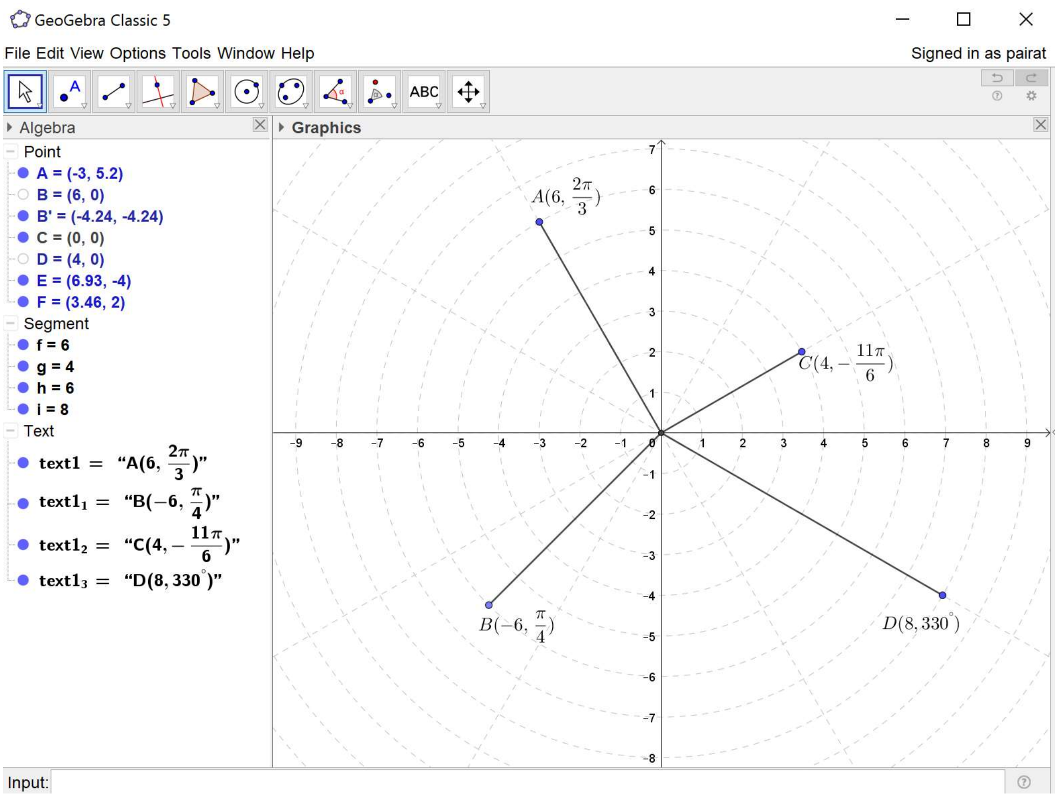
ดังนั้น จุด C ในพิกัดฉากคือจุด $(2\sqrt{3}, 2)$

ง. เนื่องจาก $r = 8$ และ $\theta = 330^\circ$ จะได้

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta & \qquad & y = r\sin\theta \\ &= 8\cos(330^\circ) & \text{และ} \qquad & = 8\sin(330^\circ) \\ &= 4\sqrt{3} & & = -4 \end{aligned}$$

ดังนั้น จุด C ในพิกัดฉากคือจุด $(2\sqrt{3}, 2)$

ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 5.2.1 ดังรูปที่ 5.7



รูปที่ 5.7 แสดงผลเฉลยตามตัวอย่าง 5.2.1

ตัวอย่าง 5.2.2 จงหาพิกัดเชิงขั้วของจุดซึ่งมีพิกัดฉากเป็นดังนี้

ก. จุด $A(-2,\,-2)$ ข. จุด $B(2,\,-2\sqrt{3})$ ค. จุด $C(-2,\,2\sqrt{3})$ ง. จุด $D(3,\,0)$ จ. จุด $E(3,\,4)$

วิธีทำ ก. จุด $A(-2,\,-2)$

เนื่องจาก $x=-2$ และ $y=-2$ จะได้

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2} \\ &= \sqrt{(-2)^2+(-2)^2} \\ &= 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

จาก $x<0$ จุด A ตกในจตุภาคที่ 3

$$\begin{aligned} \theta &= \pi+\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \\ &= \pi+\tan^{-1}(1) \\ &= \frac{5\pi}{4} \end{aligned}$$

ดังนั้น จุด $A(-2,\,-2)$ ในพิกัดเชิงขั้วคือจุด $\left(2\sqrt{2},\frac{5\pi}{4}\right)$

วิธีทำ ข. จุด $B(2,\,-2\sqrt{3})$

เนื่องจาก $x=2$ และ $y=-2\sqrt{3}$ จะได้

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2} \\ &= \sqrt{2^2+(-2\sqrt{3})^2} \\ &= \sqrt{16} \\ &= 4 \end{aligned}$$

จาก $x>0$ จุด B ตกในจตุภาคที่ 4

$$\begin{aligned} \theta &= \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \\ &= \tan^{-1}(-\sqrt{3}) \\ &= -\frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

ดังนั้น จุด $B(2,\,-2\sqrt{3})$ ในพิกัดเชิงขั้วคือจุด $\left(4,-\frac{\pi}{3}\right)$

วิธีทำ ค. จุด $C(-2,\, 2\sqrt{3})$

เนื่องจาก $x = -2$ และ $y = 2\sqrt{3}$ จะได้

$$
\begin{aligned}
r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\
&= \sqrt{(-2)^2 + (2\sqrt{3})^2} \\
&= \sqrt{16} \\
&= 4
\end{aligned}
$$

จาก $x < 0$ จุด C ตกในจตุภาคที่ 2

$$
\begin{aligned}
\theta &= \pi + \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \\
&= \pi + \tan^{-1}(-\sqrt{3}) \\
&= \pi - \frac{\pi}{3} \\
&= \frac{2\pi}{3}
\end{aligned}
$$

ดังนั้น จุด $C(-2,\, 2\sqrt{3})$ ในพิกัดเชิงขั้วคือจุด $\left(4, \dfrac{2\pi}{3}\right)$

วิธีทำ ง. จุด $D(3,\, 0)$

เนื่องจาก $x = 1$ และ $y = 0$ จะได้

$$
\begin{aligned}
r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\
&= \sqrt{3^2 + 0^2} \\
&= \sqrt{9} \\
&= 3
\end{aligned}
$$

จาก $x > 0$ จุด D ตกบนแกน X

$$
\begin{aligned}
\theta &= \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \\
&= \tan^{-1}\left(\frac{0}{3}\right) \\
&= \tan^{-1}(0) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

ดังนั้น จุด $D(3,\, 0)$ ในพิกัดเชิงขั้วคือจุด $(3, 0^\circ)$

วิธีทำ จ. จุด $E(3,\ 4)$

เนื่องจาก $x=3$ และ $y=4$ จะได้

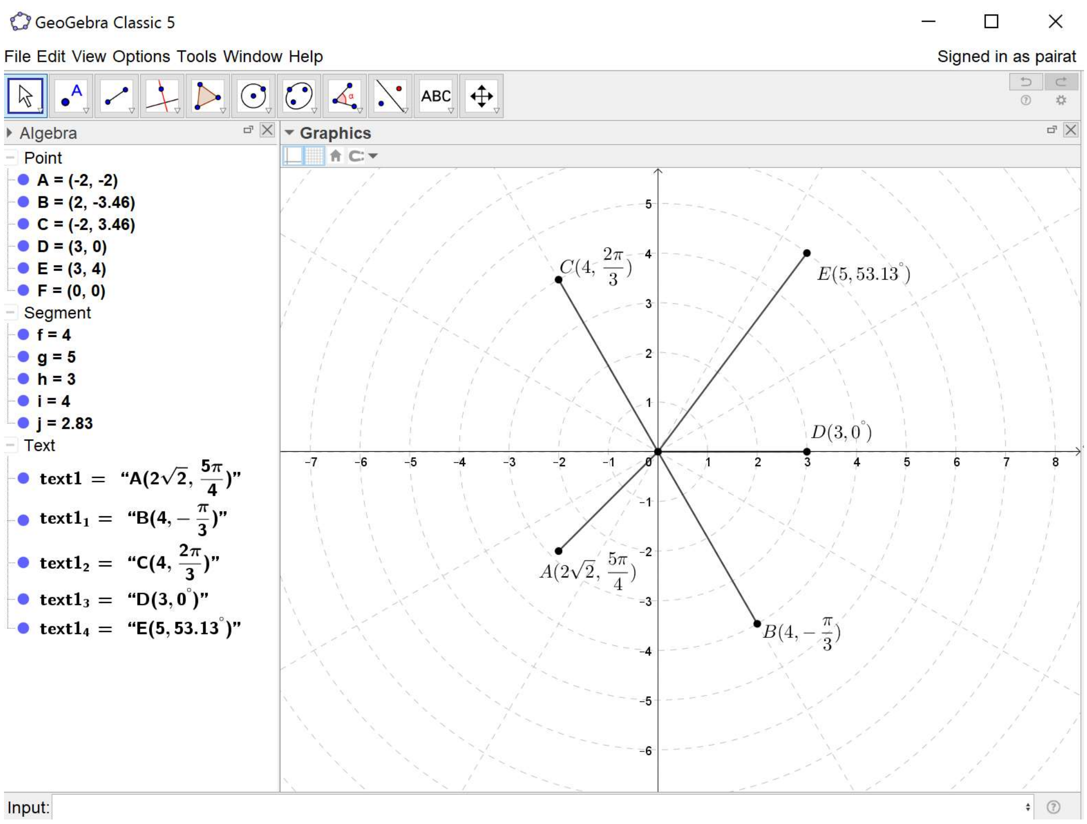
$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2} \\ &= \sqrt{3^2+4^2} \\ &= 5 \end{aligned}$$

จาก $x>0$ จุด E ตกในจตุภาคที่ 1

$$\begin{aligned} \theta &= \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \\ &= \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) \\ &\approx 53.13^\circ \end{aligned}$$

ดังนั้น จุด $E(3,\ 4)$ ในพิกัดเชิงขั้วคือจุด $(5, 53.13^\circ)$

ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 5.2.2 ดังรูปที่ 5.8



รูปที่ 5.8 แสดงผลเฉลยตามตัวอย่าง 5.2.2

ตัวอย่าง 5.2.3 จงแสดงว่าจุดที่กำหนดให้ต่อไปนี้อยู่บนกราฟพิกัดเชิงขั้วซึ่งมีสมการ $r = \dfrac{2}{1-\cos\theta}$

ก. จุด $\left(2, \dfrac{\pi}{2}\right)$ ข. จุด $\left(-2, \dfrac{3\pi}{2}\right)$ ค. จุด $C\left(-1, 2\pi\right)$

วิธีทำ ก. จุด $\left(2, \dfrac{\pi}{2}\right)$

แทน $r = 2$ และ $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ ในสมการ $r = \dfrac{2}{1-\cos\theta}$ จะได้

$$\begin{aligned} 2 &= \frac{2}{1-\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right)} \\ &= 2 \end{aligned}$$

จะเห็นว่าจุด $\left(2, \dfrac{\pi}{2}\right)$ สอดคล้องกับสมการ $r = \dfrac{2}{1-\cos\theta}$

ดังนั้น จุด $\left(2, \dfrac{\pi}{2}\right)$ อยู่บนกราฟ $r = \dfrac{2}{1-\cos\theta}$

วิธีทำ ข. จุด $\left(-2, \dfrac{3\pi}{2}\right)$

แทน $r = -2$ และ $\theta = \dfrac{3\pi}{2}$ ในสมการ $r = \dfrac{2}{1-\cos\theta}$ จะได้

$$\begin{aligned} -2 &= \frac{2}{1-\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)} \\ &= 2 \end{aligned}$$

จะเห็นว่าสมการนี้ไม่จริง

แม้ว่าจุดนี้ไม่สอดคล้องกับสมการ แต่เราก็ยังไม่สามารถสรุปได้ว่าจุดนี้ไม่อยู่บนเส้นโค้ง เนื่องจากเราเห็นได้จากข้อ ก. ว่ามันอยู่บนเส้นโค้ง เพราะว่า จุด $\left(2, \dfrac{\pi}{2}\right)$ และจุด $\left(-2, \dfrac{3\pi}{2}\right)$ เป็นพิกัดจุดเดียวกัน

เพราะฉะนั้น ถ้าเราตรวจสอบพิกัดหนึ่งที่เป็นตัวแทนของจุดหนึ่งไม่สอดคล้องกับสมการแล้ว เราต้องตรวจสอบที่เป็นพิกัดอื่นที่เป็นตัวแทนของจุดนั้นด้วย

ดังนั้น จุด $\left(-2, \dfrac{3\pi}{2}\right)$ อยู่บนกราฟ $r = \dfrac{2}{1-\cos\theta}$

วิธีทำ ค. จุด $C\left(-1,\,2\pi\right)$

แทน $r=-1$ และ $\theta=2\pi$ ในสมการ $r=\dfrac{2}{1-\cos\theta}$ จะได้

$$-1=\frac{2}{1-\cos(2\pi)}=\frac{2}{1-1} \quad \text{ซึ่งหาค่าไม่ได้}$$

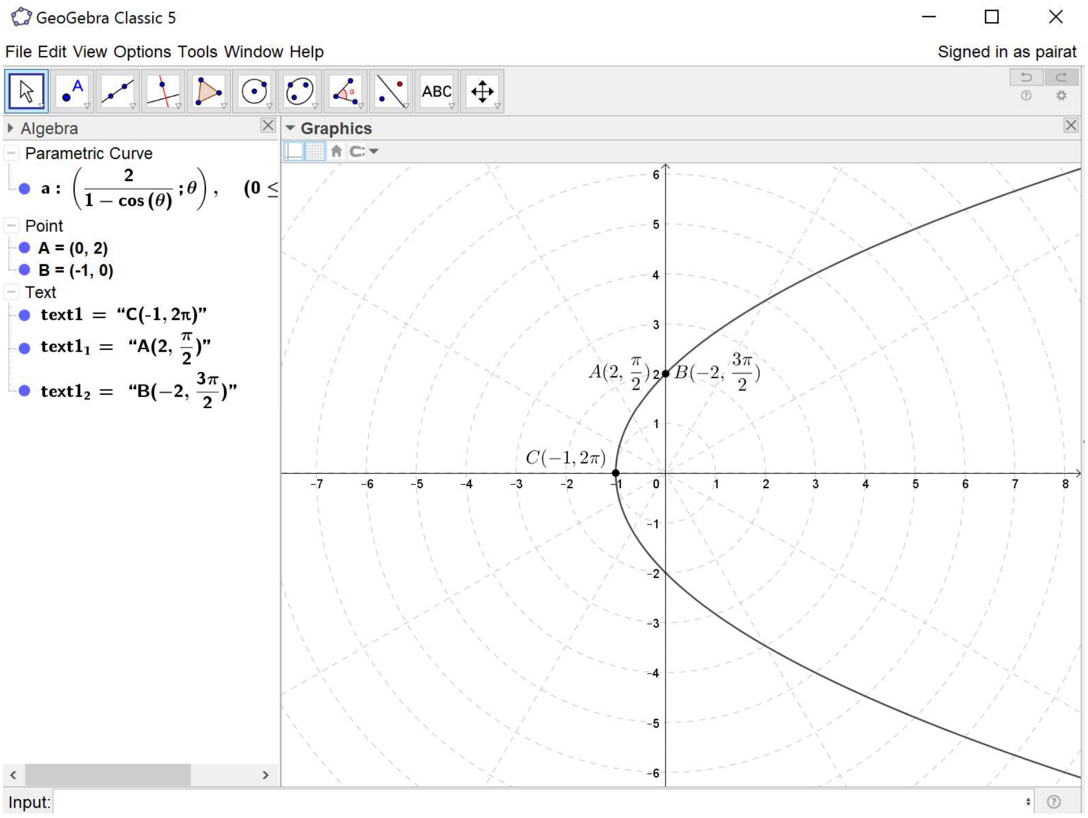
$\therefore$ ต้องตรวจสอบพิกัดอื่นของจุด ซึ่งนำพิกัด $(1,\pi)$ แทนในสมการ $r=\dfrac{2}{1-\cos\theta}$ จะได้

$$1=\frac{2}{1-\cos(2)}=\frac{2}{2}=1$$

จะเห็นว่าจุด $(1,\pi)$ สอดคล้องกับสมการ $r=\dfrac{2}{1-\cos\theta}$

ดังนั้น จุด $C\left(-1,\,2\pi\right)$ อยู่บนกราฟ $r=\dfrac{2}{1-\cos\theta}$

ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 5.2.3 ดังรูปที่ 5.9



รูปที่ 5.9 แสดงผลเฉลยตามตัวอย่าง 5.2.3

ตัวอย่าง 5.2.4 จงเปลี่ยนสมการ $r = 4\cos\theta$ ให้อยู่ในรูปสมการพิกัดฉาก

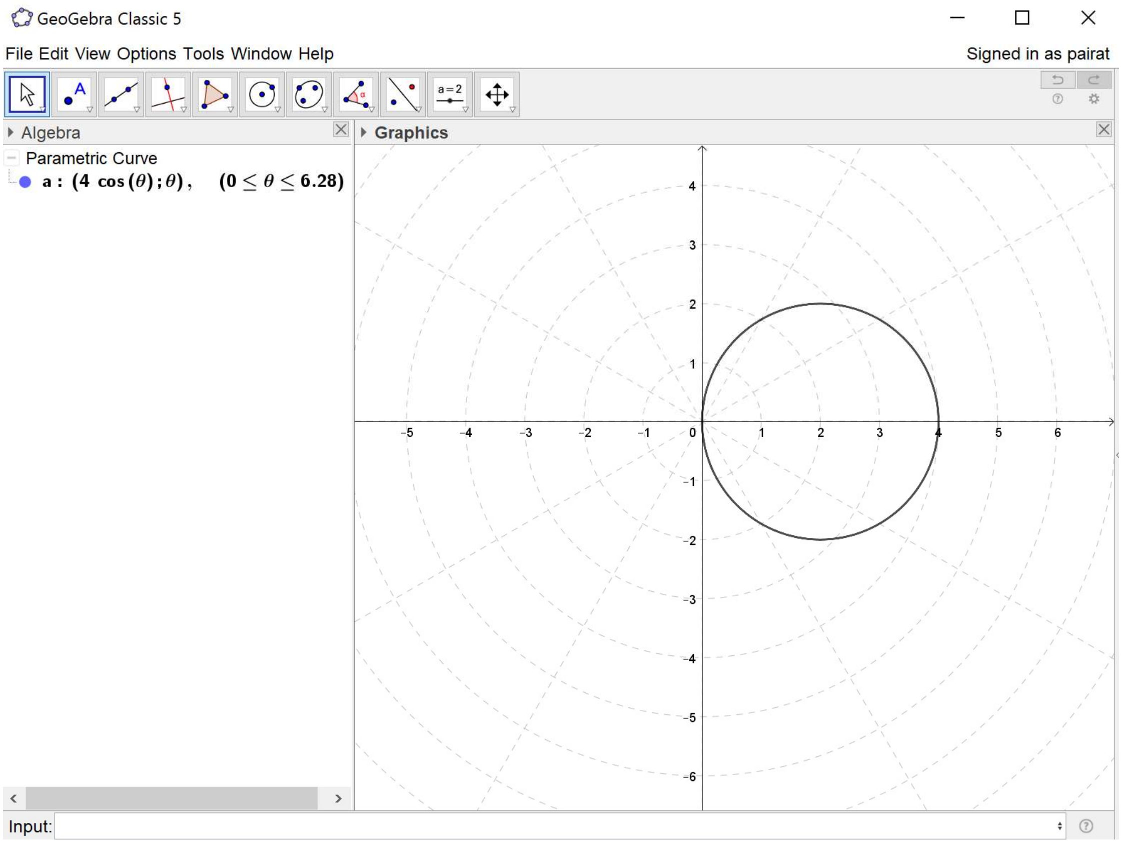
วิธีทำ จัดให้อยู่ในเทอมของ x และ y จะได้ว่า

$$\begin{aligned} r &= 4\cos\theta \\ r^2 &= 4r\cos\theta \\ x^2 + y^2 &= 4x \\ x^2 - 4x + y^2 &= 0 \\ x^2 - 4x + 4 + y^2 &= 0 + 4 \\ (x^2 - 4x + 4) + y^2 &= 4 \\ (x-2)^2 + y^2 &= 2^2 \end{aligned}$$

เราพบว่าสมการนี้เป็นสมการวงกลม จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(2,0)$ และรัศมียาว 2 หน่วย

ดังนั้น สมการ $r = 4\cos\theta$ ในรูปสมการพิกัดฉากคือ $(x-2)^2 + y^2 = 2^2$

ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 5.2.4 ดังรูปที่ 5.10



รูปที่ 5.10 กราฟของสมการ $r = 4\cos\theta$

ตัวอย่าง 5.2.5 จงเปลี่ยนสมการ $r = \dfrac{4}{1-\sin\theta}$ ให้อยู่ในรูปสมการพิกัดฉาก

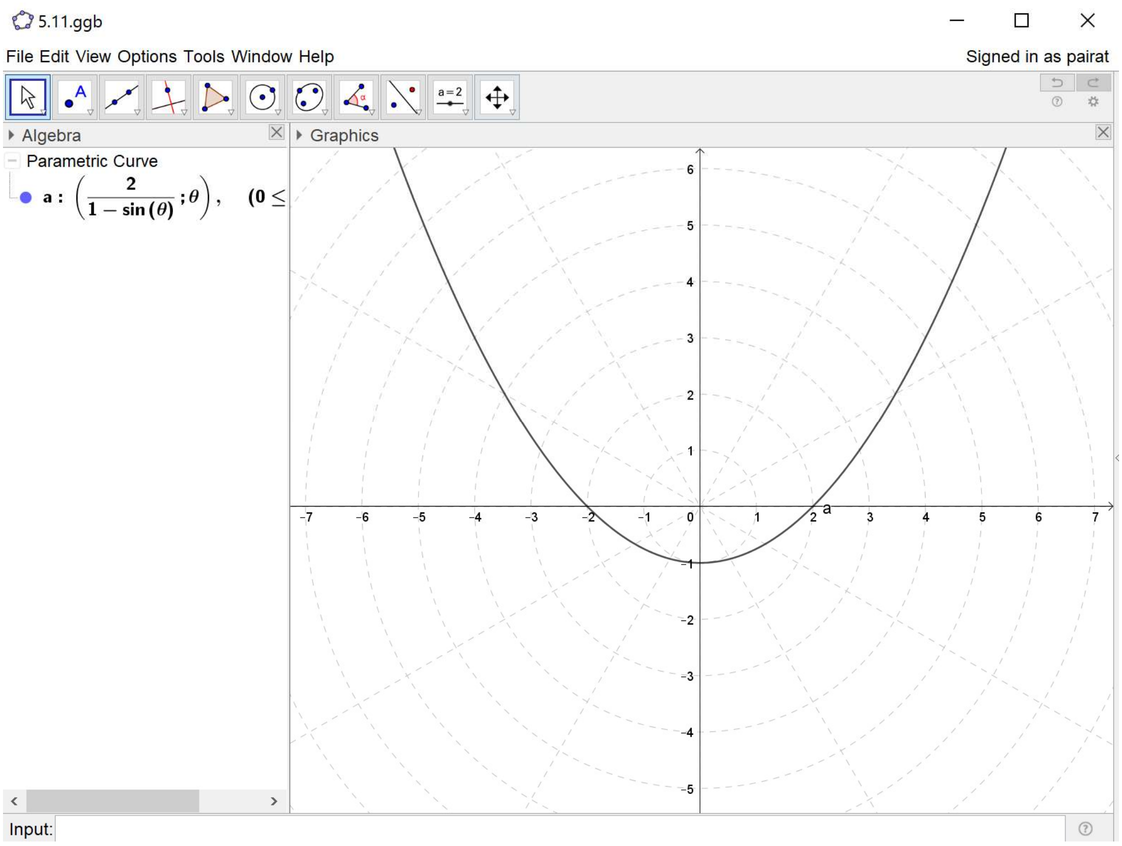
วิธีทำ จัดให้อยู่ในเทอมของ x และ y จะได้ว่า

$$\begin{aligned} r &= \frac{4}{1-\sin\theta} \\ r - r\sin\theta &= 4 \\ \sqrt{x^2+y^2} - y &= 4 \\ x^2 &= 8(y+2) \end{aligned}$$

เราพบว่าสมการนี้เป็นสมการพาราโบลา

ดังนั้น สมการ $r = \dfrac{4}{1-\sin\theta}$ ในรูปสมการพิกัดฉากคือ $x^2 = 8(y+2)$

ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 5.2.5 ดังรูปที่ 5.11



รูปที่ 5.11 กราฟของสมการ $r = \dfrac{4}{1-\sin\theta}$

ตัวอย่าง 5.2.6 จงเปลี่ยนสมการ $r = \dfrac{2}{3 - 2\sin\theta}$ ให้อยู่ในรูปสมการพิกัดฉาก

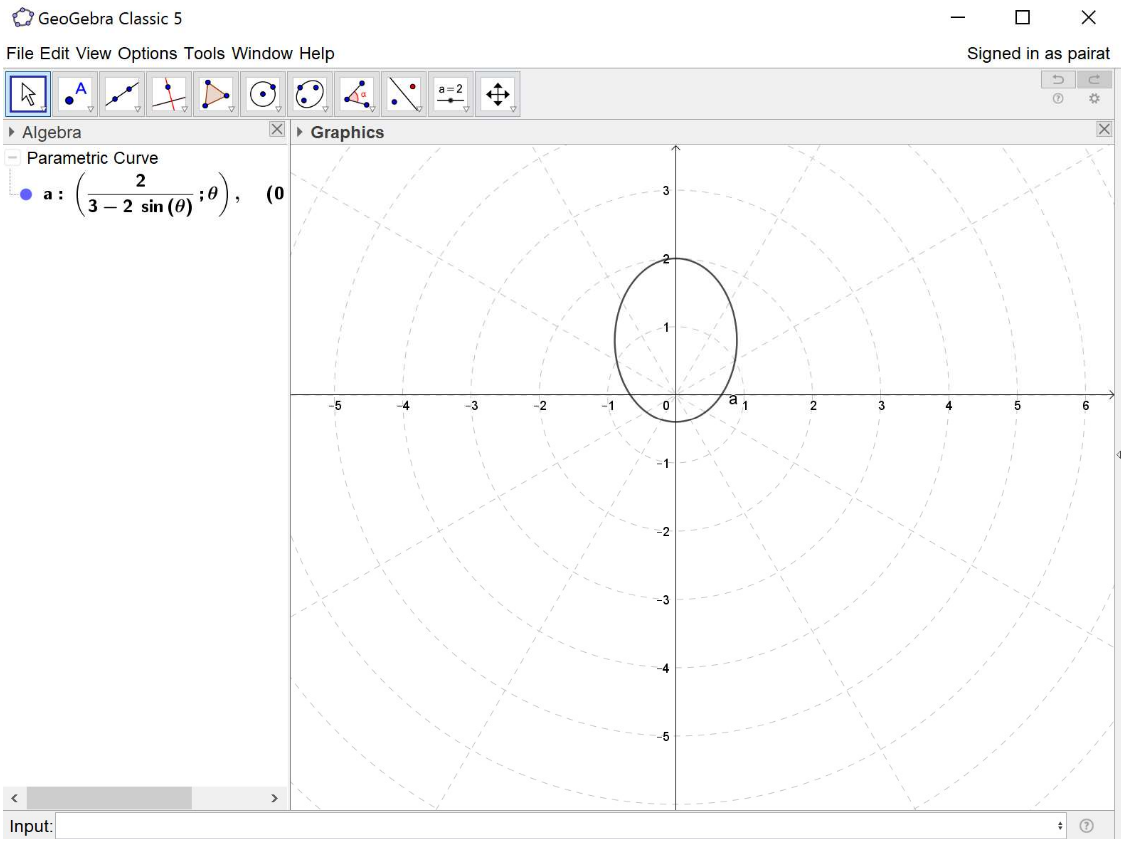
วิธีทำ จัดให้อยู่ในเทอมของ x และ y จะได้ว่า

$$\begin{aligned} 3r - 2r\sin\theta &= 2 \\ 3\sqrt{x^2 + y^2} - 2y &= 2 \\ 3\sqrt{x^2 + y^2} &= 2y + 2 \\ 9(x^2 + y^2) &= (2y + 2)^2 \\ 9x^2 + 5y^2 - 8y &= 4 \end{aligned}$$

เราพบว่าสมการนี้เป็นสมการวงรี

ดังนั้น สมการ $r = \dfrac{2}{3 - 2\sin\theta}$ ในรูปสมการพิกัดฉากคือ $9x^2 + 5y^2 - 8y = 4$

ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 5.2.6 ดังรูปที่ 5.12



รูปที่ 5.12 กราฟของสมการ $r = \dfrac{2}{3 - 2\sin\theta}$

ตัวอย่าง 5.2.7 จงเปลี่ยนสมการ $r = \dfrac{1}{r\cos 2\theta - 2\sin\theta}$ ให้อยู่ในรูปสมการพิกัดฉาก

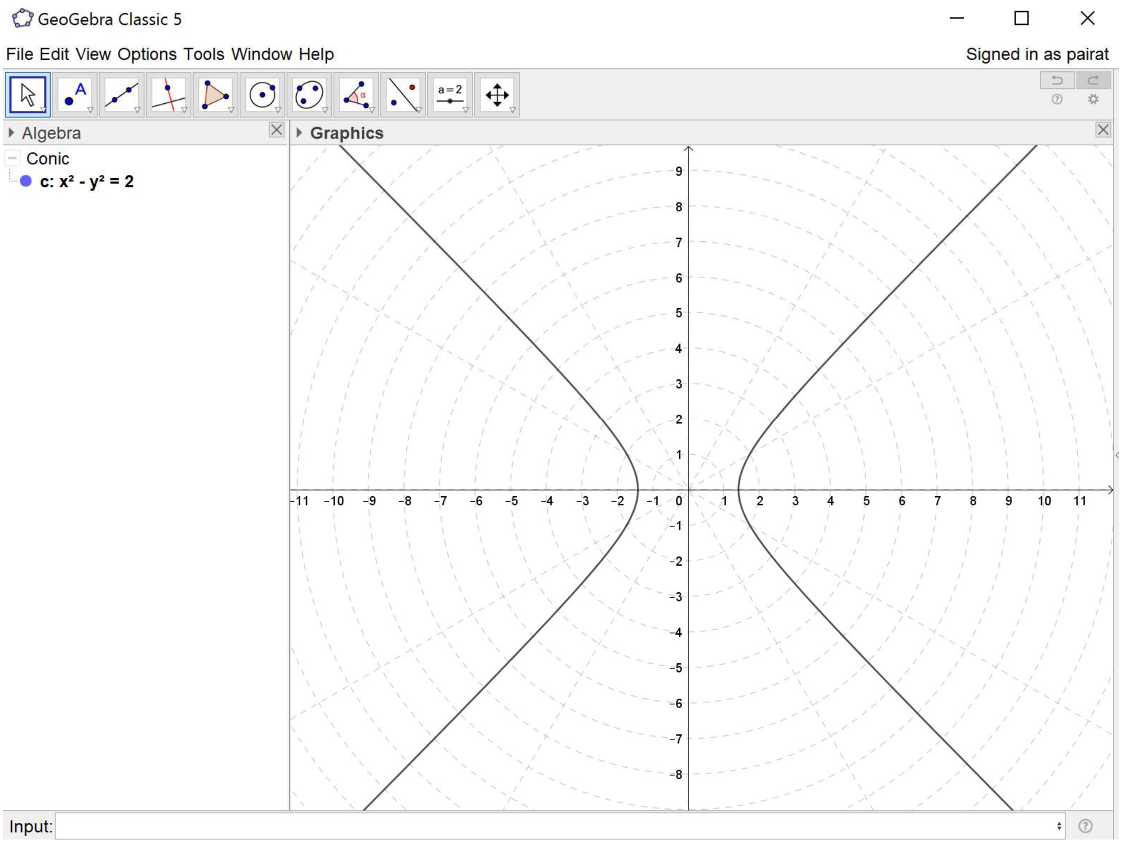
วิธีทำ จัดให้อยู่ในเทอมของ x และ y จะได้ว่า

$$\begin{aligned} r^2\cos 2\theta - 2r\sin\theta &= 2 \\ r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta - 2r\sin\theta &= 2 \\ (r\cos\theta)^2 - (r\sin\theta)^2 - 2r\sin\theta &= 2 \\ x^2 - y^2 - 2y &= 2 \\ x^2 - (y+1)^2 &= 1 \end{aligned}$$

เราพบว่าสมการนี้เป็นสมการไฮเพอร์โบลา

ดังนั้น สมการ $r = \dfrac{1}{r\cos 2\theta - 2\sin\theta}$ ในรูปสมการพิกัดฉากคือ $x^2 - (y+1)^2 = 1$

ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 5.2.7 ดังรูปที่ 5.13



รูปที่ 5.13 กราฟของสมการ $r = \dfrac{1}{r\cos 2\theta - 2\sin\theta}$

ตัวอย่าง 5.2.8 จงเปลี่ยนสมการ $x+4y=3$ ให้อยู่ในรูปสมการพิกัดเชิงขั้ว

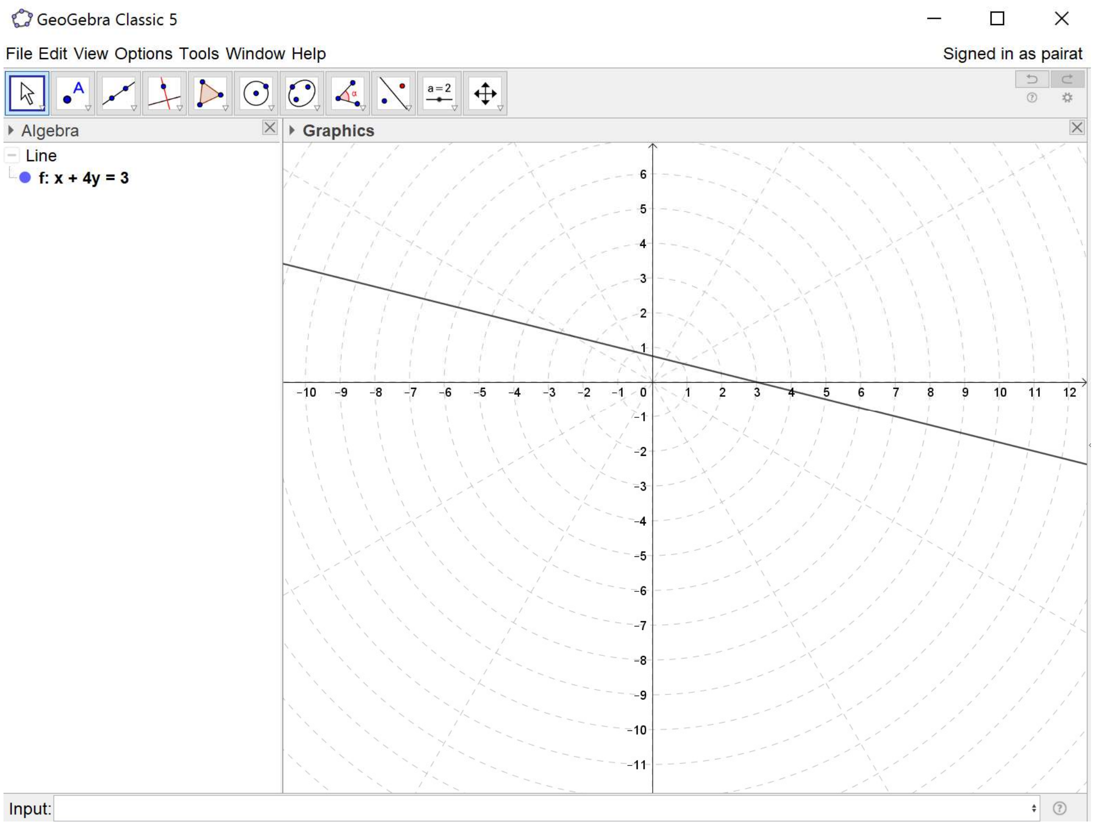
วิธีทำ จัดให้อยู่ในเทอมของ r และ θ โดยการแทนค่า $x=r\cos\theta$ และ $y=r\sin\theta$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} x+4y &= 3 \\ r\cos\theta+4r\sin\theta &= 3 \\ r(\cos\theta+4\sin\theta) &= 3 \\ r &= \frac{3}{\cos\theta+4\sin\theta} \end{aligned}$$

จะเห็นว่าสมการ $x+4y=3$ เป็นสมการเส้นตรง มีความชัน $m=-\dfrac{1}{4}$ ตัดแกน X ที่จุด $(3,0)$ และตัดแกน Y ที่จุด $\left(0,\dfrac{3}{4}\right)$

ดังนั้น สมการ $2x-3y=5$ ในรูปสมการพิกัดเชิงขั้วคือ $r=\dfrac{5}{2\cos\theta-3\sin\theta}$

ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 5.2.8 ดังรูปที่ 5.14



รูปที่ 5.14 กราฟของสมการ $2x-3y=5$

ตัวอย่าง 5.2.9 จงเปลี่ยนสมการ $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0$ ให้อยู่ในรูปสมการพิกัดเชิงขั้ว

วิธีทำ จัดให้อยู่ในเทอมของ r และ θ โดยการแทนค่า $x = r\cos\theta$ และ $y = r\sin\theta$ จะได้ว่า

$$(r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2 - 2r\cos\theta + 2r\sin\theta = 0$$
$$r^2 - 2r\cos\theta + 2r\sin\theta = 0$$
$$r(r - 2\cos\theta + 2\sin\theta) = 0$$

เพราะฉะนั้น $r = 0$ หรือ $r - 2\cos\theta + 2\sin\theta = 0$

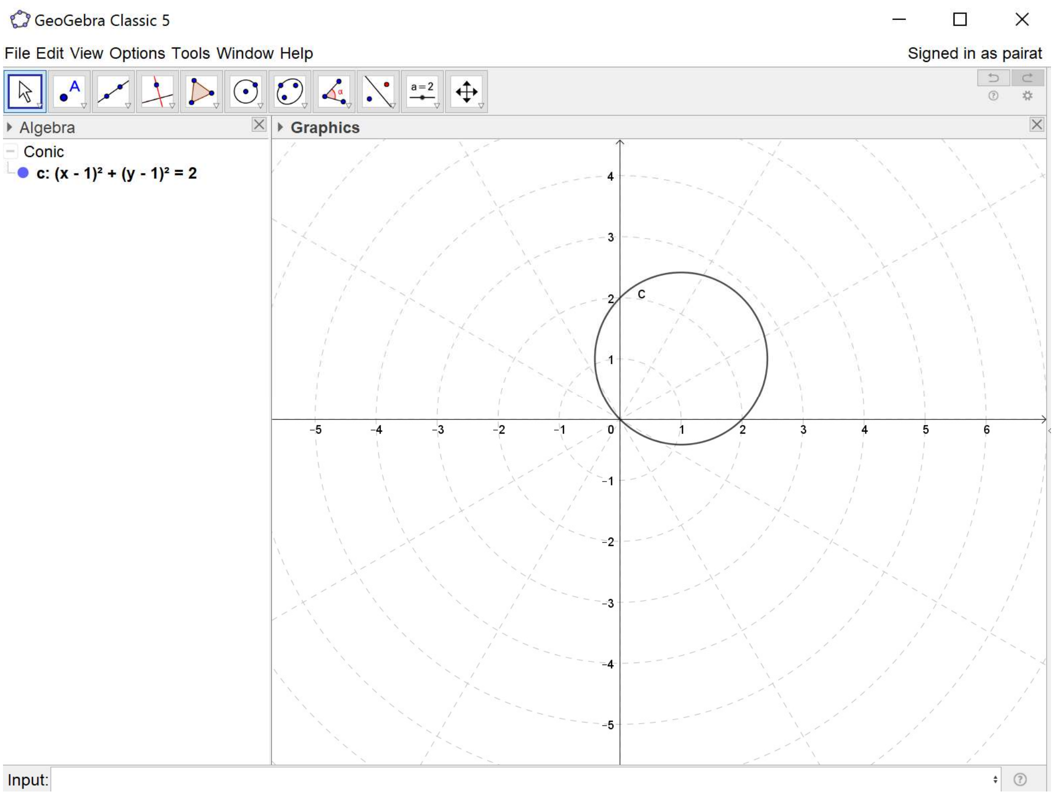
แต่ $r \neq 0$ จึงได้ว่า

$$r - 2\cos\theta + 2\sin\theta = 0$$
$$r = 2\cos\theta - 2\sin\theta$$

จะเห็นว่าสมการ $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0$ เป็นสมการวงกลมจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(1,1)$ รัศมียาว $\sqrt{2}$ หน่วย

ดังนั้น สมการ $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0$ ในรูปสมการพิกัดเชิงขั้วคือ $r = 2\cos\theta - 2\sin\theta$

ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 5.2.9 ดังรูปที่ 5.15



รูปที่ 5.15 กราฟของสมการ $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0$

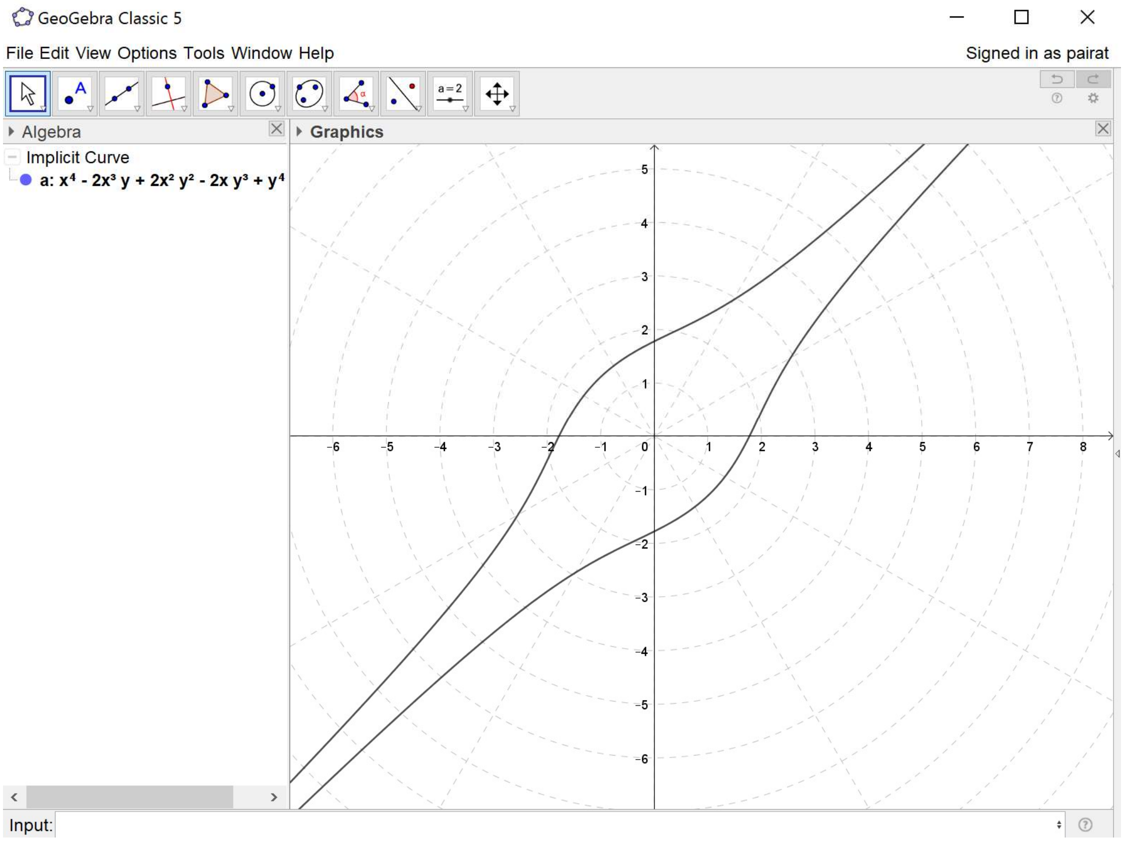
ตัวอย่าง 5.2.10 จงเปลี่ยนสมการ $(x^2+y^2)(x-y)^2=10$ ให้อยู่ในรูปสมการพิกัดเชิงขั้ว

วิธีทำ จัดให้อยู่ในเทอมของ r และ θ โดยการแทนค่า $x=r\cos\theta$ และ $y=r\sin\theta$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\left((r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2\right)(r\cos\theta-r\sin\theta)^2 &= 10\\
(r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta)(r\cos\theta-r\sin\theta)^2 &= 10\\
r^2(r^2\cos^2\theta-2r^2\cos\theta\sin\theta+r^2\sin^2\theta) &= 10\\
r^4(\cos^2\theta+\sin^2\theta-2\cos\theta\sin\theta) &= 10\\
r^4(1-\sin 2\theta) &= 10\\
r^4 &= \frac{10}{1-\sin 2\theta}
\end{aligned}$$

ดังนั้น สมการ $(x^2+y^2)(x-y)^2=10$ ในรูปสมการพิกัดเชิงขั้วคือ $r^4=\dfrac{10}{1-\sin 2\theta}$

ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 5.2.10 ดังรูปที่ 5.16



รูปที่ 5.16 กราฟของสมการ $(x^2+y^2)(x-y)^2=10$

5.3 การพิจารณากราฟของสมการในพิกัดเชิงขั้ว

บทนิยาม 5.3.1 กราฟของสมการ $r = f(\theta)$ ในพิกัดเชิงขั้ว คือ เซตของจุดทั้งหมด (r,θ) ซึ่งพิกัดสอดคล้องกับสมการเชิงขั้วนั้น

(Fuller, Gordon & Tarwater, Dolton, 1992 : 219)

สำหรับในการวาดกราฟในระบบพิกัดเชิงขั้วนั้น กระทำได้เช่นเดียวกันกับการวาดกราฟในระบบพิกัดฉาก โดยเลือกค่า θ ต่าง ๆ จากค่า θ ที่เลือกสามารถนำมาคำนวณหา r จากสมการที่กำหนดให้ได้ จากนั้นนำค่า θ และ r ที่ได้แต่ละคู่ไปกำหนดตำแหน่งของจุดนั้น ๆ ลงในพิกัดเชิงขั้ว นอกจากนี้อาจ จะอาศัยลักษณะจำเพาะของเส้นโค้งเพื่อช่วยในการวาดกราฟด้วย เช่น การพิจารณาสมมาตรขอบเขต ระยะตัดแกน และขอบเขต เพื่อช่วยให้วาดกราฟได้รวดเร็ว และถูกต้องยิ่งขึ้น

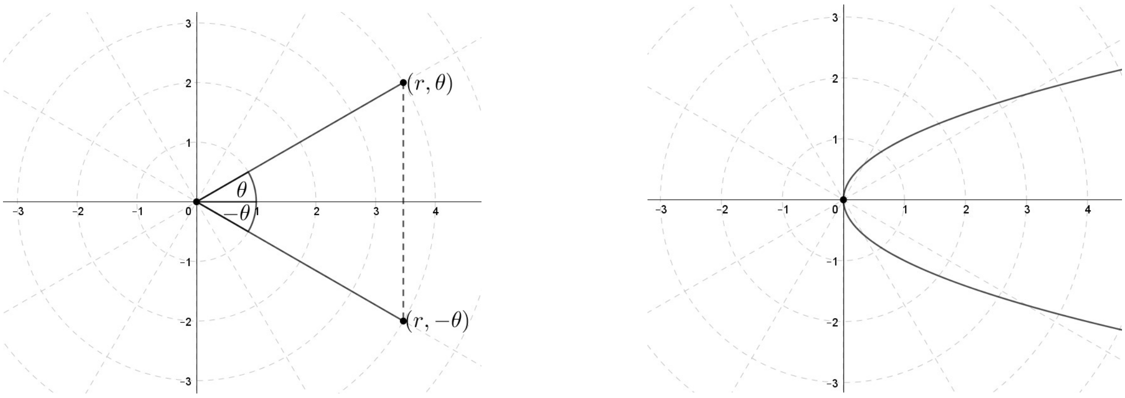
5.3.1 การสมมาตรของสมการเชิงขั้ว

5.3.1.1 เส้นโค้งมีสมมาตรกับแกนเชิงขั้ว (แกน X) ถ้าแทน θ ด้วย $-\theta$ ในสมการเชิงขั้วแล้วสมการคงเดิม หรือถ้าแทน r ด้วย $-r$ และ θ ด้วย $\pi-\theta$ แล้วสมการคงเดิม ดังรูปที่ 5.17

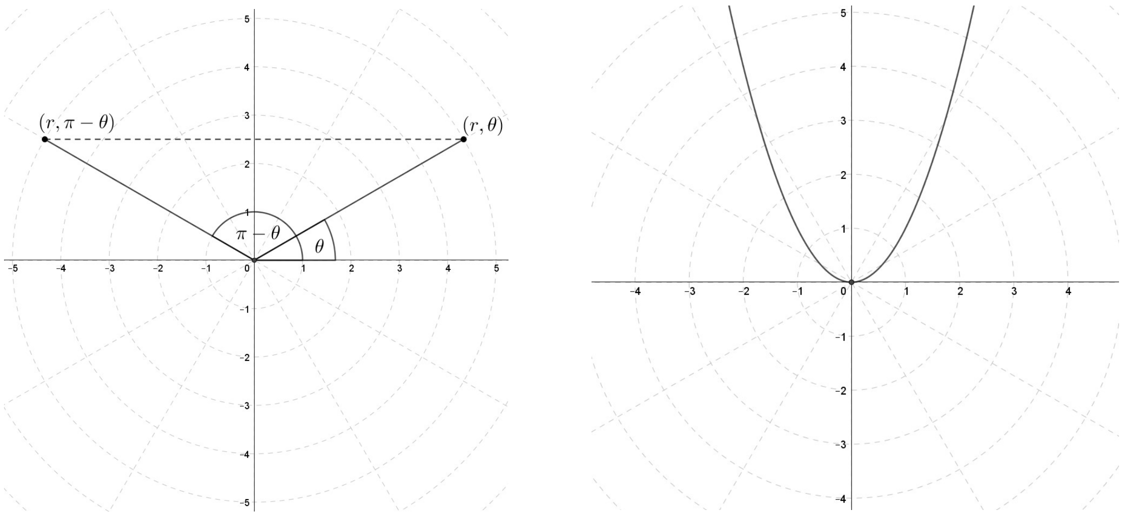
5.3.1.2 เส้นโค้งมีสมมาตรกับแกนตั้งฉากกับแกนเชิงขั้ว ถ้าแทน θ ด้วย $\pi-\theta$ ในสมการเชิงขั้วแล้วสมการคงเดิม หรือถ้าแทน r ด้วย $-r$ และ θ ด้วย $-\theta$ แล้วสมการคงเดิม ดังรูปที่ 5.18

5.3.1.3 เส้นโค้งมีสมมาตรกับขั้ว (จุดกำเนิด) ถ้าแทน r ด้วย $-r$ ในสมการเชิงขั้วแล้วสมการคงเดิม หรือถ้าแทน θ ด้วย $\pi+\theta$ แล้วสมการคงเดิม ดังรูปที่ 5.19

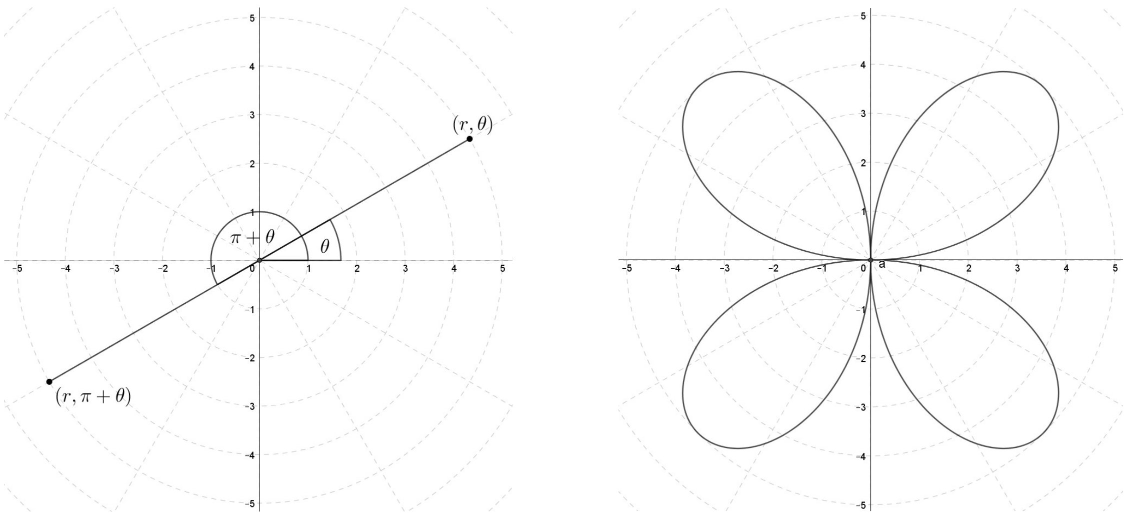
(พรชัยชัย สาตรวาหา, 2550 : 2-14 และ Riddle, Douglas F., 1996 : 286)



รูปที่ 5.17 เส้นโค้งมีสมมาตรกับแกนเชิงขั้ว



รูปที่ 5.18 เส้นโค้งมีสมมาตรกับแกนตั้งฉากกับแกนเชิงขั้ว



รูปที่ 5.19 เส้นโค้งมีสมมาตรกับขั้ว

ข้อสังเกต

เส้นโค้งที่พิจารณาสมมาตรมี 3 ลักษณะ คือ สมมาตรเทียบกับแกนเชิงขั้ว กับแกนตั้งฉากกับแกนเชิงขั้ว และขั้ว เราพบว่า ถ้าเส้นโค้งมีสมมาตร 2 ลักษณะแล้ว เส้นโค้งจะสมมาตรลักษณะที่ 3 ด้วยเสมอ เช่น เส้นโค้งมีสมมาตรเทียบกับแกนเชิงขั้ว และมีสมมาตรเทียบกับแกนตั้งฉากกับแกนเชิงขั้วแล้ว เส้นโค้งจะต้องมีสมมาตรเทียบขั้วด้วย

ตัวอย่าง 5.3.1.1 จงพิจารณาเส้นโค้ง $r = 3 + 5\cos\theta$ ว่าสมมาตรกับแกนเชิงขั้ว แกนที่ตั้งฉากกับแกนเชิงขั้ว และจุดขั้ว หรือไม่

วิธีทำ - พิจารณาที่แกนเชิงขั้ว โดยแทน θ ด้วย $-\theta$ ในสมการ จะได้

$$\begin{aligned} r &= 3 + 5\cos(-\theta) \\ &= 3 + 5\cos\theta \end{aligned}$$

$\therefore$ สมการคงเดิม เส้นโค้งสมมาตรกับแกนเชิงขั้ว

- พิจารณาที่แกนตั้งฉากกับแกนเชิงขั้ว โดยแทน θ ด้วย $\pi - \theta$ ในสมการ จะได้

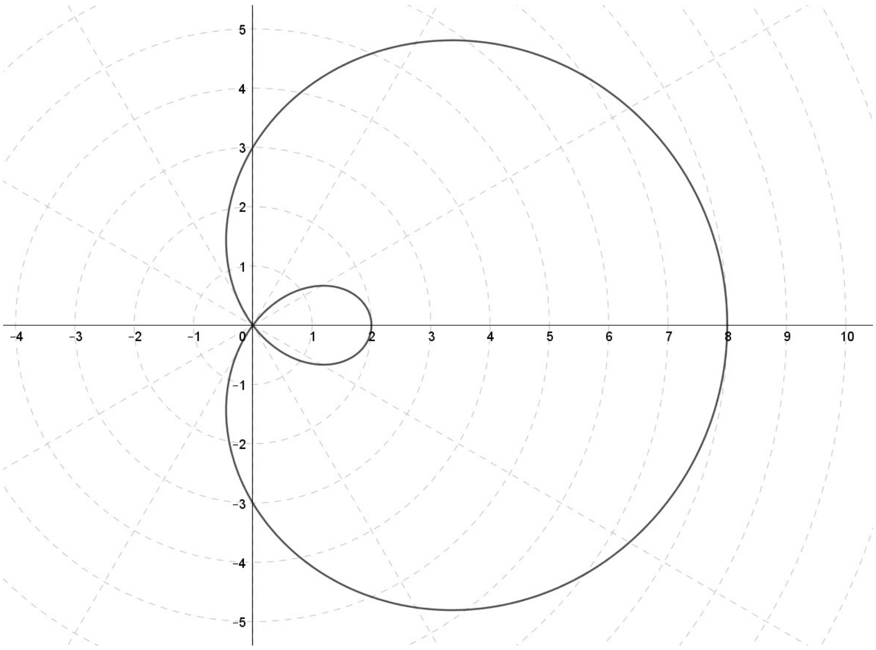
$$\begin{aligned} r &= 3 + 5\cos(\pi - \theta) \\ &= 3 - 5\cos\theta \\ &\neq 3 + 5\cos\theta \end{aligned}$$

$\therefore$ สมการเปลี่ยนแปลง เส้นโค้งไม่สมมาตรกับแกนที่ตั้งฉากกับแกนเชิงขั้ว

- พิจารณาที่จุดขั้ว โดยแทน r ด้วย $-r$ ในสมการ จะได้

$$\begin{aligned} -r &= 3 + 5\cos\theta \\ &= -3 - 5\cos\theta \\ &\neq 3 + 5\cos\theta \end{aligned}$$

$\therefore$ สมการเปลี่ยนแปลง เส้นโค้งไม่สมมาตรกับจุดขั้ว



รูปที่ 5.20 เส้นโค้ง $r = 3 + 5\cos\theta$

ตัวอย่าง 5.3.1.2 จงพิจารณาเส้นโค้ง $r = 4\sin 3\theta$ ว่าสมมาตรกับแกนเชิงขั้ว แกนที่ตั้งฉากกับแกนเชิงขั้ว และจุดขั้ว หรือไม่

วิธีทำ - พิจารณาที่แกนเชิงขั้ว โดยแทน θ ด้วย $-\theta$ ในสมการ จะได้

$$\begin{aligned} r &= 4\sin 3(-\theta) \\ &= 4\sin(-3\theta) \\ &= -4\sin 3\theta \end{aligned}$$

$\therefore$ สมการเปลี่ยนแปลง เส้นโค้งไม่สมมาตรกับแกนเชิงขั้ว

- พิจารณาที่แกนตั้งฉากกับแกนเชิงขั้ว โดยแทน θ ด้วย $\pi - \theta$ ในสมการ จะได้

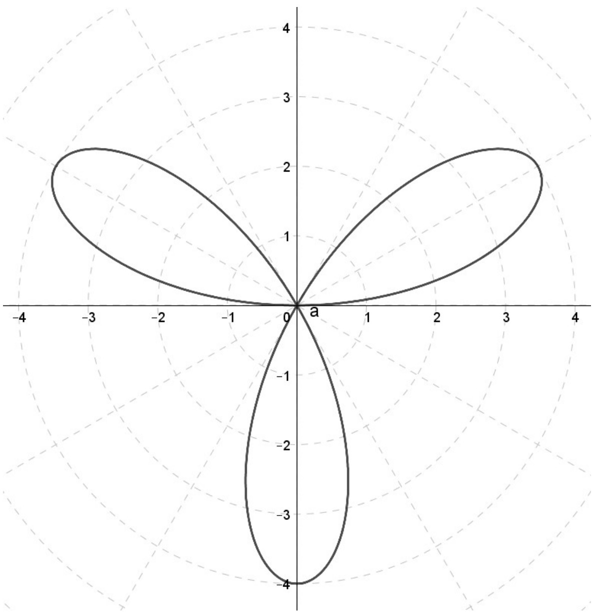
$$\begin{aligned} r &= 4\sin 3\theta \\ &= 4\sin 3(\pi - \theta) \\ &= 4\sin 3\theta \end{aligned}$$

$\therefore$ สมการคงเดิม เส้นโค้งสมมาตรกับแกนที่ตั้งฉากกับแกนเชิงขั้ว

- พิจารณาที่จุดขั้ว โดยแทน r ด้วย $-r$ ในสมการ จะได้

$$\begin{aligned} -r &= 4\sin 3\theta \\ r &= -4\sin 3\theta \neq 4\sin 3\theta \end{aligned}$$

$\therefore$ สมการเปลี่ยนแปลง เส้นโค้งไม่สมมาตรกับจุดขั้ว



รูปที่ 5.21 เส้นโค้ง $r = 4\sin 3\theta$

ตัวอย่าง 5.3.1.3 จงพิจารณาเส้นโค้ง $r = 3\sin 4\theta$ ว่าสมมาตรกับแกนเชิงขั้ว แกนที่ตั้งฉากกับแกนเชิงขั้ว และจุดขั้ว หรือไม่

วิธีทำ - พิจารณาที่แกนเชิงขั้ว โดยแทน r ด้วย $-r$ และ θ ด้วย $\pi - \theta$ ในสมการ จะได้

$$
\begin{aligned}
-r &= 3\sin 4(\pi - \theta) \\
&= 3\sin(-4\theta) \\
r &= 3\sin 4\theta
\end{aligned}
$$

$\therefore$ สมการคงเดิม เส้นโค้งสมมาตรกับแกนเชิงขั้ว

- พิจารณาที่แกนตั้งฉากกับแกนเชิงขั้ว โดยแทน θ ด้วย $\pi - \theta$ ในสมการ จะได้

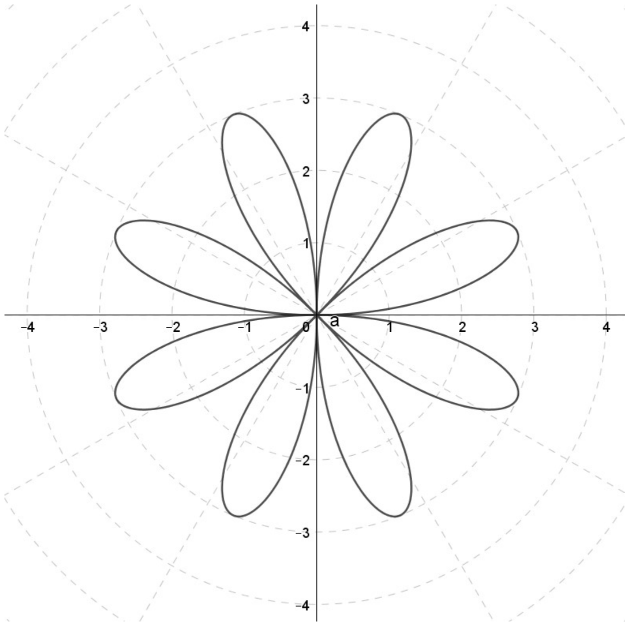
$$
\begin{aligned}
r &= 3\sin 4(\pi - \theta) \\
&= 3\sin 4\theta
\end{aligned}
$$

$\therefore$ สมการคงเดิม เส้นโค้งสมมาตรกับแกนที่ตั้งฉากกับแกนเชิงขั้ว

- พิจารณาที่จุดขั้ว โดยแทน θ ด้วย $\pi + \theta$ ในสมการ จะได้

$$
\begin{aligned}
r &= 3\sin 4(\pi + \theta) \\
&= 3\sin(4\pi + 4\theta) \\
&= 3\sin 4\theta
\end{aligned}
$$

$\therefore$ สมการคงเดิม เส้นโค้งสมมาตรกับจุดขั้ว



รูปที่ 5.22 เส้นโค้ง $r = 3\sin 4\theta$

5.3.2 ระยะตัดแกน (Intercepts)

Fuller, Gordon & Tarwater, Dolton. (1992 : 226) ได้กล่าวว่า การหาระยะตัดแกนเชิงขั้ว ให้ $\theta = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \ldots$ แล้วหาค่า r ออกมา จะได้พิกัด (r, θ) เป็นจุดตัดแกนเชิงขั้ว และการหาระยะตัดแกนที่ตั้งฉากกับแกนเชิงขั้ว (แกน Y) ให้ $\theta = \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2}, \ldots$ แล้วหาค่า r ออกมา จะได้พิกัด (r, θ) เป็นจุดตัดแกนที่ตั้งฉากกับแกนเชิงขั้ว (แกน Y)

ตัวอย่าง 5.3.2.1 จงพิจารณาจุดตัดแกนเชิงขั้ว และแกนตั้งฉากกับแกนเชิงขั้วของ $r = 3(1-\sin\theta)$

วิธีทำ - หาระยะตัดแกนเชิงขั้ว

ให้ $\theta = 0$ แทนในสมการ $r = 3(1-\sin 0) = 3$ จะได้พิกัดจุด $(3,0)$

ให้ $\theta = \pi$ แทนในสมการ $r = 3(1-\sin\pi) = 3$ จะได้พิกัดจุด $(3,\pi)$

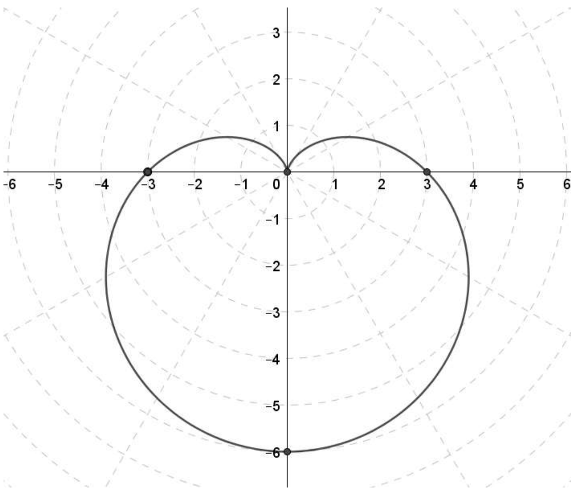
ดังนั้น จุดตัดบนแกนเชิงขั้วมี 2 จุด คือจุด $(3,0)$ และจุด $(3,\pi)$

- หาระยะตัดแกนตั้งฉากกับแกนเชิงขั้ว

ให้ $\theta = \frac{\pi}{2}$ แทนในสมการ $r = 3\left(1-\sin\frac{\pi}{2}\right) = 0$ จะได้พิกัดจุด $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

ให้ $\theta = \frac{3\pi}{2}$ แทนในสมการ $r = 3\left(1-\sin\frac{3\pi}{2}\right) = 6$ จะได้พิกัดจุด $\left(6,\frac{3\pi}{2}\right)$

ดังนั้น จุดตัดบนแกนแกนตั้งฉากกับแกนเชิงขั้ว 2 จุด คือจุด $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ และจุด $\left(6,\frac{3\pi}{2}\right)$



รูปที่ 5.23 เส้นโค้ง $r = 3(1-\sin\theta)$

ตัวอย่าง 5.3.2.2 จงพิจารณาจุดตัดแกนเชิงขั้ว และแกนตั้งฉากกับแกนเชิงขั้วของ $r=3(1-2\cos\theta)$

วิธีทำ - หาระยะตัดแกนเชิงขั้ว

ให้ $\theta=0$ แทนในสมการ $r=3(1-2\cos 0)=-3$ จะได้พิกัดจุด $(-3,0)$

ให้ $\theta=\pi$ แทนในสมการ $r=3(1-2\cos\pi)=9$ จะได้พิกัดจุด $(9,\pi)$

ดังนั้น จุดตัดบนแกนเชิงขั้วมี 2 จุด คือจุด $(-3,0)$ และจุด $(9,\pi)$

- หาระยะตัดแกนตั้งฉากกับแกนเชิงขั้ว

ให้ $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ แทนในสมการ $r=3\left(1-2\cos\dfrac{\pi}{2}\right)=3$ จะได้พิกัดจุด $\left(3,\dfrac{\pi}{2}\right)$

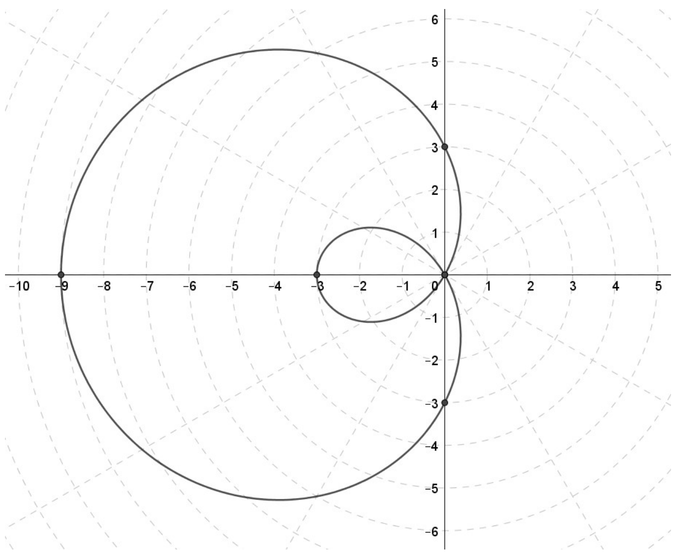
ให้ $\theta=\dfrac{3\pi}{2}$ แทนในสมการ $r=3\left(1-2\cos\dfrac{3\pi}{2}\right)=3$ จะได้พิกัดจุด $\left(3,\dfrac{3\pi}{2}\right)$

ดังนั้น จุดตัดบนแกนเชิงขั้วมี 2 จุด คือจุด $\left(3,\dfrac{\pi}{2}\right)$ และจุด $\left(3,\dfrac{3\pi}{2}\right)$

และถ้าให้ $r=0$ จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
0 &= 1-2\cos\theta \\
\cos\theta &= \frac{1}{2} \\
\theta &= 60^\circ
\end{aligned}
$$

ดังนั้น เส้นโค้งผ่านจุด $\left(0,60^\circ\right)$



รูปที่ 5.24 เส้นโค้ง $r=3(1-2\cos\theta)$

5.3.3 ขอบเขตของ r (Bound of r)

พิจารณาขอบเขตของ r สำหรับทุก ๆ ค่า θ ที่หาค่า r ได้ เนื่องจากฟังก์ชันของ r เป็นฟังก์ชันของ sine หรือ cosine ดังนั้น

r จะมีขอบเขต ถ้ามี $M > 0$ ซึ่ง $\left|r\right| \le M$ ทุกค่า θ กราฟจะเป็นเส้นโค้งปิด

r จะไม่มีขอบเขต ถ้าค่าของ $\left|r\right|$ เพิ่มขึ้นโดยไม่มีขีดจำกัด เมื่อค่า θ เพิ่มขึ้น กราฟจะเป็นเส้นโค้งเปิด (ศรีบุตร แววเจริญ และ ชนศักดิ์ บ่ายเที่ยง, 2544 : 228)

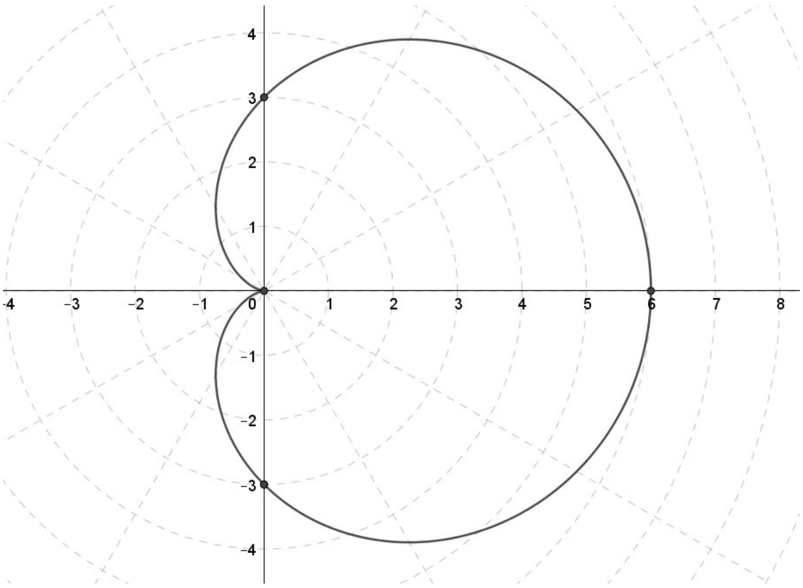
ตัวอย่าง 5.3.3.1 จงพิจารณาขอบเขตของเส้นโค้ง $r = 3(1+\cos\theta)$

วิธีทำ เพราะว่า $\left|\cos\theta\right| \le 1$ จะได้ว่า $\left|r\right|_{\max} = \left|3+3\cos\theta\right| = 6$

จะได้ขอบเขต $r = 6$ และเมื่อ $r = 6$ แล้วสามารถหา θ ได้จาก

$$\begin{aligned} r &= 3(1+\cos\theta) \\ 6 &= 3(1+\cos\theta) \\ 2 &= 1+\cos\theta \\ \cos\theta &= 1 \\ \theta &= 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots \end{aligned}$$

ดังนั้น จุด $(6,0)$ เป็นจุดที่ห่างจากขั้วมากที่สุด



รูปที่ 5.25 เส้นโค้ง $r = 3(1+\cos\theta)$

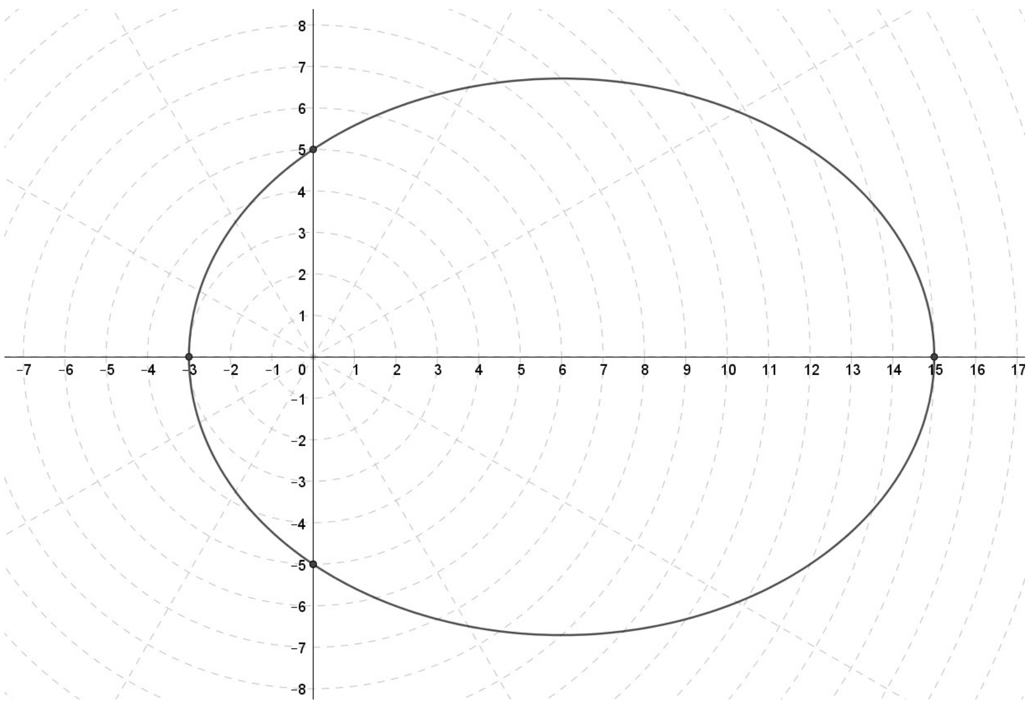
ตัวอย่าง 5.3.3.1 จงพิจารณาขอบเขตของเส้นโค้ง $r=\dfrac{15}{3-2\cos\theta}$

วิธีทำ เพราะว่า $-1\le\cos\theta\le 1$ จะได้ว่า $\left|r\right|_{\max}=\left|\dfrac{15}{3-2\cos\theta}\right|=15$

จะได้ขอบเขต $r=15$ และเมื่อ $r=15$ แล้วสามารถหา θ ได้จาก

$$\begin{aligned}
r&=\frac{15}{3-2\cos\theta}\\
15&=\frac{15}{3-2\cos\theta}\\
3-2\cos\theta&=\frac{15}{15}\\
3-2\cos\theta&=1\\
2\cos\theta&=2\\
\cos\theta&=1\\
\theta&=0^\circ
\end{aligned}$$

ดังนั้น จุด $(15,0^\circ)$ เป็นจุดที่ห่างจากขั้วมากที่สุด



รูปที่ 5.26 เส้นโค้ง $r=\dfrac{15}{3-2\cos\theta}$

ตัวอย่าง 5.3.1 จงเขียนกราฟของสมการ $r = 2 + 2\sin\theta$

วิธีทำ **พิจารณาการสมมาตร**

- พิจารณาที่แกนเชิงขั้ว โดยแทน θ ด้วย $-\theta$ ในสมการ จะได้

$$\begin{aligned} r &= 2 + 2\sin\theta \\ &= 2 + 2\sin(-\theta) \\ &= 2 - 2\sin\theta \end{aligned}$$

$\therefore$ สมการเปลี่ยนแปลง เส้นโค้งไม่สมมาตรกับแกนเชิงขั้ว

- พิจารณาที่แกนตั้งฉากกับแกนเชิงขั้ว โดยแทน θ ด้วย $\pi - \theta$ ในสมการ จะได้

$$\begin{aligned} r &= 2 + 2\sin\theta \\ &= 2 + 2\sin(\pi - \theta) \\ &= 2 + 2\sin\theta \end{aligned}$$

$\therefore$ สมการคงเดิม เส้นโค้งสมมาตรกับแกนที่ตั้งฉากกับแกนเชิงขั้ว

- พิจารณาที่จุดขั้ว โดยแทน r ด้วย $-r$ ในสมการ จะได้

$$\begin{aligned} r &= 2 + 2\sin\theta \\ -r &= 2 + 2\sin\theta \\ r &= -2 - 2\sin\theta \end{aligned}$$

$\therefore$ สมการเปลี่ยนแปลง เส้นโค้งไม่สมมาตรกับจุดขั้ว

พิจารณาระยะตัดแกน

- หาระยะตัดแกนเชิงขั้ว

ให้ $\theta = 0$ แทนในสมการ $r = 2 + 2\sin 0 = 2$ จะได้พิกัดจุด $(2, 0)$

ให้ $\theta = \pi$ แทนในสมการ $r = 2 + 2\sin\pi = 2$ จะได้พิกัดจุด $(2, \pi)$

$\therefore$ จุดตัดบนแกนเชิงขั้วมี 2 จุด คือจุด $(2, 0)$ และจุด $(2, \pi)$

- หาระยะตัดแกนตั้งฉากกับแกนเชิงขั้ว

ให้ $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ แทนในสมการ $r = 2 + 2\sin\dfrac{\pi}{2} = 4$ จะได้พิกัดจุด $\left(4, \dfrac{\pi}{2}\right)$

ให้ $\theta = \dfrac{3\pi}{2}$ แทนในสมการ $r = 2 + 2\sin\dfrac{3\pi}{2} = 0$ จะได้พิกัดจุด $\left(0, \dfrac{3\pi}{2}\right)$

$\therefore$ จุดตัดบนแกนเชิงขั้วมี 2 จุด คือจุด $\left(4, \dfrac{\pi}{2}\right)$ และจุด $\left(0, \dfrac{3\pi}{2}\right)$

พิจารณาขอบเขตของ r

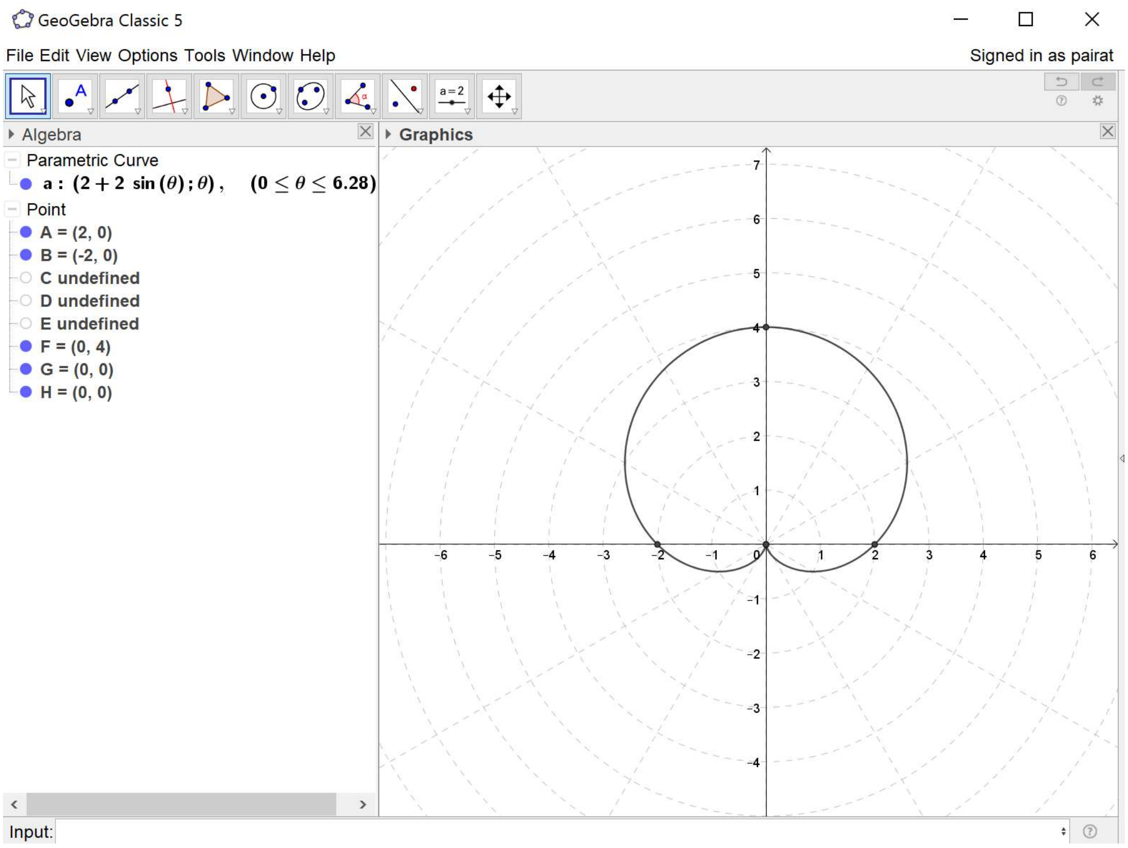
เพราะว่า $\left|\sin\theta\right| \le 1$ จะได้ว่า $\left|r\right|_{\max} = \left|2+2\sin\theta\right| = 4$

จะได้ขอบเขต $r = 4$ และเมื่อ $r = 4$ แล้วสามารถหา θ ได้จาก

$$\begin{aligned} r &= 2+2\sin\theta \\ 4 &= 2+2\sin\theta \\ \sin\theta &= 1 \\ \theta &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$\therefore$ จุด $\left(4,\dfrac{\pi}{2}\right)$ เป็นจุดที่ห่างจากขั้วมากที่สุด

ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 5.3.1 ดังรูปที่ 5.27



รูปที่ 5.27 พิกัดจุด A, B และ C ในระบบพิกัดเชิงขั้ว

ตัวอย่าง 5.3.2 จงเขียนกราฟของ $r = 8\cos\theta$

วิธีทำ พิจารณาการสมมาตร

- พิจารณาที่แกนเชิงขั้ว โดยแทน θ ด้วย $-\theta$ ในสมการ จะได้

$$\begin{aligned} r &= 8\cos\theta \\ &= 8\cos(-\theta) \\ &= 8\cos\theta \end{aligned}$$

$\therefore$ สมการคงเดิม เส้นโค้งสมมาตรกับแกนเชิงขั้ว

- พิจารณาที่แกนตั้งฉากกับแกนเชิงขั้ว โดยแทน θ ด้วย $\pi - \theta$ ในสมการ จะได้

$$\begin{aligned} r &= 8\cos\theta \\ &= 8\cos(\pi - \theta) \\ &= -8\cos\theta \end{aligned}$$

$\therefore$ สมการเปลี่ยนแปลง เส้นโค้งไม่สมมาตรกับแกนที่ตั้งฉากกับแกนเชิงขั้ว

- พิจารณาที่จุดขั้ว โดยแทน r ด้วย $-r$ ในสมการ จะได้

$$\begin{aligned} r &= 8\cos\theta \\ -r &= 8\cos\theta \\ r &= -8\cos\theta \end{aligned}$$

$\therefore$ สมการเปลี่ยนแปลง เส้นโค้งไม่สมมาตรกับจุดขั้ว

พิจารณาระยะตัดแกน

- หาระยะตัดแกนเชิงขั้ว

ให้ $\theta = 0$ แทนในสมการ $r = 8\cos 0 = 8$ จะได้พิกัดจุด $(8, 0)$

ให้ $\theta = \pi$ แทนในสมการ $r = 8\cos\pi = -8$ จะได้พิกัดจุด $(-8, \pi)$

$\therefore$ จุดตัดบนแกนเชิงขั้วมี 1 จุด คือจุด $(8, 0)$

- หาระยะตัดแกนตั้งฉากกับแกนเชิงขั้ว

ให้ $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ แทนในสมการ $r = 8\cos\dfrac{\pi}{2} = 0$ จะได้พิกัดจุด $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$

ให้ $\theta = \dfrac{3\pi}{2}$ แทนในสมการ $r = 8\cos\dfrac{3\pi}{2} = 0$ จะได้พิกัดจุด $\left(0, \dfrac{3\pi}{2}\right)$

$\therefore$ จุดตัดบนแกนเชิงขั้วมี 1 จุด คือจุด $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ หรือจุด $(0, 0)$

พิจารณาขอบเขตของ r

เพราะว่า $\left|\cos\theta\right| \le 1$ จะได้ว่า

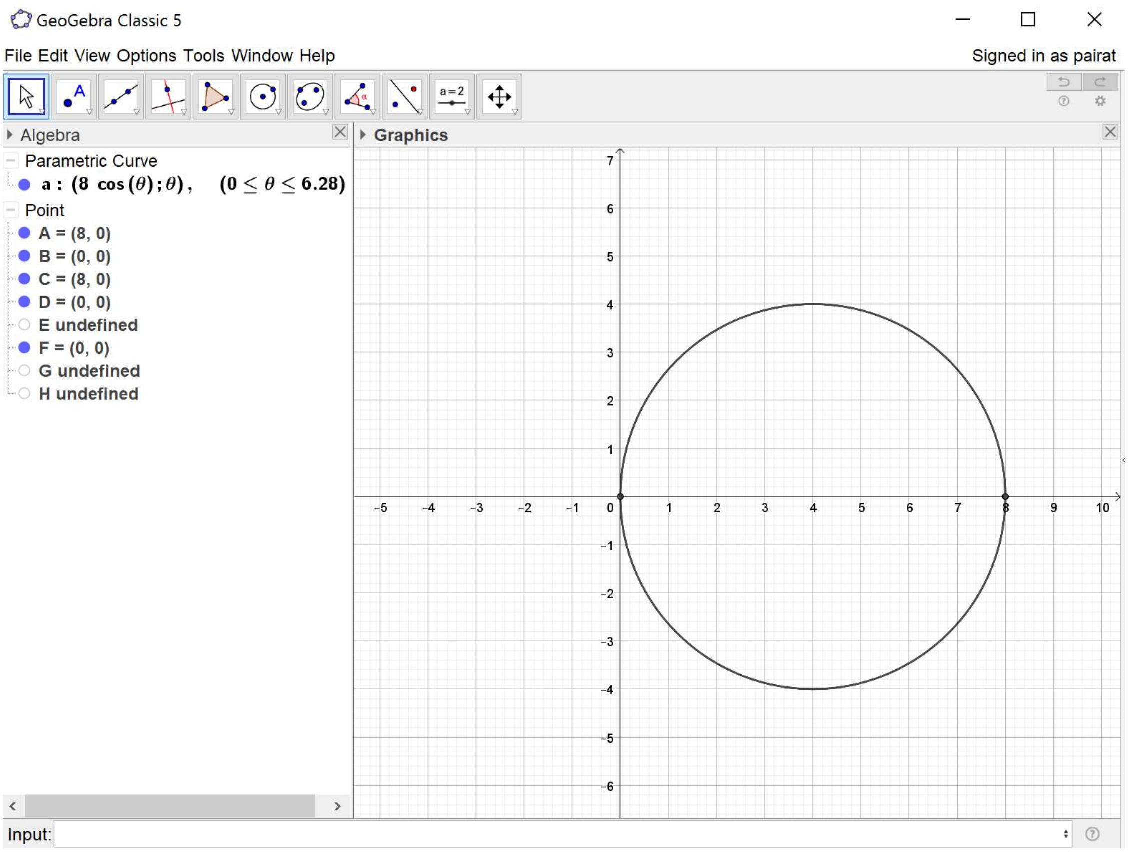
$$\begin{aligned}\left|r\right|_{\max} &= \left|8\cos\theta\right| \\ &= 8\end{aligned}$$

จะได้ขอบเขต $r = 8$ และเมื่อ $r = 8$ แล้วสามารถหา θ ได้จาก

$$\begin{aligned} r &= 8\cos\theta \\ 8 &= 8\cos\theta \\ \cos\theta &= 1 \\ \theta &= 0^\circ \end{aligned}$$

$\therefore$ จุด $\left(8, 0^\circ\right)$ เป็นจุดที่ห่างจากขั้วมากที่สุด

ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 5.3.2 ดังรูปที่ 5.28

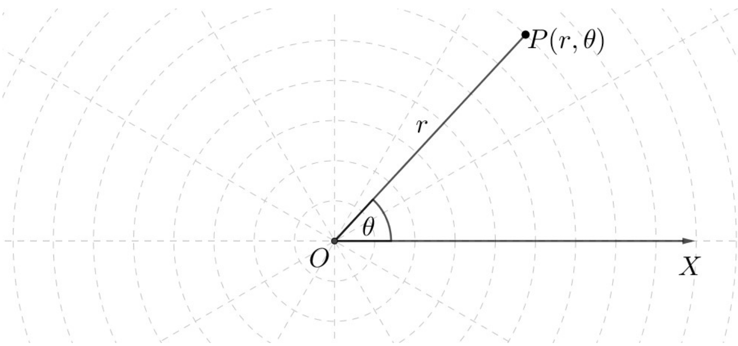


รูปที่ 5.28 เส้นโค้ง $r = 8\cos\theta$

สรุปท้ายบทที่ 5

สำหรับในบทที่ 5 นั้นเราได้ศึกษานั้นเราได้ศึกษาระบบพิกัดเชิงขั้ว ในการศึกษาแคลคูลัสใน 2 มิติ เราแสดงพิกัดของจุดบนระนาบได้ ระนาบที่กล่าวมาคือระบบพิกัดฉาก แต่ยังมีอีกระบบหนึ่งซึ่งสามารถระบุตำแหน่งบนระนาบ 2 มิติได้เช่นกัน คือ ระบบพิกัดเชิงขั้ว ซึ่งปัญหาในทางแคลคูลัสหลาย ปัญหาเมื่อเราใช้ระบบพิกัดฉากไปแก้ปัญหา พบว่าปัญหานั้นมีความยุ่งยากและซับซ้อน แต่เมื่อเราเปลี่ยนวิธีคิดโดยการเปลี่ยนจากระบบพิกัดฉากเป็นระบบพิกัดเชิงขั้ว ปัญหานั้นก็จะง่ายลง

ในระบบพิกัดเชิงขั้วนี้ประกอบไปด้วย แกนเชิงขั้ว (Polar Axis) ซึ่งเป็นรังสี $\overrightarrow{OX}$ บนระนาบ เรียกจุด O ว่าจุดกำเนิด (Origin) หรือ ขั้ว (Pole) และส่วนของเส้นตรง OP เขียนแทนด้วย r เรียกว่า เวกเตอร์รัศมี (Radius Vector) θ เรียกว่า มุมเชิงขั้ว (Polar Angle) ดังรูป



ซึ่งระบบพิกัดเชิงขั้วจะบอกพิกัดเป็น (r,θ) โดยความสัมพันธ์ระหว่างพิกัดฉากและพิกัดเชิงขั้วเป็นดังนี้ $x = r\cos\theta$ และ $y = r\sin\theta$

ค่า r หาได้จาก $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ เมื่อ r คือรัศมีที่ลากออกจากจุดขั้วหรือจุดกำเนิด

ค่า θ หาได้จาก $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$ เมื่อ θ คือเส้นรัศมีทำมุมกับแกนเชิงขั้วหรือแกน X

- มุม θ มีค่าเป็นบวก ถ้าวัดทวนเข็มนาฬิกาจากแกนเชิงขั้ว
- มุม θ มีค่าเป็นลบ ถ้าวัดตามเข็มนาฬิกาจากแกนเชิงขั้ว

สังเกตว่า θ ที่สอดคล้องกับ $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$ มีได้หลายค่า ในการหาพิกัดเชิงขั้วจากระบบพิกัดฉาก เราจึงจะไม่เพียงแค่เลือกค่า θ ใด ๆ ที่สอดคลองกับ $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$ แต่จะต้องเลือก θ ที่ทำให้จุด $(r,\,\theta)$ อยู่ในจตุภาคที่ตรงกับที่ต้องการด้วย นั่นหมายความว่า จุดในระบบพิกัดเชิงขั้วจุดเดียวสามารถเขียนได้หลายแบบ ซึ่งต่างจากระบบพิกัดฉากที่สามารถเขียนได้แบบเดียวเท่านั้น

สำหรับในการวาดกราฟในระบบพิกัดเชิงขั้วนั้น กระทำได้เช่นเดียวกันกับการวาดกราฟในระบบพิกัดฉาก โดยเลือกค่า θ ต่าง ๆ จากค่า θ ที่เลือกสามารถนำมาคำนวณหา r จากสมการที่กำหนดให้ได้ จากนั้นนำค่า θ และ r ที่ได้แต่ละคู่ไปกำหนดตำแหน่งของจุดนั้น ๆ ลงในพิกัดเชิงขั้ว นอกจากนี้เราจะพิจารณาลักษณะจำเพาะของเส้นโค้งเพื่อช่วยในการวาดกราฟได้รวดเร็ว และถูกต้องยิ่งขึ้น ดังนี้

พิจารณาการสมมาตรของสมการเชิงขั้ว

1. เส้นโค้งมีสมมาตรกับแกนเชิงขั้ว (แกน X) ถ้าแทน θ ด้วย $-\theta$ ในสมการเชิงขั้วแล้วสมการคงเดิม หรือถ้าแทน r ด้วย $-r$ และ θ ด้วย $\pi-\theta$ แล้วสมการคงเดิม

2. เส้นโค้งมีสมมาตรกับแกนตั้งฉากกับขั้ว (แกน Y) ถ้าแทน θ ด้วย $\pi-\theta$ ในสมการเชิงขั้วแล้วสมการคงเดิม หรือถ้าแทน r ด้วย $-r$ และ θ ด้วย $-\theta$ แล้วสมการคงเดิม

3. เส้นโค้งมีสมมาตรกับขั้ว (จุดกำเนิด) ถ้าแทน r ด้วย $-r$ ในสมการเชิงขั้วแล้วสมการคงเดิม หรือถ้าแทน θ ด้วย $\pi+\theta$ แล้วสมการคงเดิม

เส้นโค้งที่พิจารณาการสมมาตรมี 3 ลักษณะ คือ สมมาตรเทียบกับแกนเชิงขั้ว กับแกนตั้งฉากกับแกนเชิงขั้ว และจุดขั้ว เราพบว่า ถ้าเส้นโค้งมีสมมาตร 2 ลักษณะแล้ว เส้นโค้งจะสมมาตรลักษณะที่ 3 ด้วยเสมอ เช่น เส้นโค้งมีสมมาตรเทียบกับแกนเชิงขั้ว และมีสมมาตรเทียบกับแกนตั้งฉากกับแกนเชิงขั้วแล้ว เส้นโค้งจะต้องมีสมมาตรเทียบขั้วด้วย

พิจารณาระยะตัดแกน

การหาระยะตัดแกนเชิงขั้ว ให้ $\theta=0,\pm\pi,\pm 2\pi,\pm 3\pi,\ldots$ แล้วหาค่า r ออกมา จะได้พิกัด (r,θ) เป็นจุดตัดแกนเชิงขั้ว

การหาระยะตัดแกนที่ตั้งฉากกับแกนเชิงขั้ว (แกน Y) ให้ $\theta=\pm\frac{\pi}{2},\pm\frac{3\pi}{2},\pm\frac{5\pi}{2},\ldots$ แล้วหาค่า r ออกมา จะได้พิกัด (r,θ) เป็นจุดตัดแกนที่ตั้งฉากกับแกนเชิงขั้ว (แกน Y)

พิจารณาขอบเขต

พิจารณาขอบเขตของ r สำหรับทุก ๆ ค่า θ ที่หาค่า r ได้ เนื่องจากฟังก์ชันของ r เป็นฟังก์ชันของ $\sin$ หรือ $\cos$ ine ดังนั้น

r จะมีขอบเขต ถ้ามี $M>0$ ซึ่ง $\left|r\right|\le M$ ทุกค่า θ กราฟจะเป็นเส้นโค้งปิด

r จะไม่มีขอบเขต ถ้าค่าของ $\left|r\right|$ เพิ่มขึ้นโดยไม่มีขีดจำกัด เมื่อค่า θ เพิ่มขึ้น กราฟจะเป็นเส้นโค้งเปิด

แบบฝึกหัดบทที่ 5

จงลงจุดในระบบพิกัดเชิงขั้วบนระนาบพิกัดเชิงขั้วต่อไปนี้ (ข้อ 5.1 - 5.8)

5.1 $A(3,60^\circ), B(4,45^\circ), C(5,30^\circ)$

5.2 $D(-3,60^\circ), E(-4,45^\circ), F(-5,30^\circ)$

5.3 $G(1,20^\circ), H(-2,135^\circ), I(7,330^\circ)$

5.4 $J(6,0^\circ), K(4,\pi), L(5,2\pi)$

5.5 $M\left(-3,\dfrac{\pi}{2}\right), N\left(7,\dfrac{\pi}{3}\right), O(0,0^\circ)$

5.6 $P\left(2,\dfrac{\pi}{6}\right), Q\left(-4,\dfrac{\pi}{4}\right), R\left(4,-\dfrac{\pi}{4}\right)$

5.7 $S\left(-5,\dfrac{2\pi}{3}\right), T\left(2,-\dfrac{11\pi}{6}\right), U\left(-4,-\dfrac{5\pi}{3}\right)$

5.8 $X\left(-1,\dfrac{8\pi}{3}\right), Y\left(-2,\dfrac{29\pi}{6}\right), Z\left(8,-\dfrac{21\pi}{4}\right)$

จงหาพิกัดจุดเชิงขั้วอีก 2 พิกัดซึ่งแทนจุดเดียวกันต่อไปนี้ (ข้อ 5.9 - 5.16)

5.10 $(4,20^\circ)$ 5.11 $(3,-15^\circ)$ 5.12 $(-1,69^\circ)$

5.13 $(-4,-360^\circ)$ 5.14 $\left(-3,-\dfrac{3\pi}{4}\right)$ 5.15 $\left(2,-\dfrac{4\pi}{3}\right)$

5.16 $\left(6,\dfrac{33\pi}{2}\right)$

จงหาพิกัดของจุดในระบบพิกัดฉากต่อไปนี้ (ข้อ 5.17 - 5.25)

5.17 $\left(-3,\dfrac{3\pi}{2}\right)$ 5.18 $\left(4,\dfrac{5\pi}{6}\right)$ 5.19 $(6,\pi)$

5.20 $\left(4,\dfrac{3\pi}{4}\right)$ 5.21 $(0,\pi)$ 5.22 $\left(-2,-\dfrac{\pi}{3}\right)$

5.23 $\left(3\sqrt{3},-\dfrac{\pi}{4}\right)$ 5.24 $\left(3,\dfrac{\pi}{6}\right)$ 5.25 $\left(5,\dfrac{5\pi}{4}\right)$

จงหาพิกัดของจุดในระบบพิกัดเชิงขั้วต่อไปนี้ (ข้อ 5.26 - 5.40)

5.26 $(0,0)$
5.27 $(0,3)$
5.28 $(0,-4)$
5.29 $(2\sqrt{3},-2)$
5.30 $(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$
5.31 $(\sqrt{3},-1)$
5.32 $(-4,3)$
5.33 $(-5,-12)$
5.34 $(4,0)$
5.35 $(-3,0)$
5.36 $(\sqrt{3},\sqrt{3})$
5.37 $(-4\sqrt{3},4)$
5.38 $(-4,-4)$
5.39 $(5,12)$
5.40 $\left(\frac{3}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

จงแปลงสมการในระบบพิกัดฉากต่อไปนี้ให้อยู่รูปสมการระบบพิกัดเชิงขั้ว (ข้อ 5.41 - 5.52)

5.41 $y=3$
5.42 $2x-y=0$
5.43 $x^2=4y$
5.44 $x=-3$
5.45 $x^2-y^2=4^2$
5.46 $x^2+y^2=2y$
5.47 $y^2=9x$
5.48 $2x+y=3$
5.49 $x^2-2y^2=4$
5.50 $x^2=9y$
5.51 $x^2+y^2=2x$
5.52 $x^2+y^2=9$

จงแปลงสมการในระบบพิกัดเชิงขั้วต่อไปนี้ให้อยู่รูปสมการระบบพิกัดฉาก (ข้อ 5.53 - 5.66)

5.53 $r\cos\theta=4$
5.54 $r=5\cos\theta$
5.55 $\theta=\frac{\pi}{4}$
5.56 $r^2\sin 2\theta=4$
5.57 $r=\frac{2}{1-\cos\theta}$
5.58 $\theta=\frac{2\pi}{3}$
5.59 $r=\frac{3}{1-\cos\theta}$
5.60 $r=2$
5.61 $r\sin\theta=5$
5.62 $r=\frac{4}{\sin\theta-2\cos\theta}$
5.63 $r=\frac{1}{\cos\theta+3\sin\theta}$
5.64 $r=8\sin\theta$
5.65 $r=\frac{3}{3\sin\theta+4\cos\theta}$
5.66 $r^2=\frac{4}{\cos 2\theta}$

จงพิจารณาเส้นโค้งต่อไปนี้ว่าสมมาตรกับแกนเชิงขั้ว แกนที่ตั้งฉากกับแกนเชิงขั้ว และจุดขั้ว หรือไม่ (ข้อ 5.67 - 5.74)

5.67 $r^2 = \dfrac{4}{\cos 2\theta}$ 5.68 $r^2 \sin 2\theta = 4$

5.69 $r = \dfrac{2}{1-\cos\theta}$ 5.70 $r\cos\theta = 4$

5.71 $r = \dfrac{3}{1-\cos\theta}$ 5.72 $r = 2$

5.73 $r\sin\theta = 5$ 5.74 $r = \dfrac{4}{\sin\theta - 2\cos\theta}$

จงพิจารณาจุดตัดแกนเชิงขั้ว และจุดตัดแกนตั้งฉากกับแกนเชิงขั้วเส้นโค้งต่อไปนี้ (ข้อ 5.75 - 5.82)

5.75 $r = 6\sin\theta$ 5.76 $r = \dfrac{1}{2\cos\theta + \sin\theta}$

5.77 $r = \dfrac{3}{\sin\theta - 2\cos\theta}$ 5.78 $r\cos\theta = 2$

5.79 $r = \dfrac{2}{3-\cos\theta}$ 5.80 $r\sin\theta = 1$

5.81 $r = 9$ 5.82 $r = \dfrac{3}{2-5\cos\theta}$

จงพิจารณาขอบเขตของเส้นโค้งต่อไปนี้ (ข้อ 5.83 - 5.92)

5.83 $r^2 \sin 2\theta = 6$ 5.84 $r^2 = \dfrac{2}{\cos 2\theta}$

5.85 $r = 2\sin\theta$ 5.86 $r = \dfrac{2}{\cos\theta + 4\sin\theta}$

5.87 $r = \dfrac{6}{5\sin\theta - 2\cos\theta}$ 5.88 $r\cos\theta = -3$

5.89 $r^2 \sin\theta = 1$ 5.90 $r^2 = \dfrac{3}{\cos 2\theta}$

5.91 $r = 1$ 5.92 $\theta = \dfrac{\pi}{3}$

จงวาดกราฟของสมการ $r = 3 + 6\sin\theta$