บทที่ 6
สมการเชิงขั้วและสมการอิงตัวแปรเสริม
(Polar Equation and Parametric Equation)

ในบทที่ 5 เราได้ทราบความรู้เบื้องต้นในระบบพิกัดเชิงขั้วกันมาแล้ว ส่วนในบทนี้เราจะหาสมการเชิงขั้วซึ่งมีตัวแปรคือ r และ θ ในการเขียนกราฟสามารถเขียนให้อยู่ในรูปพิกัดฉากคือมีตัวแปร x และ y ขณะเดียวกันสมการเชิงขั้วบางสมการ ถึงแม้จะเปลี่ยนเป็นพิกัดฉากแล้วก็ตาม การเขียนกราฟยังคงซับซ้อนอยู่ ดังนั้น ในการเขียนกราฟของสมการเชิงขั้วจึงใช้การพิจารณาความสัมพันธ์ของ r และ θ แล้วกำหนดตำแหน่งจุดพิกัดของ (r,θ) ซึ่งจะได้สมการของเส้นโค้งที่มีลักษณะต่าง ๆ เช่น สมการเส้นตรง สมการรูปหัวใจ สมการกลีบกุหลาบ สมการของภาคตัดกรวย ฯลฯ

กราฟของสมการเชิงขั้วประกอบไปด้วยจุดทั้งหลายซึ่งมีพิกัดในบางรูปสอดคล้องกับสมการส่วนมากแล้วเราจะนิยาม r ให้อยู่ในเทอมของ θ จะได้สมการทั่วไปคือ $r = f(\theta)$ ซึ่งเราสามารถหาจุดได้มากมายหลายจุดตามต้องการจากการแทนค่า และคำนวณค่า r จากสมการ โดยทั่วไปเราจะสร้างตารางสำหรับค่าของ θ และ r และลงจุด (r,θ) ก็จะได้กราฟของสมการ และในการเขียนกราฟนี้เราควรจะลงจุดที่ r มีค่ามากที่สุดหรือน้อยที่สุด พร้อมกันนั้นถ้าเส้นโค้งผ่านจุดกำเนิด เราก็ควรจะหาค่า θ ณ จุดนั้นด้วย ในการหาความสัมพันธ์ของตัวแปร x และ y ในเทอมของตัวแปรที่สามซึ่งเรียกว่า ตัวแปรเสริม ปัจจุบันเทคโนโลยีด้านคอมพิวเตอร์ได้พัฒนาโปรแกรมช่วยวาดกราฟทั้งในสองมิติ และสามมิติ เป็นจำนวนมาก และการกำหนดเส้นโค้งในระนาบ XY นิยมกำหนดเส้นโค้งในรูปสมการอิงตัวแปรเสริม

6.1 กราฟของสมการในพิกัดเชิงขั้ว (Graphs of Polar Coordinate Equation)

ดำรง ทิพย์โยธา ยุวรีย์ พันธ์กล้า นัฏฐนาถ ไตรภพ และสุรชัย สมบัติบริบูรณ์ (2558 : 179-182) และ Fuller, Gordon & Tarwater, Dolton. (1992 : 231-234) ได้กล่าวว่า ในหัวข้อนี้จะศึกษากราฟของเส้นโค้งบางชนิดในพิกัดเชิงขั้ว เนื่องจากในการแก้ปัญหาเรามักใช้ทั้งพิกัดฉากและพิกัดเชิงขั้วควบคู่กันไป จึงกำหนดให้แกน X ทับแกนเชิงขั้ว ซึ่งมีวิธีการเขียนกราฟโดยการเปลี่ยนสมการในพิกัดเชิงขั้วให้เป็นสมการในพิกัดฉากก่อน แล้วใช้ความรู้พื้นฐานภาคตัดกรวยมาช่วยในการเขียนกราฟ แต่ยังมีสมการในพิกัดเชิงขั้วที่ถึงแม้จะเปลี่ยนให้เป็นสมการในพิกัดฉากแล้วแต่รูปแบบที่ได้ไม่ตรงกับสมการของภาคตัดกรวยใด ๆ เลย กรณีเช่นนี้จะต้องใช้พิกัดเชิงขั้วในการเขียนกราฟโดยตรง

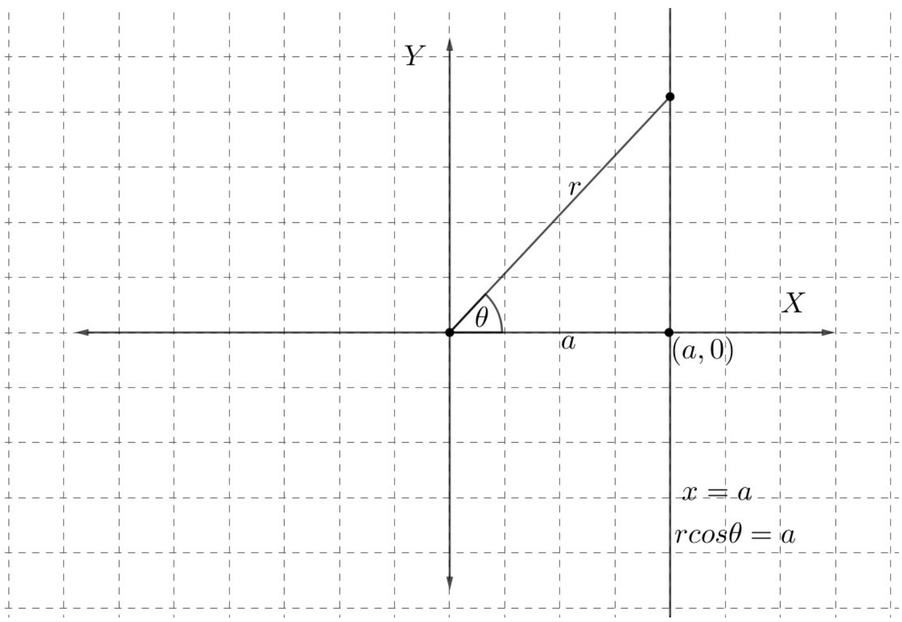
6.1.1 สมการเส้นตรง (Line)

เส้นตรงที่ตั้งฉากกับแกน X หรือขนานกับแกน Y และผ่านจุด $(a,0)$ ในระบบพิกัดฉากมีสมการคือ $x = a$ เมื่อ a เป็นค่าคงที่ จากความสัมพันธ์ระหว่างระบบพิกัดฉากกับระบบพิกัดเชิงขั้ว จึงได้ว่า

$$r\cos\theta = a$$

(Fuller, Gordon & Tarwater, Dolton, 1992 : 232)

ดังนั้น $r\cos\theta = a$ เป็นสมการในพิกัดเชิงขั้วของเส้นตรง $x = a$ ดังรูปที่ 6.1



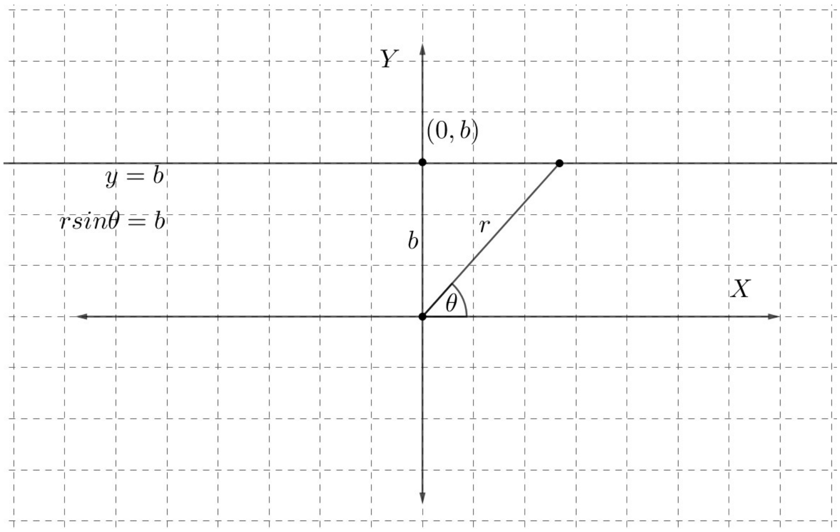
รูปที่ 6.1 กราฟเส้นตรง $r\cos\theta = a$

เส้นตรงที่ตั้งฉากกับแกน Y หรือขนานกับแกน X และผ่านจุด $(0,b)$ ในระบบพิกัดฉากมีสมการคือ $y = b$ เมื่อ b เป็นค่าคงที่ จากความสัมพันธ์ระหว่างระบบพิกัดฉากกับระบบพิกัดเชิงขั้ว จึงได้ว่า

$$r\sin\theta = b$$

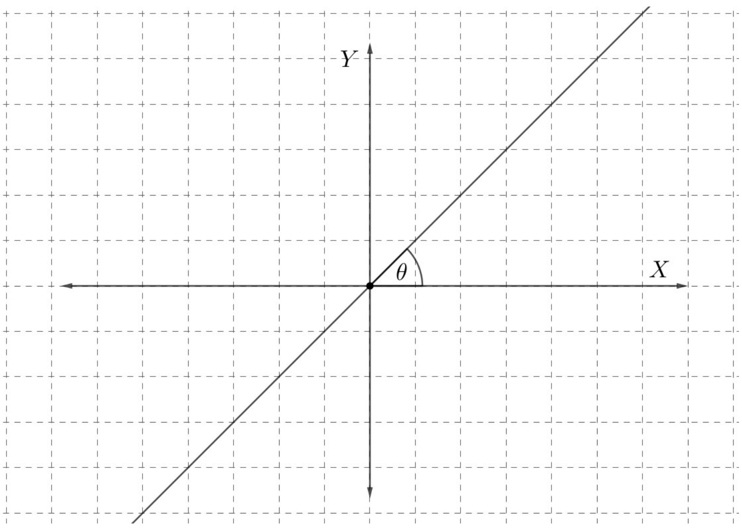
(Fuller, Gordon & Tarwater, Dolton, 1992 : 233)

ดังนั้น $r\sin\theta = b$ เป็นสมการในพิกัดเชิงขั้วของเส้นตรง $y = b$ ดังรูปที่ 6.2



รูปที่ 6.2 กราฟเส้นตรง $r\sin\theta = b$

เส้นตรงที่ผ่านขั้วและทำมุม θ กับแกนเชิงขั้ว คือ $\theta = a$ เมื่อ a เป็นค่าคงที่ สำหรับค่าคงที่ θ ใด ๆ จุด (r,θ) ทุกจุดสอดคล้องสมการ $\theta = a$ โดยไม่เกี่ยวกับค่า r
(ดำรง ทิพย์โยธา ยุวรีย์ พันธ์กล้า นัฏฐนาถ ไตรภพ และ สุรชัย สมบัติบริบูรณ์, 2558 : 179)
ดังนั้น $\theta = a$ เป็นสมการที่แทนเส้นตรงที่ผ่านจุดขั้วและทำมุมเรเดียนกับแกนเชิงขั้ว ดังรูปที่ 6.3



รูปที่ 6.3 กราฟเส้นตรง $\theta = a$

ตัวอย่าง 6.1.1 จงเขียนกราฟของสมการในพิกัดเชิงขั้วต่อไปนี้

ก. $r\cos\theta = 3$ ข. $r\sin\theta = -4$ ค. $\theta = \dfrac{5\pi}{6}$ ง. $r = \dfrac{2}{2\cos\theta + \sin\theta}$

ก. $r\cos\theta = 3$

วิธีทำ จากความสัมพันธ์ระหว่างระบบพิกัดฉากกับระบบพิกัดเชิงขั้ว จะได้ว่า

$$r\cos\theta = 3$$
$$x = 3$$

ซึ่งเป็นเส้นตรงที่ตั้งฉากกับแกนเชิงขั้ว และอยู่ห่างจาดจุดขั้วไปทางขวามือเป็นระยะ 3 หน่วย

ข. $r\sin\theta = -4$

วิธีทำ จากความสัมพันธ์ระหว่างระบบพิกัดฉากกับระบบพิกัดเชิงขั้ว จะได้ว่า

$$r\sin\theta = -4$$
$$y = -4$$

ซึ่งเป็นเส้นตรงที่ตั้งขนานกับแกนเชิงขั้ว และอยู่ห่างจาดจุดขั้วไปทางด้านล่างเป็นระยะ 4 หน่วย

ค. $\theta = \dfrac{5\pi}{6}$

วิธีทำ จาก $\theta = \dfrac{5\pi}{6}$ จะเห็นว่าสมการนี้ไม่มีค่า r

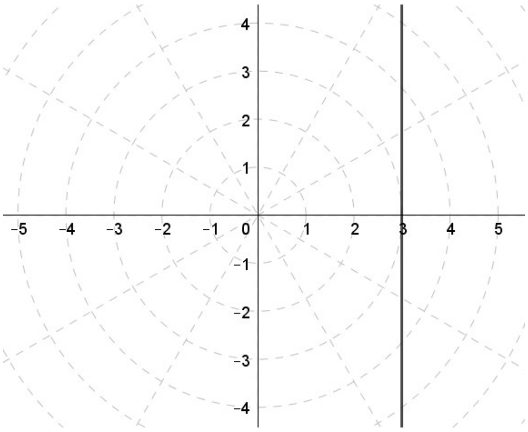
ดังนั้น สมการนี้เป็นเส้นตรงที่ผ่านขั้วและทำมุม $\dfrac{5\pi}{6}$ กับแกนเชิงขั้ว

ง. $r = \dfrac{2}{2\cos\theta - \sin\theta}$

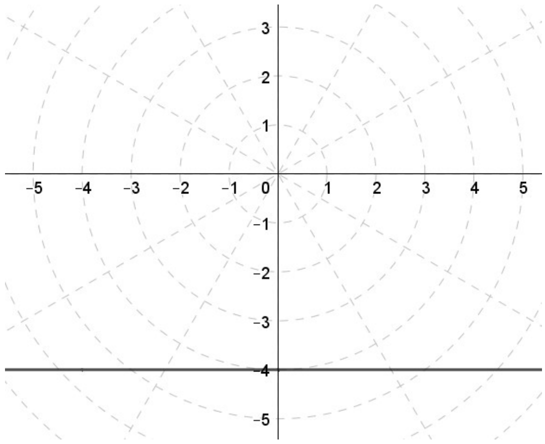
วิธีทำ จากความสัมพันธ์ระหว่างระบบพิกัดฉากกับระบบพิกัดเชิงขั้ว จะได้ว่า

$$2r\cos\theta - r\sin\theta = 2$$
$$2x - y = 2$$

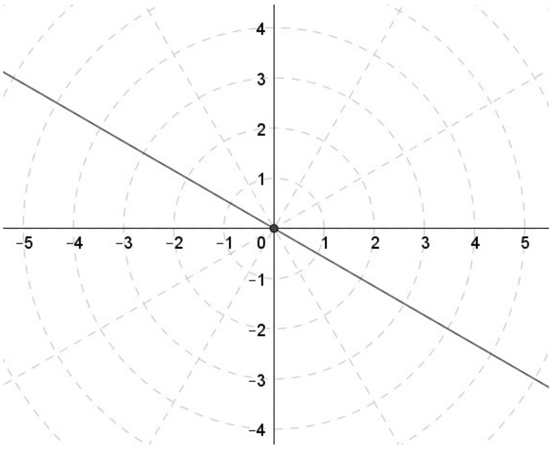
ซึ่งเป็นเส้นตรงที่มีความชันเท่ากับ 2



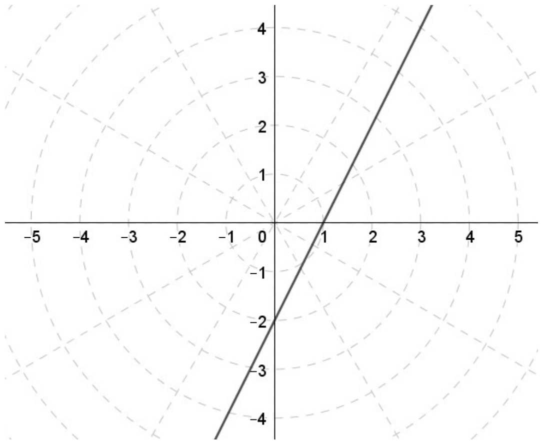
กราฟ $r\cos\theta = 3$



กราฟ $r\sin\theta = -4$



กราฟ $\theta = \dfrac{5\pi}{6}$



กราฟ $r = \dfrac{2}{2\cos\theta - \sin\theta}$

รูปที่ 6.4 แสดงผลเฉลยตามตัวอย่าง 6.1.1

6.1.2 สมการวงกลม (Circle)

พรชัยชัย สาตรวาหา (2550 : 23) ได้กล่าวว่า สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ขั้วอยู่ในรูป $r = a$ เมื่อ a เป็นค่าคงที่ จากความสัมพันธ์ระหว่างระบบพิกัดฉากกับระบบพิกัดเชิงขั้ว จึงได้ว่า

$$r = a$$
$$\sqrt{x^2 + y^2} = a$$
$$x^2 + y^2 = a^2$$

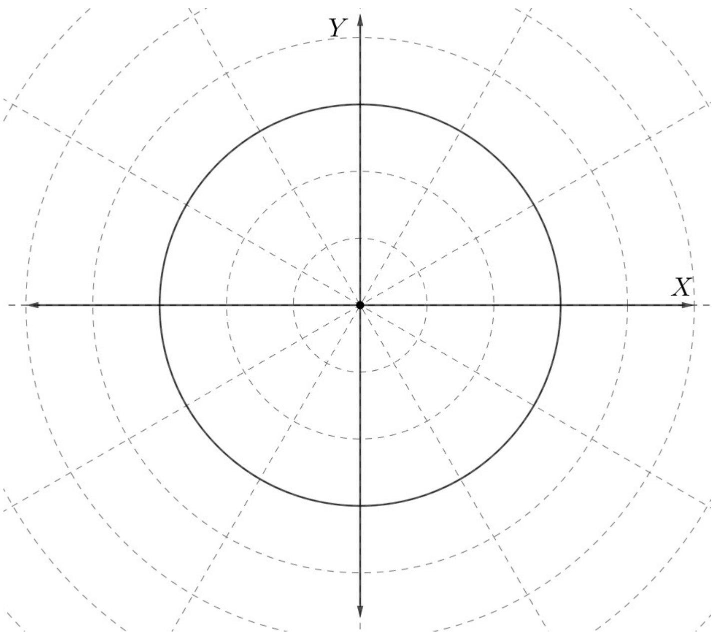
ดังนั้น $r = a$ เป็นสมการในระบบพิกัดเชิงขั้วของวงกลม $x^2 + y^2 = a^2$

ตัวอย่าง 6.1.2.1 จงเขียนกราฟของสมการ $r = 3$

วิธีทำ จากความสัมพันธ์ระหว่างระบบพิกัดฉากกับระบบพิกัดเชิงขั้ว จะได้ว่า

$$r = 3$$
$$r^2 = 3^2$$
$$x^2 + y^2 = 9$$

ดังนั้น $r = 3$ เป็นสมการในระบบพิกัดเชิงขั้วของวงกลม $x^2 + y^2 = 9$ ซึ่งเป็นวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(0,0)$ และรัศมียาว 3 หน่วย ดังรูป 6.5

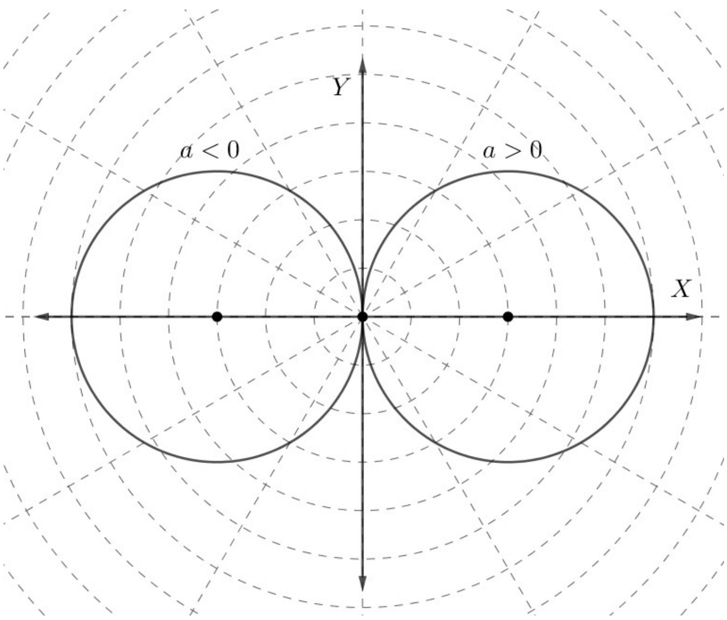


รูปที่ 6.5 กราฟ $r = 3$

สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $\left(\dfrac{a}{2},\, 0\right)$ อยู่ในรูป $r = a\cos\theta$ เมื่อ a เป็นค่าคงที่ จากความสัมพันธ์ระหว่างระบบพิกัดฉากกับระบบพิกัดเชิงขั้ว จึงได้ว่า

$$\begin{aligned} r &= a\cos\theta \\ r^2 &= ar\cos\theta \\ x^2 + y^2 &= ax \\ x^2 - ax + y^2 &= 0 \\ \left(x^2 - ax + \left(\frac{a}{2}\right)^2\right) + y^2 &= 0 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \\ \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + (y-0)^2 &= \left(\frac{a}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

ดังนั้น $r = a\cos\theta$ เป็นสมการในพิกัดเชิงขั้วของวงกลม $\left(x - \dfrac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\dfrac{a}{2}\right)^2$ ซึ่งเป็นวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $\left(\dfrac{a}{2}, 0\right)$ และรัศมียาว $\dfrac{a}{2}$ หน่วย ดังรูปที่ 6.6

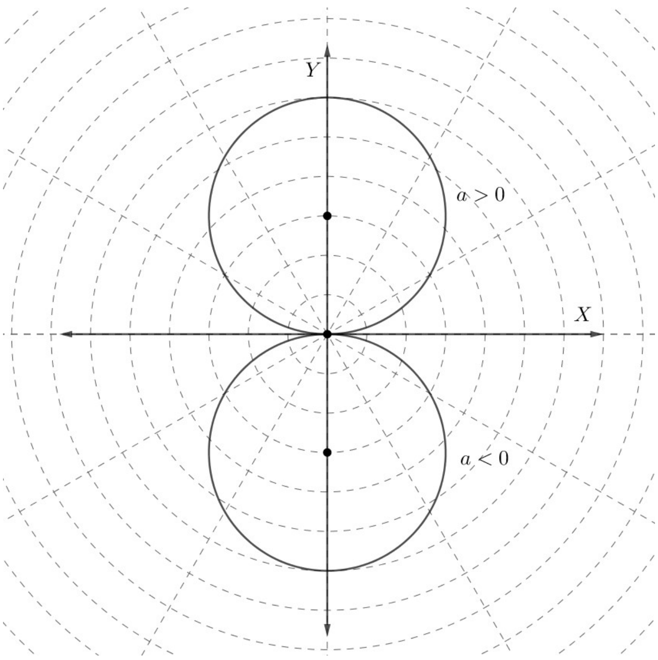


รูปที่ 6.6 กราฟ $r = a\cos\theta$

สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $\left(0,\,\dfrac{a}{2}\right)$ อยู่ในรูป $r = a\sin\theta$ เมื่อ a เป็นค่าคงที่ จากความสัมพันธ์ระหว่างระบบพิกัดฉากกับระบบพิกัดเชิงขั้ว จึงได้ว่า

$$\begin{aligned} r &= a\sin\theta \\ r^2 &= ar\sin\theta \\ x^2 + y^2 &= ay \\ x^2 + y^2 - ay &= 0 \\ x^2 + \left(y^2 - ay + \left(\frac{a}{2}\right)^2\right) &= 0 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \\ (x-0)^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 &= \left(\frac{a}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

ดังนั้น $r = a\sin\theta$ เป็นสมการในพิกัดเชิงขั้วของวงกลม $x^2 + \left(y - \dfrac{a}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{a}{2}\right)^2$ ซึ่งเป็นวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $\left(0,\dfrac{a}{2}\right)$ และรัศมียาว $\dfrac{a}{2}$ หน่วย ดังรูปที่ 6.7

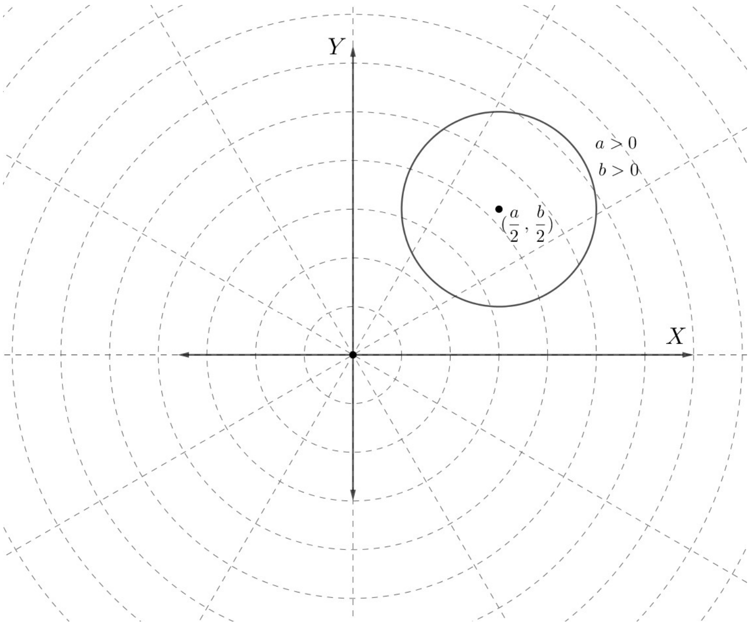


รูปที่ 6.7 กราฟ $r = a\sin\theta$

สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $\left(\dfrac{a}{2}, \dfrac{b}{2}\right)$ อยู่ในรูป $r = a\cos\theta + b\sin\theta$ เมื่อ a และ b เป็นค่าคงที่ จากความสัมพันธ์ระหว่างระบบพิกัดฉากกับระบบพิกัดเชิงขั้ว จึงได้ว่า

$$\begin{aligned}
r &= a\cos\theta + b\sin\theta \\
r^2 &= r(a\cos\theta + b\sin\theta) \\
&= ar\cos\theta + br\sin\theta \\
x^2 + y^2 &= ax + by \\
x^2 - ax + y^2 - by &= 0 \\
x^2 - ax + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + y^2 - by + \left(\frac{b}{2}\right)^2 &= 0 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \\
\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{b}{2}\right)^2 &= \frac{a^2 + b^2}{4}
\end{aligned}$$

ดังนั้น $r = a\cos\theta + b\sin\theta$ เป็นสมการในพิกัดเชิงขั้วของวงกลมที่มีสมการในระบบพิกัดฉากเป็น $\left(x - \dfrac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \dfrac{b}{2}\right)^2 = \dfrac{a^2 + b^2}{4}$ ซึ่งเป็นวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $\left(\dfrac{a}{2}, \dfrac{b}{2}\right)$ และรัศมียาว $\dfrac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$ หน่วย ดังรูปที่ 6.7



รูปที่ 6.8 กราฟ $r = a\cos\theta + b\sin\theta$

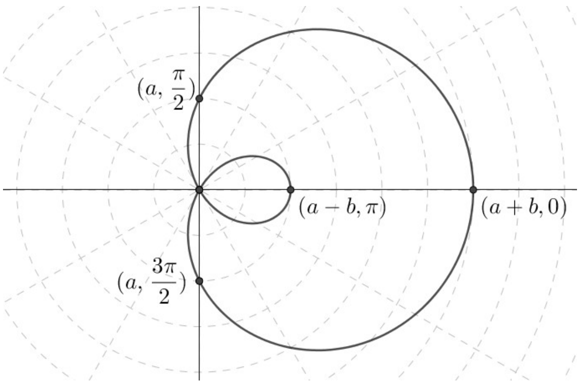
6.1.3 เส้นโค้งรูปเชิงขั้วชนิดพิเศษ (Special Polar – From Curves)

ดำรง ทิพย์โยธา ยุวรีย์ พันธ์กล้า นัฏฐนาถ ไตรภพ และสุรชัย สมบัติบริบูรณ์ (2558 : 180-182) ; ศรีบุตร แววเจริญ และ ชนศักดิ์ บ่ายเที่ยง (2544 : 235-237) ; สุเทพ ลิ่มอรุณ (2542 : 67) ; Varberg, Dale, Purcell, Edwin J & Rigdon, Steven E. (2000 : 545-549) และ Larson, Ron & Edwards H. Bruce. (2011 : 737) ได้กล่าวว่า

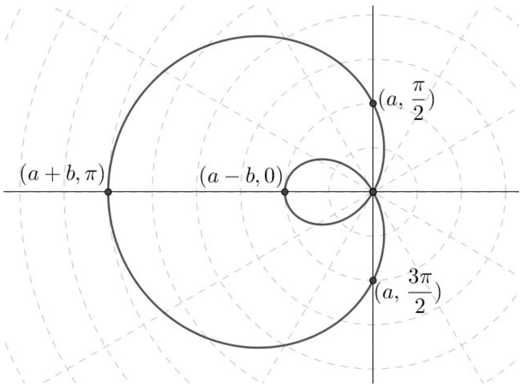
6.1.3.1 เส้นโค้งลีมาซอง (Limacons) สมการอยู่ในรูป

$r = a \pm b\cos\theta$ หรือ $r = a \pm b\sin\theta$

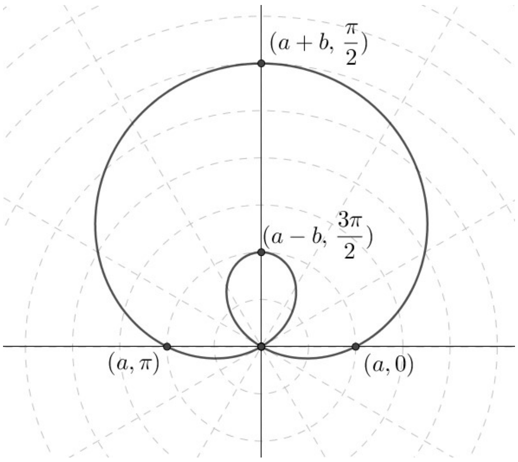
ถ้า $0 < a < b$ เส้นโค้งลีมาซองจะมีบ่วง (loop) อยู่ข้างใน



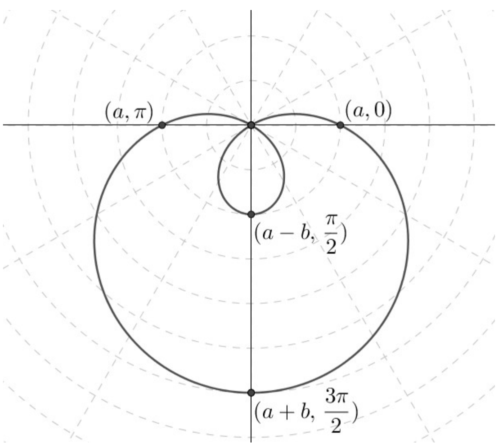
รูปที่ 6.9 กราฟ $r = a + b\cos\theta$



รูปที่ 6.10 กราฟ $r = a - b\cos\theta$

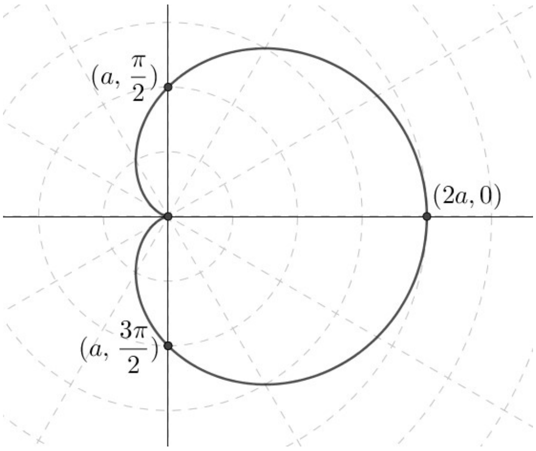


รูปที่ 6.11 กราฟ $r = a + b\sin\theta$

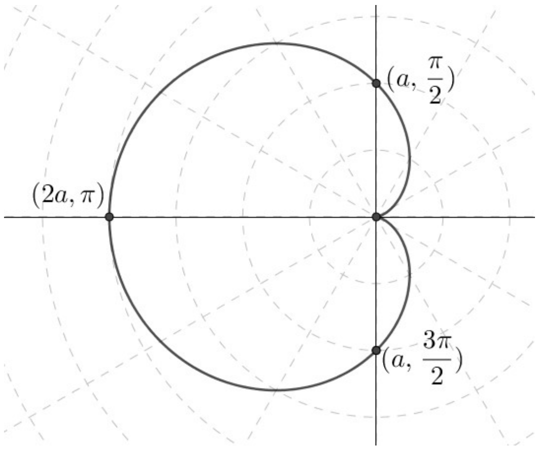


รูปที่ 6.12 กราฟ $r = a - b\sin\theta$

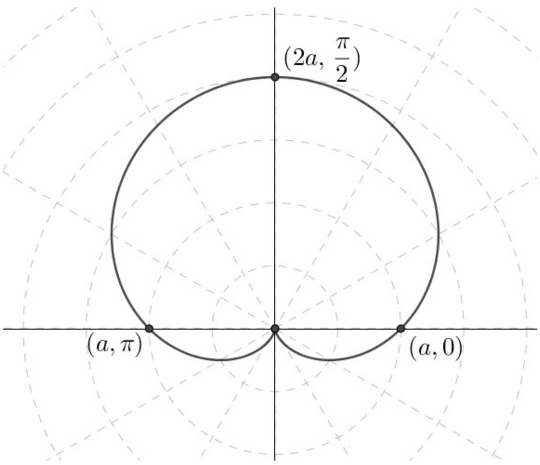
ถ้า $a = b,\ a > 0$ ลีมาซองจะเรียกว่า คาดิออยด์ (Cardioids) หรือรูปหัวใจ



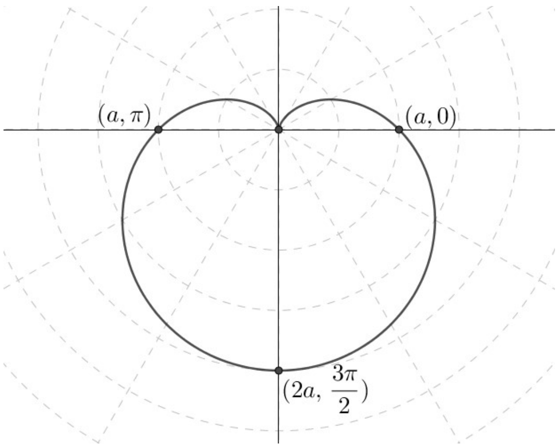
รูปที่ 6.13 กราฟ $r = a(1+\cos\theta)$



รูปที่ 6.14 กราฟ $r = a(1-\cos\theta)$

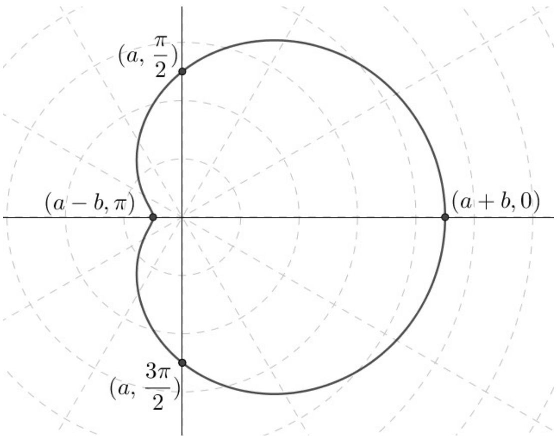


รูปที่ 6.15 กราฟ $r = a(1+\sin\theta)$

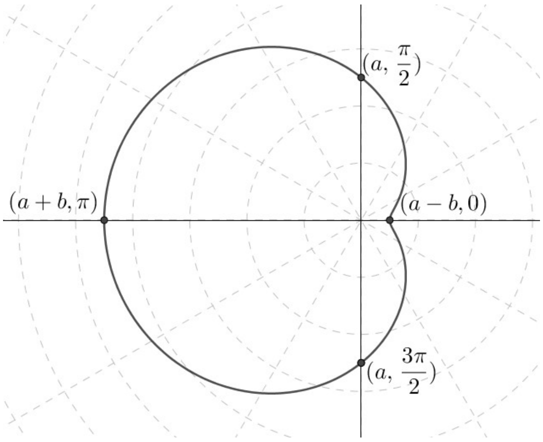


รูปที่ 6.16 กราฟ $r = a(1-\sin\theta)$

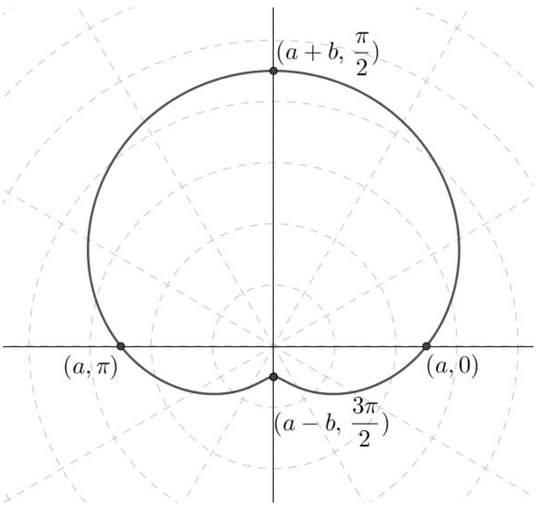
ถ้า $a > b$ ลีมาซองจะไม่มีเส้นสัมผัสกับกราฟที่ขั้ว



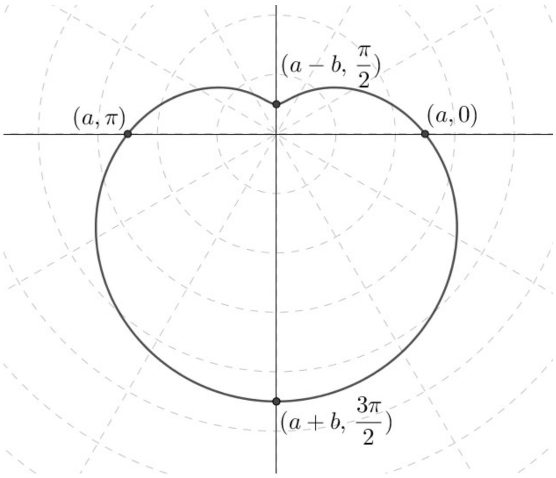
รูปที่ 6.17 กราฟ $r = a + b\cos\theta$



รูปที่ 6.18 กราฟ $r = a - b\cos\theta$



รูปที่ 6.19 กราฟ $r = a + b\sin\theta$

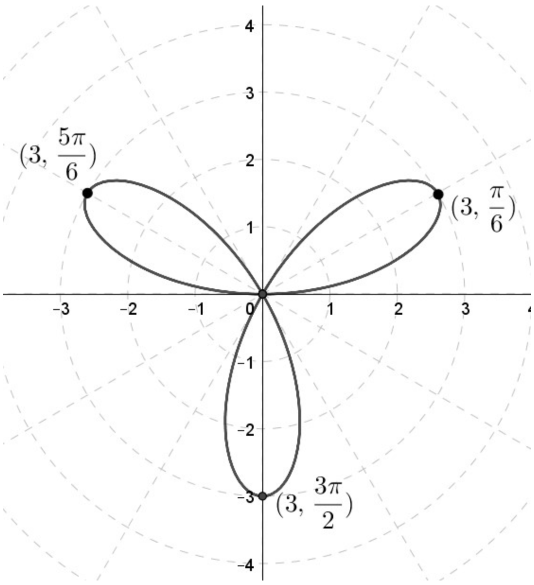


รูปที่ 6.20 กราฟ $r = a - b\sin\theta$

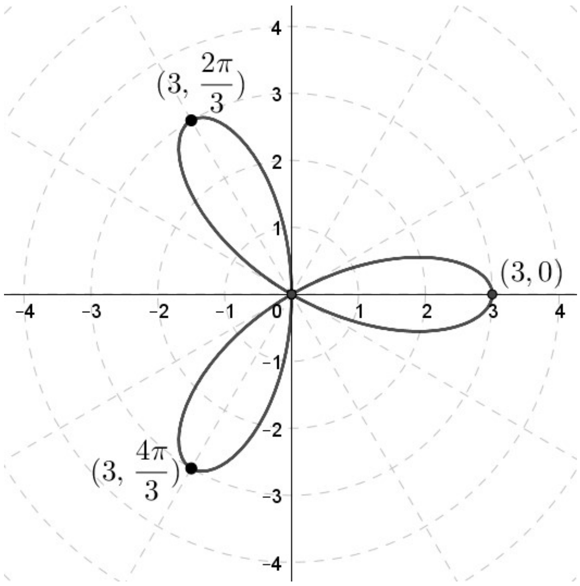
6.1.3.2 เส้นโค้งกลีบกุหลาบ (Rose Curves) สมการอยู่ในรูป

$$r = a\cos n\theta \text{ หรือ } r = a\sin n\theta$$

ถ้า n เป็นจำนวนคี่ กราฟจะมี n กลีบ

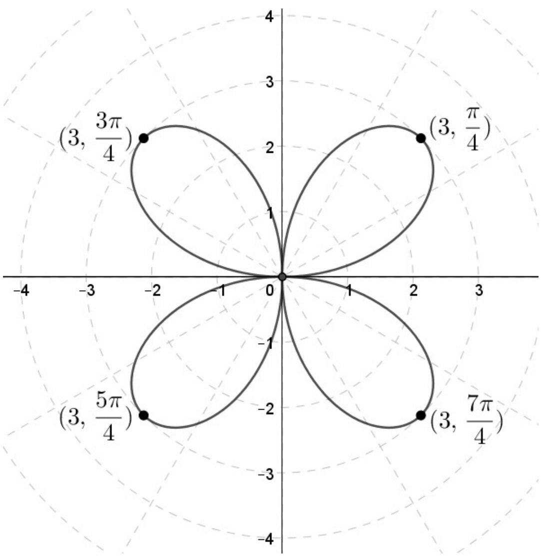


รูปที่ 6.21 กราฟ $r = 3\sin 3\theta$

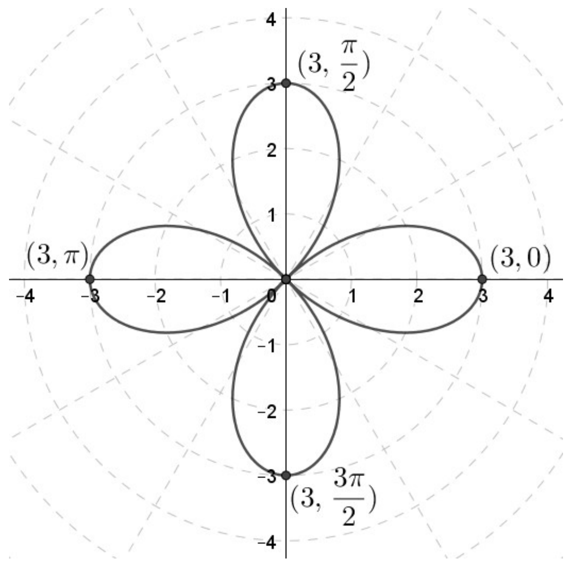


รูปที่ 6.22 กราฟ $r = 3\cos 3\theta$

ถ้า n เป็นจำนวนคู่ กราฟจะมี $2n$ กลีบ



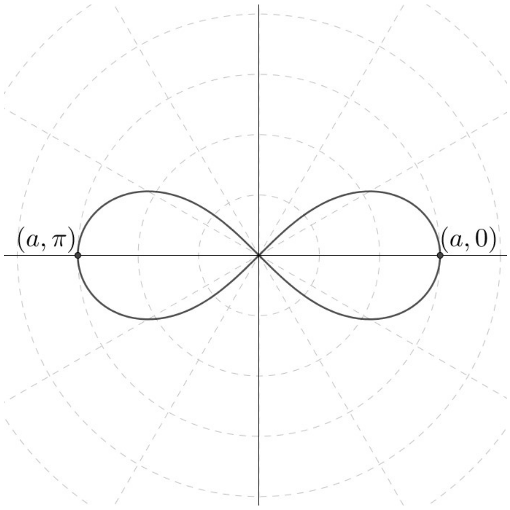
รูปที่ 6.23 กราฟ $r = 3\sin 2\theta$



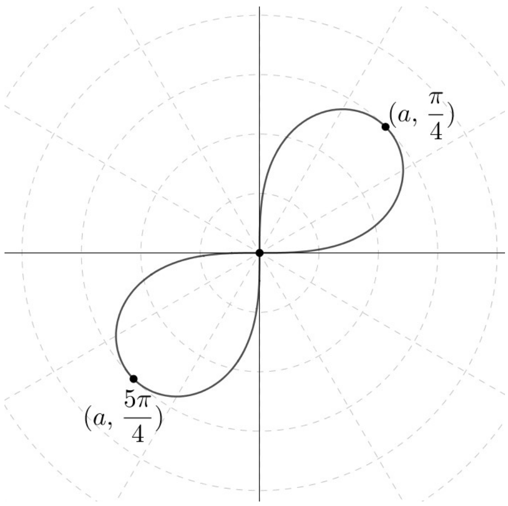
รูปที่ 6.24 กราฟ $r = 3\cos 2\theta$

6.1.3.3 เส้นโค้งเลมนิสเคต (Limniscates) สมการอยู่ในรูป

$$r^2 = a^2 \cos 2\theta \text{ หรือ } r^2 = a^2 \sin 2\theta$$



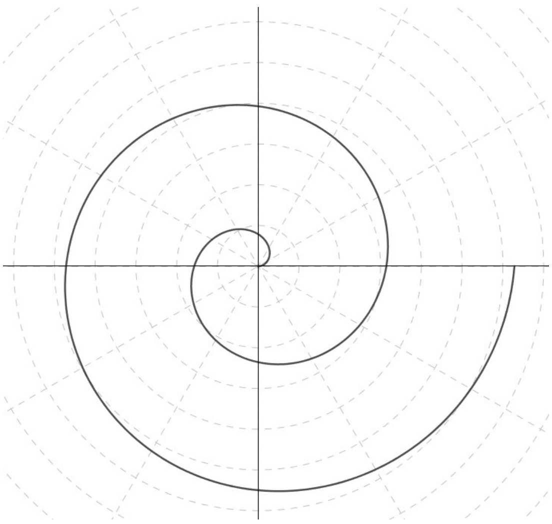
รูปที่ 6.25 กราฟ $r^2 = a^2 \cos 2\theta$



รูปที่ 6.26 กราฟ $r^2 = a^2 \sin 2\theta$

6.1.3.4 เส้นเวียนก้นหอย (Spirals) สมการอยู่ในรูป

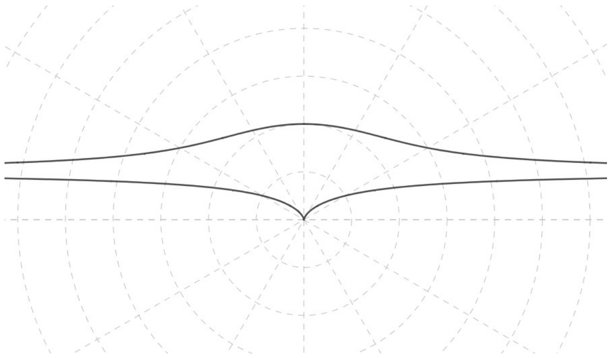
$$r = a\theta, a > 0$$



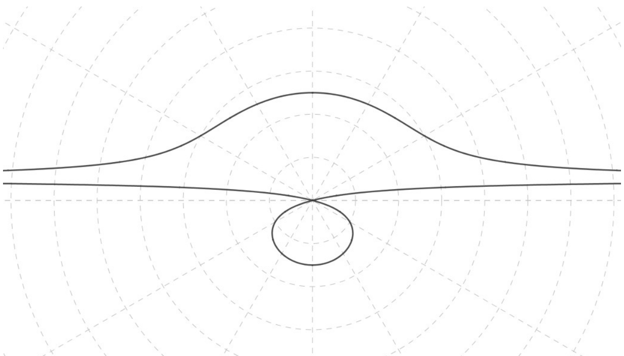
รูปที่ 6.27 กราฟ $r = a\theta$

6.1.3.5 เส้นโค้งคอนคอยด์ (Conchoids) สมการอยู่ในรูป

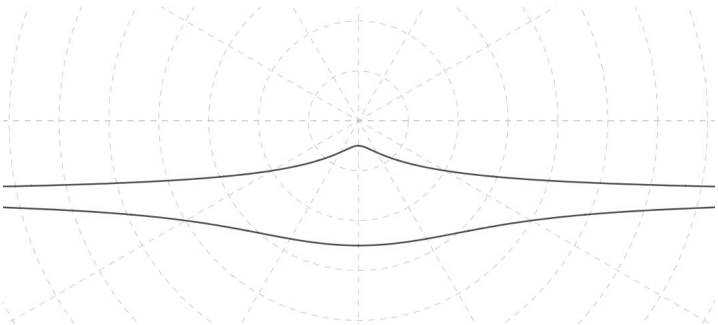
$$r = a\csc\theta \pm b$$



รูปที่ 6.28 กราฟ $r = 2\csc\theta + 2$



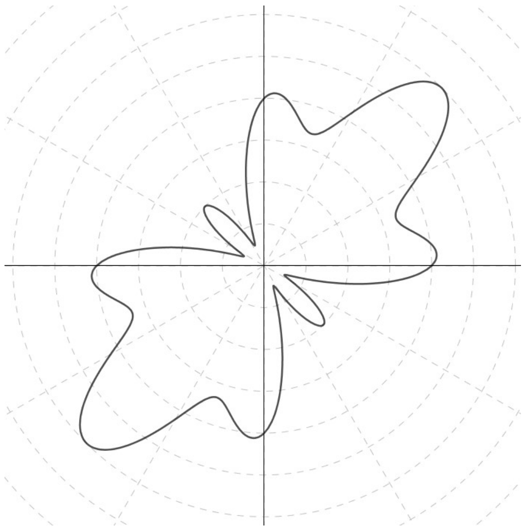
รูปที่ 6.29 กราฟ $r = \csc\theta - 4$



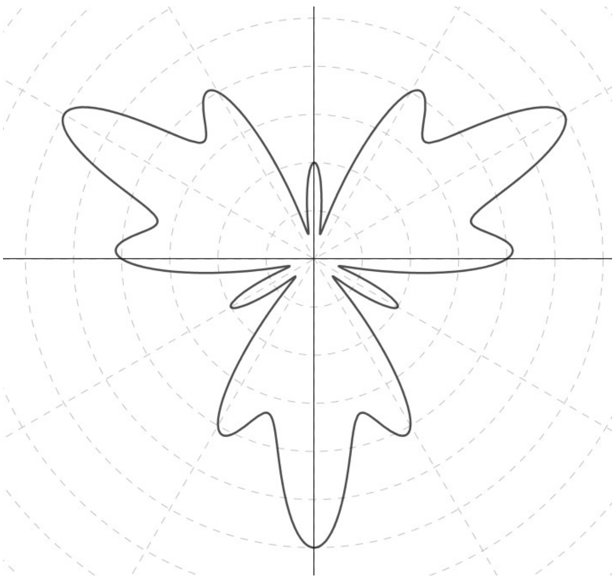
รูปที่ 6.30 กราฟ $r = -3\csc\theta + 2$

6.1.3.6 เส้นโค้งผีเสื้อ (Butterflies Curves) สมการอยู่ในรูป

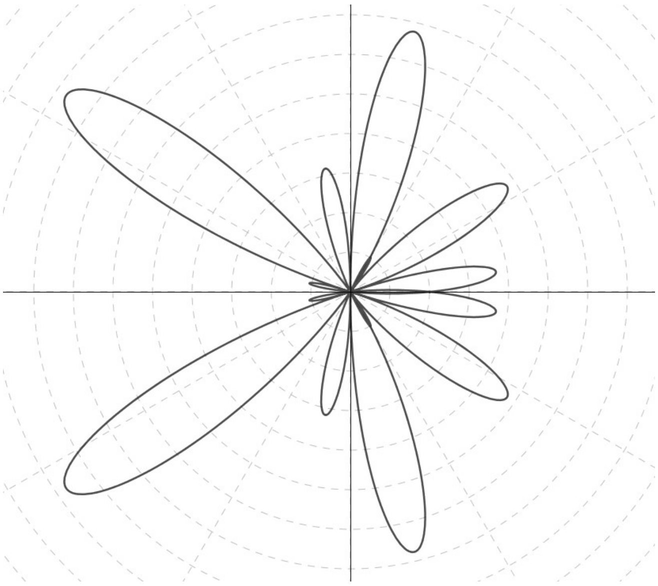
$r = 1 + \sin(n\theta) + \cos^2(2n\theta)$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก



รูปที่ 6.31 กราฟ $r = 1 + \sin(2\theta) + \cos^2(4\theta)$



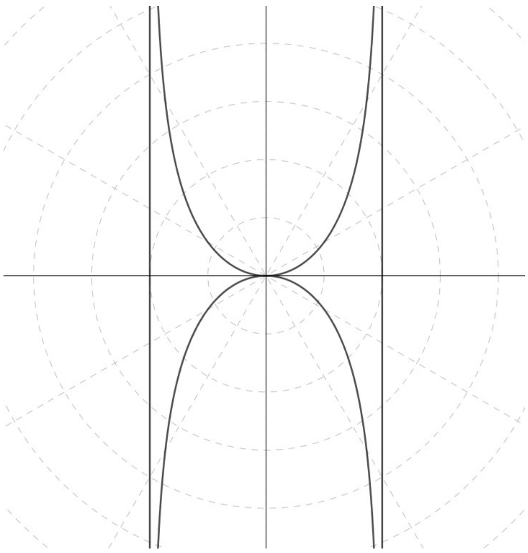
รูปที่ 6.32 กราฟ $r = 1 + \sin(2\theta) + \cos^2(4\theta)$



รูปที่ 6.33 กราฟ $r = (2 + 7\sin(3\theta))\cos 5\theta$

6.1.3.7 เส้นโค้งแคปปา (Kappa Curves) สมการอยู่ในรูป

$$r = a\tan\theta$$



รูปที่ 6.34 กราฟ $r = 2\tan\theta$

6.2 จุดตัดของกราฟในพิกัดเชิงขั้ว (Intersections of Polar Coordinates Graphs)

อำพล ธรรมเจริญ (2542 : 255) ; Riddle, Douglas F. (1996 : 290-293) และ Fuller, Gordon & Tarwater, Dolton. (1992 : 243) ได้กล่าวว่า การหาจุดตัดของเส้นโค้ง สองเส้นโค้งในระบบพิกัดเชิงขั้ว นอกจากจะแก้สมการเส้นโค้งทั้งสอง แล้ว ควรหาจุดตัดอื่น ๆ เพิ่มอีกโดย

- ดูจากกราฟของเส้นโค้ง

- เส้นโค้งที่อยู่ในรูปของสมการ $r = f(\theta)$ อาจเขียนแทนด้วย $(-1)^n r = f(\theta + n\pi)$ โดยที่ n เป็นจำนวนเต็ม

- ตรวจสอบว่าเส้นโค้งทั้งสองผ่านจุดขั้วหรือจุดกำเนิดหรือไม่ โดยให้ $r = 0$ ถ้าหา θ ได้จากสมการเส้นโค้งทั้งสองแสดงว่าจุดขั้วหรือจุดกำเนิดเป็นจุดตัดด้วย

ตัวอย่าง 6.2.1 จงหาจุดตัดของเส้นโค้ง $r = 4\sin\theta$ และ $r = 4\cos\theta$

วิธีทำ พิจารณาจุดตัดของเส้นโค้งทั้งสองโดยการแก้สมการ จะได้ว่า

$$4\sin\theta = 4\cos\theta$$
$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{4}{4}$$
$$\tan\theta = 1$$
$$\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$$

ได้ $r = 4\sin\frac{\pi}{4} = 2\sqrt{2}$ และ $r = 4\sin\frac{5\pi}{4} = -2\sqrt{2}$

จะเห็นว่า พิกัดจุดคือ $\left(2\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$ และ $\left(-2\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4}\right)$ ซึ่งเป็นจุดเดียวกัน

พิจารณาที่จุดขั้ว โดยให้ $\theta = 0$ จะได้ว่า

$$r = 4\sin\theta$$
$$0 = 4\sin\theta$$
$$\sin\theta = 0$$
$$\theta = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \pm 4\pi, \ldots$$

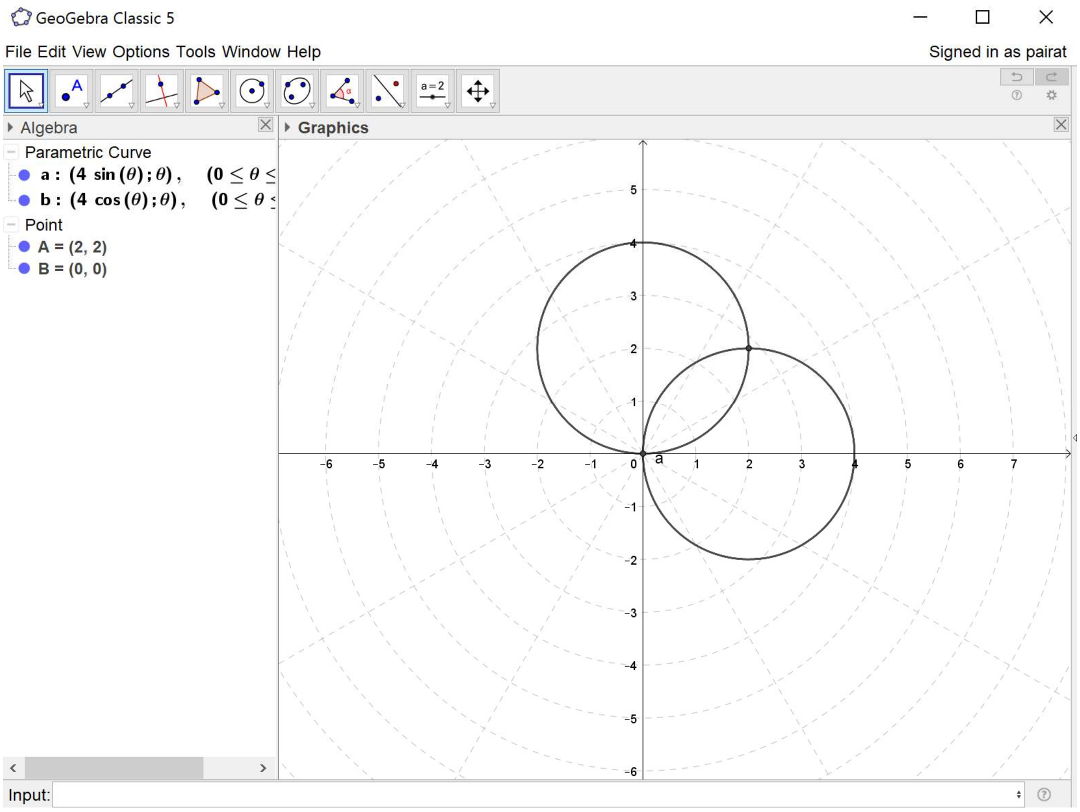
และ

$$r = 4\cos\theta$$
$$0 = 4\cos\theta$$
$$\cos\theta = 0$$
$$\theta = \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2}, \pm\frac{7\pi}{2}, \ldots$$

จะเห็นว่า สามารถหา θ ได้จากสมการของเส้นโค้งทั้งสองแสดงว่า จุดขั้วเป็นจุดตัดด้วย

ดังนั้น จุดตัดของเส้นโค้ง $r = 4\sin\theta$ และ $r = 4\cos\theta$ คือจุด $\left(2\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$ และจุดขั้ว

ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 6.2.1 ดังรูปที่ 6.35



รูปที่ 6.35 จุดตัดของเส้นโค้ง $r = 4\sin\theta$ และ $r = 4\cos\theta$

ตัวอย่าง 6.2.2 จงหาจุดตัดของเส้นโค้ง $r = 6\sin\theta$ และ $r = 6\cos 2\theta$

วิธีทำ พิจารณาจุดตัดของเส้นโค้งทั้งสองโดยการแก้สมการ จะได้ว่า

$$6\sin\theta = 6\cos 2\theta$$
$$6\sin\theta = 6(1-2\sin^2\theta)$$
$$12\sin^2\theta + 6\sin\theta - 6 = 0$$
$$2\sin^2\theta + \sin\theta - 1 = 0$$
$$(2\sin\theta - 1)(\sin\theta + 1) = 0$$
$$\sin\theta = \frac{1}{2}, -1$$
$$\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}$$

ถ้า $\theta = \frac{\pi}{6}$ จะได้ $r = 3$

ถ้า $\theta = \dfrac{5\pi}{6}$ จะได้ $r = 3$ และถ้า $\theta = \dfrac{3\pi}{2}$ จะได้ $r = -6$

จะเห็นว่า พิกัดจุดคือ $\left(3,\dfrac{\pi}{6}\right),\left(3,\dfrac{5\pi}{6}\right)$ และ $\left(-6,\dfrac{3\pi}{2}\right)$

พิจารณาที่จุดขั้ว โดยให้ $\theta = 0$ จะได้ว่า

$$0 = 6\sin\theta \qquad\qquad 0 = 6\cos 2\theta$$

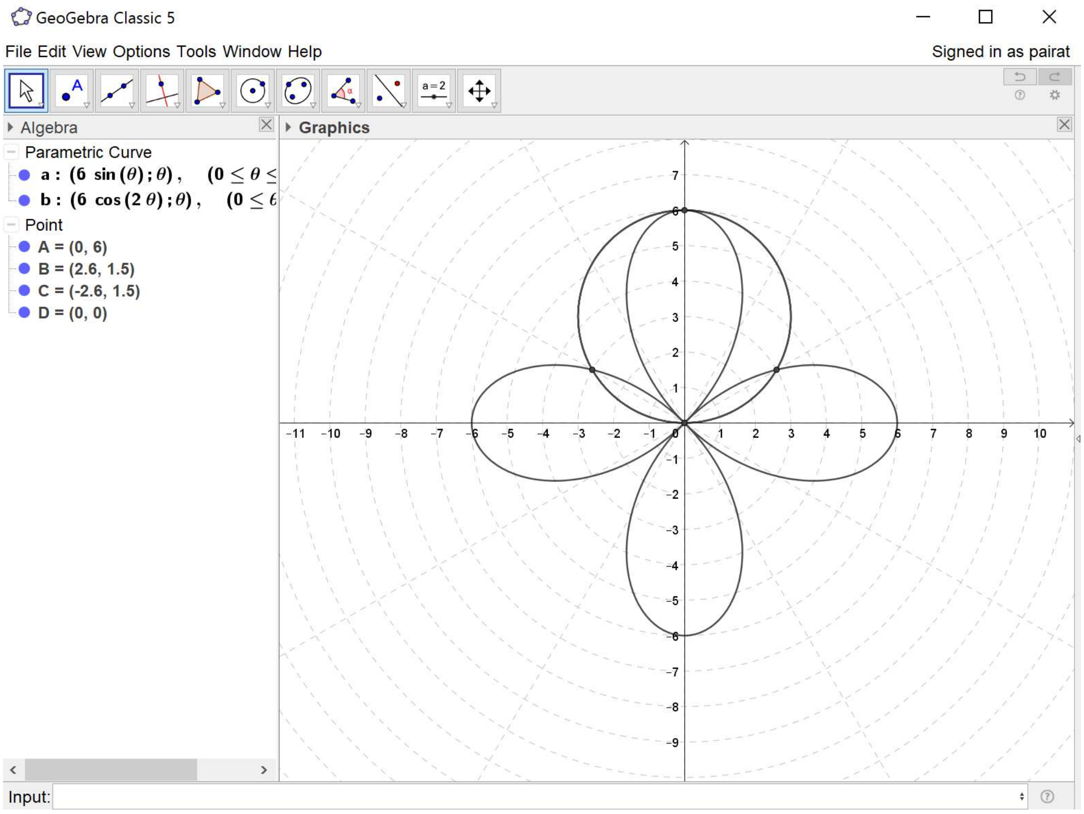
$$\sin\theta = 0 \quad \text{และ} \quad \cos 2\theta = 0$$

$$\theta = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \pm 4\pi, \dots \qquad 2\theta = \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2}, \pm\frac{7\pi}{2}, \dots$$

จะเห็นว่า สามารถหา θ ได้จากสมการของเส้นโค้งทั้งสองแสดงว่า จุดขั้วเป็นจุดตัดด้วย

ดังนั้น จุดตัดของ $r = 6\sin\theta$ และ $r = 6\cos 2\theta$ คือจุด $\left(3,\dfrac{\pi}{6}\right),\left(3,\dfrac{5\pi}{6}\right),\left(-6,\dfrac{3\pi}{2}\right)$ และจุดขั้ว

ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 6.2.2 ดังรูปที่ 6.36



รูปที่ 6.36 จุดตัดของเส้นโค้ง $r = 6\sin\theta$ และ $r = 6\cos 2\theta$

ตัวอย่าง 6.2.3 จงหาจุดตัดของเส้นโค้ง $r\cos\theta = 2$ และ $r = 2 + 4\cos\theta$

วิธีทำ พิจารณาจุดตัดของเส้นโค้งทั้งสองโดยการแก้สมการ จะได้ว่า

$$\frac{2}{\cos\theta} = 2 + 4\cos\theta$$
$$2 = 2\cos\theta + 4\cos^2\theta$$
$$4\cos^2\theta + 2\cos\theta - 2 = 0$$
$$2\cos^2\theta + \cos\theta - 1 = 0$$
$$(2\cos\theta - 1)(\cos\theta + 1) = 0$$

นั่นคือ $2\cos\theta - 1 = 0$ หรือ $\cos\theta + 1 = 0$

จาก $2\cos\theta - 1 = 0$ จะได้

$$\cos\theta = \frac{1}{2}$$
$$\theta = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$$

หรือ จาก $\cos\theta + 1 = 0$ จะได้

$$\cos\theta + 1 = 0$$
$$\cos\theta = -1$$
$$\theta = \pi$$

ถ้า $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ จะได้ $r = 4$

ถ้า $\theta = \dfrac{5\pi}{3}$ จะได้ $r = 4$

ถ้า $\theta = \pi$ จะได้ $r = -2$

จะเห็นว่า พิกัดจุดคือ $\left(4, \dfrac{\pi}{3}\right), \left(4, \dfrac{5\pi}{3}\right)$ และ $\left(-2, \pi\right)$

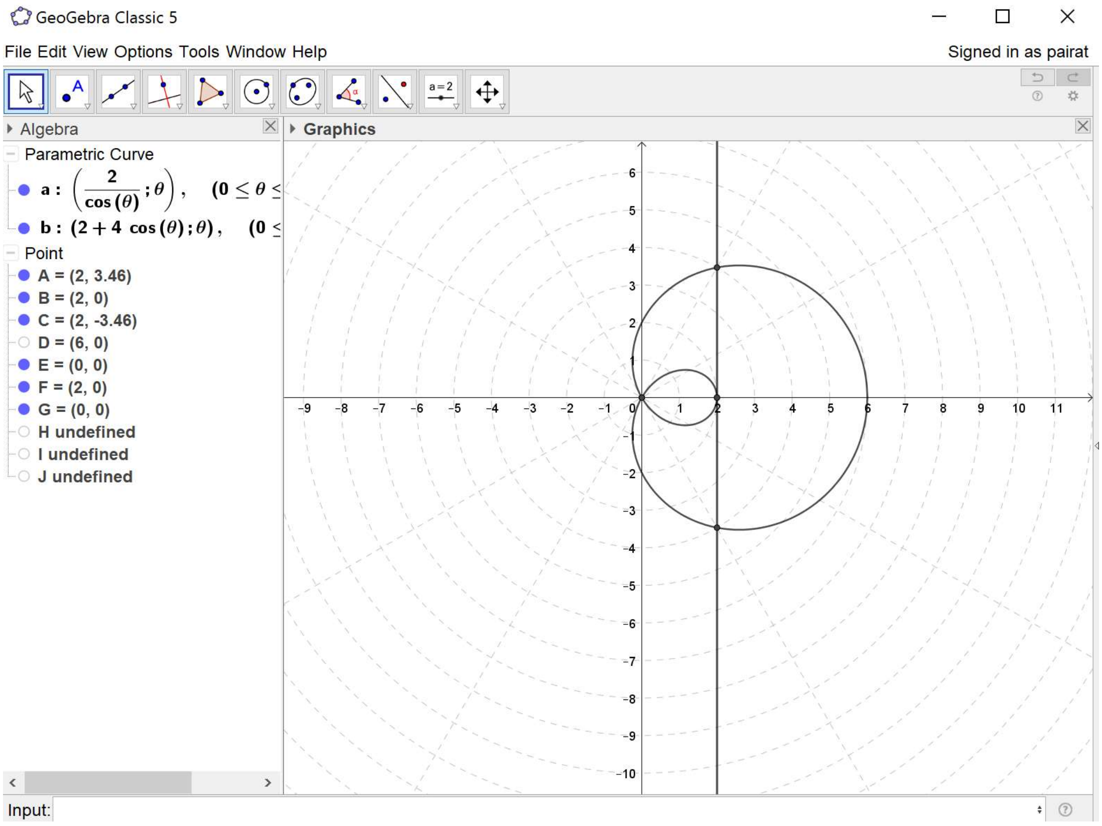
พิจารณาที่จุดขั้ว โดยให้ $\theta = 0$ จะได้ว่า

$$r\cos\theta = 2$$
$$r = \frac{2}{\cos 0}$$

จะเห็นว่า ไม่สามารถหา θ ได้จากสมการ $r\cos\theta = 2$ แสดงว่า จุดขั้วไม่ได้เป็นจุดตัด

ดังนั้น จุดตัดของเส้นโค้ง $r\cos\theta = 2$ และ $r = 2 + 4\cos\theta$ คือ $\left(4, \dfrac{\pi}{3}\right), \left(4, \dfrac{5\pi}{3}\right)$ และ $\left(-2, \pi\right)$

ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 6.2.3 ดังรูปที่ 6.37



รูปที่ 6.37 จุดตัดของเส้นโค้ง $r\cos\theta = 2$ และ $r = 2 + 4\cos\theta$

ตัวอย่าง 6.2.4 จงหาจุดตัดของเส้นโค้ง $r = \dfrac{3}{2} - \cos\theta$ และ $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$

วิธีทำ แทนค่า $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$ ในสมการ $r = \dfrac{3}{2} - \cos\theta$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} r &= \frac{3}{2} - \cos\theta \\ &= \frac{3}{2} - \cos\frac{2\pi}{3} \\ &= \frac{3}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= 2 \end{aligned}$$

$\therefore$ คำตอบของสมการ คือ $\left(2, \dfrac{2\pi}{3}\right)$

พิจารณาที่จุดขั้ว โดยให้ $\theta = 0$ จะได้ว่า

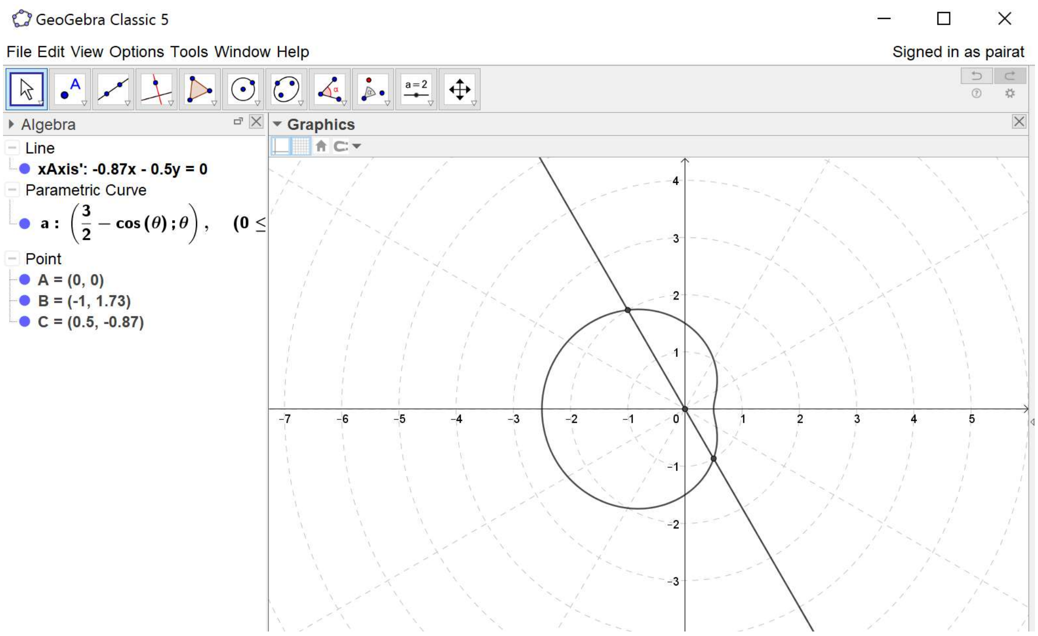
$$0 = \frac{3}{2} - \cos\theta$$
$$\cos\theta = \frac{3}{2}$$

จะเห็นว่า ไม่สามารถหา θ ได้จากสมการ $r = \frac{3}{2} - \cos\theta$ แสดงว่า จุดขั้วไม่ได้เป็นจุดตัด

วาดกราฟเพื่อดูจุดตัดเพิ่มเติม เราพบว่าจุด $\left(-1, \frac{2\pi}{3}\right)$ เป็นพิกัดจุดตัดจุดที่สอง ตรวจสอบพิกัดโดยการแทนจุด $\left(-1, \frac{2\pi}{3}\right)$ ในสมการ $r = \frac{3}{2} - \cos\theta$ จะได้ $-1 = \frac{3}{2} - \cos\frac{2\pi}{3} = 2$ สมการไม่มีคำตอบ แต่เราสามารถเขียนจุด $\left(-1, \frac{2\pi}{3}\right)$ ในรูปแบบอื่นได้เป็น $\left(1, \frac{5\pi}{3}\right)$ เมื่อนำไปแทนในสมการเดิมอีกครั้งพบว่าสมการเป็นจริง

ดังนั้น จุดตัดของเส้นโค้ง $r = \frac{3}{2} - \cos\theta$ และ $\theta = \frac{2\pi}{3}$ คือจุด $\left(2, \frac{2\pi}{3}\right)$ และจุด $\left(1, \frac{5\pi}{3}\right)$

ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 6.2.4 ดังรูปที่ 6.38

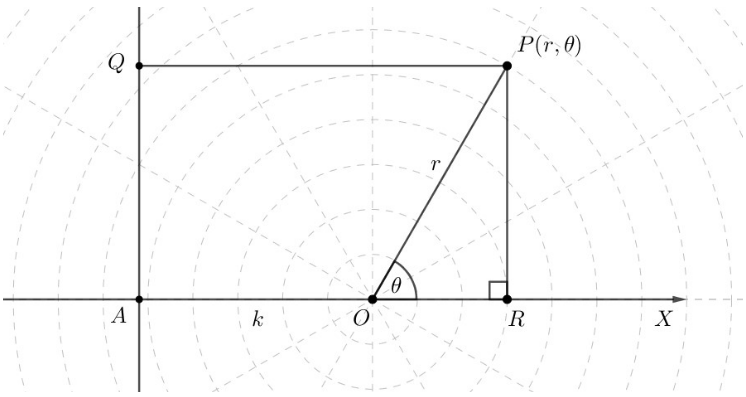


รูปที่ 6.38 จุดตัดของเส้นโค้ง $r = \frac{3}{2} - \cos\theta$ และ $\theta = \frac{2\pi}{3}$

6.3 สมการเชิงขั้วของภาคตัดกรวย (Polar Equation of Conic Section)

Riddle, Douglas F. (1996 : 299-301) และ Varberg, Dale, Purcell, Edwin J & Rigdon, Steven E. (2000 : 543) ได้กล่าวว่า เราใช้คุณสมบัติของจุดโฟกัสและเส้นไดเรกตริกซ์ของภาคตัดกรวยสำหรับหาสมการเชิงขั้วของภาคตัดกรวย สมการสามารถหาได้ในรูปแบบง่าย ๆ ดังนี้

6.3.1 สมการภาคตัดกรวยซึ่งมีจุดโฟกัสที่ขั้ว เส้นไดเรกตริกซ์ตั้งฉากกับแกนเชิงขั้วและอยู่ห่างจากจุดขั้วไปทางซ้าย k หน่วย เมื่อ e เป็นค่าเยื้องศูนย์กลาง ดังรูปที่ 6.39



รูปที่ 6.39 เส้นไดเรกตริกซ์ตั้งฉากกับแกนเชิงขั้วและอยู่ห่างจากจุดขั้วไปทางซ้าย k หน่วย

จากรูป สำหรับจุด $P(r,\theta)$ ใด ๆ ของภาคตัดกรวย โดยความหมายของค่า e เราได้ว่า

$$\begin{aligned} e &= \frac{|OP|}{|QP|} \\ &= \frac{|OP|}{|AO|+|OR|} \\ &= \frac{r}{k+r\cos\theta} \\ e(k+r\cos\theta) &= r \\ r(1-e\cos\theta) &= ke \\ r &= \frac{ke}{1-e\cos\theta} \end{aligned}$$

ดังนั้น สมการภาคตัดกรวยซึ่งมีจุดโฟกัสที่ขั้ว เส้นไดเรกตริกซ์ตั้งฉากกับแกนเชิงขั้วและอยู่ห่างจากจุดขั้วไปทางซ้าย k หน่วย เมื่อ e เป็นค่าเยื้องศูนย์กลาง คือ

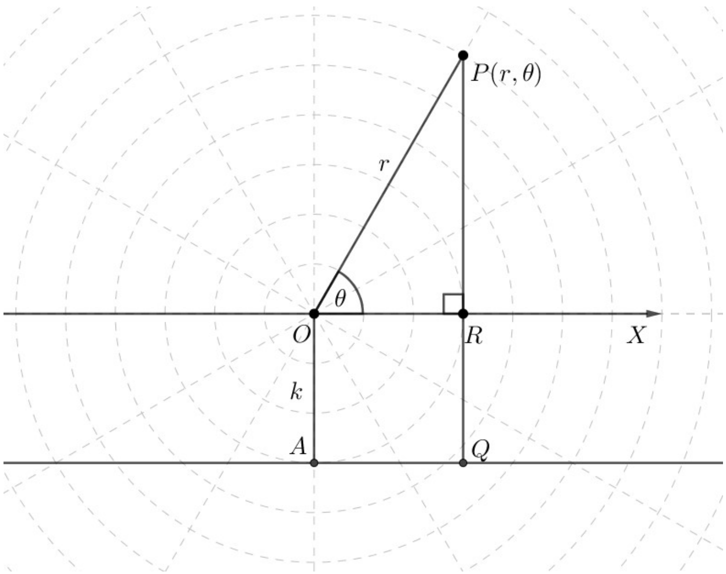
$$r = \frac{ke}{1-e\cos\theta}$$

ในทำนองเดียวกัน

6.3.2 สมการภาคตัดกรวยซึ่งมีจุดโฟกัสที่ขั้ว เส้นไดเรกตริกซ์ตั้งฉากกับแกนเชิงขั้วและอยู่ห่างจากจุดขั้วไปทางขวา k หน่วย เมื่อ e เป็นค่าเยื้องศูนย์กลาง คือ

$$r = \frac{ke}{1 + e\cos\theta}$$

6.3.3 สมการภาคตัดกรวยซึ่งมีจุดโฟกัสที่ขั้ว เส้นไดเรกตริกซ์ขนานกับแกนเชิงขั้วและอยู่ห่างจากจุดขั้ว ไปด้านล่าง k หน่วย เมื่อ e เป็นค่าเยื้องศูนย์กลาง ดังรูปที่ 6.40



รูปที่ 6.40 เส้นไดเรกตริกซ์ขนานกับแกนเชิงขั้วและอยู่ห่างจากจุดขั้วไปด้านล่าง k

จากรูป สำหรับจุด $P(r,\theta)$ ใด ๆ ของภาคตัดกรวย โดยความหมายของค่า e เราได้ว่า

$$\begin{aligned} e &= \frac{|OP|}{|QP|} \\ &= \frac{|OP|}{|QR| + |RP|} \\ &= \frac{r}{k + r\sin\theta} \end{aligned}$$

$$e(k + r\sin\theta) = r$$

$$ke + re\sin\theta = r$$

$$r - re\sin\theta = ke$$
$$r(1 - e\sin\theta) = ke$$
$$r = \frac{ke}{1 - e\sin\theta}$$

ดังนั้น สมการภาคตัดกรวยซึ่งมีจุดโฟกัสที่ขั้ว เส้นไดเรกตริกซ์ขนานกับแกนเชิงขั้วและอยู่ห่างจากจุดขั้วไปด้านล่าง k หน่วย เมื่อ e เป็นค่าเยื้องศูนย์กลาง คือ

$$r = \frac{ke}{1 - e\sin\theta}$$

ในทำนองเดียวกัน

6.3.4 สมการภาคตัดกรวยซึ่งมีจุดโฟกัสที่ขั้ว เส้นไดเรกตริกซ์ขนานกับแกนเชิงขั้วและอยู่ห่างจากจุดขั้วไปด้านบน k หน่วย เมื่อ e เป็นค่าเยื้องศูนย์กลาง คือ

$$r = \frac{ke}{1 + e\sin\theta}$$

หมายเหตุ

ถ้า $e = 0$ กราฟเป็น วงกลม

ถ้า $e = 1$ กราฟเป็น พาราโบลา

ถ้า $0 < e < 1$ กราฟเป็น วงรี

ถ้า $e > 1$ กราฟเป็น ไฮเพอร์โบลา

(ศรีบุตร แววเจริญ และ ชนศักดิ์ บ่ายเที่ยง, 2544 : 257)

ตัวอย่าง 6.3.1 จงวาดกราฟของสมการ $r = 4$

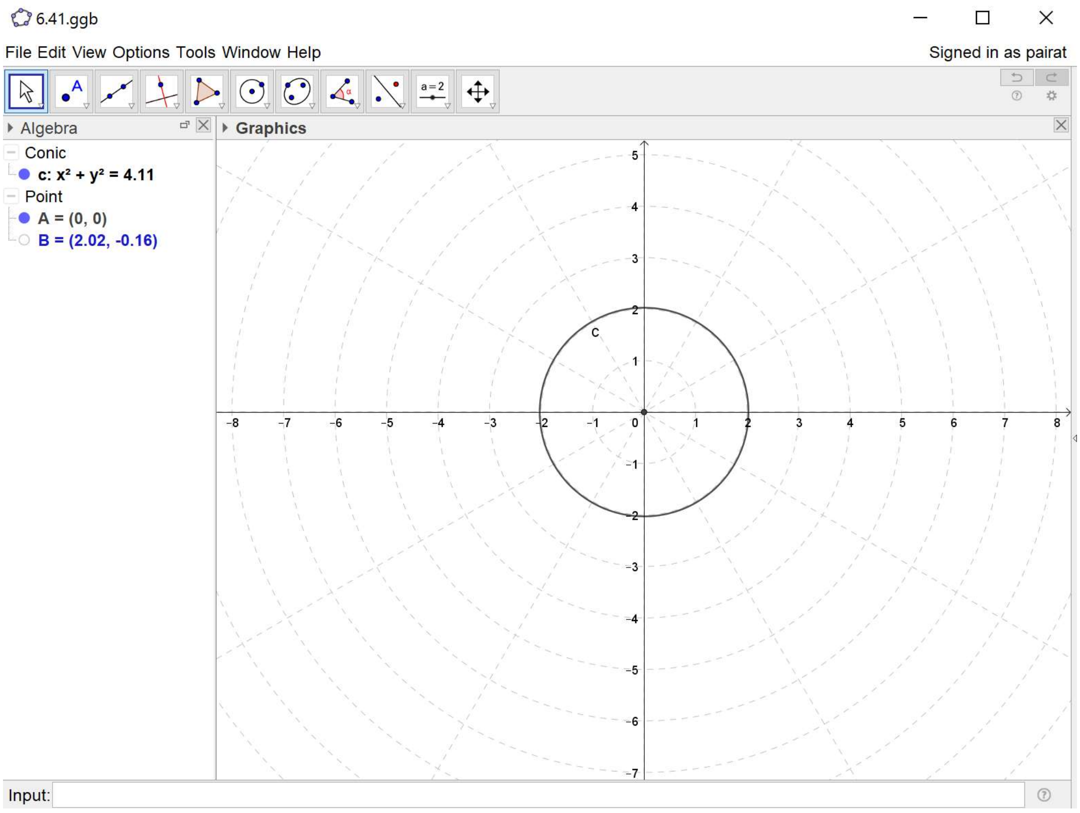
วิธีทำ จัดรูปสมการใหม่ จะได้

$$r = 4$$
$$= \frac{4}{1 + 0\cos\theta}$$

จะเห็นว่า $e = 0$ กราฟเป็นวงกลม จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(0,0)$ รัศมียาว 4 หน่วย

ดังนั้น สมการ $r = 4$ กราฟเป็นวงกลม

ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 6.3.1 ดังรูปที่ 6.41



รูปที่ 6.41 กราฟ $r = 4$

ตัวอย่าง 6.3.2 จงวาดกราฟของสมการ $r = \dfrac{15}{3 - 2\cos\theta}$

วิธีทำ จัดสมการให้อยู่ในรูป $r = \dfrac{ke}{1 - e\cos\theta}$ จะได้

$$r = \frac{15}{3 - 2\cos\theta} = \frac{5}{1 - \frac{2}{3}\cos\theta}$$

จะเห็นว่า $e = \dfrac{2}{3} < 1$

$\therefore$ กราฟเป็นวงรี หาจุดตัดแกนโดยแทน $\theta = 0, \dfrac{\pi}{2}, \pi, \dfrac{3\pi}{2}, 2\pi$ ใน $r = \dfrac{15}{3 - 2\cos\theta}$

แทน $\theta = 0$ จะได้ $r = \dfrac{15}{3 - 2\cos 0} = 15$ ได้พิกัดเป็น $(15, 0)$

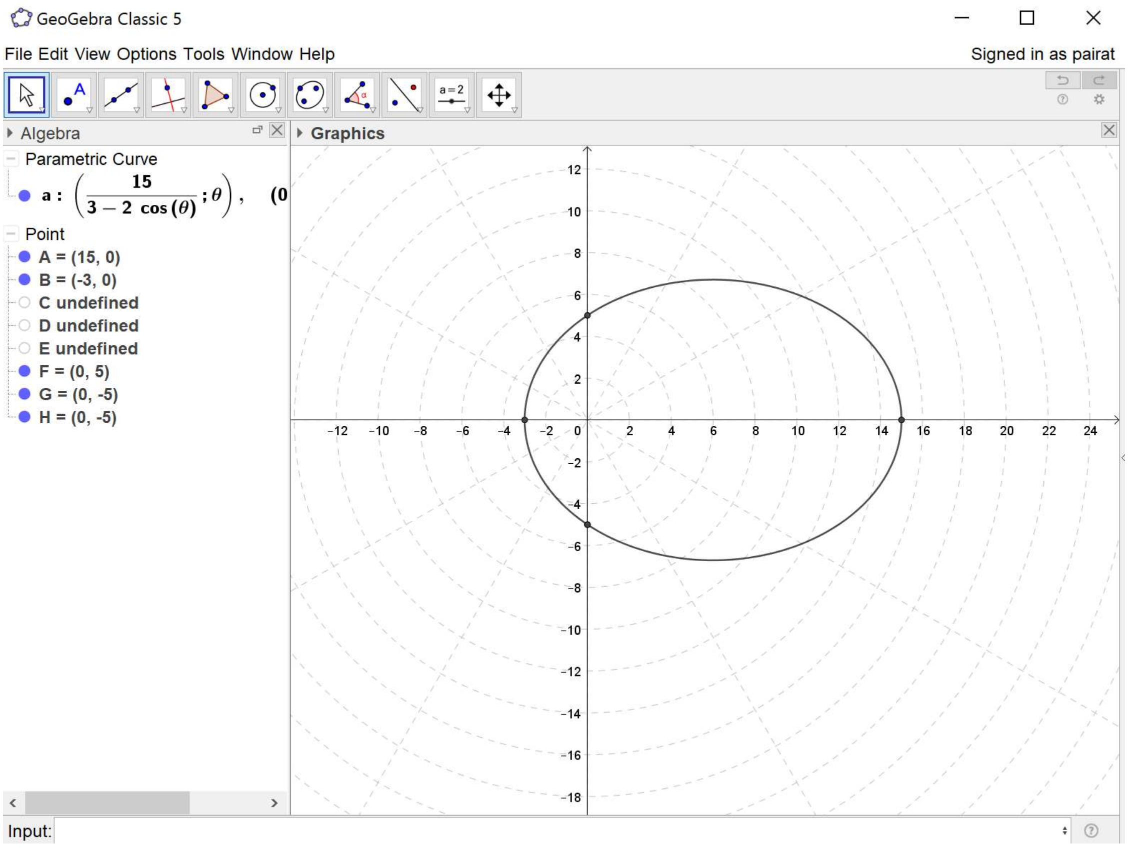
แทน $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ จะได้ $r = \dfrac{15}{3 - 2\cos\dfrac{\pi}{2}} = 5$ ได้พิกัดเป็น $\left(5, \dfrac{\pi}{2}\right)$

แทน $\theta = \pi$ จะได้ $r = \dfrac{15}{3 - 2\cos\pi} = 3$ ได้พิกัดเป็น $(3, \pi)$

แทน $\theta = \dfrac{3\pi}{2}$ จะได้ $r = \dfrac{15}{3 - 2\cos\dfrac{3\pi}{2}} = 5$ ได้พิกัดเป็น $\left(5, \dfrac{3\pi}{2}\right)$

ดังนั้น จุดตัดแกนของ $r = \dfrac{15}{3 - 2\cos\theta}$ คือ $(15, 0), \left(5, \dfrac{\pi}{2}\right), (3, \pi)$ และ $\left(5, \dfrac{3\pi}{2}\right)$

ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 6.3.2 ดังรูปที่ 6.42



รูปที่ 6.42 กราฟ $r = \dfrac{15}{3 - 2\cos\theta}$

ตัวอย่าง 6.3.3 จงวาดกราฟของสมการ $r = \dfrac{6}{1+2\sin\theta}$

วิธีทำ จากสมการ $r = \dfrac{6}{1+2\sin\theta}$

จะเห็นว่า $e = 2 > 1$

$\therefore$ กราฟเป็นไฮเพอร์โบลา หาจุดตัดแกนโดยแทน $\theta = 0, \dfrac{\pi}{2}, \pi, \dfrac{3\pi}{2}, 2\pi$ ใน $r = \dfrac{6}{1+2\cos\theta}$

แทน $\theta = 0$ จะได้ $r = \dfrac{6}{1+2\sin 0} = 6$ ได้พิกัดเป็น $(6,0)$

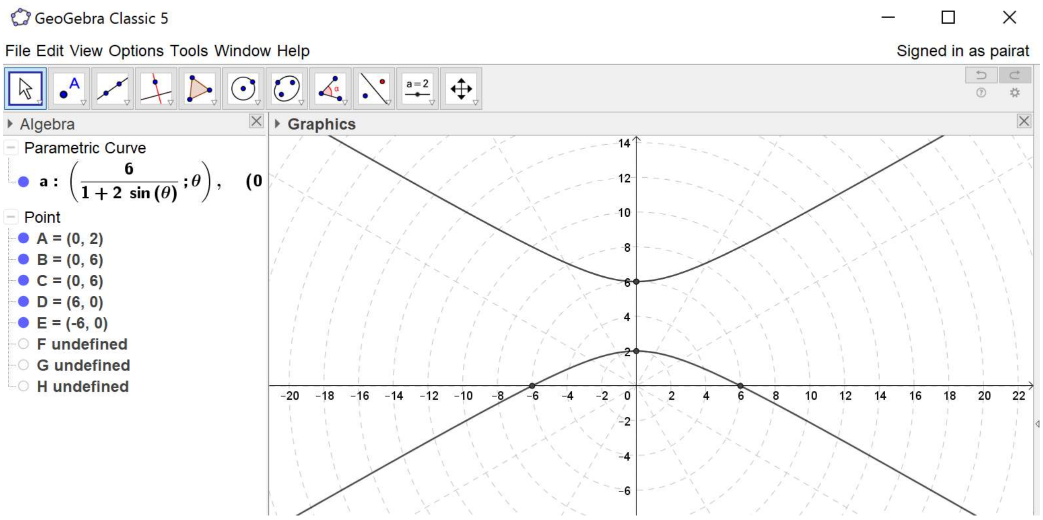
แทน $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ จะได้ $r = \dfrac{6}{1+2\sin\dfrac{\pi}{2}} = 2$ ได้พิกัดเป็น $\left(2, \dfrac{\pi}{2}\right)$

แทน $\theta = \pi$ จะได้ $r = \dfrac{6}{1+2\sin\pi} = 6$ ได้พิกัดเป็น $(6,\pi)$

แทน $\theta = \dfrac{3\pi}{2}$ จะได้ $r = \dfrac{6}{1+2\sin\dfrac{3\pi}{2}} = -6$ ได้พิกัดเป็น $\left(-6, \dfrac{3\pi}{2}\right)$

ดังนั้น จุดตัดแกนของ $r = \dfrac{6}{1+2\sin\theta}$ คือ $(6,0), \left(2, \dfrac{\pi}{2}\right), (6,\pi)$ และ $\left(-6, \dfrac{3\pi}{2}\right)$

ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 6.3.3 ดังรูปที่ 6.43



รูปที่ 6.43 กราฟ $r = \dfrac{6}{1+2\sin\theta}$

ตัวอย่าง 6.3.4 จงวาดกราฟของสมการ $r = \dfrac{10}{3+3\cos\theta}$

วิธีทำ จัดสมการให้อยู่ในรูป $r = \dfrac{ke}{1+e\cos\theta}$ จะได้ $r = \dfrac{\frac{10}{3}}{1+\cos\theta}$ จะเห็นว่า $e = 1$

$\therefore$ กราฟเป็นพาราโบลา หาจุดตัดแกนโดยแทน $\theta = 0, \dfrac{\pi}{2}, \pi, \dfrac{3\pi}{2}, 2\pi$ ใน $r = \dfrac{6}{1+2\cos\theta}$

แทน $\theta = 0$ จะได้ $r = \dfrac{10}{3+3\cos 0} = \dfrac{5}{3}$ ได้พิกัดเป็น $\left(\dfrac{5}{3}, 0\right)$

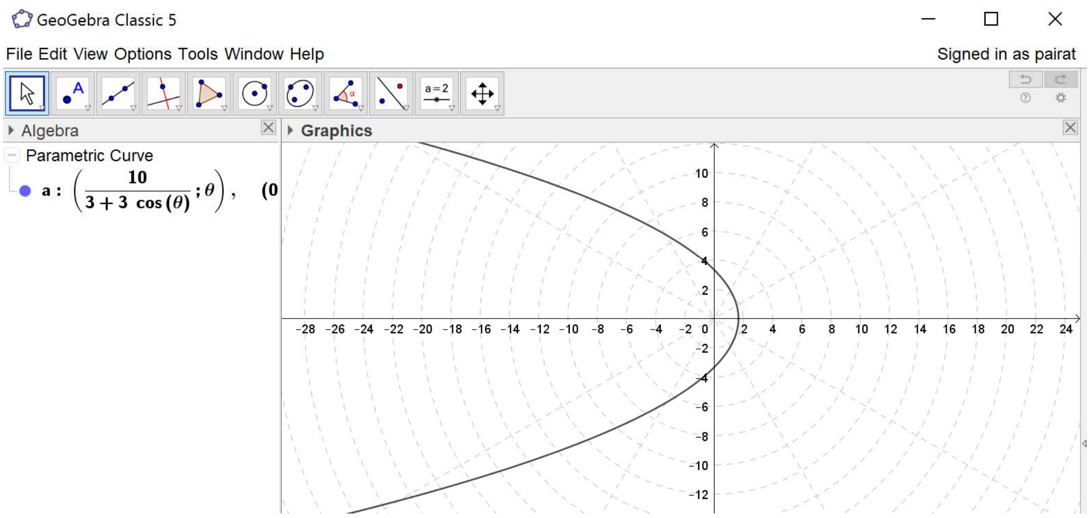
แทน $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ จะได้ $r = \dfrac{10}{3+3\cos\frac{\pi}{2}} = \dfrac{10}{3}$ ได้พิกัดเป็น $\left(\dfrac{10}{3}, \dfrac{\pi}{2}\right)$

แทน $\theta = \pi$ จะได้ $r = \dfrac{10}{3+3\cos\pi} = \dfrac{10}{0}$ กราฟตัด

แทน $\theta = \dfrac{3\pi}{2}$ จะได้ $r = \dfrac{10}{3+3\cos\frac{3\pi}{2}} = \dfrac{10}{3}$ ได้พิกัดเป็น $\left(\dfrac{10}{3}, \dfrac{3\pi}{2}\right)$

ดังนั้น จุดตัดแกนของ $r = \dfrac{6}{1+2\sin\theta}$ คือ $\left(\dfrac{5}{3}, 0\right)\left(10, \dfrac{\pi}{2}\right)$ และ $\left(\dfrac{10}{3}, \dfrac{3\pi}{2}\right)$

ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 6.3.4 ดังรูปที่ 6.44



รูปที่ 6.44 กราฟ $r = \dfrac{10}{3+3\cos\theta}$

ตัวอย่าง 6.3.5 จงหาสมการเชิงขั้วของภาคตัดกรวยที่จุดโฟกัสอยู่ที่จุดกำเนิด จุดยอดอยู่ที่ $\left(3, \dfrac{\pi}{2}\right)$ และจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $\left(1, -\dfrac{\pi}{2}\right)$

วิธีทำ เมื่อลงจุดโฟกัสอยู่ จุดยอด และจุดศูนย์กลางในระบบพิกัดเชิงขั้วแล้ว เราพบว่ากราฟเป็นวงรีและเส้นไดเรกตริกซ์ที่สอดคล้องกับจุดโฟกัสที่เป็นจุดกำเนิด จะอยู่ด้านบนและขนานกับแกนเชิงขั้ว

$\therefore$ สมการวงรีจะอยู่ในรูป $r = \dfrac{ke}{1 + e\sin\theta}$ ....(1)

จากจุดยอดอยู่ที่ $\left(3, \dfrac{\pi}{2}\right)$ จะได้ $3 = \dfrac{ke}{1+e}$

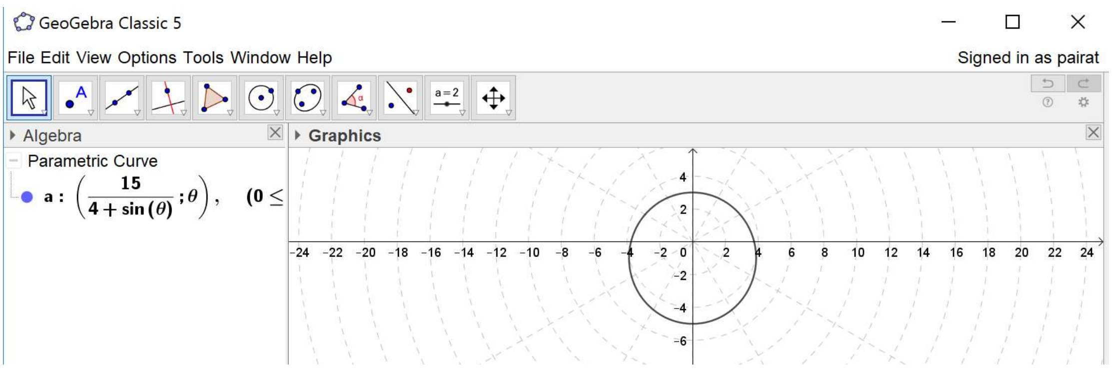
จาก $a = 4$ และ $c = 1$ จะได้ $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{1}{4}$ นั่นคือ $3 = \dfrac{k\left(\dfrac{1}{4}\right)}{1+\dfrac{1}{4}} = \dfrac{\dfrac{k}{4}}{\dfrac{5}{4}} = \dfrac{k}{5}$

เราได้ว่า $e = \dfrac{1}{4}$ และ $k = 15$ แทนในสมการ (1) จะได้

$$r = \frac{k\left(\dfrac{15}{4}\right)}{1+\dfrac{1}{4}\sin\theta} = \frac{15}{4+\sin\theta}$$

ดังนั้น สมการเชิงขั้วของภาคตัดกรวย คือ $r = \dfrac{15}{4+\sin\theta}$

ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 6.3.5 ดังรูปที่ 6.45



รูปที่ 6.45 กราฟ $r = \dfrac{15}{4+\sin\theta}$

6.4 สมการอิงตัวแปรเสริม (Parametric Equations)

การวาดกราฟในระนาบโดยใช้สองตัวแปร x และ y ในระบบพิกัดฉาก หรือ r และ θ ในระบบพิกัดเชิงขั้ว เมื่อกำหนดความสัมพันธ์ของสองตัวแปรนั้น นั่นคือ

$y = f(x)$ เมื่อ y เป็นฟังก์ชันของ x หรือ

$r = f(\theta)$ เมื่อ f เป็นฟังก์ชันของ θ

ในที่นี้เราจะหาความสัมพันธ์ของตัวแปร x และ y ในเทอมของตัวแปรที่สามซึ่งเรียกว่า ตัวแปรเสริม ปัจจุบันเทคโนโลยีด้านคอมพิวเตอร์ได้พัฒนาโปรแกรมช่วยวาดกราฟทั้งในสองมิติ และสามมิติ เป็นจำนวนมาก และการกำหนดเส้นโค้งในระนาบ XY นิยมกำหนดเส้นโค้งในรูปสมการอิงตัวแปรเสริม

บทนิยาม 5.7.1 ถ้าฟังก์ชัน f และ ในโดเมน S แล้วสมการ $x = f(t),\, y = g(t)$ สำหรับ t ใน S เป็นสมการอิงตัวแปรเสริม (Parametric Equations) ของเส้นโค้งซึ่งรวมจุด $(f(t),\, g(t))$ ทั้งหมดสำหรับ t ใน S ตัวแปร t เรียกว่า ตัวแปรเสริม

(Larson, Ron & Edwards H. Bruce, 2011 : 711)

6.4.1 สมการเส้นตรง

สมการอยู่ในรูป $x = f(t),\, y = g(t)$ เมื่อ t เป็นตัวแปรเสริม

(ศรีบุตร แววเจริญ และ ชนศักดิ์ บ่ายเที่ยง, 2544 : 265)

ตัวอย่าง 6.4.1.1 จงวาดกราฟของสมการ $x = t + 2,\, y = 3t - 1$

วิธีทำ จัดรูปสมการโดยการกำจัดตัวแปร t ให้อยู่ในเทอม x และ y

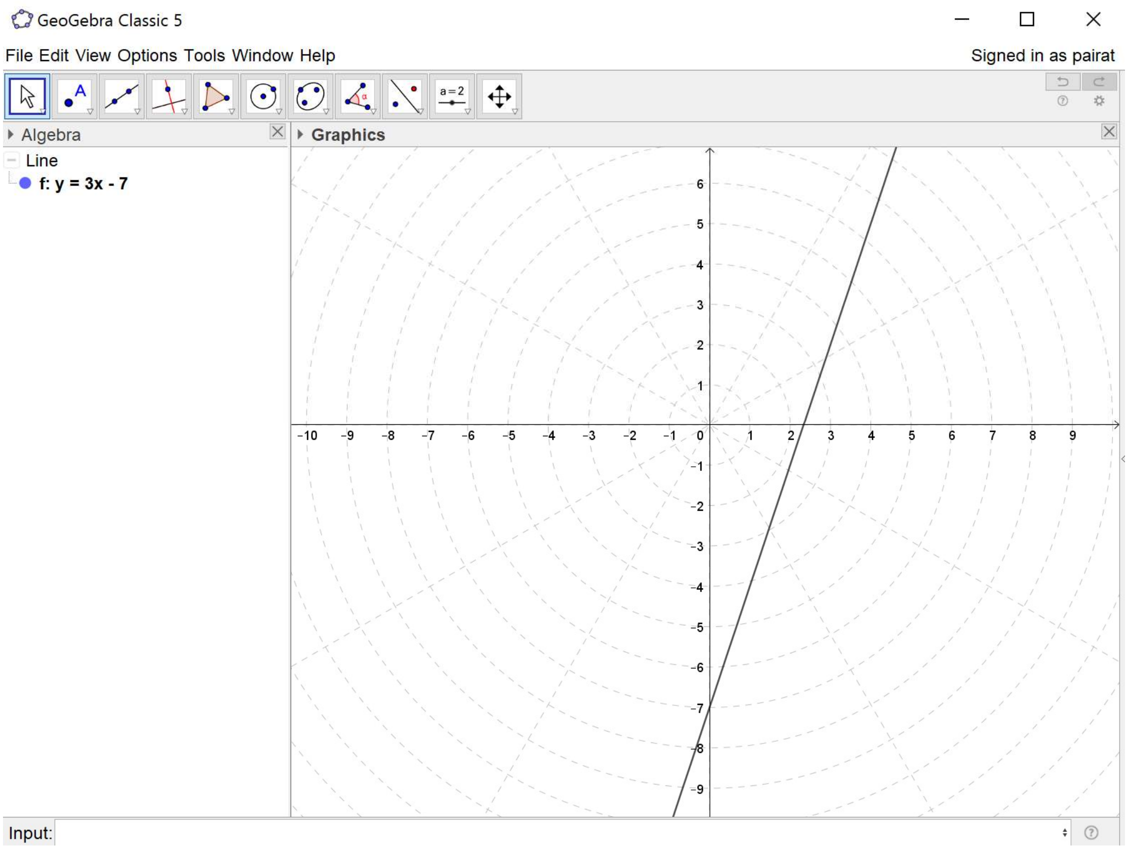
$$x = t + 2$$
$$t = x - 2$$

แทนค่า t ในสมการ $y = 3t - 1$ จะได้

$$\begin{aligned} y &= 3t - 1 \\ &= 3(x-2) - 1 \\ &= 3x - 6 - 1 \\ &= 3x - 7 \end{aligned}$$

ดังนั้น จะได้สมการเส้นตรง $y = 3x - 7$

ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 6.4.1.1 ดังรูปที่ 6.46



รูปที่ 6.46 กราฟ $y = 3x - 7$

6.4.2 สมการวงกลม

Fuller, Gordon & Tarwater, Dolton (1992 : 252) ได้กล่าวถึงสมการวงกลมในรูปสมการอิงตัวแปรเสริม ดังต่อไปนี้

6.4.2.1 สมการ $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ เมื่อ θ เป็นตัวแปรเสริม $0 \le \theta \le 2\pi$ มีกราฟเป็นวงกลมจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด รัศมี r หน่วย

เพราะว่า $x^2 = r^2\cos^2\theta$ และ $y^2 = r^2\sin^2\theta$ นั่นคือ

$$
\begin{aligned}
x^2 + y^2 &= r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta \\
&= r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) \\
&= r^2
\end{aligned}
$$

ดังนั้น สมการ $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ มีกราฟเป็น $x^2 + y^2 = r^2$

6.4.2.2 สมการ $x = h + r\cos\theta,\ y = k + r\sin\theta$ เมื่อ θ เป็นตัวแปรเสริม $0 \le \theta \le 2\pi$ มีกราฟเป็นวงกลมจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(h,\ k)$ รัศมี r หน่วย

เพราะว่า $(x-h)^2 = r^2\cos^2\theta$ และ $(y-k)^2 = r^2\sin^2\theta$ นั่นคือ

$$\begin{aligned}(x-h)^2 + (y-k)^2 &= r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta \\ &= r^2\end{aligned}$$

ดังนั้น สมการ $x = h + r\cos\theta,\ y = k + r\sin\theta$ มีกราฟเป็น $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

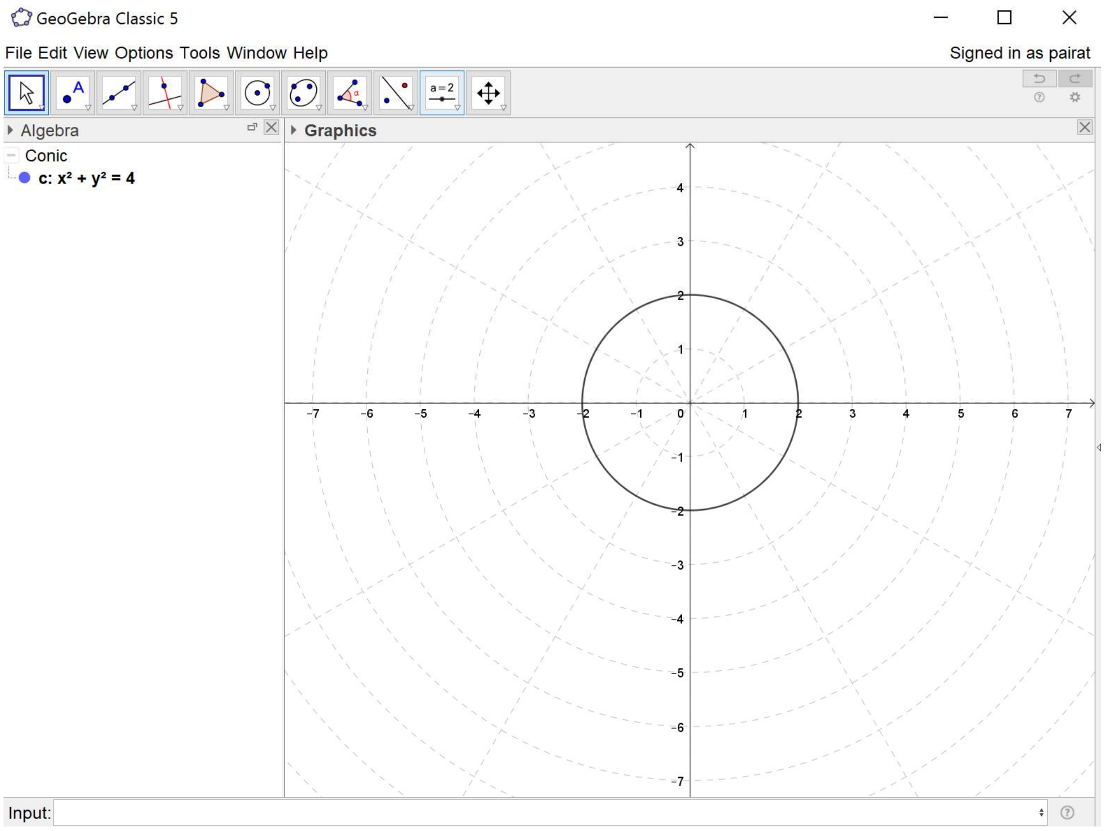
ตัวอย่าง 6.4.2.1 จงวาดกราฟของสมการ $x = 2\cos\theta,\ y = 2\sin\theta$

วิธีทำ จาก $x^2 = 4\cos^2\theta$ และ $y^2 = 4\sin^2\theta$ จะได้ว่า

$$x^2 + y^2 = 4\cos^2\theta + 4\sin^2\theta = 4$$

ดังนั้น สมการ $x = 2\cos\theta,\ y = 2\sin\theta$ มีกราฟเป็นวงกลมจุดศูนย์อยู่ที่จุด $(0,\ 0)$ รัศมี 2 หน่วย

ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 6.4.2.1 ดังรูปที่ 6.47



รูปที่ 6.47 กราฟ $x = 2\cos\theta,\ y = 2\sin\theta$

ตัวอย่าง 6.4.2.2 จงวาดกราฟของสมการ $x=1+3\cos\theta,\ y=2+3\sin\theta$

วิธีทำ จาก $x=1+3\cos\theta$ จัดรูปใหม่

$$x-1=3\cos\theta$$
$$(x-1)^2=(3\cos\theta)^2$$
$$(x-1)^2=9\cos^2\theta$$

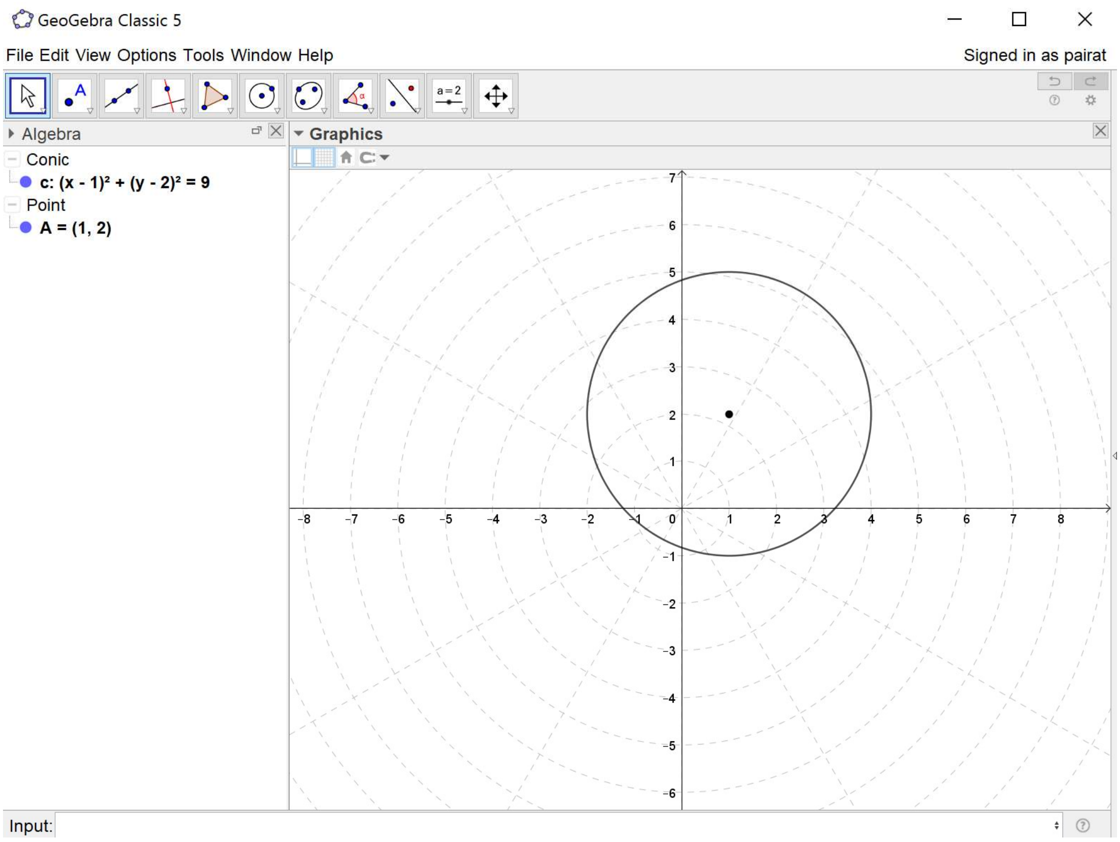
และจาก $y=2+3\sin\theta$

$$y-2=3\sin\theta$$
$$(y-2)^2=(3\sin\theta)^2$$
$$(y-2)^2=9\sin^2\theta$$

$$\therefore\quad (x-1)^2+(y-2)^2=9\cos^2\theta+9\sin^2\theta=9$$

ดังนั้น $x=1+3\cos\theta,\ y=2+3\sin\theta$ มีกราฟเป็นวงกลมจุดศูนย์อยู่ที่จุด $(1,\ 2)$ รัศมี 3 หน่วย

ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 6.4.2.2 ดังรูปที่ 6.48



รูปที่ 6.48 กราฟ $x=1+3\cos\theta,\ y=2+3\sin\theta$

6.4.3 สมการพาราโบลา

ศรีบุตร แววเจริญ และ ชนศักดิ์ บ่ายเที่ยง, (2544 : 266) ได้กล่าวถึงสมการพาราโบลาในรูปสมการอิงตัวแปรเสริม ดังต่อไปนี้

6.4.3.1 สมการ $x = a\cos\theta, y = b\sin^2\theta$ เมื่อ θ เป็นตัวแปรเสริม $0 \le \theta \le \pi$ มีกราฟเป็นพาราโบลาคว่ำ จุดยอดอยู่ที่ $\left(0, -\dfrac{b}{a}\right)$

เพราะว่า $\dfrac{x^2}{a^2} = \cos^2\theta$ และ $\dfrac{y}{b} = \sin^2\theta$ นั่นคือ

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y}{b} = \cos^2\theta + \sin^2\theta$$
$$= 1$$
$$x^2 = -\frac{a}{b}\left(y + \frac{1}{a}\right)$$

ดังนั้น สมการ $x = a\cos\theta, y = a^2\sin^2\theta$ มีกราฟเป็น $x^2 = -\dfrac{a}{b}\left(y + \dfrac{1}{a}\right)$

6.4.3.2 สมการ $x = a + t, y = b + t^2$ เมื่อ t เป็นตัวแปรเสริม $-\infty < t < \infty$ มีกราฟเป็นพาราโบลาหงาย จุดยอดอยู่ที่ (a, b)

จาก $x = a + t$ จะได้ $t = x - a$

แทนค่า $t = x - a$ ใน $y = b - t^2$ จะได้

$$y = b + (x-a)^2$$
$$(x-a)^2 = y - b$$

ดังนั้น สมการ $x = a + t, y = b + t^2$ มีกราฟเป็น $(x-a)^2 = y - b$

6.4.3.3 สมการ $x = a + t^2, y = b + t$ เมื่อ t เป็นตัวแปรเสริม $-\infty < t < \infty$ มีกราฟเป็นพาราโบลาตะแคงซ้าย จุดยอดอยู่ที่ (a, b)

จาก $t = b + t$ จะได้ $t = y - b$

แทนค่า $t = y - b$ ใน $x = a + t^2$ จะได้

$$x = a + (y-b)^2$$
$$(y-b)^2 = -(x-a)$$

ดังนั้น สมการ $x = a + t, y = b + t^2$ มีกราฟเป็น $(y-b)^2 = -(x-a)$

ตัวอย่าง 6.4.3.1 จงวาดกราฟของสมการอยู่ในรูป $x=\cos^2\theta,\ y=2\sin\theta$

วิธีทำ จาก $y=2\sin\theta$ จัดรูปใหม่

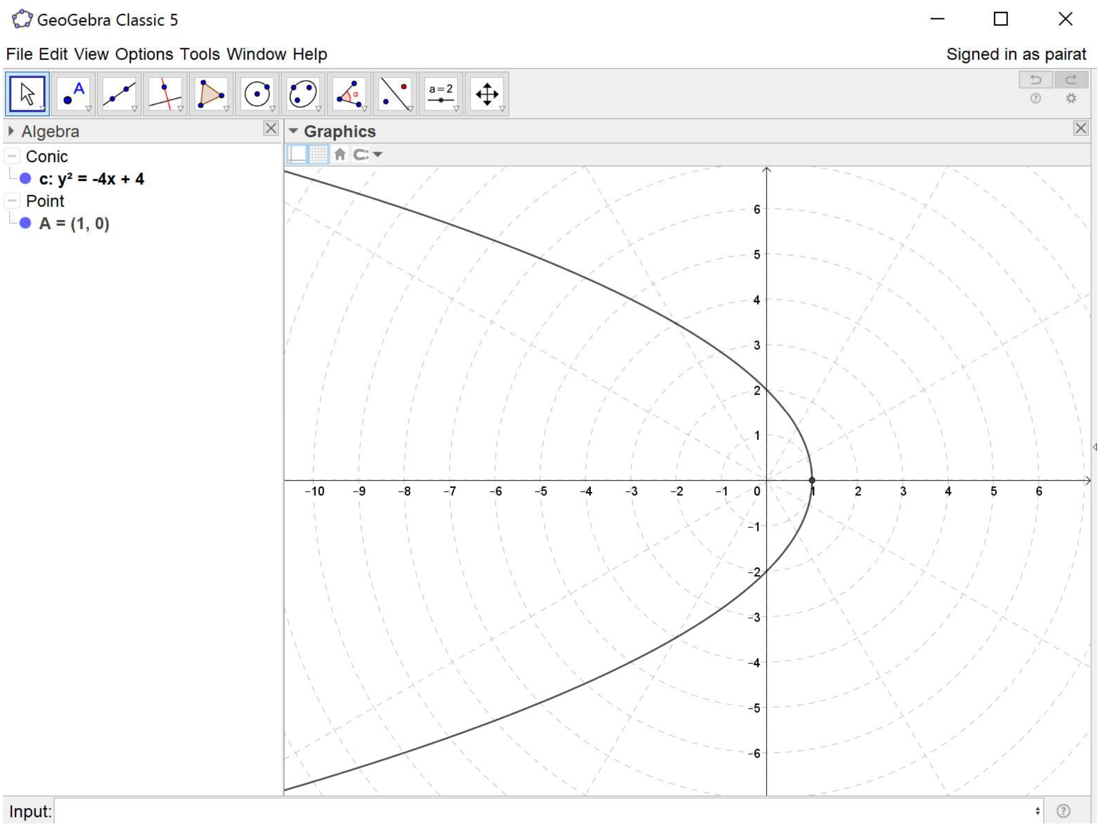
$$\frac{y}{2}=\sin\theta$$
$$\frac{y^2}{4}=\sin^2\theta$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} x+\frac{y^2}{4} &= \cos^2+\sin^2\theta \\ &= 1 \\ y^2 &= -4(x-1) \end{aligned}$$

ดังนั้น $x=\cos^2\theta,\ y=2\sin\theta$ มีกราฟเป็น $y^2=-4(x-1)$

ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 6.4.3.1 ดังรูปที่ 6.49



รูปที่ 6.49 กราฟ $x=\cos^2\theta,\ y=2\sin\theta$

ตัวอย่าง 6.4.3.2 จงวาดกราฟของสมการอยู่ในรูป $x = t + 2,\ y = 3 - t^2$

วิธีทำ จาก $y = 2\sin\theta$ จัดรูปใหม่

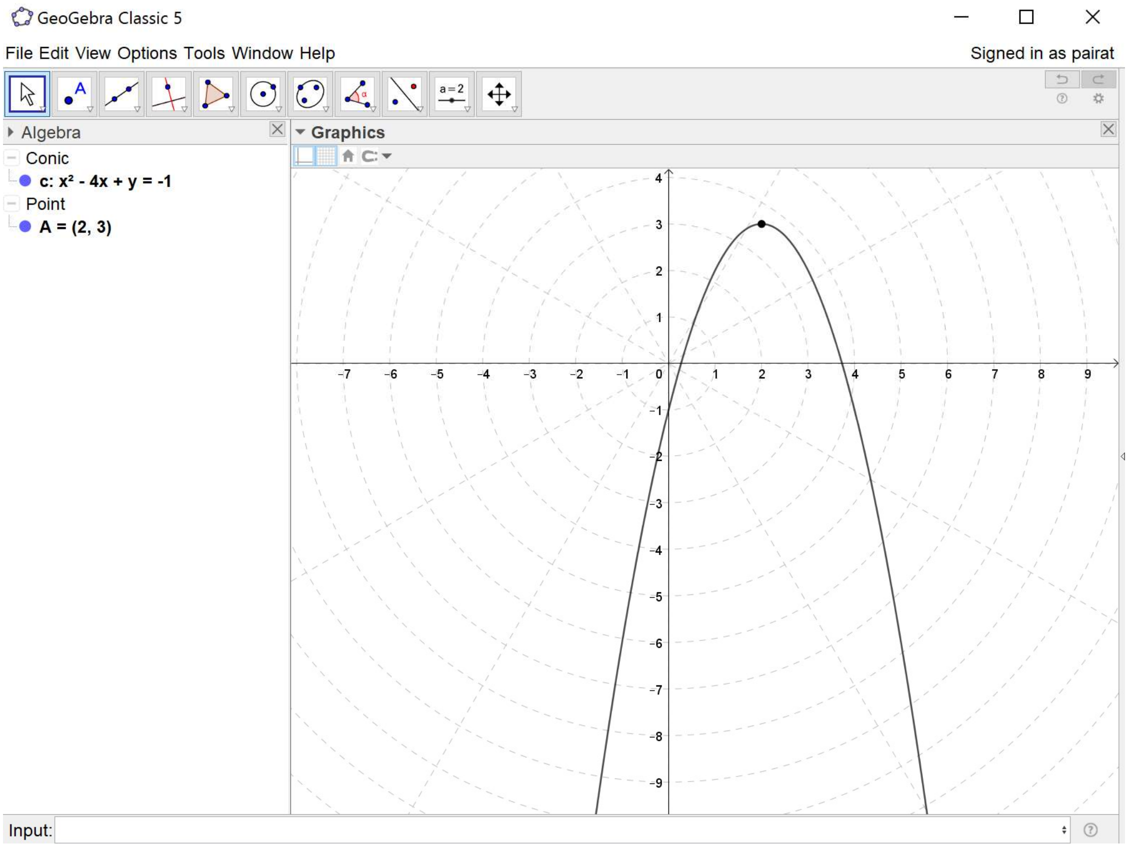
จาก $x = t + 2$ จะได้ $t = x - 2$

แทนค่า $t = x - 2$ ใน $y = 3 - t^2$ จะได้ว่า

$$y = 3 - t^2$$
$$y = 3 - (x-2)^2$$
$$(x-2)^2 = -y + 3$$
$$(x-2)^2 = -(y-3)$$

ดังนั้น $x = t + 2,\ y = 3 - t^2$ มีกราฟเป็น $(x-2)^2 = -(y-3)$

ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 6.4.3.2 ดังรูปที่ 6.50



รูปที่ 6.50 กราฟ $x = t + 2,\ y = 3 - t^2$

6.4.4 สมการวงรี

ศรีบุตร แววเจริญ และชนศักดิ์ บ่ายเที่ยง (2544 : 266) ได้กล่าวถึงสมการวงรีในรูปสมการอิงตัวแปรเสริม ดังต่อไปนี้

6.4.4.1 สมการ $x = a\cos\theta,\, y = b\sin\theta$ เมื่อ θ เป็นตัวแปรเสริม $0 \le \theta \le 2\pi$ มีกราฟเป็นวงรีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด

จาก $x = a\cos\theta$ จัดรูปใหม่

$$\frac{x^2}{a^2} = \cos^2\theta$$

และจาก $y = b\sin\theta$ จัดรูปใหม่

$$\frac{y^2}{b^2} = \sin^2\theta$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= \cos^2\theta + \sin^2\theta \\ &= 1\end{aligned}$$

ดังนั้น สมการ $x = a\cos\theta,\, y = b\sin\theta$ มีกราฟเป็น $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

6.4.4.2 สมการ $x = h + a\cos\theta,\, y = k + b\sin\theta$ เมื่อ θ เป็นตัวแปรเสริม $0 \le \theta \le 2\pi$ มีกราฟเป็นวงรีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(h,\, k)$

จาก $x = h + a\cos\theta$ จัดรูปใหม่

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} = \cos^2\theta$$

และจาก $y = k + b\sin\theta$ จัดรูปใหม่

$$\frac{(y-k)^2}{b^2} = \sin^2\theta$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} &= \cos^2\theta + \sin^2\theta \\ &= 1\end{aligned}$$

ดังนั้น สมการ $x = h + a\cos\theta,\, y = k + b\sin\theta$ มีกราฟเป็น $\dfrac{(x-h)^2}{a^2} + \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

ตัวอย่าง 6.4.4.1 จงวาดกราฟของสมการ $x = \cos\theta,\ y = 2\sin\theta$

วิธีทำ จาก $x = \cos\theta$ จัดรูปใหม่ได้เป็น $x^2 = \cos^2\theta$

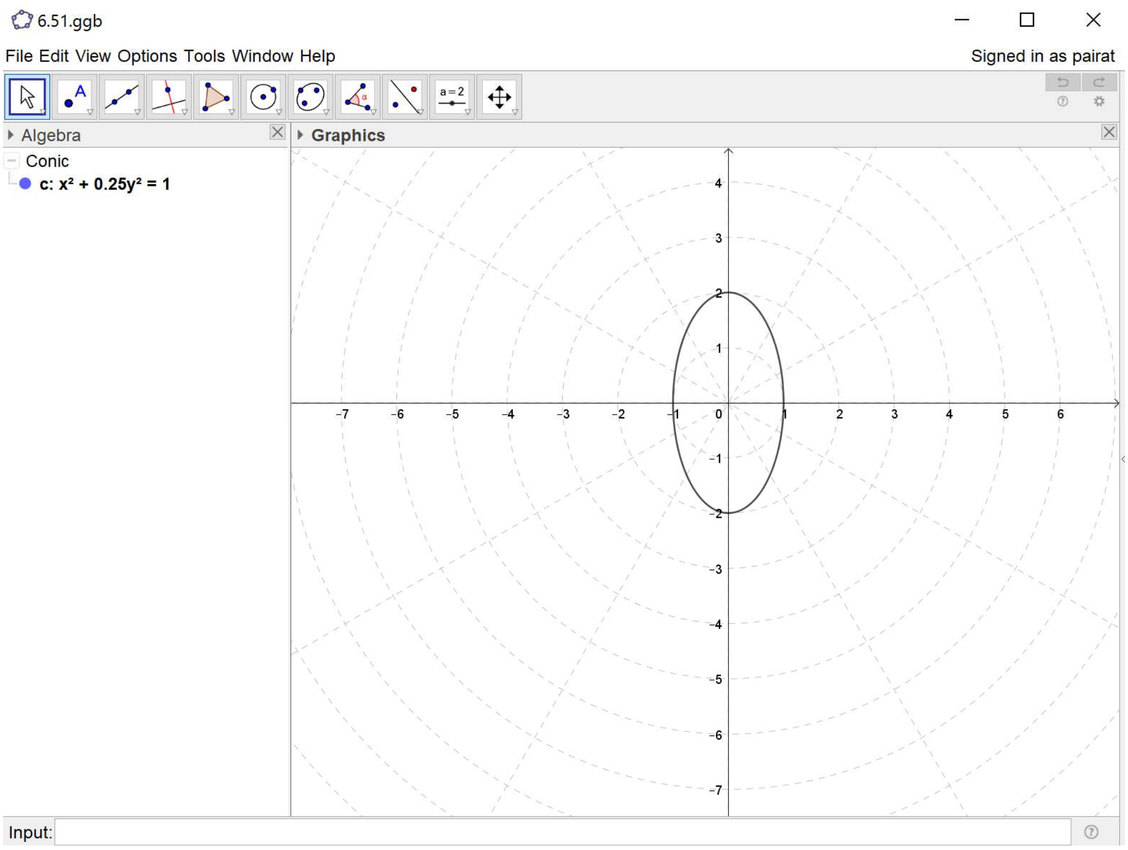
และจาก $y = 2\sin\theta$ จัดรูปใหม่ได้เป็น $\dfrac{y^2}{4} = \sin^2\theta$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{y^2}{4} &= \cos^2\theta + \sin^2\theta \\ &= 1 \end{aligned}$$

ดังนั้น สมการ $x = \cos\theta,\ y = 2\sin\theta$ มีกราฟเป็น $\dfrac{x^2}{1} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 6.4.4.1 ดังรูปที่ 6.51



รูปที่ 6.51 กราฟ $x = \cos\theta,\ y = 2\sin\theta$

ตัวอย่าง 6.4.4.2 จงวาดกราฟของสมการ $x = 3\cos t - 3,\ y = 1 + \sin t$

วิธีทำ จาก $x = 3\cos t - 3$ จัดรูปใหม่

$$x + 3 = 3\cos t$$

$$\frac{(x+3)^2}{9} = \cos^2 t$$

และจาก $y = 1 + \sin t$ จัดรูปใหม่

$$y - 1 = \sin t$$

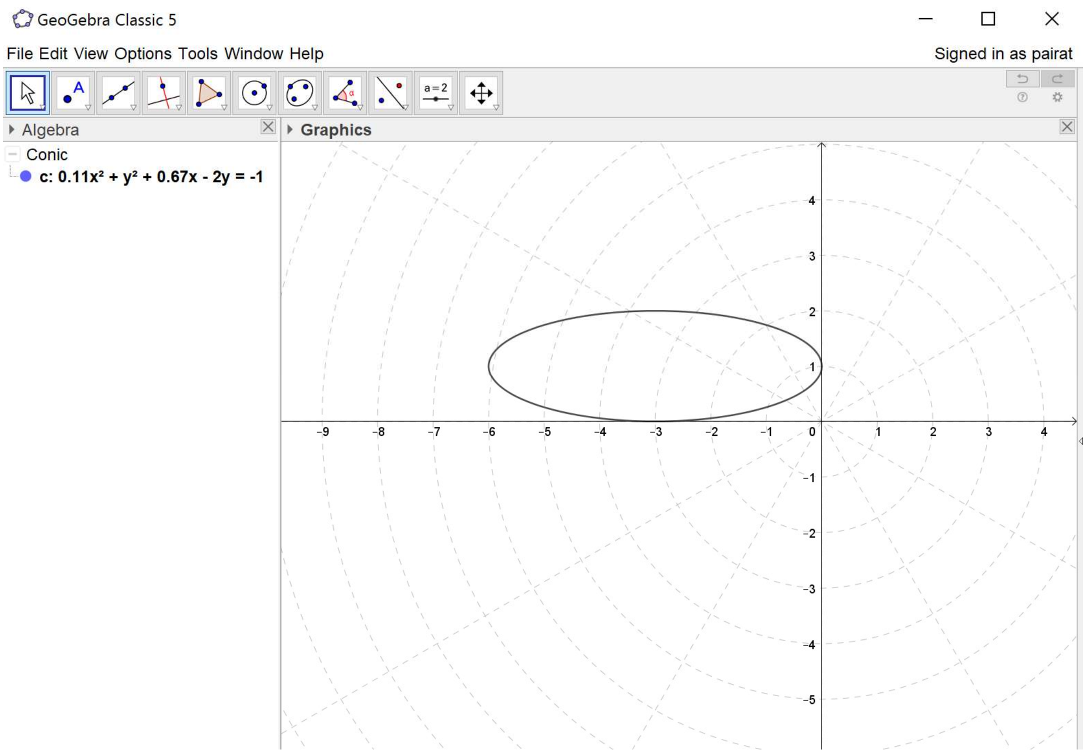
$$(y-1)^2 = \sin^2 t$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \frac{(x+3)^2}{9} + (y-1)^2 &= \cos^2 t + \sin^2 t \\ &= 1 \end{aligned}$$

ดังนั้น สมการ $x = 3\cos t - 3,\ y = 1 + \sin t$ มีกราฟเป็น $\dfrac{(x+3)^2}{9} + \dfrac{(y-1)^2}{1} = 1$

ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 6.4.4.2 ดังรูปที่ 6.52



รูปที่ 6.52 กราฟ $x = 3\cos t - 3,\ y = 1 + \sin t$

6.4.5 สมการไฮเพอร์โบลา

ศรีบุตร แววเจริญ และชนศักดิ์ บ่ายเที่ยง (2544 : 267) ได้กล่าวถึงสมการไฮเพอร์โบลาในรูปสมการอิงตัวแปรเสริม ดังต่อไปนี้

6.4.5.1 สมการ $x = a\sec\theta,\ y = b\tan\theta$ เมื่อ θ เป็นตัวแปรเสริม $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ มีกราฟเป็นไฮเพอร์โบลาจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด แกนขวางคือแกน X

จาก $x = a\sec\theta$ จัดรูปใหม่

$$\frac{x^2}{a^2} = \sec^2\theta$$

และจาก $y = b\tan\theta$ จัดรูปใหม่

$$\frac{y^2}{b^2} = \tan^2\theta$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} &= \sec^2\theta - \sec^2\theta \\ &= 1\end{aligned}$$

ดังนั้น สมการ $x = a\sec\theta,\ y = b\tan\theta$ มีกราฟเป็น $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

6.4.5.1 สมการ $x = h + a\tan\theta,\ y = k + b\sec\theta$ เมื่อ θ เป็นตัวแปรเสริม $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ มีกราฟเป็นไฮเพอร์โบลาจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (h,k) แกนขวางคือแกน X

จาก $x = h + a\sec\theta$ จัดรูปใหม่

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} = \sec^2\theta$$

และจาก $y = k + b\tan\theta$ จัดรูปใหม่

$$\frac{(y-k)^2}{b^2} = \tan^2\theta$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} &= \sec^2\theta - \tan^2\theta \\ &= 1\end{aligned}$$

ดังนั้น สมการ $x = h + a\cos\theta,\ y = k + b\sin\theta$ มีกราฟเป็น $\dfrac{(x-h)^2}{a^2} - \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

ตัวอย่าง 6.4.5.1 จงวาดกราฟของสมการ $x = 2\tan\theta,\ y = 3\sec\theta$

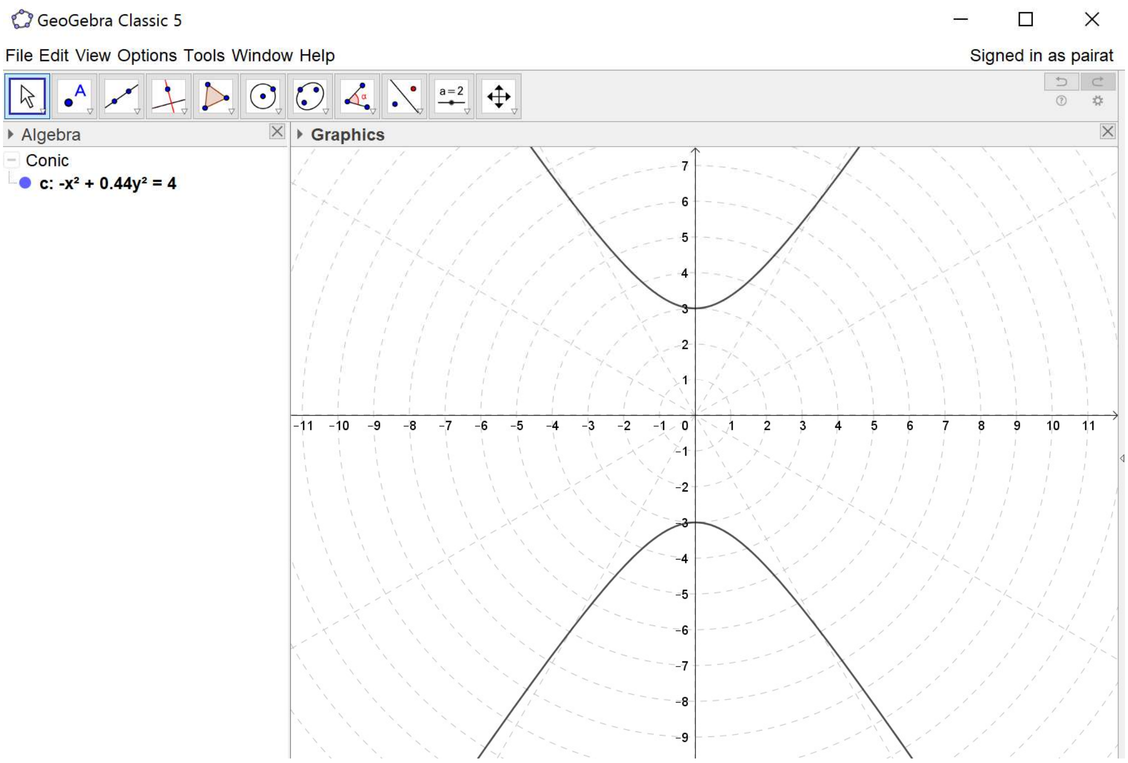
วิธีทำ จาก $x = 2\tan\theta$ จัดรูปใหม่ $\dfrac{x^2}{4} = \tan^2\theta$

และจาก $y = 3\sec\theta$ จัดรูปใหม่ $\dfrac{y^2}{9} = \sec^2\theta$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{4} &= \sec^2\theta - \tan^2\theta \\ &= 1\end{aligned}$$

ดังนั้น สมการ $x = 2\tan\theta,\ y = 3\sec\theta$ มีกราฟเป็น $\dfrac{y^2}{9} - \dfrac{x^2}{4} = 1$

ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 6.4.5.1 ดังรูปที่ 6.53



รูปที่ 6.53 กราฟ $x = 3\cos t - 3,\ y = 1 + \sin t$

ตัวอย่าง 6.4.5.2 จงวาดกราฟของสมการ $x = 3\sec t + 2,\ y = \tan t + 2$

วิธีทำ จาก $x = 3\sec t + 2$ จัดรูปใหม่

$$\frac{(x-2)^2}{9} = \sec^2\theta$$

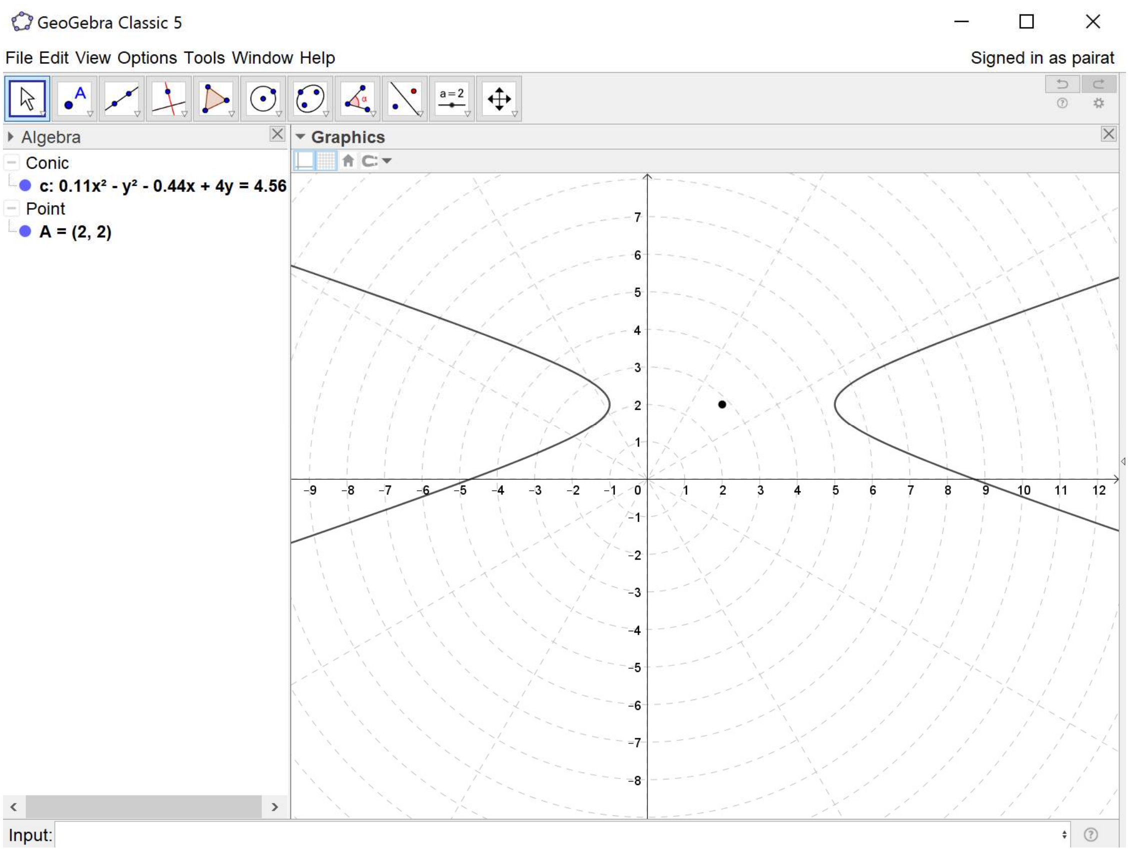
และจาก $y = \tan t + 2$ จัดรูปใหม่

$$\frac{(y-2)^2}{1} = \tan^2\theta$$ จะได้ว่า

$$\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y-2)^2}{1} = \sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$$

ดังนั้น สมการ $x = 3\sec t + 2,\ y = \tan t + 2$ มีกราฟเป็น $\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y-2)^2}{1} = 1$

ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 6.4.5.2 ดังรูปที่ 6.54



รูปที่ 6.54 กราฟ $x = 3\sec t + 2,\ y = \tan t + 2$

สรุปท้ายบทที่ 5

สำหรับบทที่ 5 นั้นเราได้ศึกษาสมการเชิงขั้วและสมการอิงตัวแปรเสริม ซึ่งกราฟของสมการในพิกัดเชิงขั้ว ประกอบไปด้วย

1. สมการเส้นตรงสามารถเขียนได้ดังนี้
   - สมการเส้นตรงที่ตั้งฉากกับแกนเชิงขั้ว คือ $r\cos\theta = \pm a$
   - สมการเส้นตรงที่ขนานกับแกนเชิงขั้ว คือ $r\sin\theta = \pm a$
   - สมการเส้นตรงที่ผ่านจุดขั้ว คือ $\theta = \pm a$
2. สมการวงกลมสามารถเขียนได้ดังนี้
   - สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ขั้วอยู่ในรูป $r = a$
   - สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$ อยู่ในรูป $r = a\cos\theta$
   - สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $\left(0, \frac{a}{2}\right)$ อยู่ในรูป $r = a\sin\theta$
   - สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$ อยู่ในรูป $r = a\cos\theta + b\sin\theta$
3. สมการเส้นโค้งรูปเชิงขั้วชนิดพิเศษสามารถเขียนได้ดังนี้
   - เส้นโค้งลีมาซอง สมการอยู่ในรูป $r = a \pm b\cos\theta$ หรือ $r = a \pm b\sin\theta$
   - เส้นโค้งกลีบกุหลาบ สมการอยู่ในรูป $r = a\cos n\theta$ หรือ $r = a\sin n\theta$
   - เส้นเวียนก้นหอย สมการอยู่ในรูป $r = a\theta$
   - เส้นโค้งคอนคอยด์ สมการอยู่ในรูป $r = a\csc\theta \pm b$
   - เส้นโค้งผีเสื้อ สมการอยู่ในรูป $r = 1 + \sin(n\theta) + \cos^2(2n\theta)$
   - เส้นโค้งแคปปา สมการอยู่ในรูป $r = a\tan\theta$

การหาจุดตัดของเส้นโค้งสองเส้นโค้งในระบบพิกัดเชิงขั้ว นอกจากจะแก้สมการเส้นโค้งทั้งสองแล้ว ควรหาจุดตัดอื่น ๆ เพิ่มอีกโดย

1. ดูจากกราฟของเส้นโค้ง

2. เส้นโค้งที่อยู่ในรูปของสมการ $r = f(\theta)$ อาจเขียนแทนด้วย $(-1)^n r = f(\theta + n\pi)$ โดยที่ n เป็นจำนวนเต็ม

3. ตรวจสอบว่าเส้นโค้งทั้งสองผ่านจุดขั้วหรือจุดกำเนิดหรือไม่ โดยให้ $r = 0$ ถ้าหา θ ได้จากสมการเส้นโค้งทั้งสองแสดงว่าจุดขั้วหรือจุดกำเนิดเป็นจุดตัดด้วย

เราจะหาความสัมพันธ์ของตัวแปร x และ y ในเทอมของตัวแปรที่สามซึ่งเรียกว่า **ตัวแปรเสริม** ปัจจุบันเทคโนโลยีด้านคอมพิวเตอร์ได้พัฒนาโปรแกรมช่วยวาดกราฟทั้งในสองมิติ และสามมิติ เป็นจำนวนมาก และการกำหนดเส้นโค้งในระนาบ XY นิยมกำหนดเส้นโค้งในรูปสมการอิงตัวแปรเสริม

ถ้าฟังก์ชัน f และ ในโดเมน S แล้วสมการ $x = f(t),\ y = g(t)$ สำหรับ t ใน S เป็นสมการอิงตัวแปรเสริม (Parametric Equations) ของเส้นโค้งซึ่งรวมจุด $(f(t),\ g(t))$ ทั้งหมดสำหรับ t ใน S ตัวแปร t เรียกว่า ตัวแปรเสริม โดยเส้นสมการเส้นโค้งที่พิจารณามีดังนี้

1. สมการเส้นตรงอยู่ในรูป $x = f(t),\ y = g(t)$
2. สมการวงกลมประกอบไปด้วย
   - สมการวงกลมจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิดอยู่ในรูป $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$
   - วงกลมจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(h,\ k)$ อยู่ในรูป $x = h + r\cos\theta,\ y = k + r\sin\theta$
3. สมการพาราโบลาประกอบไปด้วย
   - สมการพาราโบลาคว่ำ จุดยอดอยู่ที่ $\left(0, -\dfrac{b}{a}\right)$ อยู่ในรูป $x = a\cos t,\ y = b\sin^2 t$
   - สมการพาราโบลาหงาย จุดยอดอยู่ที่ $(a,\ b)$ อยู่ในรูป $x = a + t,\ y = b + t^2$
   - สมการพาราโบลาตะแคงซ้าย จุดยอดอยู่ที่ $(a,\ b)$ อยู่ในรูป $x = a + t^2,\ y = b + t$
   - สมการพาราโบลาตะแคงขวา จุดยอดอยู่ที่ $(a,\ b)$ อยู่ในรูป $x = a + t,\ y = b + t^2$
4. สมการวงรีประกอบไปด้วย
   - สมการวงรีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิดอยู่ในรูป $x = a\cos\theta,\ y = b\sin\theta$
   - สมการวงกลมจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(h,\ k)$ อยู่ในรูป

     $$x = h + a\cos\theta,\ y = k + b\sin\theta$$
5. สมการไฮเพอร์โบลาประกอบไปด้วย
   - สมการไฮเพอร์โบลาจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิดอยู่ในรูป $x = a\sec\theta,\ y = b\tan\theta$
   - สมการไฮเพอร์โบลาจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(h,\ k)$ อยู่ในรูป

     $$x = h + a\tan\theta,\ y = k + b\sec\theta$$

แบบฝึกหัดบทที่ 6

จงวาดกราฟเส้นโค้งที่กำหนดให้ต่อไปนี้ (ข้อ 6.1 - 6.6)

6.1 $\theta = \pi$

6.2 $\theta = \dfrac{\pi}{3}$

6.3 $r = 4(1+\sin\theta)$

6.4 $r = 16$

6.5 $r^2 = 9\cos 2\theta$

6.6 $r = 4\cos 2\theta$

จงหาสมการเชิงขั้วของวงกลมที่กำหนดให้ต่อไปนี้ (ข้อ 6.7 - 6.12)

6.7 จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(6, 0^\circ)$ รัศมียาว 4 หน่วย

6.8 จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(-4, \pi)$ รัศมียาว 5 หน่วย

6.9 จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $\left(-3, -\dfrac{\pi}{2}\right)$ รัศมียาว 3 หน่วย

6.10 จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $\left(2, \dfrac{7\pi}{4}\right)$ รัศมียาว 7 หน่วย

6.11 จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $\left(8, 180^\circ\right)$ รัศมียาว 0.5 หน่วย

6.12 จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $\left(-1, \dfrac{11\pi}{6}\right)$ รัศมียาว 6 หน่วย

จงหาสมการเส้นตรงในระบบพิกัดเชิงขั้วที่กำหนดเงื่อนไขต่อไปนี้ (ข้อ 6.13 - 6.18)

6.13 เส้นตรงแนวราบผ่านจุด $\left(-3, \dfrac{3\pi}{4}\right)$

6.14 เส้นตรงแนวตั้งผ่านจุด $\left(3, \pi\right)$

6.15 เส้นตรงที่สัมผัสกับวงกลม $r = 3$ ที่จุด $\left(3, \dfrac{\pi}{3}\right)$

6.16 เส้นตรงแนวตั้งผ่านจุด $\left(4, \dfrac{5\pi}{6}\right)$

6.17 เส้นตรงแนวราบผ่านจุด $\left(3, \dfrac{\pi}{2}\right)$

6.18 เส้นตรงที่สัมผัสกับวงกลม $r = 4$ ที่จุด $\left(5, \dfrac{5\pi}{4}\right)$

จงหาอธิบายชนิดของเส้นโค้งภาคตัดกรวยต่อไปนี้โดยพิจารณาจากค่า k และค่า e (ข้อ 6.19 - 6.24)

6.19 $r = \dfrac{3}{2+\cos\theta}$

6.20 $r = \dfrac{12}{2+3\cos\theta}$

6.21 $r = \dfrac{5}{1-\sin\theta}$

6.22 $r = \dfrac{25}{3-4\sin\theta}$

6.23 $r = \dfrac{7}{1+\cos\theta}$

6.24 $r = \dfrac{12}{3+2\sin\theta}$

จงแสดงสมการต่อไปนี้ในรูปสมการอิงตัวแปรเสริมโดยใช้ความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปร x และ y และตัวแปรเสริม (ข้อ 6.25 - 6.28)

6.25 $x^2 = 25y+5, y = t^2 - 3$

6.26 $2x - xy = 1, y = t - 2$

6.27 $xy = x - y - 1, x = t + 2$

6.28 $9x^2 - y^2 = t, y = t\tan\theta$

จงหาจุดตัดของเส้นโค้งสองเส้นในระบบพิกัดเชิงขั้วที่กำหนดให้ต่อไปนี้ พร้อมวาดกราฟ (ข้อ 6.29 - 6.47)

6.29 $\begin{matrix} r = \cos 2\theta \\ r = 1 \end{matrix}$

6.30 $\begin{matrix} r + 6\sin\theta = 0 \\ r + 6\cos\theta = 0 \end{matrix}$

6.31 $\begin{matrix} r = \sin\theta \\ r = 1 - \cos\theta \end{matrix}$

6.32 $\begin{matrix} r^2 = 4\sin 2\theta \\ r = 2 \end{matrix}$

6.33 $\begin{matrix} r = 1 - \sin\theta \\ r = \cos 2\theta \end{matrix}$

6.34 $\begin{matrix} r = 4\cos\theta \\ r = 4\sin 2\theta \end{matrix}$

6.35 $\begin{matrix} r = \sin\theta \\ r^2 = \sin 2\theta \end{matrix}$

6.36 $\begin{matrix} r = 3\cos\theta \\ r = -4\sin\theta \end{matrix}$

6.37 $\begin{matrix} r = 2\cos\theta \\ r^2 = 4\cos\theta \end{matrix}$

6.38 $\begin{matrix} r = \sin\theta \\ r = 1 + \sin\theta \end{matrix}$

6.39 $r = 1$
$r = 2\sin 2\theta$

6.40 $r = \sqrt{2}\cos 2\theta$
$r = \sqrt{2}\sin 2\theta$

6.41 $r = 2\sin\theta + 1$
$r\sin\theta = 1$

6.42 $r(1-\cos\theta) = 4$
$r = 2\cos\theta$

6.43 $r = \sec\theta$
$r = 2\cos\theta$

6.44 $r = 3(1-\cos\theta)$
$\theta = \dfrac{\theta}{2}$

6.45 $r = 3\sin\theta$
$\theta = \dfrac{\pi}{3}$

6.46 $r = 4$
$\theta = \dfrac{\theta}{4}$

6.47 $r = 3 - 2\cos\theta$
$\theta = 0$

จงวาดกราฟของสมการอิงตัวแปรเสริมที่กำหนดให้ต่อไปนี้ โดยมี t เป็นตัวแปรเสริม (ข้อ 6.48 - 6.64)

6.48 $x = 4\cos t, y = 2\sin t$

6.49 $x = 3t, y = 9t^2$

6.50 $x = t, y = \sqrt{t}$

6.51 $x = \sec^2 t - 1, y = \tan t$

6.52 $x = 3t, y = 9t^2$

6.53 $x = \cos^2 t + 3, y = 4\sin t - 4$

6.54 $x = \csc t, y = \cot t$

6.55 $x = 2t - 5, y = 4t - 7$

6.56 $x = 2\sinh t, y = 2\cosh t$

6.57 $x = e^t, y = e^{t+1}$

6.58 $x = 4 - 3t, y = 1 + t$

6.59 $x = 3 - t, y = t^2 - 2$

6.60 $x = \cos 2t, y = \sin 2t$

6.61 $x = \sin 2\pi t, y = \cos 2\pi t$

6.62 $x = e^t, y = e^{t+1}$

6.63 $x = t^3, y = 2\ln t$

6.64 $x = 4\tan 2t, y = 3\sec 2t$

จงหาสมการเทียบเท่าของสมการในแต่ละข้อต่อไปนี้ พร้อมทั้งหาจุดตัดของสมการที่กำหนดให้และเขียนกราฟแสดงจุดตัดด้วย (ข้อ 6.64 - 6.67)

6.64 $r = 2 - 2\sin\theta$
$r = 2\sin\theta$

6.65 $r = 4$
$r = 2\sec\theta$

6.66 $r = 5$
$r = 10\cos\theta$

6.67 $r = 7$
$r = 14\cos 2\theta$

6.68 $r = 3\sin\theta$
$r = 3\cos\theta$

6.69 $r = \sin\theta + \cos\theta$
$r = 2\sin\theta$

6.70 $r = 1 + \cos\theta$
$r = \sin\theta$