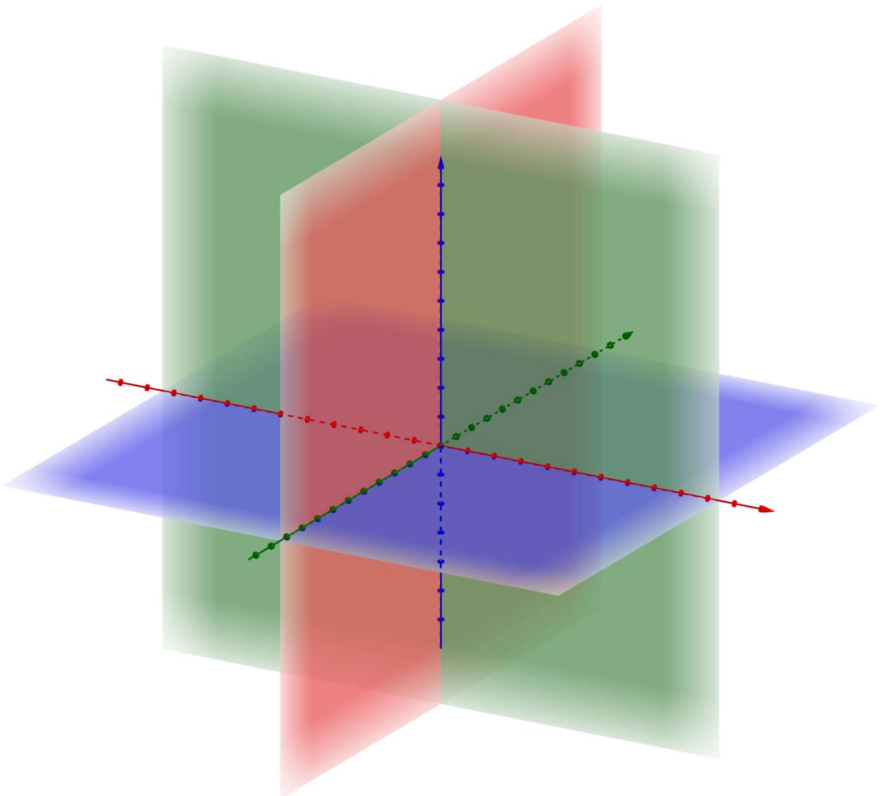
บทที่ 7
เรขาคณิตวิเคราะห์ในปริภูมิ 3 มิติ
Analytic Geometry in Three-Dimensional Space

ในการศึกษาเรขาคณิตวิเคราะห์ในปริภูมิ 3 มิติ เป็นการขยายแนวคิดที่ได้จากการศึกษาเรขาคณิตวิเคราะห์ในระนาบ 2 มิติ ระบบพิกัดฉาก 3 มิติ ประกอบไปด้วยระนาบ 3 แผ่น ตั้งฉากซึ่งกันและกัน เรียกว่า ระนาบพิกัด (Coordinate Planes) ได้แก่ ระนาบ XY ระนาบ XZ และระนาบ YZ ระนาบทั้งสามตัดกันในแนวตั้งฉาก รอยตัดเกิดเป็นเส้นตรง 3 เส้น ตั้งฉากซึ่งกันและกัน เรียกว่าแกนพิกัด (Coordinate Axes) คือ แกน X แกน Y และแกน Z แกนทั้งสามตัดกันที่จุด O เรียกว่าจุดกำเนิด (Origin) ระนาบพิกัดแบ่งปริภูมิ 3 มิติ ออกเป็น 8 อัฐภาค (Octant) ดังรูป



รูปที่ 7.1 ระบบพิกัดฉาก 3 มิติ

7.1 จุดในปริภูมิ 3 มิติ (The Point in Three-Dimensional Space)

แกนพิกัดทั้งสามตัดกันทำให้เกิดระนาบพิกัด (Coordinate Planes) ดังนี้

ระนาบ XY (แนวนอน) เมื่อ $z = 0$

ระนาบ YZ (แนวตั้ง) เมื่อ $x = 0$ และ

ระนาบ XZ (แนวตั้ง) เมื่อ $y = 0$

จุด $P(x, y, z)$ ในปริภูมิ 3 มิติ เรียกว่า พิกัดฉาก (Rectangular Coordinates) ถ้า

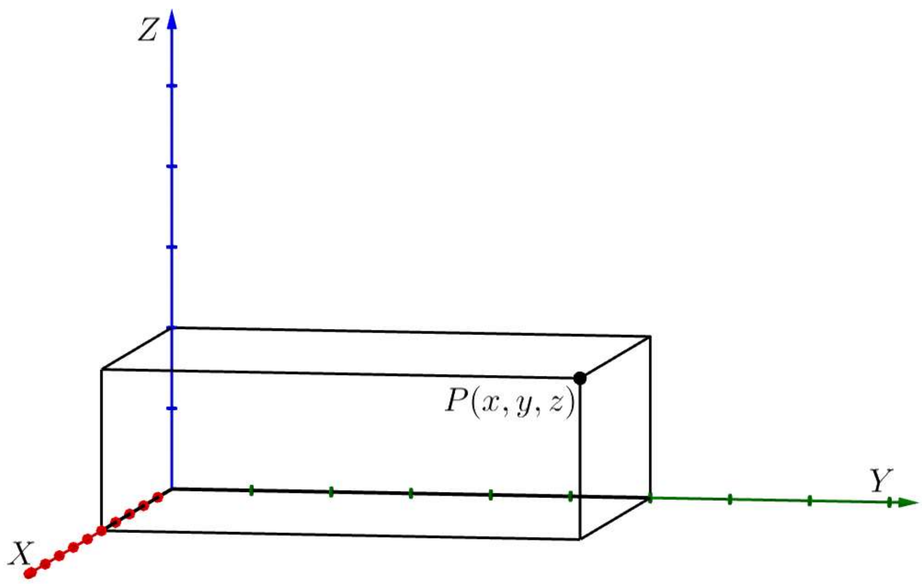
x เป็นระยะห่างที่มีเครื่องหมายจากระนาบ YZ

y เป็นระยะห่างที่มีเครื่องหมายจากระนาบ XZ และ

z เป็นระยะห่างที่มีเครื่องหมายจากระนาบ XY

ในกรณีนี้เราจะพิจารณาตำแหน่งของจุด P ซึ่งเราเรียกว่าจุด $P(x, y, z)$ ซึ่งมีการจับคู่หนึ่งต่อหนึ่งระหว่างสามลำดับ (x, y, z) ของจำนวนจริง กับจุด P เราเรียกระบบนี้ว่า ระบบพิกัดฉาก (Rectangular Coordinate System) ใน 3 มิติ มีตำแหน่งอยู่ในอัฐภาคที่ 1 (First Octant) ซึ่งเป็นหนึ่งในแปดของปริภูมิ 3 มิติ แกนพิกัดทั้งสามมีค่าเป็นบวก

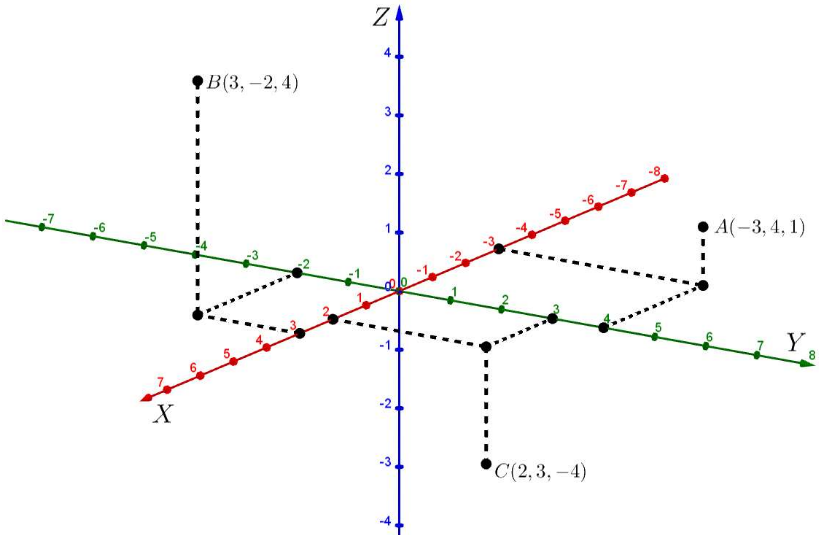
(Larson, Ron & Edwards H. Bruce, 2011 :775)



รูปที่ 7.2 จุด $P(x, y, z)$ ในปริภูมิ 3 มิติ มีค่าเป็นบวก

ตัวอย่างที่ 7.1.1 จงแสดงขั้นตอนการลงจุดซึ่งมีพิกัดเป็น $A(-3,4,1), B(3,-2,4)$ และ $C(2,3,-4)$

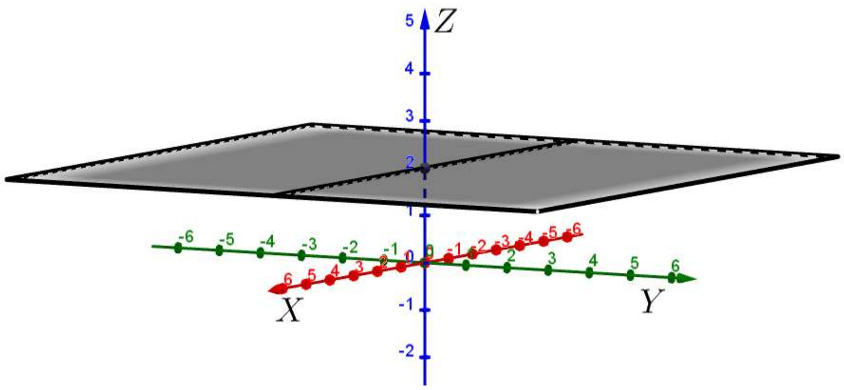
วิธีทำ พิจารณาพิกัด x, y ก่อนลงจุดเหมือนกับในพิกัดฉาก 2 มิติ จากนั้นพิจารณาพิกัด z โดยให้ตั้งฉากกับแกน X และ แกน Y เหนือขึ้นไปถ้าเป็นบวก ลงข้างล่างเมื่อเป็นลบ



รูปที่ 7.3 พิกัดจุด $A(-3,4,1), B(3,-2,4)$ และจุด $C(2,3,-4)$

ตัวอย่างที่ 7.1.2 จงแสดงขั้นตอนเขียนระนาบของ $z = 2$

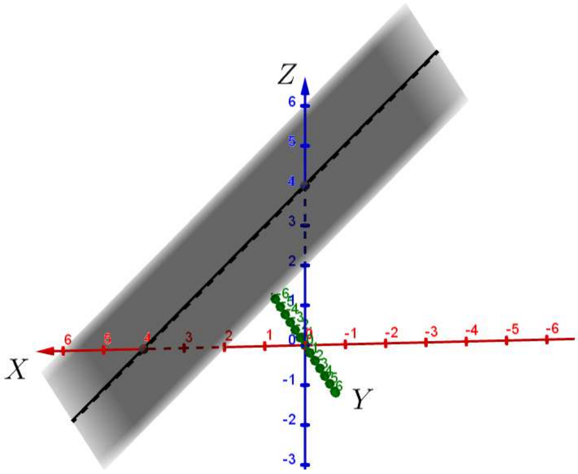
วิธีทำ เนื่องจากสมการ $z = 2$ ตัวแปร x กับ y หายไปสองตัวดังนั้นระนาบนี้ขนานกับระนาบ XY และจุดทุกจุดบนระนาบ $z = 2$ จะอยู่ห่างจากระนาบ XY เท่ากับ 2 หน่วยเสมอ



รูปที่ 7.4 ระนาบ $z = 2$

ตัวอย่างที่ 7.1.3 จงแสดงขั้นตอนเขียนระนาบของ $x + z = 4$

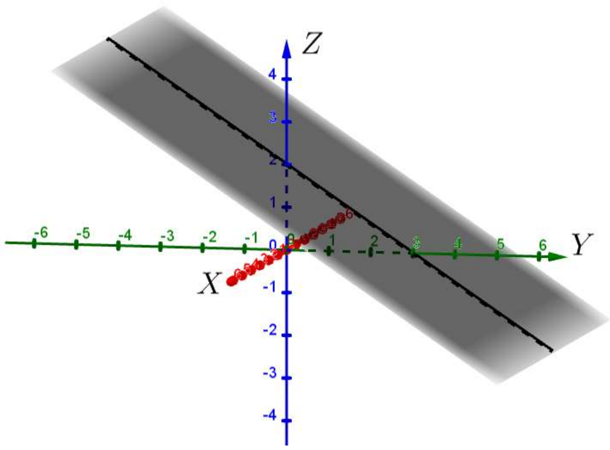
วิธีทำ เนื่องจากสมการ $x + z = 4$ มีตัวแปร y หายไป ดังนั้นระนาบนี้ขนานกับแกน Y เขียนเส้นตรง $x + z = 4$ บนระนาบ XZ จะได้แนวของระนาบ



รูปที่ 7.5 ระนาบ $z = 2$

ตัวอย่างที่ 7.1.4 จงแสดงขั้นตอนเขียนระนาบของ $2y + 3z = 6$

วิธีทำ เนื่องจากสมการ $2y + 3z = 6$ มีตัวแปร x หายไป ดังนั้นระนาบนี้ขนานกับแกน X เขียนเส้นตรง $2y + 3z = 6$ บนระนาบ YZ จะได้แนวของระนาบ



รูปที่ 7.6 ระนาบ $2y + 3z = 6$

ตัวอย่างที่ 7.1.5 จงแสดงขั้นตอนเขียนระนาบของ $x+y+z=2$

วิธีทำ หาจุดตัดแกน X โดยให้ $y=0$ และ $z=0$ จะได้

$x+0+0=2, x=2$ จะได้จุด $(2,0,0)$

หาจุดตัดแกน Y โดยให้ $x=0$ และ $z=0$ จะได้

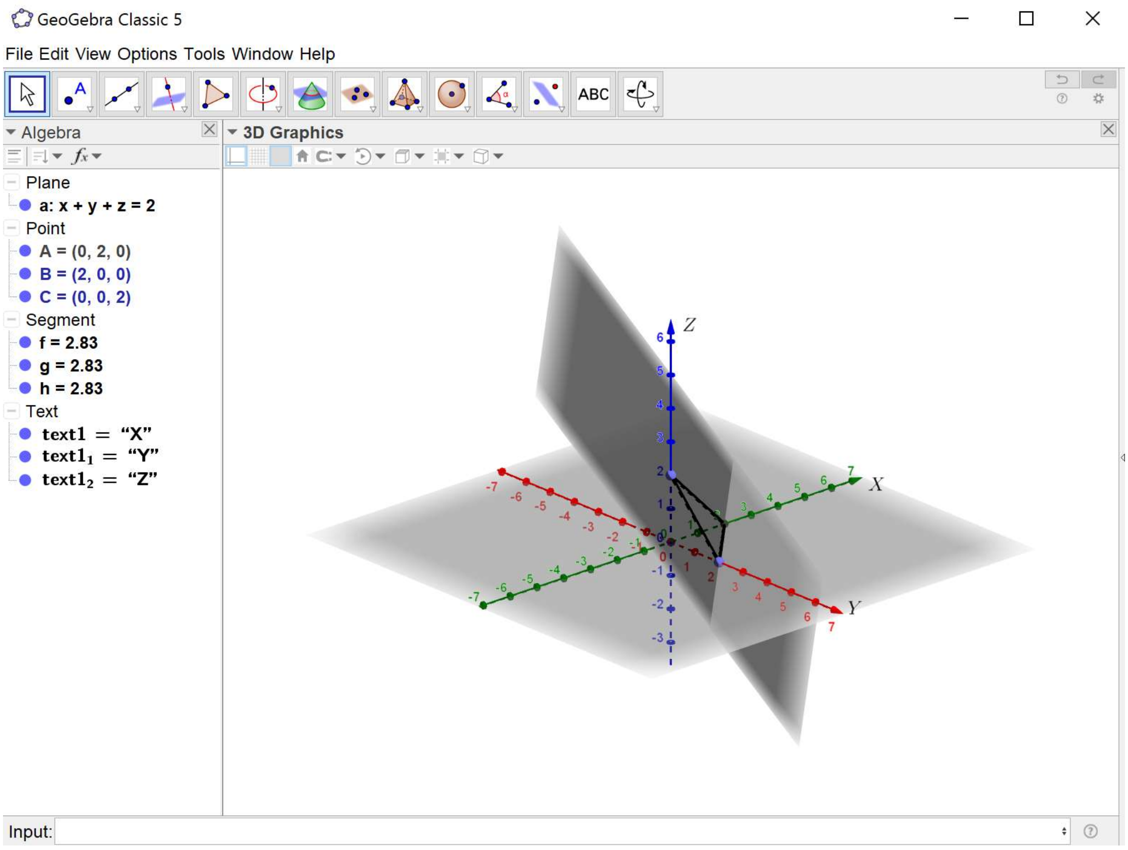
$0+y+0=2, y=2$ จะได้จุด $(0,2,0)$

หาจุดตัดแกน Z โดยให้ $x=0$ และ $y=0$ จะได้

$0+0+z=2, z=2$ จะได้ $(0,0,2)$

กำหนดจุด $(2,0,0),(0,2,0)$ และจุด $(0,0,2)$ ลงบนแกนพิกัดและลากส่วนของเส้นตรงเชื่อมโยงทั้งสามจุด

ใช้โปรแกรม Geogebra หาคำตอบสำหรับตัวอย่าง 7.1.5 ดังรูปที่ 7.7



รูปที่ 7.7 ระนาบ $x+y+z=2$

7.1.1 ระยะทางระหว่างจุดสองจุด (Distance Between Two Points)

ทฤษฎีบท 7.1.1 ให้ $P_1(x_1, y_1, z_1)$ และ $P_2(x_2, y_2, z_2)$ เป็นจุดสองจุดใด ๆ ระยะทางระหว่างจุดสองจุด เขียนแทนด้วย $\left|P_1P_2\right|$ คือ

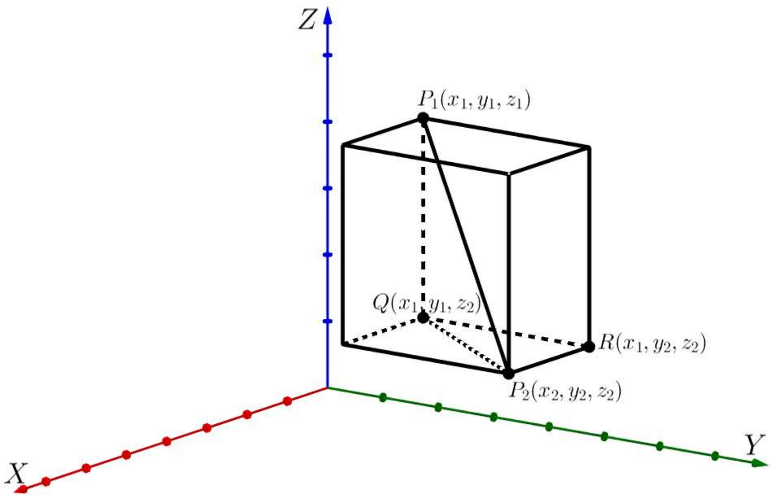
$$\left|P_1P_2\right| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

(Varberg, Dale, Purcell, Edwin J และ Rigdon, Steven E, 2000 : 596)

พิสูจน์ สร้างกล่องรูปทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากในปริภูมิ 3 มิติ ให้จุด P_1 และจุด P_2 อยู่ที่มุมกล่องทะแยงมุมกันโดยให้พิกัด (x_1, y_1, z_1) และ (x_2, y_2, z_2) ตามลำดับ และให้จุด Q มีพิกัดเป็น (x_1, y_1, z_2) และจุด R มีพิกัดเป็น (x_1, y_2, z_2) ดังนั้น รูปสามเหลี่ยม P_1QP_2 และรูปสามเหลี่ยม P_2QR เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยทฤษฎีบทพีทาโกรัส เราจะได้ว่า

$$\begin{aligned} \left|P_1P_2\right|^2 &= \left|P_1Q\right|^2 + \left|P_2Q\right|^2 \\ &= \left|P_1Q_2\right|^2 + \left|P_2R\right|^2 + \left|QR\right|^2 \\ &= (z_1 - z_2)^2 + (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \\ &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} \end{aligned}$$

ดังนั้น ระยะทางระหว่างจุด P_1 และจุด P_2 คือ $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$



รูปที่ 7.8 กล่องรูปทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก

ตัวอย่างที่ 7.1.1.1 จงหาระยะทางระหว่างจุดสองจุด $A(0,0,0)$ และจุด $B(4,3,0)$

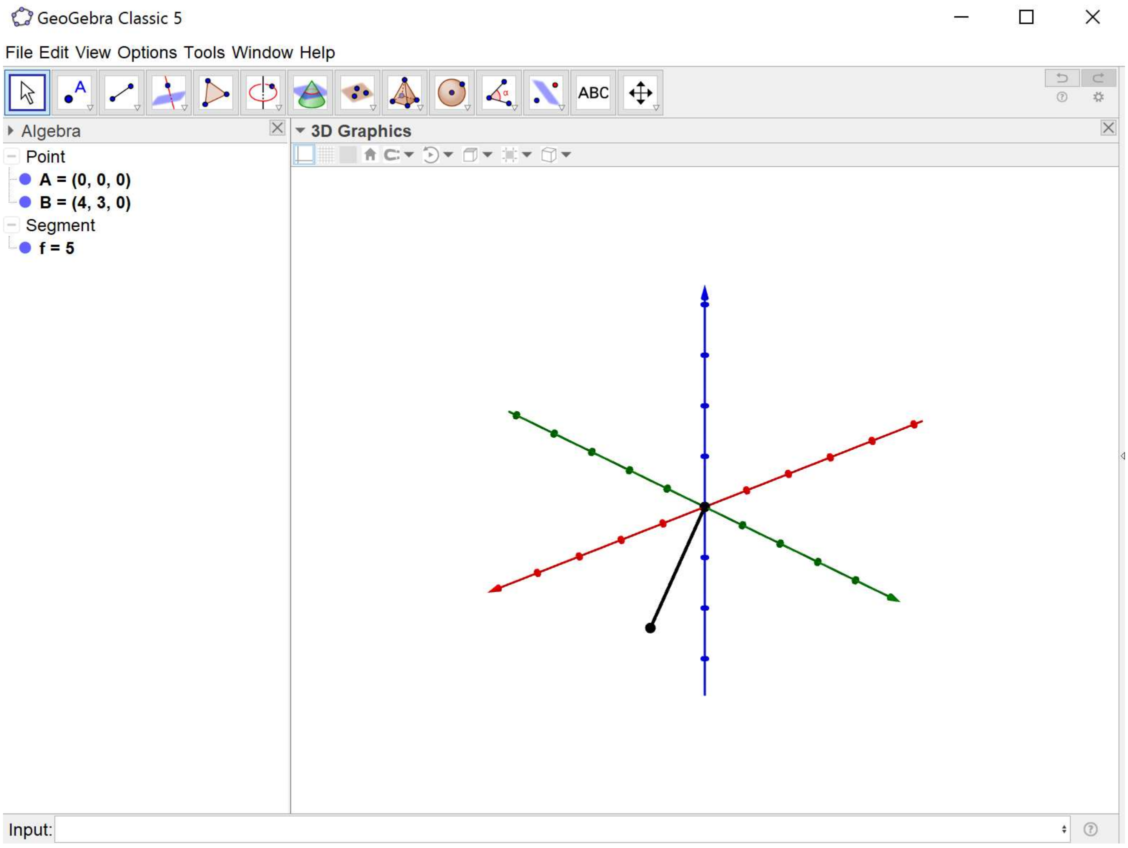
วิธีทำ จากโจทย์จะได้ $A(x_1,y_1,z_1)=A(0,0,0)$ และ $B(x_2,y_2,z_2)=B(4,3,0)$

โดยทฤษฎีบท 7.1.1 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}|AB| &= \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}\\ &= \sqrt{(0-4)^2+(0-3)^2+(0-0)^2}\\ &= \sqrt{(-4)^2+(-3)^2+0^2}\\ &= \sqrt{16+9+0}\\ &= \sqrt{25}\\ &= 5\end{aligned}$$

ดังนั้น ระยะห่างระหว่างจุด $A(0,0,0)$ กับจุด $B(4,3,0)$ เท่ากับ 5 หน่วย

ใช้โปรแกรม Geogebra หาคำตอบสำหรับตัวอย่าง 7.1.1.1 ดังรูปที่ 7.9



รูปที่ 7.9 ระยะห่างระหว่างจุด $A(0,0,0)$ กับจุด $B(4,3,0)$

ตัวอย่างที่ 7.1.1.2 จงหาระยะทางระหว่างจุดสองจุด $A(-1,2,3)$ และจุด $B(4,0,2)$

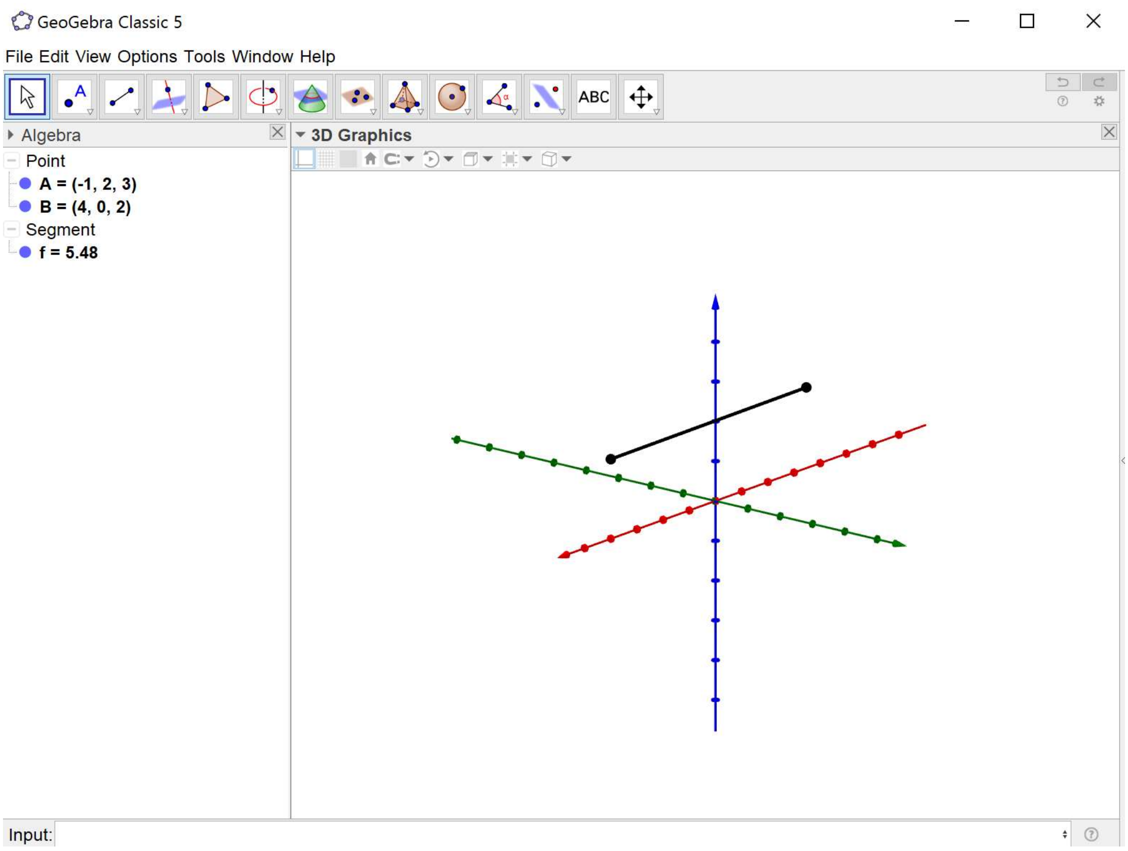
วิธีทำ จากโจทย์จะได้ $A(x_1,y_1,z_1)=A(-1,2,3)$ และ $B(x_2,y_2,z_2)=B(4,0,2)$

โดยทฤษฎีบท 7.1.1 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} |AB| &= \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2} \\ &= \sqrt{(-1-4)^2+(2-0)^2+(3-2)^2} \\ &= \sqrt{(-5)^2+2^2+1^2} \\ &= \sqrt{25+4+1} \\ &= \sqrt{30} \\ &\approx 5.48 \end{aligned}$$

ดังนั้น ระยะห่างระหว่างจุด $A(-1,2,3)$ กับจุด $B(4,0,2)$ เท่ากับ $\sqrt{30}$ หน่วย

ใช้โปรแกรม Geogebra หาคำตอบสำหรับตัวอย่าง 7.1.1.2 ดังรูปที่ 7.10



รูปที่ 7.10 ระยะห่างระหว่างจุด $A(-1,2,3)$ กับจุด $B(4,0,2)$

ตัวอย่างที่ 7.1.1.3 จงหาระยะทางระหว่างจุดสองจุด $A(-4,4,1)$ และจุด $B(-3,5,-4)$

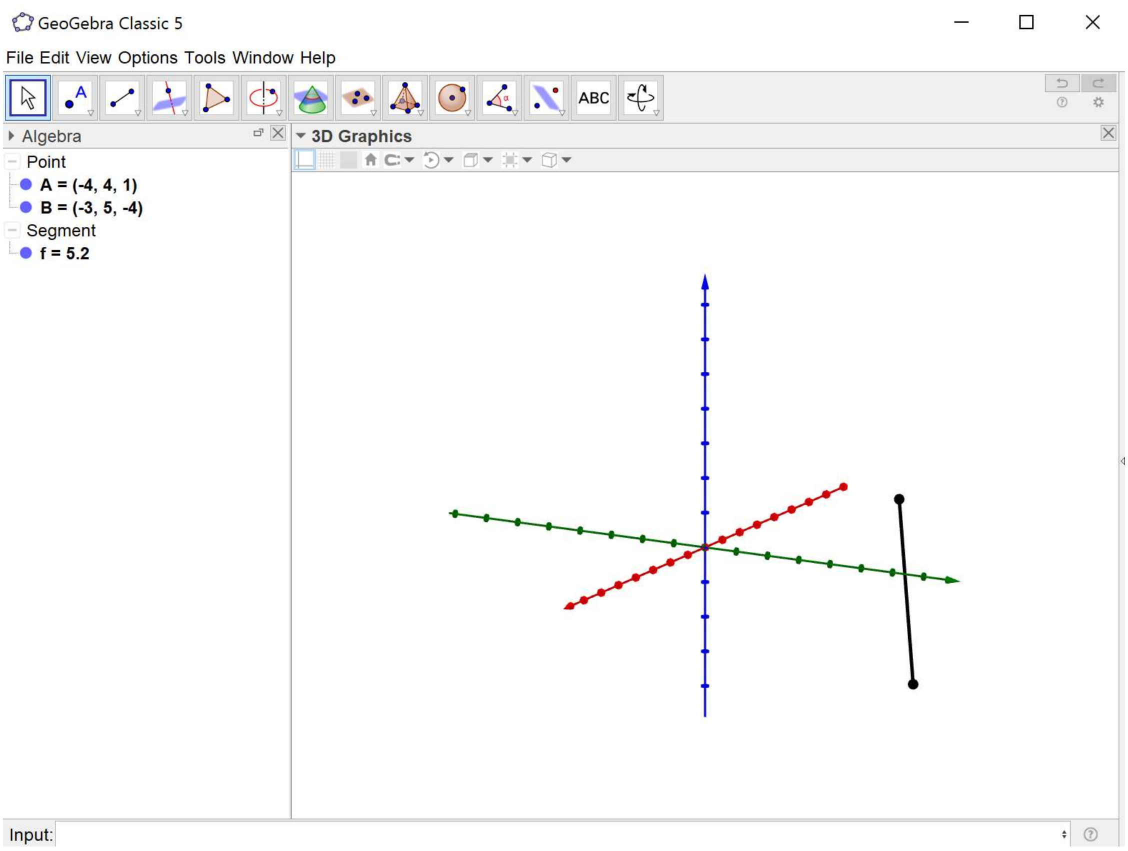
วิธีทำ จากโจทย์จะได้ $A(x_1,y_1,z_1)=A(-4,4,1)$ และ $B(x_2,y_2,z_2)=B(-3,5,-4)$

โดยทฤษฎีบท 7.1.1 จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
\left|AB\right| &= \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2} \\
&= \sqrt{(-4-(-3))^2+(4-5)^2+(1-(-4))^2} \\
&= \sqrt{(-1)^2+(-1)^2+(5)^2} \\
&= \sqrt{1+1+25} \\
&= \sqrt{27} \\
&\approx 5.2
\end{aligned}
$$

ดังนั้น ระยะห่างระหว่างจุด $A(-4,4,1)$ กับจุด $B(-3,5,-4)$ เท่ากับ $\sqrt{27}$ หน่วย

ใช้โปรแกรม Geogebra หาคำตอบสำหรับตัวอย่าง 7.1.1.3 ดังรูปที่ 7.11



รูปที่ 7.11 ระยะห่างระหว่างจุด $A(-4,4,1)$ กับจุด $B(-3,5,-4)$

7.1.2 จุดกึ่งกลางและจุดแบ่งส่วนของส่วนของเส้นตรง

ทฤษฎีบท 7.1.2.1 ถ้า $P(x,y,z)$ เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจุด $P_1(x_1,y_1,z_1)$ และจุด $P_2(x_2,y_2,z_2)$ แล้วจะได้ว่า

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\ y=\frac{y_1+y_2}{2},\ z=\frac{z_1+z_2}{2}$$

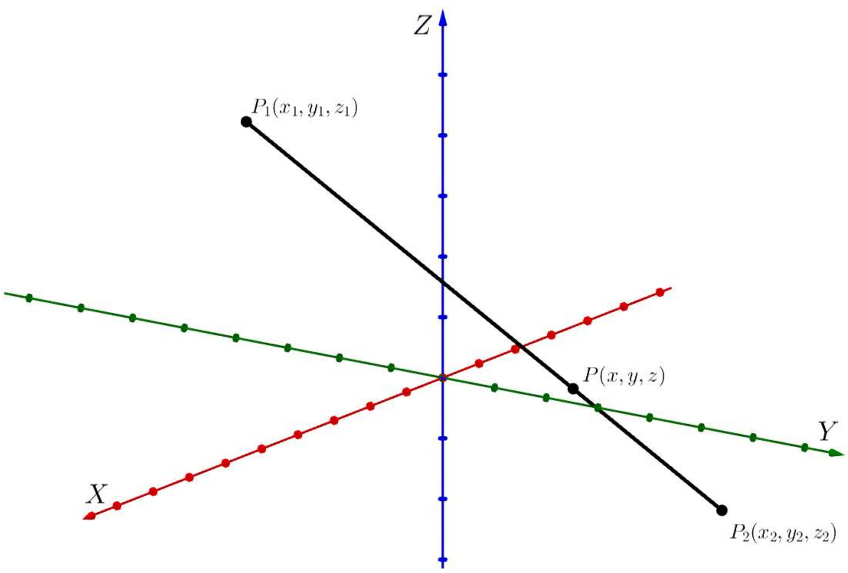
(Varberg, Dale, Purcell, Edwin J & Rigdon, Steven E, 2000 : 597)

ทฤษฎีบท 7.1.2.2 ถ้า $P(x,y,z)$ แบ่งส่วนของส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจุด $P_1(x_1,y_1,z_1)$ และ $P_2(x_2,y_2,z_2)$ ออกเป็นอัตราส่วน $r=\frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}}$ แล้วจะได้ว่า

$$\begin{aligned} x &= x_1+r(x_2-x_1) \\ y &= y_1+r(y_2-y_1) \\ z &= z_1+r(z_2-z_1) \end{aligned}$$

(Riddle, Douglas F., 1996 : 319-320)

การพิสูจน์ทฤษฎีบท 7.1.2.1 และ ทฤษฎีบท 7.1.2.1 นี้ สามารถพิสูจน์ได้ทำนองเดียวกับการพิสูจน์ทฤษฎีบทในเรขาคณิตวิเคราะห์ในระนาบสองมิติ



รูปที่ 7.12 จุด $P(x,y,z)$ แบ่งส่วนของส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจุด $P_1(x_1,y_1,z_1)$ กับ $P_2(x_2,y_2,z_2)$

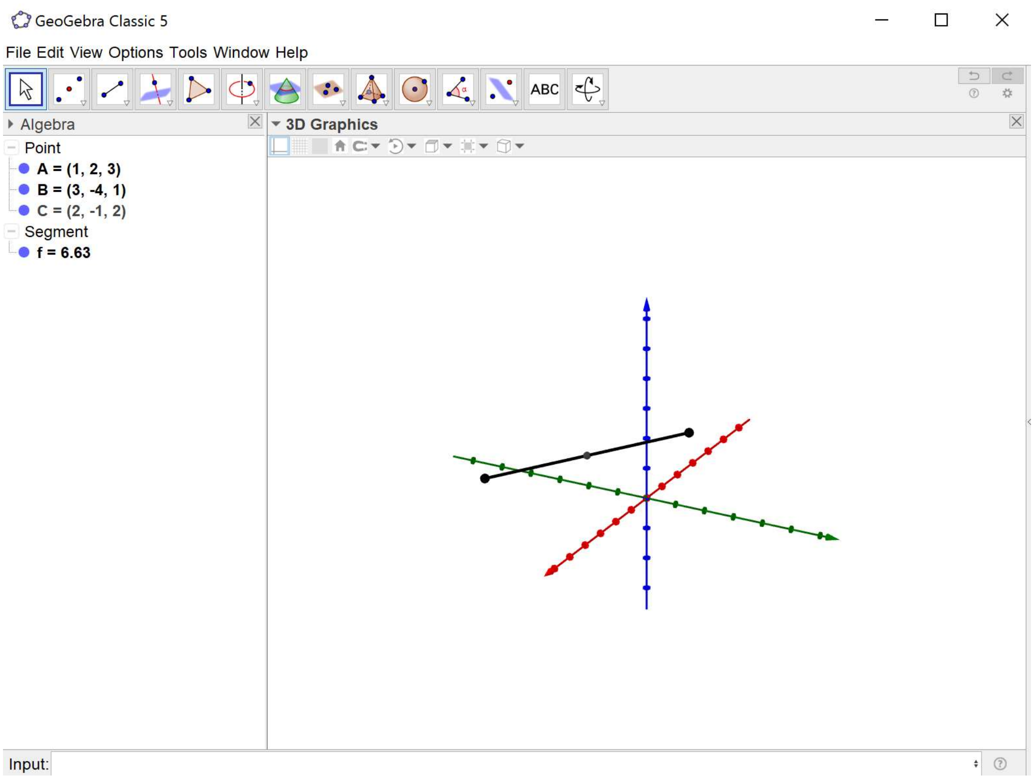
ตัวอย่างที่ 7.1.2.1 จงหาจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุด $A(1,2,3)$ และ $B(3,-4,1)$

วิธีทำ จากทฤษฎีบท 7.1.2.1 จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{x_1 + x_2}{2} \\
&= \frac{1+3}{2} = 2 \\
y &= \frac{y_1 + y_2}{2} \\
&= \frac{2+(-4)}{2} = -1 \\
z &= \frac{z_1 + z_2}{2} \\
&= \frac{3+1}{2} = 2
\end{aligned}
$$

ดังนั้น จุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง คือจุด $(2,-1,2)$

ใช้โปรแกรม Geogebra หาคำตอบสำหรับตัวอย่าง 7.1.2.1 ดังรูปที่ 7.13



รูปที่ 7.13 จุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุด $A(1,2,3)$ และ $B(3,-4,1)$

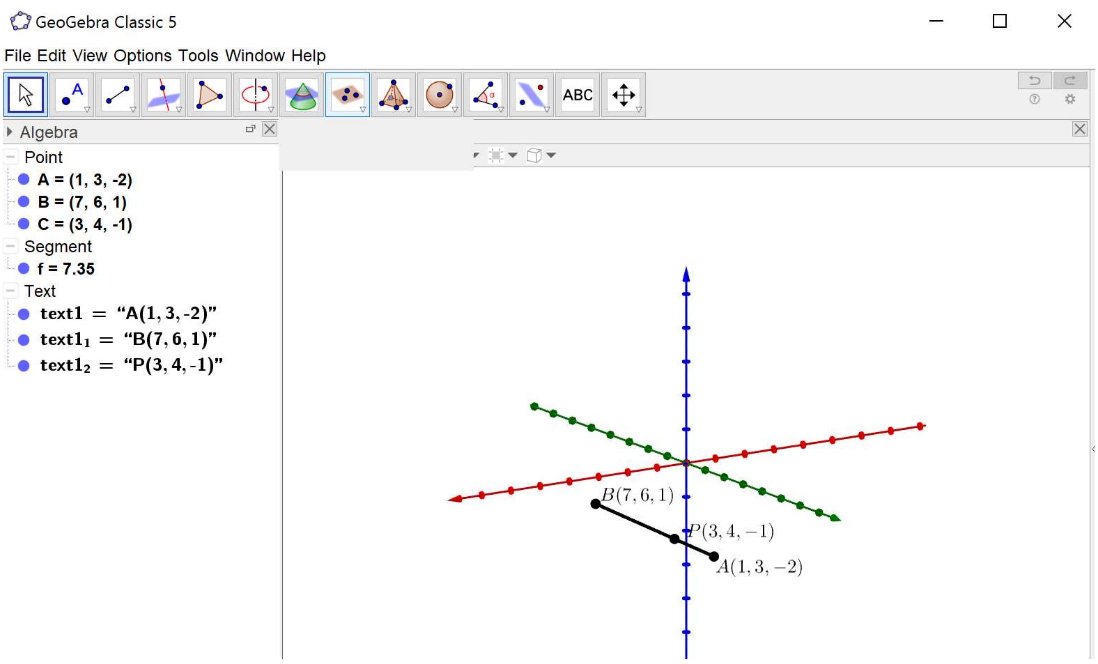
ตัวอย่างที่ 7.1.2.2 จงหาจุดแบ่งส่วนของส่วนของเส้นตรงซึ่งแบ่งส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุด $A(1,3,-2)$ และ $B(7,6,1)$ ออกเป็นอัตราส่วน $1:3$

วิธีทำ จากทฤษฎีบท 7.1.2.2 และ $r=\frac{1}{3}$ จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
x &= x_1 + r(x_2 - x_1) \\
&= 1 + \frac{1}{3}(7-1) \\
&= 3 \\
y &= y_1 + r(y_2 - y_1) \\
&= 3 + \frac{1}{3}(6-3) \\
&= 4 \\
z &= z_1 + r(z_2 - z_1) \\
&= -2 + \frac{1}{3}(1-(-2)) \\
&= -1
\end{aligned}
$$

ดังนั้น จุดแบ่งส่วนของส่วนของเส้นตรงนี้ คือจุด $(3,4,-1)$

ใช้โปรแกรม Geogebra หาคำตอบสำหรับตัวอย่าง 7.1.2.2 ดังรูปที่ 7.14



รูปที่ 7.14 จุดแบ่งส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุด $A(1,3,-2)$ และ $B(7,6,1)$ ออกเป็น $1:3$

ตัวอย่างที่ 7.1.2.3 ให้ $A(1,4,7)$ และ $B(5,-1,11)$ จงหาจุด P ซึ่งแบ่งส่วนของเส้นตรงโดยที่อัตราส่วนของ $\overline{AP}:\overline{PB}$ เท่ากับ $2:3$

วิธีทำ จากทฤษฎีบท 7.1.2.2 และ $r=\dfrac{2}{3}$ จะได้ว่า

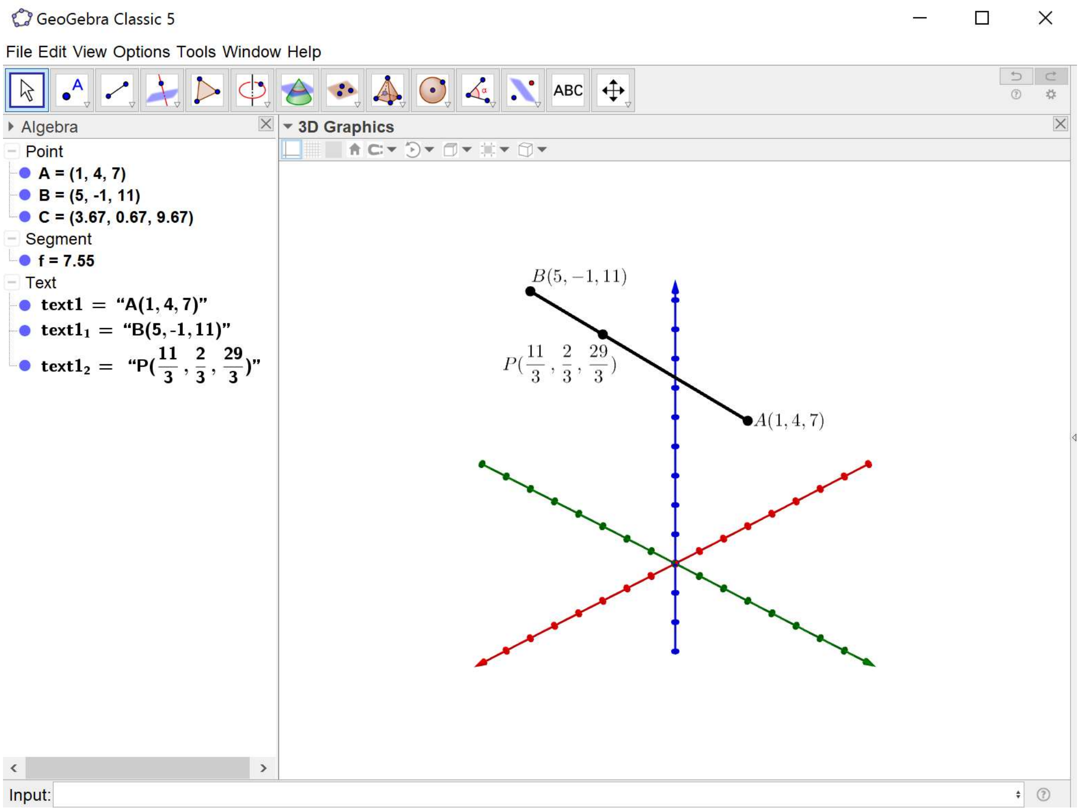
$$x = x_1 + r(x_2 - x_1) = 1+\frac{2}{3}(5-1) = 1+\frac{8}{3} = \frac{11}{3}$$

$$y = y_1 + r(y_2 - y_1) = 4+\frac{2}{3}(-1-4) = 4-\frac{10}{3} = \frac{2}{3}$$

$$z = z_1 + r(z_2 - z_1) = 7+\frac{2}{3}(11-7) = 7+\frac{8}{3} = \frac{29}{3}$$

ดังนั้น จุดแบ่งส่วนของส่วนของเส้นตรงนี้ คือจุด $\left(\dfrac{11}{3},\dfrac{2}{3},\dfrac{29}{3}\right)$

ใช้โปรแกรม Geogebra หาคำตอบสำหรับตัวอย่าง 7.1.2.3 ดังรูปที่ 7.15



รูปที่ 7.15 จุดแบ่งส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุด $A(1,4,7)$ และ $B(5,-1,11)$ ออกเป็น $2:3$

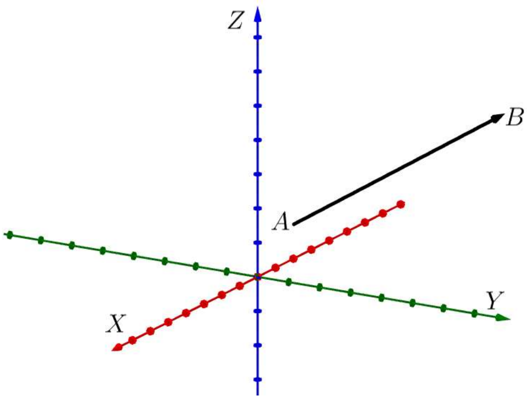
7.2 เวกเตอร์ในปริภูมิ 3 มิติ (Vector in Three-Dimensional Space)

บทนิยามและทฤษฎีบทเกี่ยวกับเวกเตอร์ในปริภูมิ 3 มิติ มีลักษณะคล้ายกับบทนิยามและทฤษฎีบทเกี่ยวกับเวกเตอร์ในระนาบสองมิติ

บทนิยาม 7.2.1 เวกเตอร์ หมายถึง ปริมาตรที่มีทั้งขนาด และทิศทาง เช่น ความเร็ว แรง เป็นต้น เวกเตอร์เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}$

(โฆสิต ชาติกำแหง, 2540 : 96)

สัญลักษณ์ $\overrightarrow{AB}$ อ่านว่า เวกเตอร์เอบี หมายความว่า A เป็นจุดเริ่มต้นและ B เป็นจุดปลายของเวกเตอร์ประมาณที่มีเฉพาะขนาดไม่มีทิศทางเช่นความยาวความหนาแน่น อุณหภูมิน้ำหนัก ความสูง ฯลฯ เรียกว่าปริมาณเกลาร์

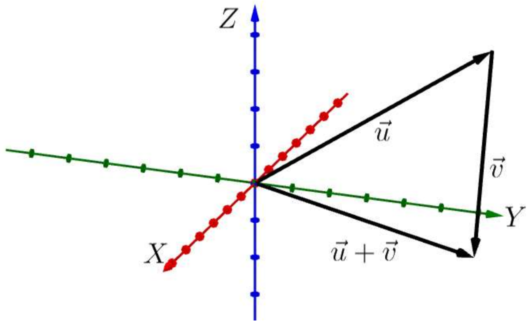


รูปที่ 7.16 แสดงเวกเตอร์ $\overrightarrow{AB}$

บทนิยาม 7.2.2 เวกเตอร์ 2 เวกเตอร์ใด ๆ จะเท่ากันก็ต่อเมื่อมีขนาดเท่ากัน และมีทิศทางเดียวกัน

บทนิยาม 7.2.3 การบวกกันของเวกเตอร์ 2 เวกเตอร์ใด ๆ ทำได้โดยเขียนเส้นตรงบอกทิศทางที่แทนด้วยเวกเตอร์ทั้งสอง โดยให้จุดเริ่มต้นของเวกเตอร์ที่นำมาบวกอยู่ที่จุดปลายของเวกเตอร์ ที่เป็นตัวตั้ง แล้วลากจากจุดเริ่มต้นของเวกเตอร์ ที่เป็นตัวตั้ง ไปยังจุดปลาย ของเวกเตอร์อีกเวกเตอร์หนึ่ง เวกเตอร์เกิดใหม่คือ ผลบวกของเวกเตอร์ทั้งสองนี้

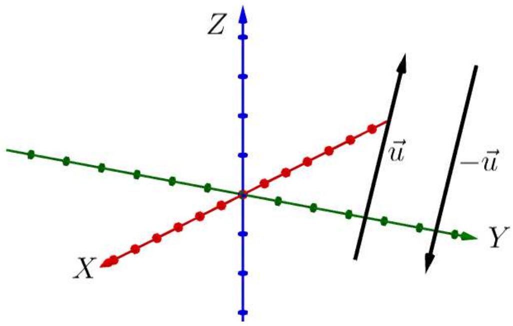
(ธีระศักดิ์ อุรัจนานนท์, 2546 : 1)



รูปที่ 7.17 แสดงการบวกกันของ 2 เวกเตอร์

บทนิยาม 7.2.3 นิเสธของเวกเตอร์ $\vec{u}$ คือเวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากับเวกเตอร์ $\vec{u}$ แต่ทิศทางตรงข้าม นิเสธของเวกเตอร์ $\vec{u}$ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $-\vec{u}$

(Murdoch, D. C., 1967 : 74)



รูปที่ 7.18 แสดงนิเสธของเวกเตอร์ $\vec{u}$

- ถ้า $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ผลต่างของ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เขียนแทนด้วย $\vec{u}-\vec{v}$ โดยที่ $\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+(-\vec{v})$

- เวกเตอร์บวกหรือลบกับสเกลาร์ไม่มีความหมาย

บทนิยาม 7.2.4 เวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดเป็นจุดเดียวกัน เรียกว่า เวกเตอร์ศูนย์ (Zero Vector) หรือ (Null Vector) เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\vec{0}$

- $\vec{0}\neq 0$ เพราะ $\vec{0}$ เป็นเวกเตอร์แต่ 0 เป็นสเกลาร์

(ศรีบุตร แววเจริญ และ ชนศักดิ์ บ่ายเที่ยง, 2544 : 298)

ศรีบุตร แววเจริญ และ ชนศักดิ์ บ่ายเที่ยง (2544 : 297-298) และ Larson, Ron & Edwards H. Bruce. (2011 : 766-767) ได้กล่าวถึงคุณสมบัติและบทนิยามของเวกเตอร์ดังนี้

ถ้า $\vec{u},\vec{v}$ และ $\vec{w}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ในปริภูมิ 3 มิติ จะได้ว่า

1. $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$
2. $\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})=(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}$
3. $\vec{u}+\vec{0}=\vec{u}=\vec{0}+\vec{u}$
4. ถ้า $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{n-1}, A_n$ เป็นจุดใด ๆ ในปริภูมิ 3 มิติ จะได้ว่า

$\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\cdots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\vec{0}$

5. ถ้า $\vec{u}=\vec{v}$ แล้ว $\vec{u}+\vec{w}=\vec{v}+\vec{w}$

บทนิยาม 7.2.5 ถ้า m เป็นจำนวนจริง และ $\vec{u}$ เป็นเวกเตอร์ จะได้

- ถ้า $m>0$ แล้ว $m\vec{u}$ เป็นเวกเตอร์ที่มีขนาด $m\left|\vec{u}\right|$ และมีทิศทางเดียวกันกับ $\vec{u}$
- ถ้า $m<0$ แล้ว $m\vec{u}$ เป็นเวกเตอร์ที่มีขนาด $m\left|\vec{u}\right|$ และมีทิศทางตรงข้ามกับ $\vec{u}$
- ถ้า $m=0$ แล้ว $m\vec{u}$ เป็นเวกเตอร์ศูนย์ $(\vec{0})$

คุณสมบัติการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์

1. $-\vec{u}=(-1)\vec{u}$
2. $\vec{u}+(-\vec{u})=\vec{0}=-\vec{u}+\vec{u}$
3. $m(n\vec{u})=(mn)\vec{u}$
4. $(m+n)\vec{u}=m\vec{u}+n\vec{u}$
5. $m(\vec{u}+\vec{v})=m\vec{u}+m\vec{v}$

บทนิยาม 7.2.6 เวกเตอร์ $\overrightarrow{PQ}$ เมื่อมีจุดเริ่มต้นที่จุด $P(x_1,y_1,z_1)$ และจุดปลายที่ $Q(x_2,y_2,z_2)$ มีตัวแทนมาตรฐานเป็น $\overrightarrow{PQ}=(x_2-x_1)\hat{i}+(y_2-y_1)\hat{k}+(z_2-z_1)\hat{j}$ และขนาดของ $\overrightarrow{PQ}$ เขียนแทน ด้วย $\left|\overrightarrow{PQ}\right|$ โดยที่

$$\left|\overrightarrow{PQ}\right|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

(Varberg, Dale, Purcell, Edwin J & Rigdon, Steven E, 2000 : 596)

บทนิยาม 7.2.7 เวกเตอร์ $\vec{u}$ จะเรียกว่า เวกเตอร์หน่วย ถ้าขนาดของเวกเตอร์ $\vec{u}$ เท่ากับหนึ่งหน่วย เขียนแทนด้วย $\hat{u}$ โดยที่ $\hat{u} = \dfrac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$ เป็นเวกเตอร์หน่วยในทิศทางเดียวกับ $\vec{u}$ และ $\hat{u} = \dfrac{-\vec{u}}{|\vec{u}|}$ เป็นเวกเตอร์หน่วยในทิศทางตรงข้ามกับ $\vec{u}$

(Fuller, Gordon & Tarwater, Dolton, 1992 : 303-304)

ตัวอย่าง 7.2.1 ให้จุด $P(-1,2,2)$ และจุด $Q(3,-2,4)$ จงหาเวกเตอร์หน่วยที่มีทิศทางเดียวกับ $\overrightarrow{PQ}$

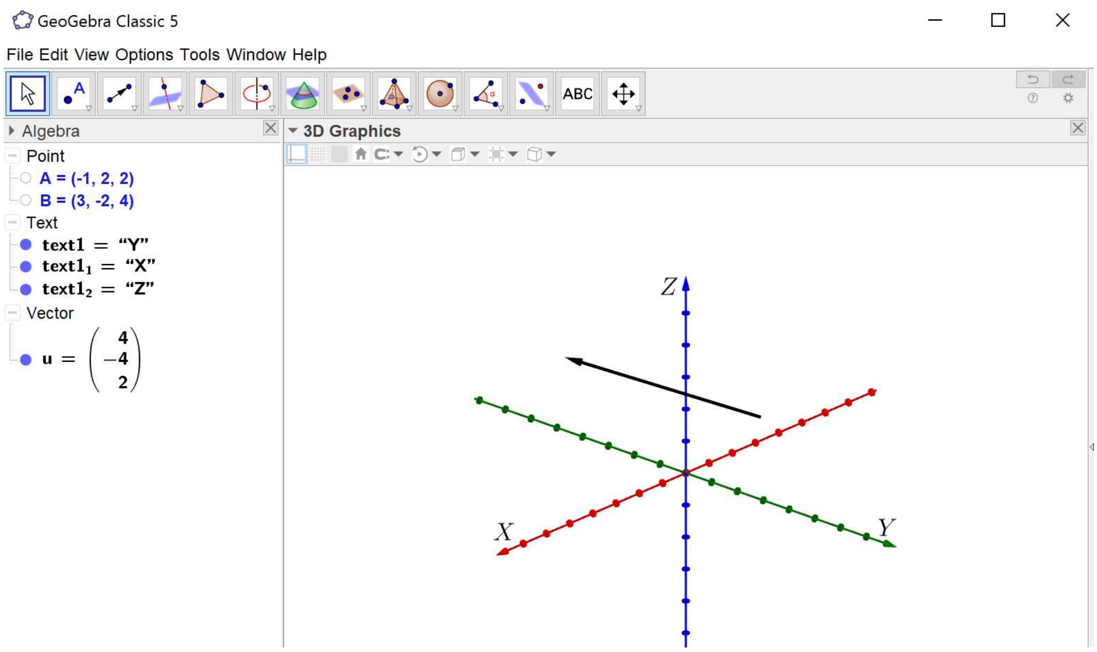
วิธีทำ หา $\overrightarrow{PQ}$ ได้จาก $\overrightarrow{PQ} = (3-(-1))\hat{i} + (-2-2)\hat{j} + (4-2)\hat{k} = 4\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k}$

หาเวกเตอร์หน่วยได้จาก

$$\frac{\overrightarrow{PQ}}{|\overrightarrow{PQ}|} = \frac{4\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k}}{\sqrt{4^2 + (-4)^2 + 2^2}} = \frac{4\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k}}{6}$$

ดังนั้น เวกเตอร์หน่วยที่มีทิศทางเดียวกับ $\overrightarrow{PQ}$ คือ $\dfrac{2\hat{i}}{3} - \dfrac{2\hat{j}}{3} + \dfrac{\hat{k}}{3}$

ใช้โปรแกรม Geogebra หาคำตอบสำหรับตัวอย่าง 7.2.1 ดังรูปที่ 7.19



รูปที่ 7.19 หาเวกเตอร์หน่วยที่มีทิศทางเดียวกับ $\overrightarrow{PQ}$

7.2.1 ผลคูณเชิงสเกลาร์ (Scalar Product or Dot Product)

ผลคูณเชิงสเกลาร์ คือ ขนาดของเงาของเวกเตอร์ที่ทาบบนเวกเตอร์หนึ่งคูณกับขนาดของเวกเตอร์นั้น

บทนิยาม 7.2.1.1 ให้ $\vec{u} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ และ $\hat{v} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$ ผลคูณเชิงสเกลาร์เขียนแทนด้วย $\vec{u}\cdot\vec{v}$ นิยามโดย $\vec{u}\cdot\vec{v} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ หรือ $\vec{u}\cdot\vec{v} = \left|\vec{u}\right|\left|\vec{v}\right|\cos\theta$

ถ้า $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$ แล้ว $\vec{u} \perp \vec{v}$

(Protter, Murray H. & Morrer, Charles B. Jr., 1975 : 257-258)

ตัวอย่าง 7.2.1.1 จงหาผลคูณเชิงสเกลาร์ของ $\vec{u} = -3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ และ $\vec{v} = 4\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$

วิธีทำ จากนิยาม 7.2.1.1 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v} &= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3\\ &= (-3)(4) + (2)(-2) + (1)(3)\\ &= -13\end{aligned}$$

ดังนั้น ผลคูณเชิงสเกลาร์ของ $\vec{u} = -3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ และ $\hat{v} = 4\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$ คือ -13

ตัวอย่าง 7.2.1.2 จงหาผลคูณเชิงสเกลาร์ของ $\vec{u} = \left\langle 4,-1,3\right\rangle$ และ $\vec{v} = \left\langle -1,-2,5\right\rangle$

วิธีทำ จากนิยาม 7.2.1.1 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v} &= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3\\ &= (4)(-1) + (-1)(-2) + (3)(5)\\ &= 13\end{aligned}$$

ดังนั้น ผลคูณเชิงสเกลาร์ของ $\vec{u} = -3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ และ $\hat{v} = 4\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$ คือ -13

ตัวอย่าง 7.2.1.3 จงหาผลคูณเชิงสเกลาร์ของ $\vec{u} = \left\langle 0,1,3\right\rangle$ และ $\vec{v} = \left\langle 9,-6,2\right\rangle$

วิธีทำ จากนิยาม 7.2.1.1 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v} &= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3\\ &= (0)(9) + (1)(-6) + (3)(2)\\ &= 0\end{aligned}$$

ดังนั้น ผลคูณเชิงสเกลาร์ของ $\vec{u} = -3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ และ $\hat{v} = 4\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$ คือ -13

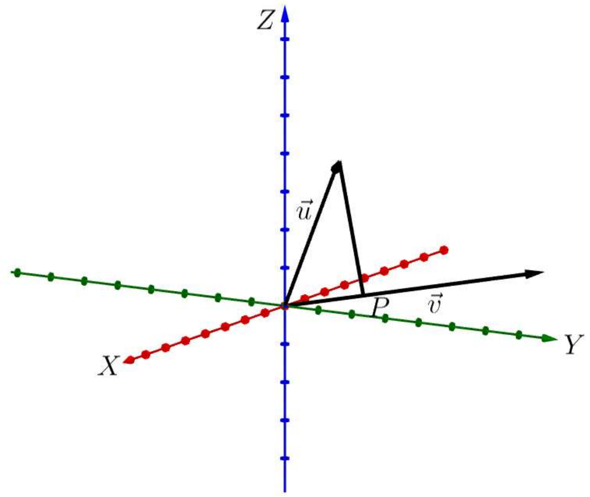
จะเห็นว่า $\vec{u} = \left\langle 0,1,3\right\rangle$ ตั้งฉากกับ $\vec{v} = \left\langle 9,-6,2\right\rangle$

7.2.2 เวกเตอร์ภาพฉาย (Vector Projection)

บทนิยาม 7.2.2 ให้ $\vec{u} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ และ $\hat{v} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ และมีจุด O เป็นจุดเริ่มต้นร่วมกัน จากจุดปลายของ $\vec{u}$ ลากตั้งฉากกับ $\vec{v}$ ที่จุด P จะเรียก $\overrightarrow{OP}$ ว่า ภาพฉายของ $\vec{u}$ บน $\vec{v}$ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\vec{u}_{\vec{v}}$ หรือ $\mathrm{proj}_{\vec{v}}\vec{u}$ นิยามโดย

- ภาพฉายเชิงเวกเตอร์ของ $\vec{u}$ บน $\vec{v}$ คือ $\vec{u}_{\vec{v}} = \left(\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\left|\vec{v}\right|^2}\right)\vec{v}$
- ภาพฉายเชิงสเกลาร์ของ $\vec{u}$ บน $\vec{v}$ คือ $\left|\vec{u}_{\vec{v}}\right| = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\left|\vec{v}\right|}$

(Protter, Murray H. & Morrer, Charles B. Jr., 1975 : 259)



รูปที่ 7.20 ภาพฉายของ $\vec{u}$ บน $\vec{v}$

ตัวอย่าง 7.2.2.1 จงหาภาพฉายของ $\vec{u} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$ บน $\vec{v} = 2\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$

วิธีทำ หา $\vec{u}\cdot\vec{v}$ และ $\left|\vec{v}\right|$ จะได้

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v} &= (2)(2) + (-3)(-2) + (5)(1)\\ &= 4 + 6 + 5 = 15\end{aligned}$$

และ $\left|\vec{v}\right| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = 3$

จากนิยาม 7.2.2 จะได้ว่า

ภาพฉายเชิงเวกเตอร์ของ $\vec{u}$ บน $\vec{v}$ คือ

$$\begin{aligned}\vec{u}_{\vec{v}} &= \left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\left|\vec{v}\right|^2}\right)\vec{v}\\ &= \left(\frac{15}{3}\right)(2\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k})\\ &= 10\hat{i}-10\hat{j}+5\hat{k}\end{aligned}$$

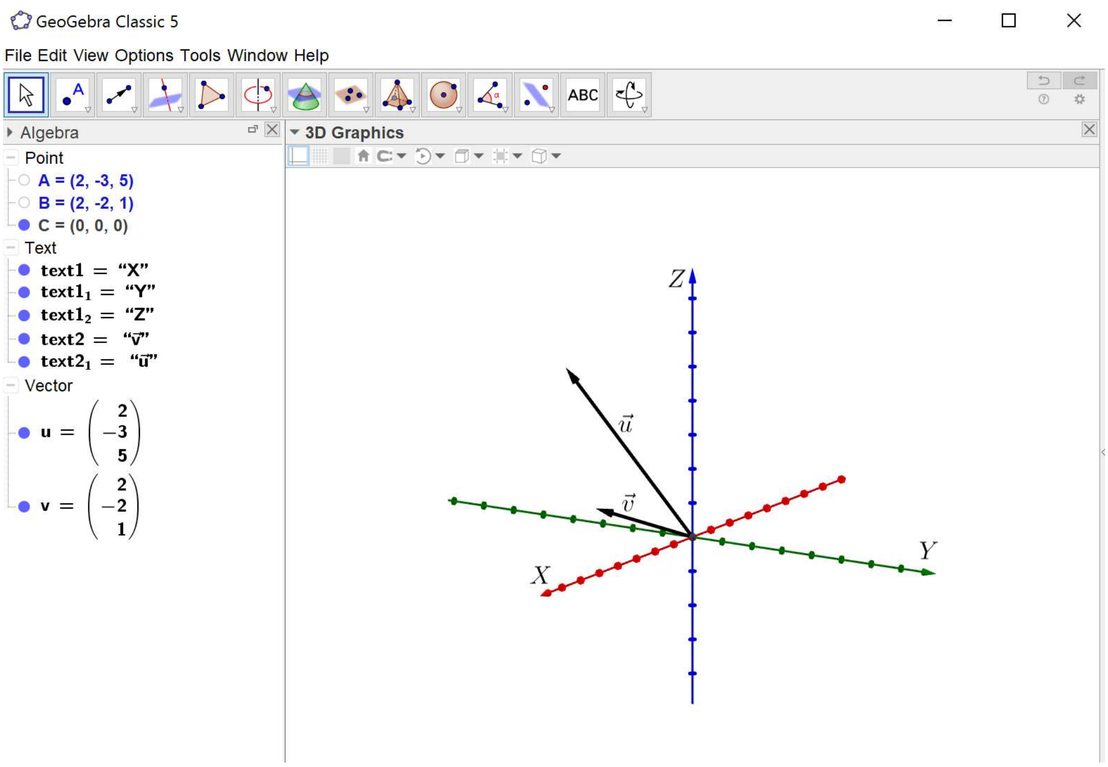
ภาพฉายเชิงสเกลาร์ของ $\vec{u}$ บน $\vec{v}$ คือ

$$\begin{aligned}\left|\vec{u}_{\vec{v}}\right| &= \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\left|\vec{v}\right|}\\ &= \frac{15}{3} = 5\end{aligned}$$

ดังนั้น ภาพฉายเชิงเวกเตอร์ของ $\vec{u}$ บน $\vec{v}$ คือ $10\hat{i}-10\hat{j}+5\hat{k}$

ภาพฉายเชิงสเกลาร์ของ $\vec{u}$ บน $\vec{v}$ คือ 5

ใช้โปรแกรม Geogebra หาคำตอบสำหรับตัวอย่าง 7.2.2.1 ดังรูปที่ 7.21



รูปที่ 7.21 ภาพฉายของ $\vec{u}=2\hat{i}-3\hat{j}+5\hat{k}$ บน $\vec{v}=2\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$

7.2.3 ผลคูณเชิงเวกเตอร์ (Vector Product)

บทนิยาม 7.2.3 ให้ $\vec{u} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ และ $\hat{v} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ใน 3 มิติ ผลคูณเชิงเวกเตอร์เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\vec{u} \times \vec{v}$ นิยามโดย

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

(ธีระศักดิ์ อุรัจนานนท์, 2546 : 20-22)

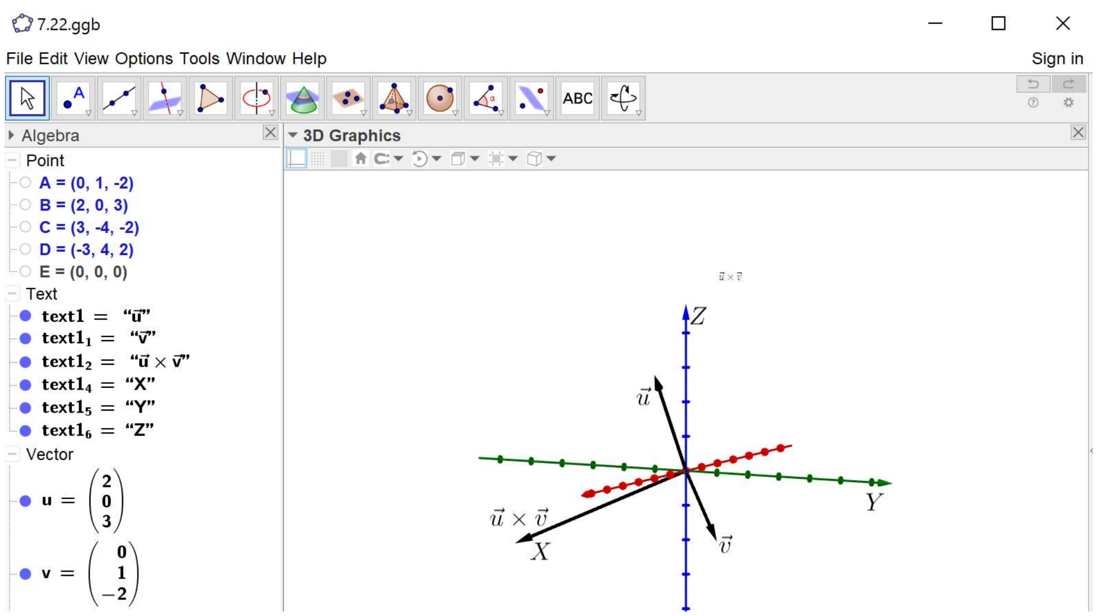
ตัวอย่าง 7.2.3.1 กำหนดให้ $\vec{u} = \hat{j} - 2\hat{k}$ กับ $\vec{v} = 2\hat{i} + 3\hat{k}$ จงหา $\vec{u} \times \vec{v}$

วิธีทำ จากบทนิยาม 7.2.3 จะได้

$$\begin{aligned} \vec{u} \times \vec{v} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 3\hat{i} - 4\hat{j} - 2\hat{k} \end{aligned}$$

ดังนั้น $\vec{u} \times \vec{v} = 3\hat{i} - 4\hat{j} - 2\hat{k}$

ใช้โปรแกรม Geogebra หาคำตอบสำหรับตัวอย่าง 7.2.3.1 ดังรูปที่ 7.22



รูปที่ 7.22 $\vec{u} \times \vec{v}$

ตัวอย่าง 7.2.3.2 จงหาเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับเวกเตอร์ $\vec{u} = -2\hat{i} + 3\hat{j} - 7\hat{k}$ และ $\vec{v} = 5\hat{i} + 9\hat{k}$

วิธีทำ จากบทนิยาม 7.2.3 จะได้

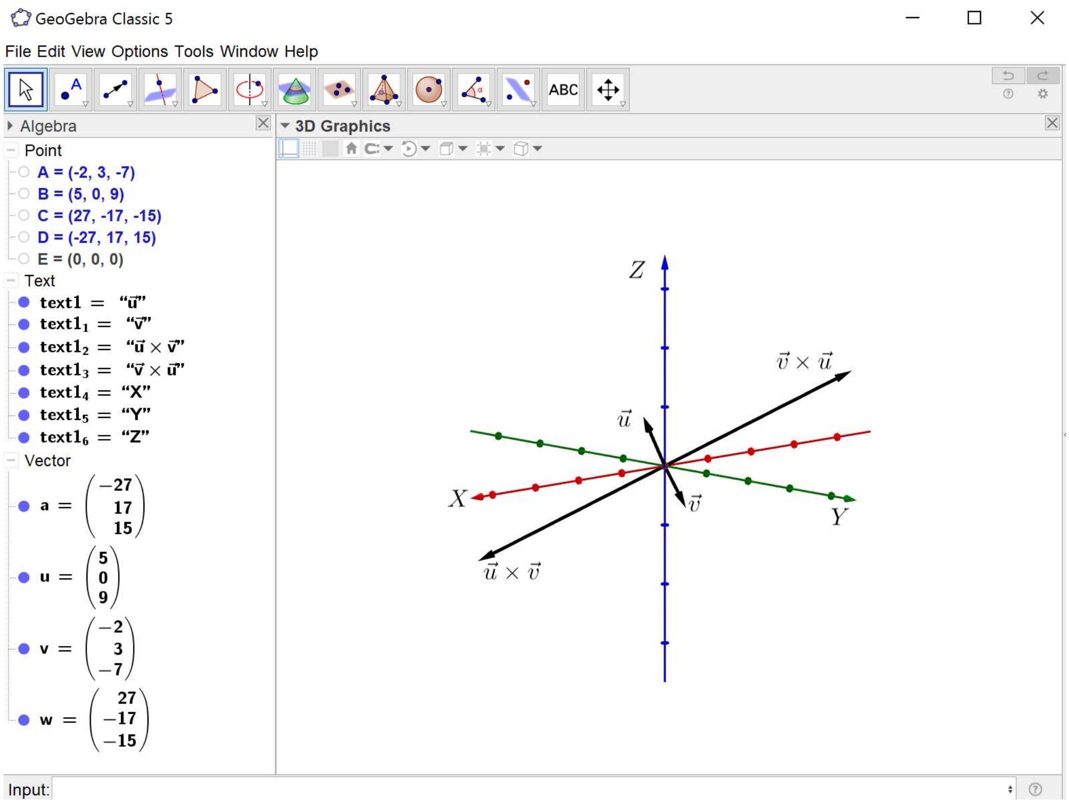
$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -2 & 3 & -7 \\ 5 & 0 & 9 \end{vmatrix}$$
$$= 27\hat{i} - 17\hat{j} - 15\hat{k}$$

และ

$$\vec{v} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 5 & 0 & 9 \\ -2 & 3 & -7 \end{vmatrix}$$
$$= -(27\hat{i} - 17\hat{j} - 15\hat{k})$$

ดังนั้น $\vec{u} \times \vec{v} = 27\hat{i} - 17\hat{j} - 15\hat{k}$ และ $\vec{v} \times \vec{u} = -(27\hat{i} - 17\hat{j} - 15\hat{k})$

ใช้โปรแกรม Geogebra หาคำตอบสำหรับตัวอย่าง 7.2.3.2 ดังรูปที่ 7.23



รูปที่ 7.23 เวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับเวกเตอร์ $\vec{u} = -2\hat{i} + 3\hat{j} - 7\hat{k}$ และ $\vec{v} = 5\hat{i} + 9\hat{k}$

7.3 เส้นตรงในปริภูมิ 3 มิติ (The Line in Three-Dimensional Space)

ดำรง ทิพย์โยธา สุรชัย สมบัติบริบูรณ์ และนัฏฐนาถ ไตรภพ (2558 : 135-136) และ Varberg, Dale, Purcell, Edwin J & Rigdon, Steven E (2000 : 609-610) ได้กล่าวว่า ในหัวข้อนี้ เราต้องการหาสมการของเส้นตรงในปริภูมิ 3 มิติ โดยใช้เวกเตอร์ในการพิจารณา สมการเส้นตรง ให้ L เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด $P_0(x_0, y_0, z_0)$ และขนานกับเวกเตอร์ $\vec{v} = \langle a, b, c \rangle$ ถ้า $P(x, y, z)$ เป็นจุดใด ๆ บนเส้นตรง L จะได้เวกเตอร์ $\vec{r}$ ซึ่งเชื่อมจุดกำเนิดกับจุด P มีส่วนประกอบเป็น $\vec{r} = \langle x, y, z \rangle$ และเวกเตอร์ $\vec{r}_0$ ซึ่งเชื่อมจุดกำเนิดกับจุด P_0 มีส่วนประกอบเป็น $\vec{r}_0 = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$

จากนิยามการบวกเวกเตอร์จะได้ว่า $\vec{r} = \vec{r}_0 + \overrightarrow{P_0P}$

ถ้า $\overrightarrow{P_0P}$ มีทิศทางเดียวกับ $\vec{v}$ จะได้ $\overrightarrow{P_0P} = t\vec{v}$ เมื่อ t เป็นสเกลาร์ นั่นคือ

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \vec{r}_0 + \overrightarrow{P_0P} \\ \langle x, y, z \rangle &= \langle x_0, y_0, z_0 \rangle + t\langle a, b, c \rangle \\ &= \langle x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct \rangle\end{aligned}$$

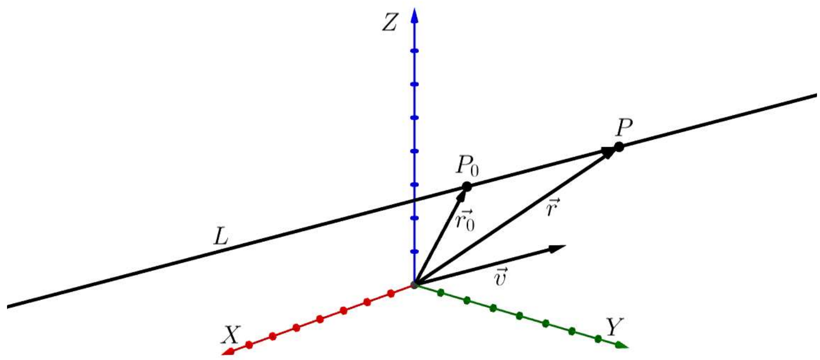
เพราะฉะนั้น $x = x_0 + at,\ y = y_0 + bt,\ z = z_0 + ct$

หรือ $$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

ดังนั้น $\langle x, y, z \rangle = \langle x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct \rangle$ เรียกว่า สมการในรูปเวกเตอร์

$x = x_0 + at,\ y = y_0 + bt,\ z = z_0 + ct$ เรียกว่า สมการอิงตัวแปรเสริม

$\dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b} = \dfrac{z - z_0}{c}$ เรียกว่า สมการสมมาตร



รูปที่ 7.24 แสดงส่วนประกอบเส้นตรงในปริภูมิ 3 มิติ

ตัวอย่าง 7.3.1 จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $P_0(1,2,3)$ ขนานกับเวกเตอร์ $\vec{v} = \langle 3,-4,7\rangle$ และหาจุดที่เส้นตรงนี้ตัดกับระนาบ XY

วิธีทำ ให้ $P(x,y,z)$ เป็นจุดใด ๆ บนเส้นตรง

จากโจทย์ เส้นตรงผ่านจุด $P_0(1,2,3)$ และขนานกับ $\vec{v} = \langle 3,-4,7\rangle$ จะได้ว่า

$\langle x,y,z\rangle = \langle 1+3t, 2-4t, 3+7t\rangle$ สมการในรูปเวกเตอร์ หรือ

$x = 1+3t,\ y = 2-4t,\ z = 3+7t$ สมการอิงตัวแปรเสริม

$\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-2}{-4} = \dfrac{z-3}{7}$ สมการสมมาตร

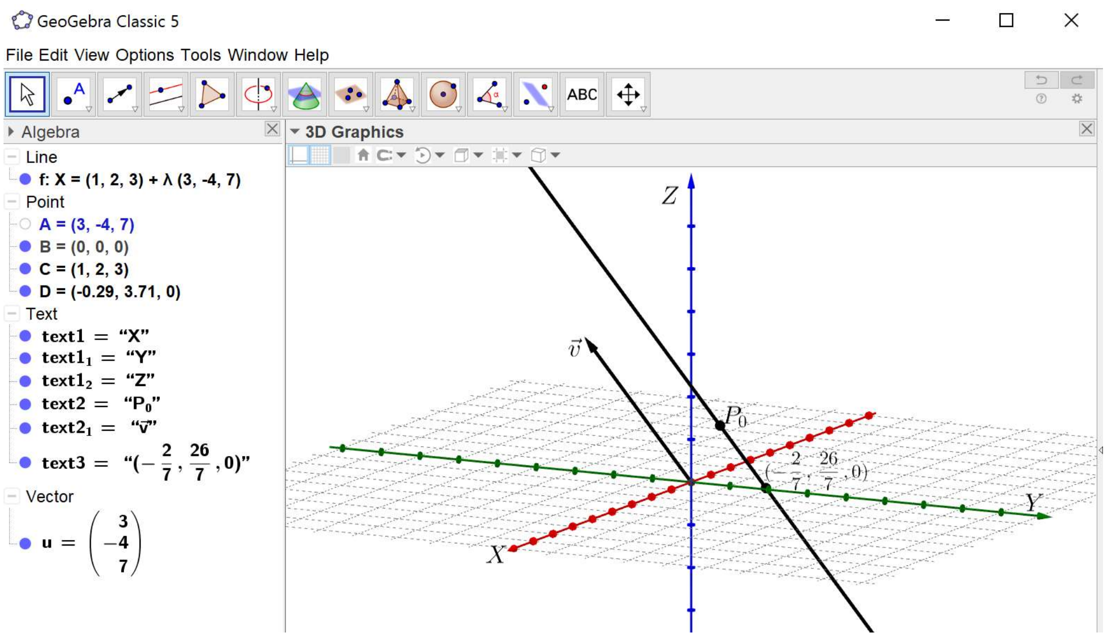
หาจุดตัดบนระนาบ XY โดยให้ $z = 0$ แทนในสมการอิงตัวแปรเสริม จะได้ว่า

$0 = 3+7t$ หรือ $t = -\dfrac{3}{7}$

ถ้า $t = -\dfrac{3}{7}$ จะได้ $x = 1+3\left(-\dfrac{3}{7}\right) = -\dfrac{2}{7}$ และ $y = 2-4\left(-\dfrac{3}{7}\right) = \dfrac{26}{7}$

ดังนั้น จุดที่เส้นตรงนี้ตัดกับระนาบ XY คือจุด $\left(-\dfrac{2}{7}, \dfrac{26}{7}, 0\right)$

ใช้โปรแกรม Geogebra หาคำตอบสำหรับตัวอย่าง 7.3.1 ดังรูปที่ 7.25



รูปที่ 7.25 เส้นตรงที่ผ่านจุด $P_0(1,2,3)$ ขนานกับเวกเตอร์ $\vec{v} = \langle 3,-4,7\rangle$

ตัวอย่าง 7.3.2 จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $A(2,4,-1)$ และจุด $B(5,0,7)$ และพิจารณาว่าเส้นตรงนี้ผ่านจุด $(1,2,3)$ และผ่านจุด $(8,-4,15)$ หรือไม่

วิธีทำ ให้ $P(x,y,z)$ เป็นจุดใด ๆ บนเส้นตรง และเวกเตอร์ที่ขนานกับเส้นตรงนี้คือ

$\overrightarrow{AB} = \langle 3,-4,8\rangle$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\langle x,y,z\rangle &= \langle x_0+at, y_0+bt, z_0+ct\rangle \\ &= \langle 2+3t, 4-4t, -1+8t\rangle\end{aligned}$$

หรือ $x = 2+3t,\ y = 4-4t,\ z = -1+8t$

หรือ $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-4}{-4} = \dfrac{z+1}{8}$

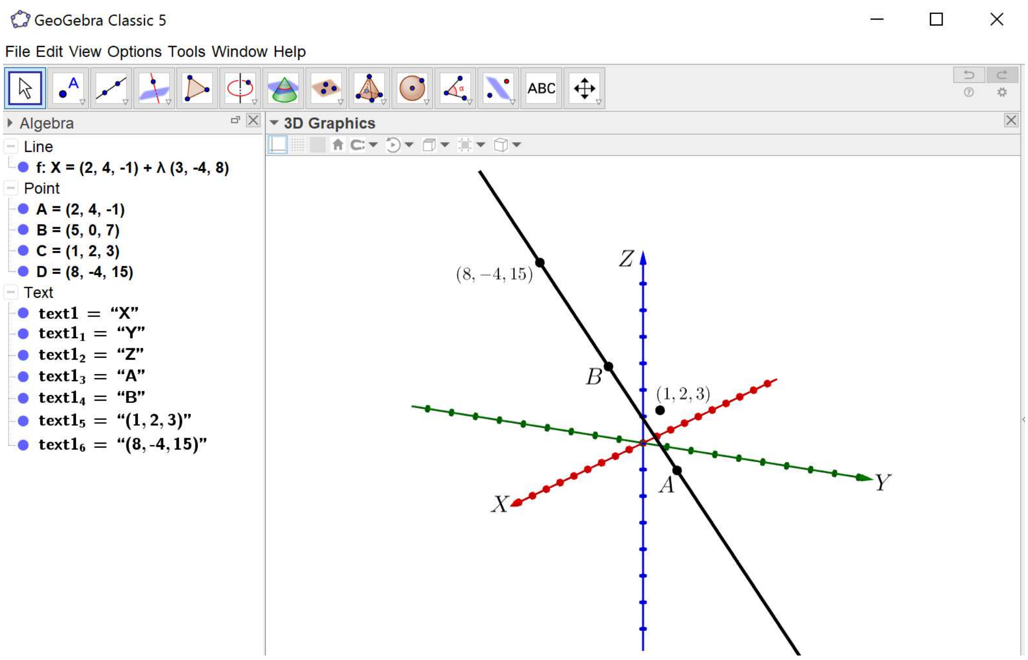
พิจารณาว่าเส้นตรงนี้ผ่านจุด $(1,2,3)$ โดยการแทนจุดลงในสมการสมมาตร จะได้

$\dfrac{1-2}{3} \neq \dfrac{2-4}{-4} \neq \dfrac{3+1}{8}$ สมการเป็นเท็จ แสดงว่าเส้นตรงนี้ไม่ผ่านจุด $(1,2,3)$

พิจารณาว่าเส้นตรงนี้ผ่านจุด $(8,-4,15)$ โดยการแทนจุดลงในสมการสมมาตร จะได้

$\dfrac{8-2}{3} = \dfrac{-4-4}{-4} = \dfrac{15+1}{8}$ สมการเป็นจริง แสดงว่าเส้นตรงนี้ผ่านจุด $(8,-4,15)$

ใช้โปรแกรม Geogebra หาคำตอบสำหรับตัวอย่าง 7.3.2 ดังรูปที่ 7.26



รูปที่ 7.26 แสดงการหาผลเฉลยตามตัวอย่าง 7.3.2

ตัวอย่าง 7.3.3 กำหนดสมการเส้นตรง L_1 และ L_2 ดังนี้

$$L_1 : x = 1 - t,\ y = 1 + t,\ z = 1 + 2t$$

และ $$L_2 : x = 2s,\ y = 2 + s,\ z = 3 - 3s$$

โดยที่ t และ s เป็นพารามิเตอร์ จงหาจุดตัดของเส้นตรง L_1 และ L_2

วิธีทำ ถ้าเส้นตรง L_1 และ L_2 ตัดกันที่จุด (a,b,c) จุดนี้จะต้องสอดคล้องกับสมการทั้งสอง

$$a = 1 - t,\ b = 1 + t,\ c = 1 + 2t$$

$a = 2s,\ b = 2 + s,\ c = 3 - 3s$ จะได้

$$1 - t = 2s \quad \text{.........(1)}$$

$$1 + t = 2 + s \quad \text{.........(2)}$$

$$1 + 2t = 3 - 3s \quad \text{.........(3)}$$

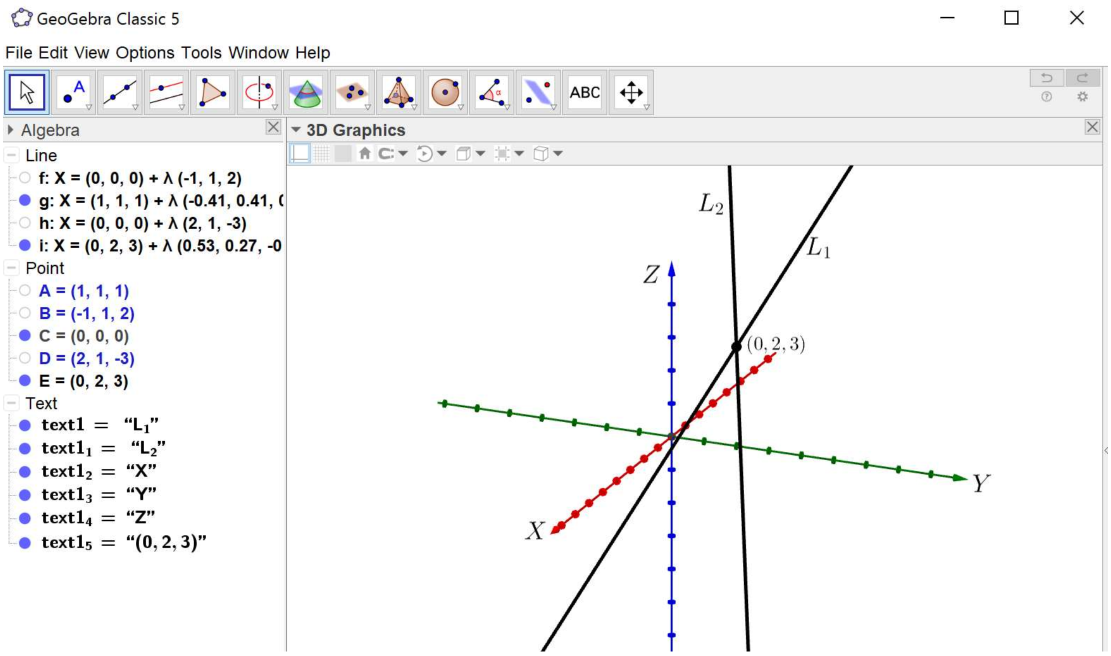
นำ $(1)+(2)$ จะได้ $s = 0$ และ $t = 1$

จะเห็นว่าค่า $s = 0$ และค่า $t = 1$ ทำให้สมการ $(1),(2)$ และ (3) เป็นจริง นั่นคือ

$a = 0,\ b = 2,\ c = 3$

ดังนั้น จุดตัดของเส้นตรง L_1 และ L_2 คือจุด $(0,2,3)$

ใช้โปรแกรม Geogebra หาคำตอบสำหรับตัวอย่าง 7.3.3 ดังรูปที่ 7.27



รูปที่ 7.27 จุดตัดของเส้นตรง L_1 และ L_2

ตัวอย่าง 7.3.4 กำหนดเส้นตรง L_1 และ L_2 ดังนี้ $L_1 : x = 1 + 4t,\ y = 5 - 4t,\ z = -1 + 5t$ และ $L_2 : x = 2 + 8t,\ y = 4 - 3t,\ z = 5 + t$ โดยที่ $t \in R$

ก. เส้นตรง L_1 และ L_2 ขนานกันหรือไม่ ข. เส้นตรง L_1 และ L_2 ตัดกันหรือไม่

วิธีทำ ก. เส้นตรง L_1 และ L_2 จะขนานกันก็ต่อเมื่อมีเวกเตอร์ขนานกันด้วย เพราะฉะนั้นเราจะหาเวกเตอร์ที่ขนานกับเส้นตรง L_1 และ L_2 ดังนี้

จะเห็นว่า $\vec{v}_1 = \langle 4, -4, 5 \rangle$ ขนานกับเส้นตรง L_1 และ $\vec{v}_2 = \langle 8, -3, 1 \rangle$ ขนานกับเส้นตรง L_2

ดังนั้น เส้นตรง L_1 ไม่ขนานกับ L_2

วิธีทำ ถ้าเส้นตรง L_1 และ L_2 ตัดกันที่จุด (a, b, c) จุดนี้จะต้องสอดคล้องกับสมการทั้งสอง

$$L_1 : a = 1 + 4t,\ b = 5 - 4t,\ c = -1 + 5t$$

$L_2 : a = 2 + 8s,\ b = 4 - 3s,\ c = 5 + s$ จะได้

$$1 + 4t = 2 + 2s \quad \text{......................................}(1)$$

$$5 - 4t = 4 - 3s \quad \text{......................................}(2)$$

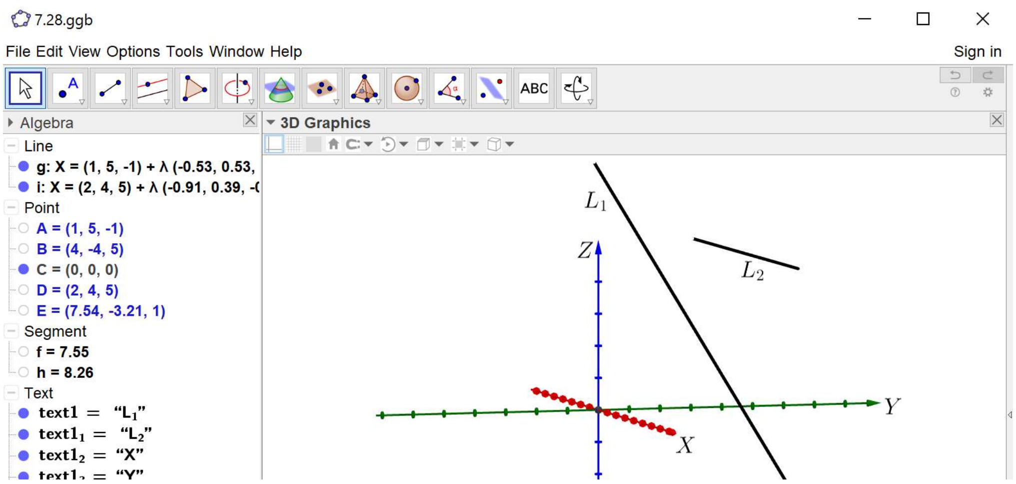
$$-1 + 5t = 5 + s \quad \text{......................................}(3)$$

นำ $(1) + (2)$ จะได้ $s = 0$ และ $t = \dfrac{1}{4}$

จะเห็นว่าค่า $s = 0$ และค่า $t = 1$ ทำให้สมการ (3) เป็นเท็จ

ดังนั้น เส้นตรง L_1 และ L_2 ไม่ตัดกัน

เส้นตรงในปริภูมิ 3 มิติ สองเส้นถ้าไม่ตัดกันและไม่ขนานกันเราเรียกว่า เส้นไขว้ต่างระนาบ ใช้โปรแกรม Geogebra หาคำตอบสำหรับตัวอย่าง 7.3.4 ดังรูปที่ 7.28



รูปที่ 7.28 เส้นไขว้ต่างระนาบ

7.3.1 ระยะทางจากจุดมายังเส้นตรงในปริภูมิสามมิติ

ทฤษฎีบท 7.3.1 ให้ d เป็นระยะตั้งฉากจากจุด Q มายังเส้นตรง L จุด P เป็นจุดหนึ่งบนเส้นตรง L เวกเตอร์ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ที่ขนานกับเส้นตรง L เราจะได้ว่า

$$d = \frac{\left|\overrightarrow{PQ} \times \vec{v}\right|}{\left|\vec{v}\right|}$$

(ดำรง ทิพย์โยธา สุรชัย สมบัติบริบูรณ์ และนัฏฐนาถ ไตรภพ, 2558 : 140-141)

พิสูจน์ จาก $$d = \left|\overrightarrow{PQ}\right| \sin\theta$$

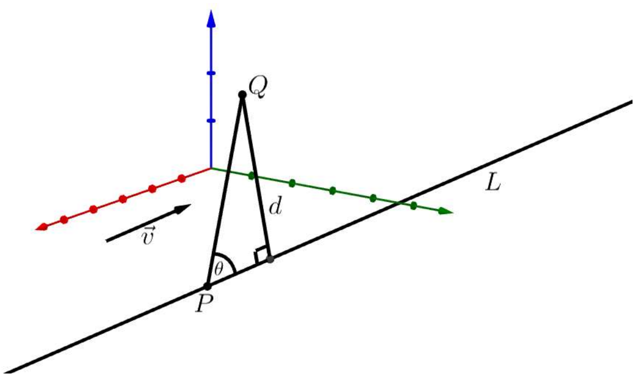
เพราะว่า $\left|\overrightarrow{PQ} \times \vec{v}\right| = \left|\overrightarrow{PQ}\right| \sin\theta \left|\vec{v}\right|$ จะได้

$$\left|\overrightarrow{PQ}\right| \sin\theta = \frac{\left|\overrightarrow{PQ} \times \vec{v}\right|}{\left|\vec{v}\right|}$$

แทนค่า $\left|\overrightarrow{PQ}\right| \sin\theta$ ใน $d = \left|\overrightarrow{PQ}\right| \sin\theta$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} d &= \left|\overrightarrow{PQ}\right| \sin\theta \\ &= \frac{\left|\overrightarrow{PQ} \times \vec{v}\right|}{\left|\vec{v}\right|} \end{aligned}$$

ดังนั้น ระยะทางจากจุด Q มายังเส้นตรง L คือ $d = \dfrac{\left|\overrightarrow{PQ} \times \vec{v}\right|}{\left|\vec{v}\right|}$



รูปที่ 7.29 ระยะทางจากจุด Q มายังเส้นตรง L

ตัวอย่าง 7.3.1.1 จงหาระยะทางจากจุด $(1,1,5)$ ไปยังเส้นตรง $L: x = 1+t,\ y = 3-t,\ z = 2t$

วิธีทำ จากเส้นตรง L จะได้ $\vec{v} = \langle 1,-1,2 \rangle$ และจุด $Q(1,3,0)$

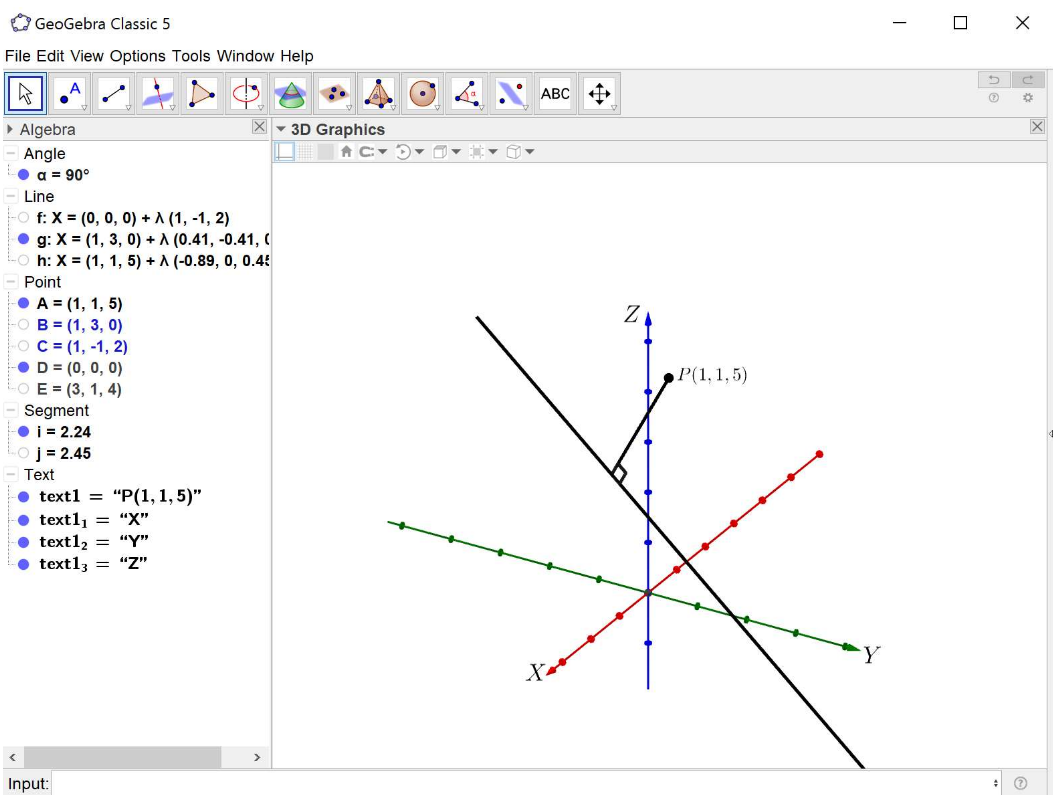
ให้ $P(1,1,5)$ เป็นที่ไม่ได้อยู่บนเส้นตรง L จะได้ว่า $\overrightarrow{PQ} = \langle 0,2,-5 \rangle$

จากทฤษฎีบท 7.3.1 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} d &= \frac{\left|\langle 0,2,-5\rangle \times \langle 1,-1,2\rangle\right|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}} \\ &= \frac{\left|\langle 1,5,2\rangle\right|}{\sqrt{1+1+4}} \\ &= \frac{\sqrt{30}}{\sqrt{6}} = \sqrt{5} \end{aligned}$$

ดังนั้น ระยะทางจากจุด $(1,1,5)$ ไปยังเส้นตรง $L: x = 1+t,\ y = 3-t,\ z = 2t$ คือ $\sqrt{5}$ หน่วย

ใช้โปรแกรม Geogebra หาคำตอบสำหรับตัวอย่าง 7.3.1.1 ดังรูปที่ 7.28



รูปที่ 7.30 ระยะทางจากจุด $(1,1,5)$ ไปยังเส้นตรง $L: x = 1+t,\ y = 3-t,\ z = 2t$

7.4 ระนาบในปริภูมิ 3 มิติ

การประยุกต์ของผลคูณเชิงสเกลาร์ที่สำคัญในทางเรขาคณิตวิเคราะห์ในปริภูมิ 3 มิติอีกอย่างหนึ่งก็คือ สามารถใช้หาสมการของระนาบโดยกำหนดเงื่อนไข ดังนี้ จุดหนึ่งจุดและเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับระนาบหรือจุดสามจุดบนระนาบที่ไม่ได้อยู่บนระนาบเดียวกัน

ทฤษฎีบท 7.4.1 ถ้าระนาบ S ผ่านจุด $P_0(x_0,y_0,z_0)$ จุด $P(x,y,z)$ เป็นจุดใด ๆ บนระนาบ S และระนาบ S ตั้งฉากกับเวกเตอร์ $\vec{n}=\langle a,b,c\rangle$ แล้วสมการรูปทั่วไปของสมการระนาบ คือ

$$ax+by+cz+d=0$$

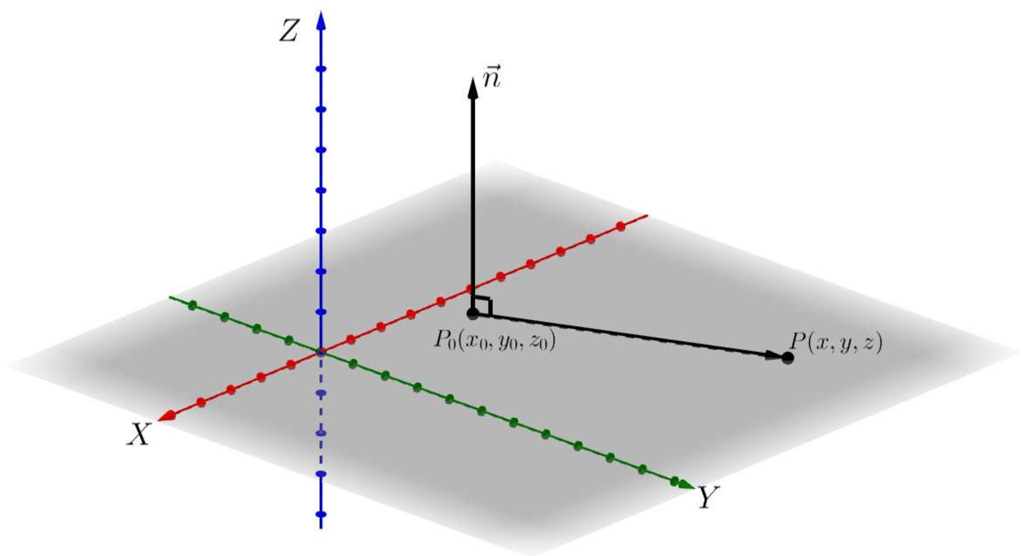
เมื่อ a,b,c และ d เป็นค่าคงที่ โดยที่ a,b และ c ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน

(โฆสิต ชาติกำแหง, 2540 : 120-121 และ Fuller, Gordon & Tarwater, Dolton, 1992 : 322)

พิสูจน์ ให้จุด $P_0(x_0,y_0,z_0)$ เป็นจุดที่อยู่บนระนาบ จุด $P(x,y,z)$ เป็นจุดใด ๆ บนระนาบ และระนาบ S ตั้งฉากกับเวกเตอร์ $\vec{n}=\langle a,b,c\rangle$ จากสมบัติของผลคูณเชิงสเกลาร์ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\vec{n}\cdot\overrightarrow{P_0P}&=0\\ \langle a,b,c\rangle\cdot\langle x-x_0,y-y_0,z-z_0\rangle&=0\\ ax+by+cz-(ax_0+by_0+cz_0)&=0\end{aligned}$$

ให้ $d=-(ax_0+by_0+cz_0)=0$ นั่นคือ $ax+by+cz+d=0$



รูปที่ 7.31 แสดงจุดกับเวกเตอร์บนระนาบ

ตัวอย่าง 7.4.1 จงหาสมการระนาบ S ที่ผ่านจุด $(3,0,7)$ และตั้งฉากกับเวกเตอร์ $\vec{n} = \langle 4,2,-5 \rangle$

วิธีทำ ให้ $P(x,y,z)$ เป็นจุดใด ๆ บนระนาบ S และ $P_0(3,0,7)$ เป็นจุดที่อยู่บนระนาบ S

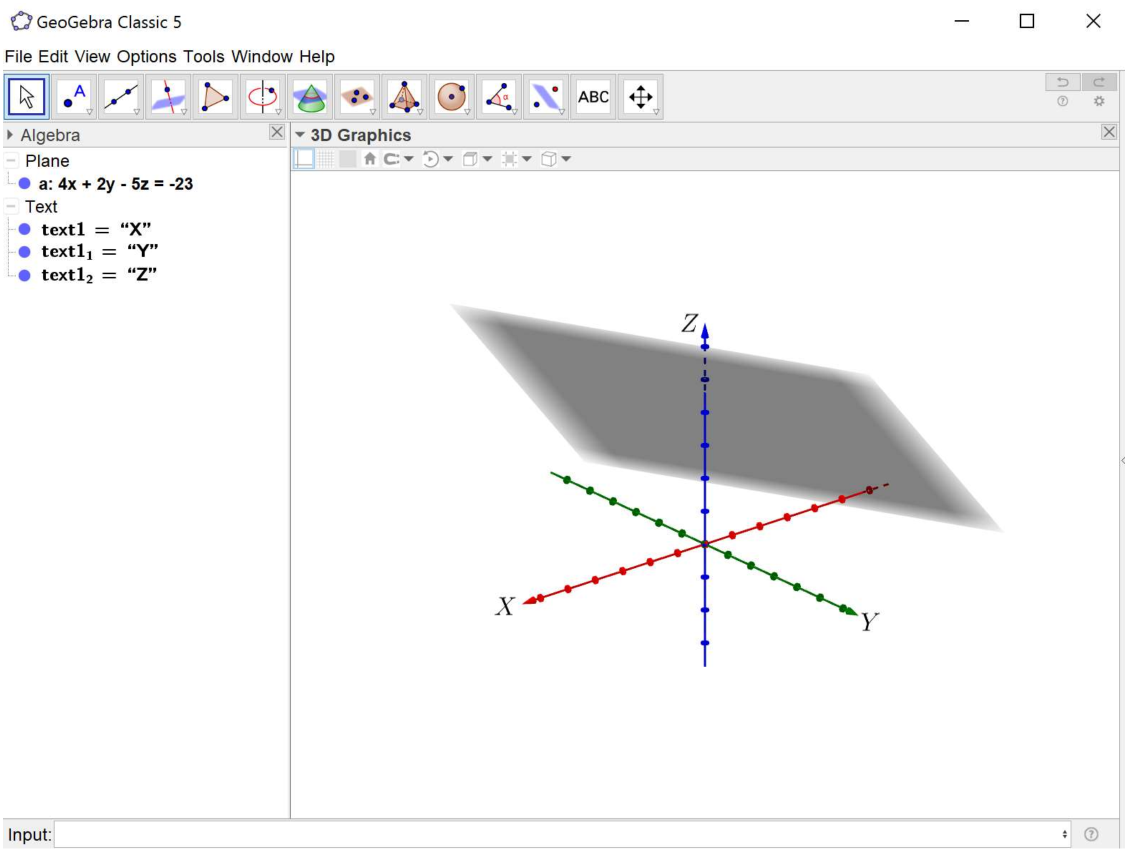
$\therefore \overrightarrow{P_0P} = \langle x-3, y-0, z-7 \rangle$

จากทฤษฎีบท 7.4.1 จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} &= 0 \\
\langle 4,2,-5 \rangle \cdot \langle x-3, y-0, z-7 \rangle &= 0 \\
4(x-3) + 2(y-0) - 5(z-7) &= 0 \\
4x - 12 + 2y - 0 - 5z + 35 &= 0 \\
4x + 2y - 5z + 23 &= 0
\end{aligned}
$$

ดังนั้น สมการระนาบ S คือ $4x + 2y - 5z + 23 = 0$

ใช้โปรแกรม Geogebra หาคำตอบสำหรับตัวอย่าง 7.4.1 ดังรูปที่ 7.32



รูปที่ 7.32 ระนาบ $4x + 2y - 5z + 23 = 0$

ตัวอย่างที่ 3 จงหาสมการระนาบที่ผ่านจุด $A(1,2,3)$, $B(-1,4,5)$, $C(0,1,-6)$

วิธีทำ หาเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับระนาบ จาก $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ จะได้

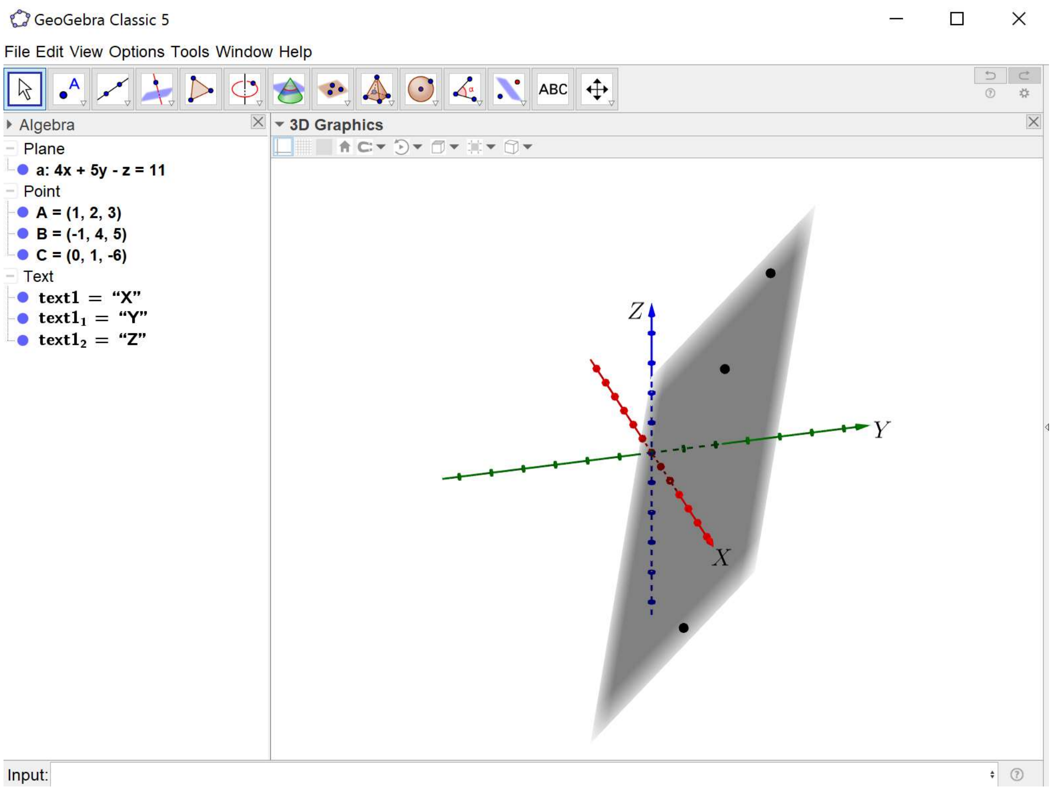
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -9 \end{vmatrix} \\ &= \langle -16, -20, 4 \rangle\end{aligned}$$

เลือกจุด $C(0,1,-6)$ และจากทฤษฎีบท 7.4.1 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} &= 0 \\ \langle -16, -20, 4 \rangle \cdot \langle x-0, y-1, z+6 \rangle &= 0 \\ -16(x-0) - 20(y-1) + 4(z+6) &= 0 \\ 4x + 5y - z &= 11 \end{aligned}$$

ดังนั้น สมการระนาบ $4x+5y-z=11$

ใช้โปรแกรม Geogebra หาคำตอบสำหรับตัวอย่าง 7.4.2 ดังรูปที่ 7.33



รูปที่ 7.33 ระนาบ $4x+5y-z=11$

ตัวอย่าง 7.4.3 จงหาสมการระนาบที่ผ่านจุด $(1,-2,3)$ และตั้งฉากกับเวกเตอร์ที่ขนานกับรอยตัดของระนาบ $x-2y+3z=-1$ และ $3x+y=5$

วิธีทำ รอยตัดของระนาบ $x-2y+3z=-1$ และ $3x+y=5$ คือ

$$\vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \left\langle -3,9,7 \right\rangle$$

สมการระนาบที่ผ่านจุด $(1,-2,3)$ และตั้งฉากกับเวกเตอร์ $\left\langle -3,9,7 \right\rangle$ จะได้ว่า

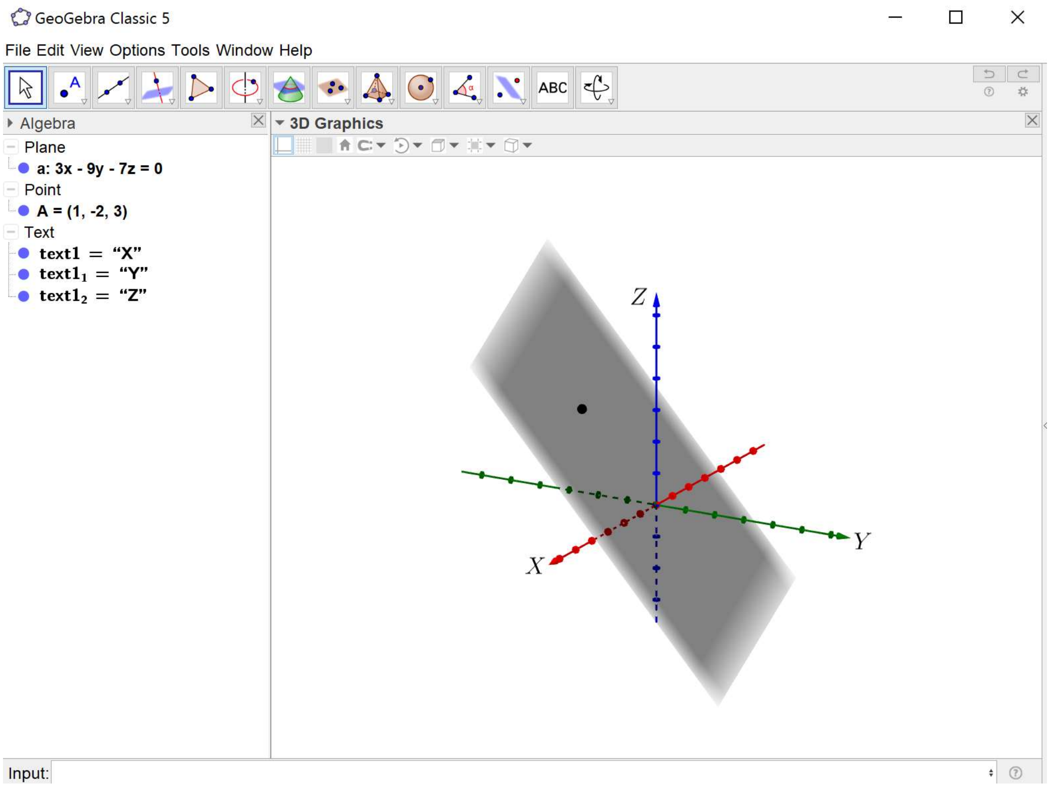
$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$$

$$\left\langle -3,9,7 \right\rangle \cdot \left\langle x-1, y+2, z-3 \right\rangle = 0$$

$$3x-9y-7z = 0$$

ดังนั้น สมการระนาบ $3x-9y-7z=0$

ใช้โปรแกรม Geogebra หาคำตอบสำหรับตัวอย่าง 7.4.3 ดังรูปที่ 7.34



รูปที่ 7.34 ระนาบ $3x-9y-7z=0$

7.4.1 มุมระหว่างระนาบ

บทนิยาม 7.4.1 ให้ $\vec{N}_1$ และ $\vec{N}_2$ เป็น Normal Vector ของระนาบ S_1 และระนาบ S_2 ตามลำดับ มุมระหว่างระนาบ S_1 และระนาบ S_2 หมายถึงมุมระหว่าง $\vec{N}_1$ และ $\vec{N}_2$ โดยที่

$$\cos\theta = \frac{\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2}{\left|\vec{N}_1\right|\left|\vec{N}_2\right|}$$

(Larson, Ron & Edwards H. Bruce, 2011 : 802)

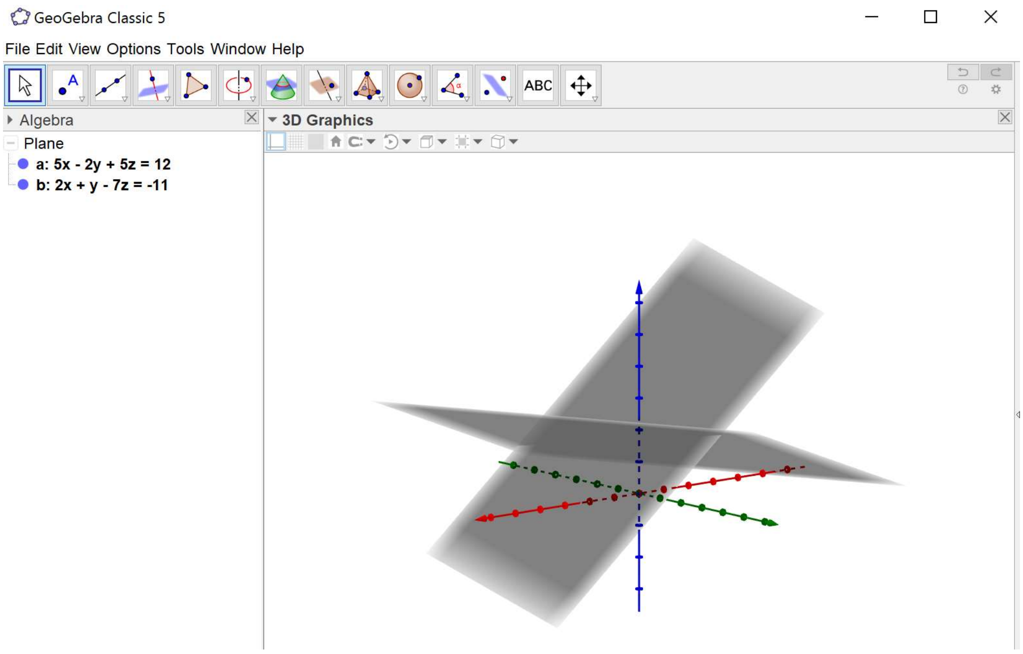
ตัวอย่าง 7.4.1.1 จงหามุมระหว่างระนาบ $5x-2y+5z=12$ และระนาบ $2x+y-7z=-11$

วิธีทำ ให้ $\vec{N}_1 = \langle 5,-2,5 \rangle$ และ $\vec{N}_2 = \langle 2,1,-7 \rangle$ จากนิยาม 7.4.1 จะได้ว่า

$$\cos\theta = \frac{10-2-35}{\sqrt{5^2+(-2)^2+5^2}\sqrt{2^2+1^2+(-7)^2}}$$
$$= -\frac{1}{2}$$
$$\theta = 120^\circ$$

ดังนั้น มุมระหว่าง 2 ระนาบนี้ คือ $\theta = 120^\circ$

ใช้โปรแกรม Geogebra หาคำตอบสำหรับตัวอย่าง 7.4.1.1 ดังรูปที่ 7.35



รูปที่ 7.35 มุมระหว่างระนาบ $5x-2y+5z=12$ และระนาบ $2x+y-7z=-11$

7.4.2 เส้นตรงที่เกิดจากการตัดกันของระนาบ

ดำรง ทิพย์โยธา สุรชัย สมบัติบริบูรณ์ และนัฏฐนาถ ไตรภพ (2558 : 182) ได้กล่าวว่า ระนาบสองระนาบถ้าไม่ขนานกันจะต้องตัดกันเสมอ และรอยตัดของทั้งสองระนาบเป็นเส้นตรงใน 3 มิติ ถ้าให้ $\vec{N}_1$ และ $\vec{N}_2$ เป็น Normal Vector จะได้ว่า $\vec{N}_1 \times \vec{N}_2$ จะเป็นเวกเตอร์ที่ขนานกับสมการที่เกิดจากการตัดกันของระนาบ

ตัวอย่าง 7.4.2.1 จงหาสมการเส้นตรงที่เกิดจากการตัดกันของระนาบ $4x-2y+4z-10=0$ และระนาบ $3x-6y-2z-2=0$

วิธีทำ ให้ $\vec{N}_1 = \langle 4,-2,4\rangle$ และ $\vec{N}_2 = \langle 3,-6,-2\rangle$

หาเวกเตอร์ที่ขนานกับเส้นตรงนี้จาก

$$\vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 4 & -2 & 4 \\ 3 & -6 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= \langle 28,20,-20\rangle$$

$\therefore$ เวกเตอร์ที่ขนานกับเส้นตรงนี้ คือ $\vec{v}_1 = \langle 28,20,-20\rangle$ หรือ $\vec{v} = \langle 7,5,-5\rangle$

หาจุดบนรอยตัดของระนาบ $4x-2y+4z-10=0$ และ $3x-6y-2z-2=0$

โดยให้ $x=0$ จะได้ว่า

$$-2y+4z-10=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$-6y-2z-2=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

นำ $(1)\times 3-(2)$ จะได้

$$14z = 28$$

$$z = 2$$

จาก $x=0$ และ $z=2$ แทนใน $3x-6y-2z-2=0$ จะได้

$$3(0)-6y-2(2)-2=0$$

$$-6y-6=0$$

$$6y=-6$$

$$=-1$$

เพราะฉะนั้น จุดที่อยู่บนรอยตัดของสองระนาบนี้ คือจุด $P_0(0,-1,2)$

ให้ $P(x,y,z)$ เป็นจุดใด ๆ บนรอยตัดของสองระนาบนี้ จะได้สมการเส้นตรง ดังนี้

$$\overrightarrow{P_0P} = t\vec{v}$$
$$\left\langle x-0, y+1, z-2 \right\rangle = t\left\langle 7,5,-5 \right\rangle$$
$$\left\langle x, y+1, z-2 \right\rangle = \left\langle 7t, 5t, -5t \right\rangle$$

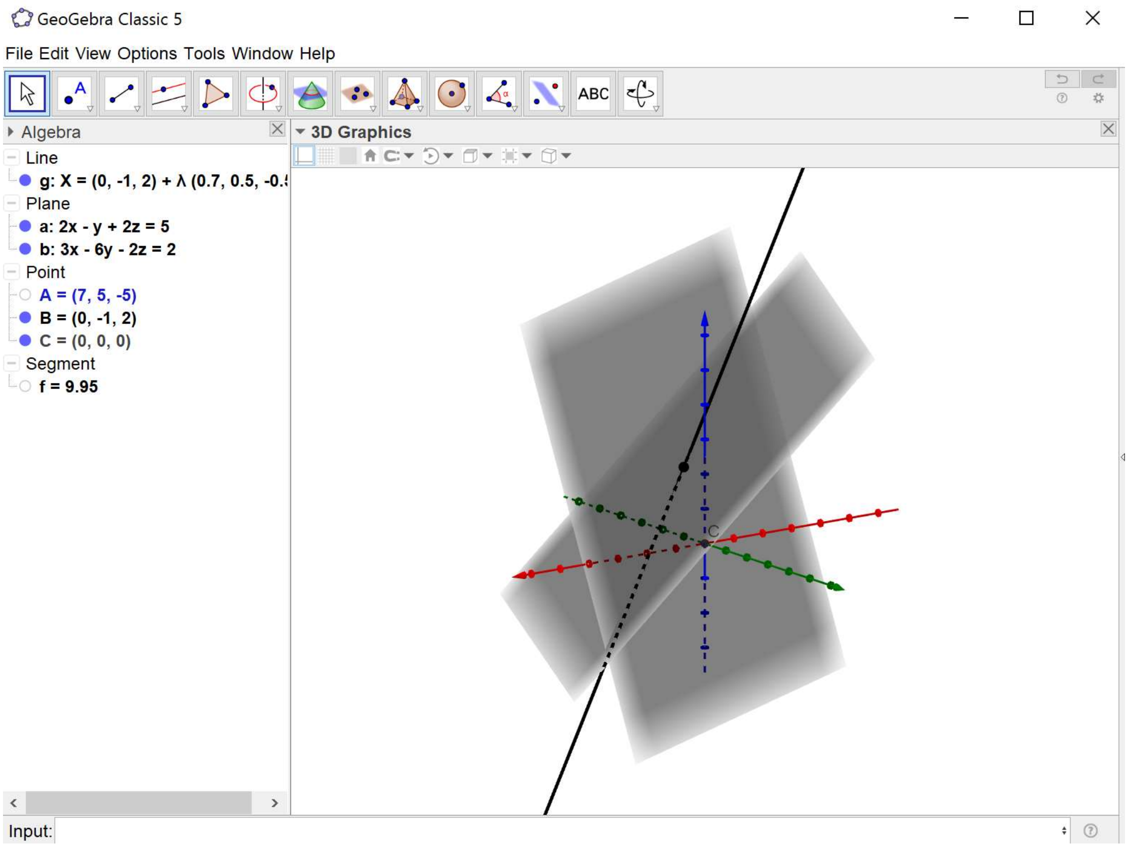
จากสมบัติการเท่ากันของเวกเตอร์ จะได้

$$x = 7t, y+1 = 5t, z-2 = -5t \text{ เมื่อ } -\infty \le t \le \infty$$

หรือ $\dfrac{x}{7} = \dfrac{y+1}{5} = \dfrac{z-2}{-5}$

ดังนั้น สมการเส้นตรงที่เกิดจากการตัดกันของระนาบ $4x-2y+4z-10=0$ และระนาบ $3x-6y-2z-2=0$ คือ $\dfrac{x}{7} = \dfrac{y+1}{5} = \dfrac{z-2}{-5}$

ใช้โปรแกรม Geogebra หาคำตอบสำหรับตัวอย่าง 7.4.2.1 ดังรูปที่ 7.36



รูปที่ 7.36 สมการเส้นตรง $\dfrac{x}{7} = \dfrac{y+1}{5} = \dfrac{z-2}{-5}$

7.4.3 ระยะทางจากจุดไปยังระนาบ

ทฤษฎีบท 7.4.3 ระยะทางระหว่างจุด $P_0(x_0, y_0, z_0)$ กับระนาบ $ax + by + cz + d = 0$ คือ

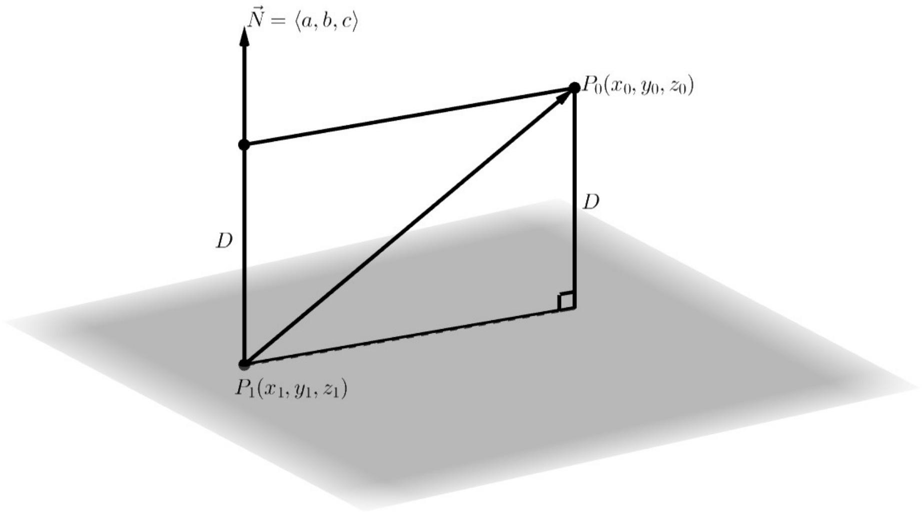
$$D = \frac{\left|ax_0 + by_0 + cz_0 + d\right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

(Fuller, Gordon & Tarwater, Dolton, 1992 : 324-325)

พิสูจน์ กำหนดให้ $P_0(x_0, y_0, z_0)$ เป็นจุดที่ไม่ได้อยู่บนระนาบ $P_1(x_1, y_1, z_1)$ เป็นจุดที่อยู่บนระนาบ $\vec{N} = \langle a, b, c\rangle$ เป็นเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับระนาบ และ D เป็นระยะทางจากจุด $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ไปตั้งฉากกับระนาบ จากสมบัติของภาพฉายเชิงสเกลาร์ จะได้

$$\begin{aligned} D &= \frac{\left|\overrightarrow{P_1P_0} \cdot \vec{N}\right|}{\left|\vec{N}\right|} \\ &= \frac{\left|\langle x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1\rangle \cdot \langle a, b, c\rangle\right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\ &= \frac{\left|ax_0 + by_0 + cz_0 - (ax_1 + by_1 + cz_1)\right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \end{aligned}$$

ให้ $d = -(ax_1 + by_1 + cz_1)$ จะได้ว่า $D = \dfrac{\left|ax_0 + by_0 + cz_0 + d\right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$



รูปที่ 7.37 ระยะทางจากจุด $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ไปยังระนาบ $ax + by + cz + d = 0$

ตัวอย่าง 7.4.3.1 จงหาระยะตั้งฉากจากจุด $(2,-3,1)$ กับระนาบ $2x-3y-6z-14=0$

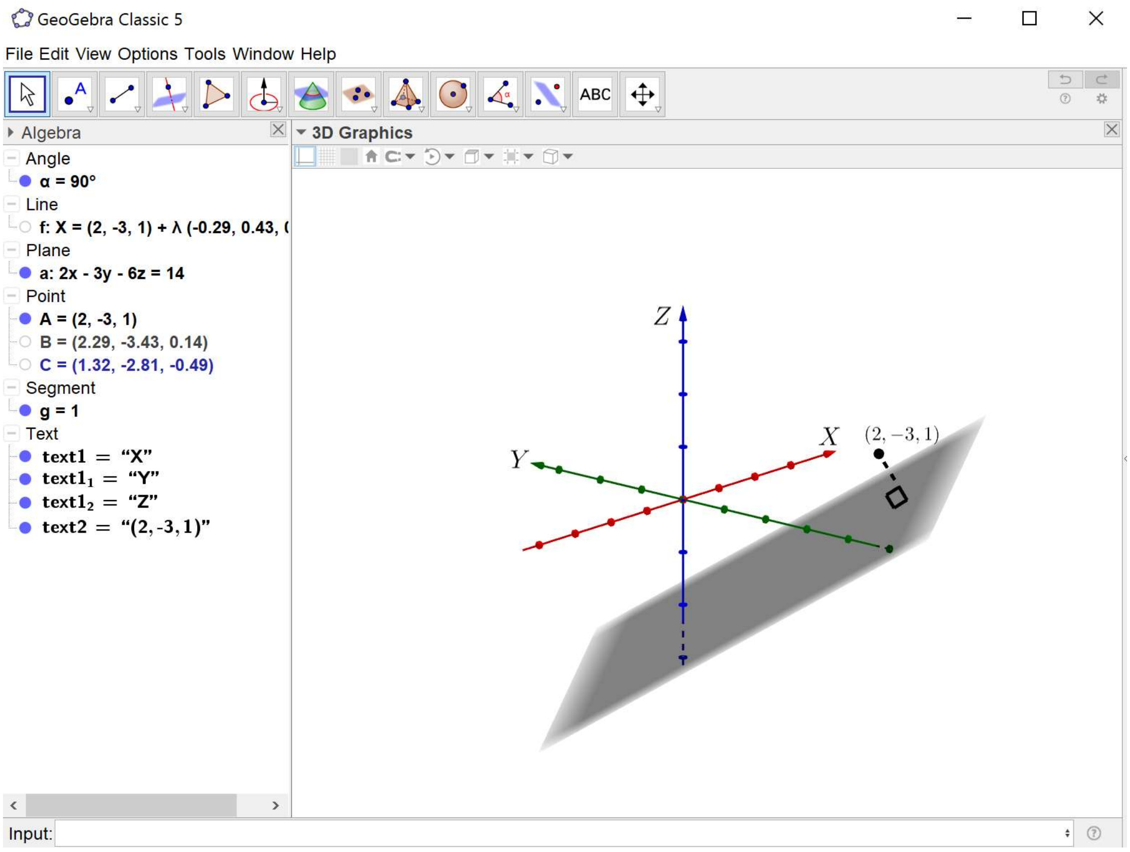
วิธีทำ ให้ D เป็นระยะตั้งฉากจากจุด $(2,-3,1)$ ไปยังระนาบ $2x-3y-6z-14=0$

จากทฤษฎีบท 7.4.3 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} D &= \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \\ &= \frac{|(2)(2)+(-3)(-3)+(-6)(1)+(-14)|}{\sqrt{2^2+(-3)^2+(-6)^2}} \\ &= \frac{|-7|}{\sqrt{49}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

ดังนั้น ระยะตั้งฉากจากจุด $(2,-3,1)$ กับระนาบ $2x-3y-6z-14=0$ คือ 1 หน่วย

ใช้โปรแกรม Geogebra หาคำตอบสำหรับตัวอย่าง 7.4.3.1 ดังรูปที่ 7.38



รูปที่ 7.38 ระยะตั้งฉากจากจุด $(2,-3,1)$ กับระนาบ $2x-3y-6z-14=0$

ตัวอย่าง 7.4.3.2 จงหาระยะตั้งฉากจากจุด $(5,-3,3)$ กับระนาบ $2x-y+2z+5=0$

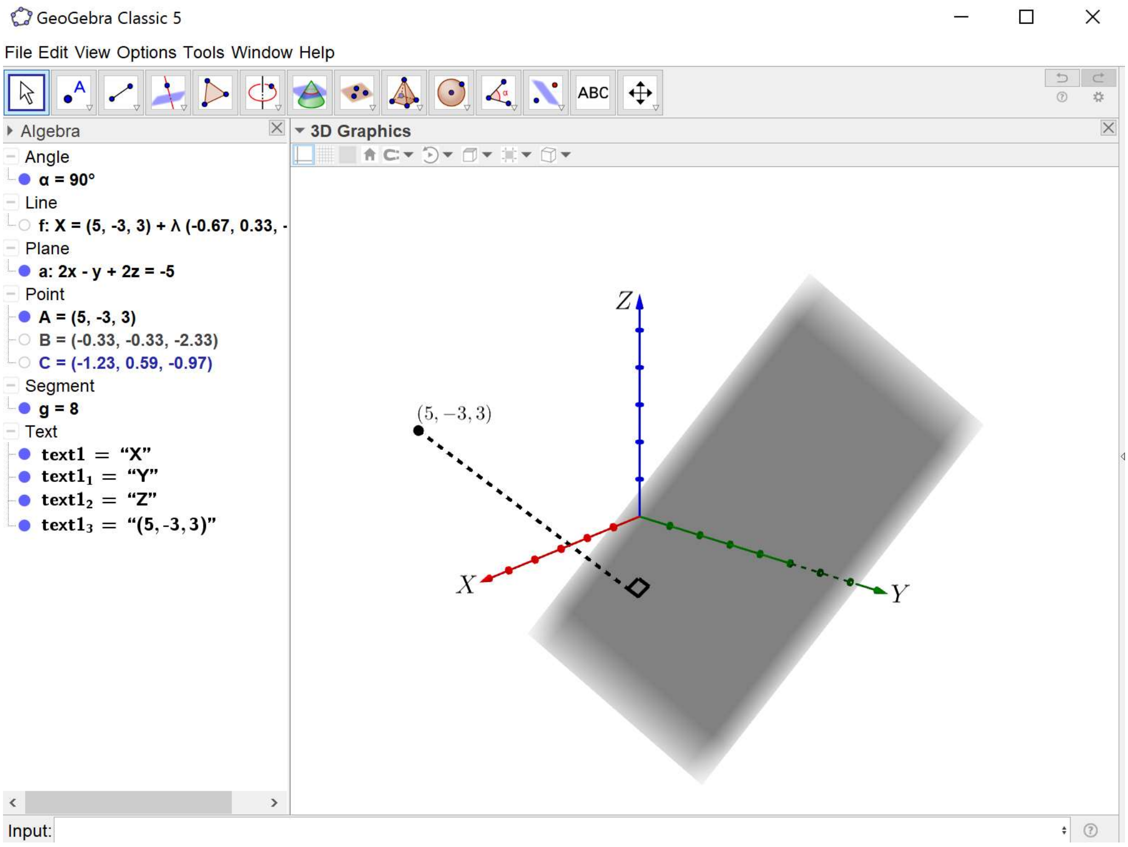
วิธีทำ ให้ D เป็นระยะตั้งฉากจากจุด $(5,-3,3)$ ไปยังระนาบ $2x-y+2z+5=0$

จากทฤษฎีบท 7.4.3 จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
D &= \frac{\left|ax_0+by_0+cz_0+d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \\
&= \frac{\left|(2)(5)+(-1)(-3)+(2)(3)+5\right|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}} \\
&= \frac{|24|}{\sqrt{9}} \\
&= 8
\end{aligned}
$$

ดังนั้น ระยะตั้งฉากจากจุด $(5,-3,3)$ กับระนาบ $2x-y+2z+5=0$ คือ 8 หน่วย

ใช้โปรแกรม Geogebra หาคำตอบสำหรับตัวอย่าง 7.4.3.2 ดังรูปที่ 7.39



รูปที่ 7.39 ระยะตั้งฉากจากจุด $(5,-3,3)$ กับระนาบ $2x-y+2z+5=0$

7.4.4 ระยะทางระหว่างระนาบที่ขนานกันสองระนาบ

ทฤษฎีบท 7.4.4 ระยะห่างระหว่างระนาบ $ax+by+cz+d_1=0$ กับระนาบ $ax+by+cz+d_2=0$ คือ

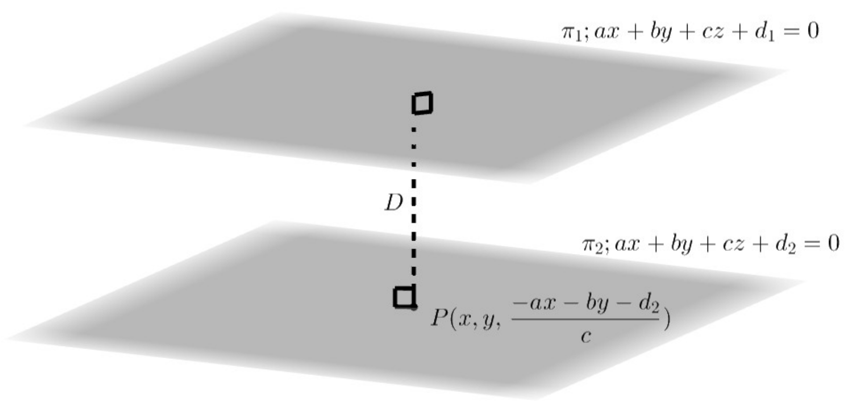
$$D=\frac{\left|d_1-d_2\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

(ดำรง ทิพย์โยธา สุรชัย สมบัติบริบูรณ์ และนัฏฐนาถ ไตรภพ, 2558 : 179-180)

พิสูจน์ กำหนดให้ระนาบ $\pi_1\,;ax+by+cz+d_1=0$ และระนาบ $\pi_2\,;ax+by+cz+d_2=0$ D เป็นระยะตั้งฉากระหว่างระนาบ π_1 และระนาบ π_2 และให้จุด $P\left(x,y,\dfrac{-ax-by-d_2}{c}\right)$ เป็นจุดที่อยู่บนระนาบ π_2 จากทฤษฎีบท 7.4.3 ระยะห่างระหว่างจุด P ไปยังระนาบ π_1 คือ

$$\begin{aligned} D &= \frac{\left|ax+by+c\left(\dfrac{-ax-by-d_2}{c}\right)+d_1\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \\ &= \frac{\left|ax+by-ax-by-d_2+d_1\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \\ &= \frac{\left|d_1-d_2\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \end{aligned}$$

ดังนั้น ระยะห่างระหว่างระนาบ π_1 และระนาบ π_2 คือ $D=\dfrac{\left|d_1-d_2\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$



รูปที่ 7.40 ระยะห่างระหว่างระนาบ $ax+by+cz+d_1=0$ กับระนาบ $ax+by+cz+d_2=0$

ตัวอย่าง 7.4.4.1 จงหาระยะห่างระหว่างระนาบ $2x-3y+6z+1=0$ กับระนาบ $2x-3y+6z+15=0$

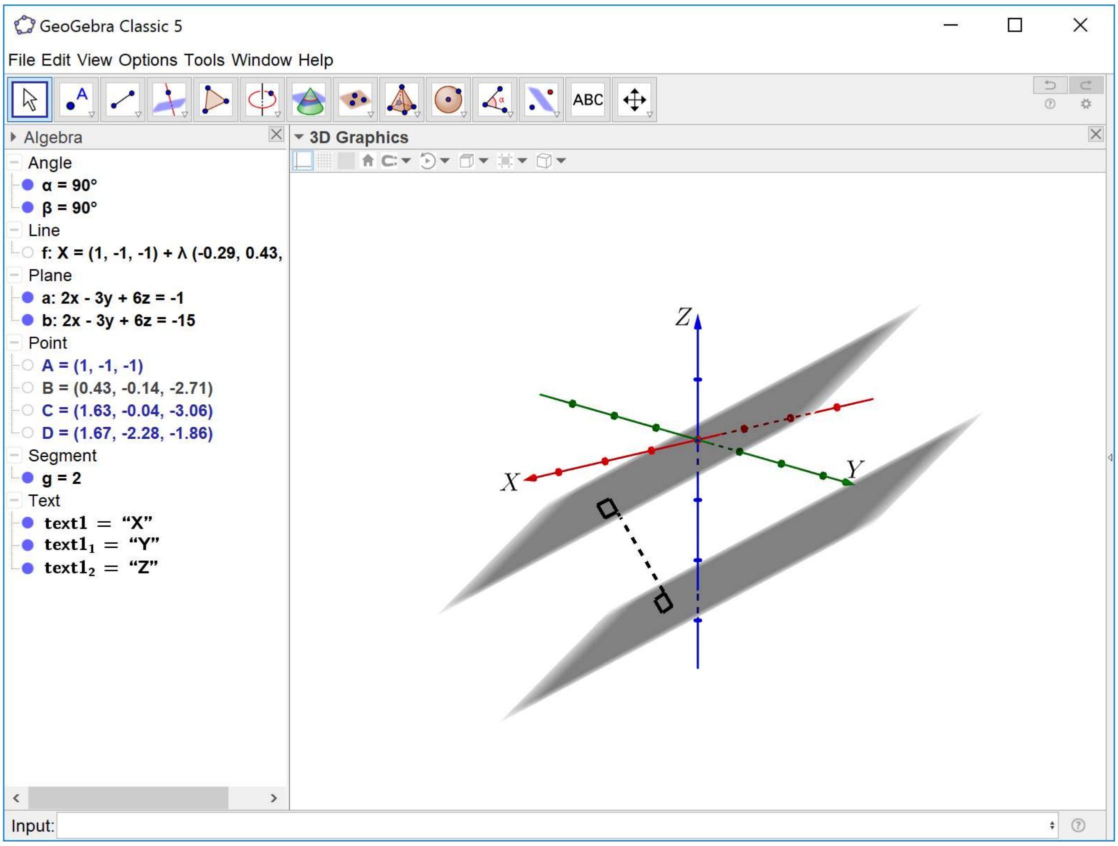
วิธีทำ ให้ D เป็นระยะตั้งฉากระหว่างระนาบ $2x-3y+6z+1=0$ กับระนาบ $2x-3y+6z+15=0$

จากทฤษฎีบท 7.4.4 จะได้ว่า

$$D=\frac{|d_1-d_2|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$
$$=\frac{|1-15|}{\sqrt{2^2+(-3)^2+6^2}}$$
$$=2$$

ดังนั้น ระยะห่างระหว่าง $2x-3y+6z+1=0$ กับ $2x-3y+6z+15=0$ คือ 2 หน่วย

ใช้โปรแกรม Geogebra หาคำตอบสำหรับตัวอย่าง 7.4.4.1 ดังรูปที่ 7.341



รูปที่ 7.41 ระยะห่างระหว่างระนาบ $2x-3y+6z+1=0$ กับระนาบ $2x-3y+6z+15=0$

ตัวอย่าง 7.4.4.2 จงหาระยะห่างระหว่างระนาบ $x+2y-2z=-3$ และ $x+2y-2z=15$

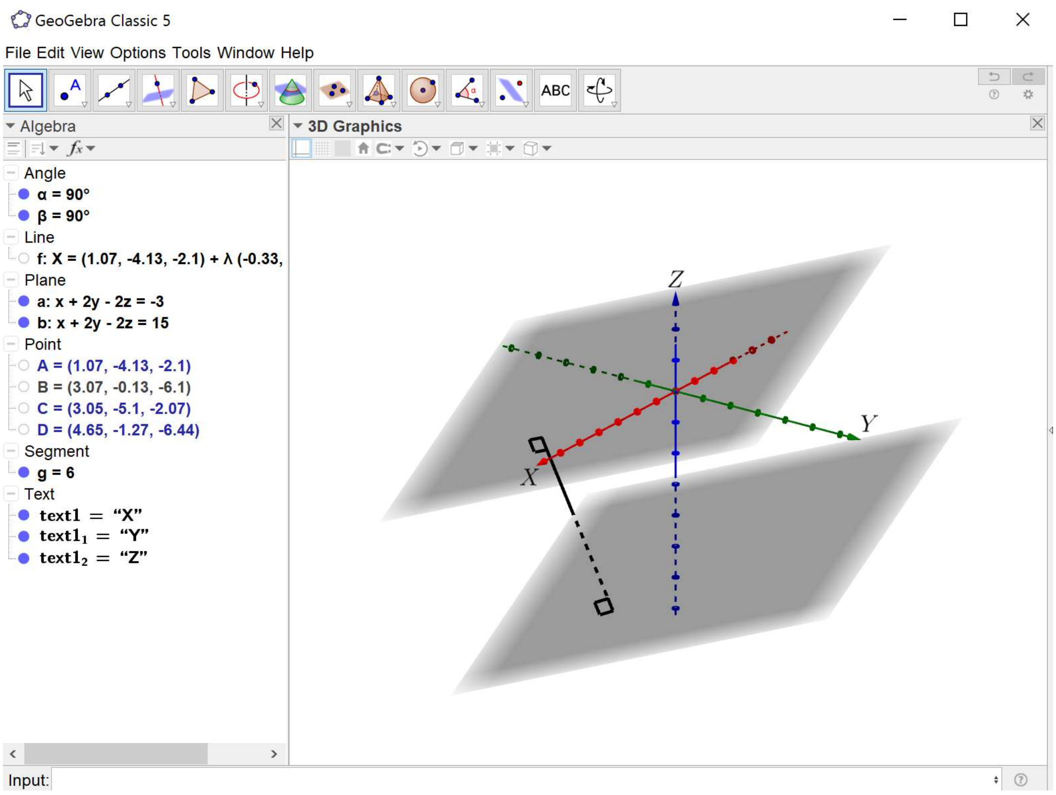
วิธีทำ ให้ D เป็นระยะตั้งฉากระหว่างระนาบ $x+2y-2z=-3$ กับระนาบ $x+2y-2z=15$

จากทฤษฎีบท 7.4.4 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} D &= \frac{|d_1-d_2|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \\ &= \frac{|-3-15|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}} \\ &= \frac{|-18|}{\sqrt{1+4+4}} \\ &= 6 \end{aligned}$$

ดังนั้น ระยะห่างระหว่าง $x+2y-2z=-3$ กับ $x+2y-2z=15$ คือ 6 หน่วย

ใช้โปรแกรม Geogebra หาคำตอบสำหรับตัวอย่าง 7.4.4.2 ดังรูปที่ 7.42



รูปที่ 7.42 ระยะห่างระหว่างระนาบ $x+2y-2z=-3$ กับระนาบ $x+2y-2z=15$

สรุปท้ายบทที่ 7

สำหรับบทที่ 7 นั้นเราได้ศึกษาเรื่องเรขาคณิตในปริภูมิ 3 มิติ ซึ่งในปริภูมิ 3 มิตินั้นประกอบไปด้วยระนาบ 3 แผ่น ตั้งฉากซึ่งกันและกัน เรียกว่า ระนาบพิกัด (Coordinate Planes) ได้แก่ ระนาบ XY ระนาบ XZ และระนาบ YZ ระนาบทั้งสามตัดกันในแนวตั้งฉาก รอยตัดเกิดเป็นเส้นตรง 3 เส้น ตั้งฉากซึ่งกันและกัน เรียกว่าแกนพิกัด (Coordinate Axes) คือ แกน X แกน Y และแกน Z แกนทั้งสามตัดกันที่จุด O เรียกว่าจุดกำเนิด (Origin) ระนาบพิกัดแบ่งปริภูมิ 3 มิติ ออกเป็น 8 อัฐภาค และสูตรหรือทฤษฎีที่เกี่ยวข้องในบทนี้ประกอบไปด้วย

1. ระยะทางระหว่างจุด $P_1(x_1,y_1,z_1)$ และจุด $P_2(x_2,y_2,z_2)$ คือ

$$\left|P_1P_2\right| = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$$

2. ถ้า $P(x,y,z)$ แบ่งส่วนของส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจุด $P_1(x_1,y_1,z_1)$ และ $P_2(x_2,y_2,z_2)$ ออกเป็นอัตราส่วน $r = \dfrac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}}$ แล้วจะได้ว่า

$$\begin{aligned} x &= x_1 + r(x_2 - x_1) \\ y &= y_1 + r(y_2 - y_1) \\ z &= z_1 + r(z_2 - z_1) \end{aligned}$$

3. ถ้า $P(x,y,z)$ เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจุด $P_1(x_1,y_1,z_1)$ และจุด $P_2(x_2,y_2,z_2)$ แล้วจะได้ว่า

$$x = \frac{x_1+x_2}{2},\ y = \frac{y_1+y_2}{2},\ z = \frac{z_1+z_2}{2}$$

4. เวกเตอร์ $\overrightarrow{PQ}$ เมื่อมีจุดเริ่มต้นที่จุด $P(x_1,y_1,z_1)$ และจุดปลายที่ $Q(x_2,y_2,z_2)$ มี ตัวแทนมาตรฐานเป็น $\overrightarrow{PQ} = (x_2-x_1)\hat{i} + (y_2-y_1)\hat{k} + (z_2-z_1)\hat{j}$ และขนาดของ $\overrightarrow{PQ}$ เขียนแทนด้วย $\left|\overrightarrow{PQ}\right|$ โดยที่ $\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

5. ให้ $\vec{u} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ และ $\hat{v} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$ ผลคูณเชิงสเกลาร์เขียนแทนด้วย $\vec{u}\cdot\vec{v}$ นิยามโดย $\vec{u}\cdot\vec{v} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ หรือ $\vec{u}\cdot\vec{v} = \left|\vec{u}\right|\left|\vec{v}\right|\cos\theta$

- ภาพฉายเชิงเวกเตอร์ของ $\vec{u}$ บน $\vec{v}$ คือ $\vec{u}_{\vec{v}} = \left(\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\left|\vec{v}\right|^2}\right)\vec{v}$
- ภาพฉายเชิงสเกลาร์ของ $\vec{u}$ บน $\vec{v}$ คือ $\left|\vec{u}_{\vec{v}}\right| = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\left|\vec{v}\right|}$

- ให้ $\vec{u} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ และ $\hat{v} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ในปริภูมิ 3 มิติ ผลคูณเชิงเวกเตอร์เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\vec{u} \times \vec{v}$ นิยามโดย

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

- สมการเส้นตรงในปริภูมิ 3 มิติ เขียนได้ 3 แบบ ดังนี้
  1. $\left\langle x, y, z \right\rangle = \left\langle x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct \right\rangle$ เรียกว่า สมการในรูปเวกเตอร์
  2. $x = x_0 + at,\ y = y_0 + bt,\ z = z_0 + ct$ เรียกว่า สมการอิงตัวแปรเสริม
  3. $\dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b} = \dfrac{z - z_0}{c}$ เรียกว่า สมการสมมาตร
- ระยะทางจากจุด Q มายังเส้นตรง L คือ $d = \dfrac{\left|\overrightarrow{PQ} \times \vec{v}\right|}{\left|\vec{v}\right|}$
- ถ้าระนาบ S ผ่านจุด $P_0(x_0, y_0, z_0)$ จุด $P(x, y, z)$ เป็นจุดใด ๆ บนระนาบ S และระนาบ S ตั้งฉากกับ $\vec{n} = \left\langle a, b, c \right\rangle$ แล้วสมการรูปทั่วไปของสมการระนาบ คือ

$$ax + by + cz + d = 0$$

- ให้ $\vec{N}_1$ และ $\vec{N}_2$ เป็น Normal Vector ของระนาบ S_1 และระนาบ S_2 ตามลำดับ มุมระหว่างระนาบ S_1 และระนาบ S_2 หมายถึงมุมระหว่าง $\vec{N}_1$ และ $\vec{N}_2$ โดยที่ $\cos\theta = \dfrac{\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2}{\left|\vec{N}_1\right|\left|\vec{N}_2\right|}$
- ระนาบสองระนาบถ้าไม่ขนานกันจะต้องตัดกันเสมอ และรอยตัดของทั้งสองระนาบเป็นเส้นตรงใน 3 มิติ ถ้าให้ $\vec{N}_1$ และ $\vec{N}_2$ เป็น Normal Vector จะได้ว่า $\vec{N}_1 \times \vec{N}_2$ จะเป็นเวกเตอร์ที่ขนานกับสมการที่เกิดจากการตัดกันของระนาบ
- ระยะทางระหว่างจุด $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ไปยังระนาบ $ax + by + cz + d = 0$ คือ

$$D = \frac{\left|ax_0 + by_0 + cz_0 + d\right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

- ระยะห่างระหว่างระนาบ $ax + by + cz + d_1 = 0$ กับ $ax + by + cz + d_2 = 0$ คือ

$$D = \frac{\left|d_1 - d_2\right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

แบบฝึกหัดบทที่ 7

จงหาสมการสมมาตรและสมการอิงตัวแปรเสริมของเส้นตรงตามเงื่อนไขต่อไปนี้ (ข้อ 7.1 - 7.6)

7.1 ผ่านจุด $P(4,-3,2)$ และขนานกับเวกเตอร์ $\vec{v}=\langle 1,-3,2\rangle$

7.2 ผ่านจุด $P(1,1,-2)$ และขนานกับเวกเตอร์ $\vec{v}=5\hat{i}+4\hat{j}-2\hat{k}$

7.3 ผ่านจุด $P(0,0,0)$ และขนานกับเวกเตอร์ $\vec{v}=2\hat{i}-3\hat{k}$

7.4 ผ่านจุด $P_1(2,4,-1)$ และจุด $P_2(3,2,-4)$

7.5 ผ่านจุด $P_1(-3,2,1)$ และจุด $P_2(9,0,-1)$

7.6 ผ่านจุด $P_1(2,2,2)$ และจุด $P_2(-1,-2,-3)$

ระยะทางจากจุดไปยังเส้นตรงที่กำหนดให้ต่อไปนี้ (ข้อ 7.7 - 7.12)

7.7 จุด $(2,1,3)$ และเส้นตรง $x=2+2t, y=-4t, z=1-t$

7.8 จุด $(-1,4,3)$ และเส้นตรง $x=10+4t, y=-3, z=4t$

7.9 จุด $(3,-1,4)$ และเส้นตรง $4-x=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z+5}{3}$

7.10 จุด $(0,0,12)$ และเส้นตรง $\dfrac{x}{4}=-\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{2}$

7.11 จุด $(2,1,-1)$ และเส้นตรง $x=2t, y=1+2t, z=2t$

7.12 จุด $(0,0,0)$ และเส้นตรง $\langle x-1,y-2,z-3\rangle = t\langle 0,1,-2\rangle$

จงหาสมการระนาบที่กำหนดตามเงื่อนไขต่อไปนี้ (ข้อ 7.13 - 7.20)

7.13 ผ่านจุด $P(0,2,-1)$ และตั้งฉากกับเวกเตอร์ $\vec{v}=\langle 3,-2,-1\rangle$

7.14 ผ่านจุด $P(1,-1,3)$ และขนานกับระนาบ $2x+3y-z=5$

7.15 ผ่านจุด $P(2,4,5)$ และตั้งฉากเส้นตรง $x=5+t, y=1, z=4t$

7.16 ผ่านจุด $P(1,-1,2)$ และตั้งฉากกับเวกเตอร์ $\overrightarrow{AB}$ โดยที่ $B(2,1,3)$

7.17 ผ่านจุด $P(0,2,-1)$ และตั้งฉากกับเวกเตอร์ $\vec{v}=\langle 3,-2,-1\rangle$

7.18 ผ่านจุด $(0,1,2),(2,0,3)$ และจุด $(4,3,0)$

7.19 ตั้งฉากกับเวกเตอร์ $\vec{v}=4\hat{i}-\hat{j}-\hat{k}$ และผ่านจุดกำเนิด

7.20 ตั้งฉากกับส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจุด $P(4,0,6)$ และจุด $Q(0,-8,2)$ และผ่านจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง PQ

จงหามุมระหว่างระนาบสองระนาบต่อไปนี้ (ข้อ 7.21 - 7.26)

7.21 ระนาบ $x+y-1=0$ และระนาบ $2x+y-2z-2=0$

7.22 ระนาบ $5x+y-z=10$ และระนาบ $x-2y+3z=-1$

7.23 ระนาบ $2x+2y+2z=3$ และระนาบ $2x+2y-z=5$

7.24 ระนาบ $x+y+z=1$ และระนาบ XY

7.25 ระนาบ $4x+3y=12$ และระนาบ $3x+2y+6z=6$

7.26 ระนาบ $2x+2y-z=3$ และระนาบ $x+2y+z=2$

จงหาสมการเส้นตรงซึ่งเป็นรอยตัดของระนาบสองระนาบต่อไปนี้ (ข้อ 7.26 - 7.30)

7.27 ระนาบ $x+y+z=9$ และระนาบ $2x+y-z=-3$

7.28 ระนาบ $x+y-z=-8$ และระนาบ $2x-y+2z=6$

7.29 ระนาบ $x-y-2z=-1$ และระนาบ $x-3y-3z=-7$

7.30 ระนาบ $x-y-2z+8=0$ และระนาบ $2x-y-2z+4=0$

จงหาระยะทางระหว่างจุดไปยังระนาบที่กำหนดให้ต่อไปนี้ (ข้อ 7.31 - 7.34)

7.31 จุด $(2,-3,4)$ ไปยังระนาบ $2x+y+2z=13$

7.32 จุด $(0,-1,0)$ ไปยังระนาบ $4y+3z+12=0$

7.33 จุด $(a,-a,2a)$ ไปยังระนาบ $2ax-y+az=4a$, $a\neq 0$

7.34 จุด $(-1,2,1)$ ไปยังระนาบที่ผ่านจุด $(0,0,0),(1,2,4)$ และจุด $(-2,-1,1)$

7.35 จุด $(-1,2,1)$ ไปยังระนาบที่ผ่านจุด $(-3,5,1)$ และตั้งฉากกับ $\vec{v}=\left\langle 3,1,5\right\rangle$

จงหาระยะทางระหว่างระนาบสองระนาบที่ขนานกันในแต่ละข้อต่อไปนี้ (ข้อ 7.36 - 7.42)

7.36 ระนาบ $x-4y-2z=4$ และระนาบ $x-4y-2z=10$

7.37 ระนาบ $x+2y=6$ และระนาบ $x+2y=1$

7.38 ระนาบ $2x-y+2z=9$ และระนาบ $2x-y+2z=-12$

7.39 ระนาบ $x-y-z=4$ และระนาบ $2x-2y-2z=-3$

7.40 ระนาบ $2x-y+2z=4$ และระนาบ $2x-y+2z=-2$

7.41 ระนาบ $x-y-2z+8=0$ และระนาบ $5x-5y-10z=57$

7.42 ระนาบ $2x-y-2z+4=0$ และระนาบ $-8x+4y+8z+63=0$