บทที่ 8
ผิวกำลังสอง (Quadric Surface)

พิจารณาสมการ $f(x,y)=0$ ในระนาบ XY เมื่อ $f(x,y)$ เป็นความสัมพันธ์ในระบบพิกัดฉาก XY ซึ่งอยู่ในรูปคู่ลำดับ (x,y) สมการ $f(x,y)=0$ หนึ่งสมการกำหนดรากที่เป็นจำนวนจริงของสมการนี้ขึ้นจำนวนหนึ่ง แต่ละชุดของคู่ลำดับ (x,y) จะกำหนดจุด (x,y) ในระนาบ XY จุดทั้งหมดที่เป็นค่ารากของสมการ $f(x,y)=0$ นี้จะกำหนดกราฟขึ้น เรียกว่าเส้นโค้ง (Curve) เช่น $x^2+y^2=4$ แทนวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิดรัศมี 2 หน่วย $(x-1)^2=(y-2)$ แทนเส้นโค้งพาราโบลาที่มีลักษณะหงายจุดยอดอยู่ที่จุด $(1,2)$ เป็นต้น

ในที่นี้เราจะพิจารณาสมการ $f(x,y,z)=0$ เมื่อ $f(x,y,z)$ เป็นความสัมพันธ์ในระบบพิกัดฉาก XYZ ซึ่งอยู่ในรูป (x,y,z) ในทำนองเดียวกัน สมการ $f(x,y,z)=0$ สมการหนึ่งจะกำหนดรากที่เป็นจำนวนจริงของสมการนี้ขึ้นจำนวนหนึ่ง และแต่ละชุดของ (x,y,z) จะกำหนดจุด (x,y,z) ในระบบพิกัดฉาก XYZ จุดทั้งหมดที่เป็นรากของสมการ $f(x,y,z)=0$ จะกำหนดกราฟขึ้น จะเรียกว่าพื้นผิว (Surface) พื้นผิวนี้อาจจะเป็นจุด เส้นตรง ระนาบ ทรงกลม หรือ พื้นผิวของรูปทรงทางเรขาคณิตรูปใดรูปหนึ่งก็ได้ ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงสมบัติบางอย่างของพื้นผิวที่จะนำไปช่วยในการพิจารณาลักษณะของพื้นผิวที่จะกล่าวถึงในหัวข้อต่อ ๆ ไป ก่อนอื่นจะกล่าวถึงการพิจารณาลักษณะของพื้นผิว ซึ่งประกอบไปด้วยจุดตัดของพื้นผิวกับแกนพิกัด การสมมาตรของพื้นผิว รอยตัดของพื้นผิว และขอบเขตของพื้นผิว

8.1 การพิจารณาลักษณะของพื้นผิว

Larson, Ron & Edwards H. Bruce (2011 : 813) ได้กล่าวว่า พื้นผิวกำลังสองเป็นพื้นผิวในปริภูมิ 3 มิติ ซึ่งอยู่ในเทอมของ x, y และ z ซึ่งมีรูปทั่วไปเป็น

$$Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Exz+Fyz+Gx+Hy+Iz+J=0$$

เมื่อ $A,B,C,\ldots,J$ เป็นค่าคงที่ ในการศึกษาพื้นผิวกำลังสอง เราจะพิจารณาดังนี้

- จุดตัดของพื้นผิวกับแกนพิกัด
- การสมมาตรของพื้นผิว
- รอยตัดของพื้นผิว
- ขอบเขตของพื้นผิว

8.1.1 จุดตัดของพื้นผิวกับแกนพิกัด (Intercept)

ดำรง ทิพย์โยธา ยุวรีย์ พันธ์กล้า นัฏฐนาถ ไตรภพ และสุรชัย สมบัติบริบูรณ์ (2558 : 22) ได้กล่าวว่า ในการพิจารณาจุดตัดของพื้นผิวกับแกนพิกัด X, Y และ Z สามารถทำได้ดังนี้

พิจารณาจุดตัดแกน X ให้แทนค่า $y = 0$ และ $z = 0$ ในสมการพื้นผิว

พิจารณาจุดตัดแกน Y ให้แทนค่า $x = 0$ และ $z = 0$ ในสมการพื้นผิว

พิจารณาจุดตัดแกน Z ให้แทนค่า $x = 0$ และ $y = 0$ ในสมการพื้นผิว

ตัวอย่าง 8.1.1.1 กำหนดสมการพื้นผิว $2x^2 + y^2 + 2z^2 = 8$ จงหาจุดตัดแกน X, Y และ Z

วิธีทำ หาจุดตัดแกน X ให้ $y = 0$ และ $z = 0$ จะได้

$$\begin{aligned} 2x^2 + y^2 + 2z^2 &= 8 \\ 2x^2 + (0)^2 + 2(0)^2 &= 8 \\ x^2 &= 4 \\ x &= \pm 2 \end{aligned}$$

ดังนั้น จุดตัดแกน X คือจุด $(2,0,0)$ และจุด $(-2,0,0)$

หาจุดตัดแกน Y ให้ $x = 0$ และ $z = 0$ จะได้

$$\begin{aligned} 2x^2 + y^2 + 2z^2 &= 8 \\ 2(0)^2 + y^2 + 2(0)^2 &= 8 \\ y &= \pm 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

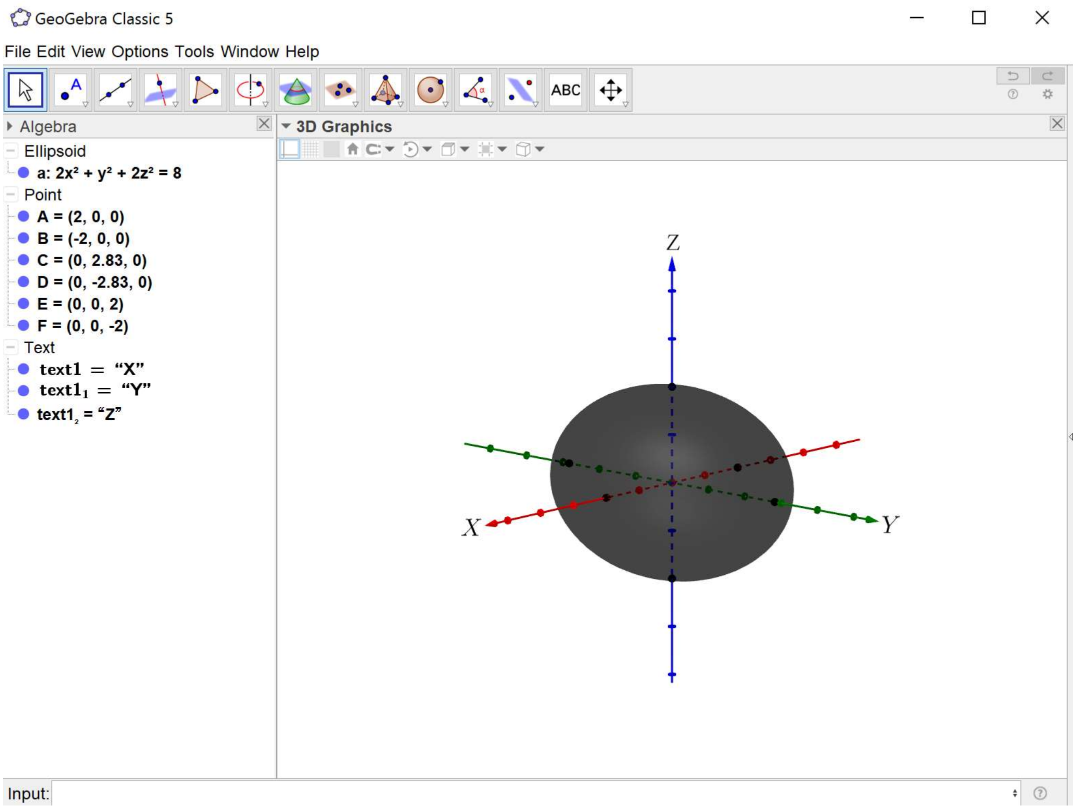
ดังนั้น จุดตัดแกน Y คือจุด $(0,2\sqrt{2},0)$ และจุด $(0,-2\sqrt{2},0)$

หาจุดตัดแกน Z ให้ $x = 0$ และ $y = 0$ จะได้

$$\begin{aligned} 2x^2 + y^2 + 2z^2 &= 8 \\ 2(0)^2 + (0)^2 + 2z^2 &= 8 \\ z^2 &= 4 \\ z &= \pm 2 \end{aligned}$$

ดังนั้น จุดตัดแกน Z คือจุด $(0,0,2)$ และจุด $(0,0,-2)$

ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 8.1.1.1 ดังรูป 8.1



รูปที่ 8.1 แสดงจุดตัดของ $2x^2 + y^2 + 2z^2 = 8$ กับแกนพิกัด X, Y และ Z

ตัวอย่าง 8.1.1.2 กำหนดสมการพื้นผิว $z = x^2 + 2y^2$ จงหาจุดตัดแกน X, Y และ Z

วิธีทำ หาจุดตัดแกน X ให้ $y = 0$ และ $z = 0$ จะได้

$$z = x^2 + 2y^2$$
$$0 = x^2 + 2(0)^2$$
$$x^2 = 0$$
$$x = 0$$

ดังนั้น จุดตัดแกน X คือจุด $(0,0,0)$

หาจุดตัดแกน Y ให้ $x = 0$ และ $z = 0$ จะได้

$$z = x^2 + 2y^2$$
$$0 = (0)^2 + 2y^2$$
$$y = 0$$

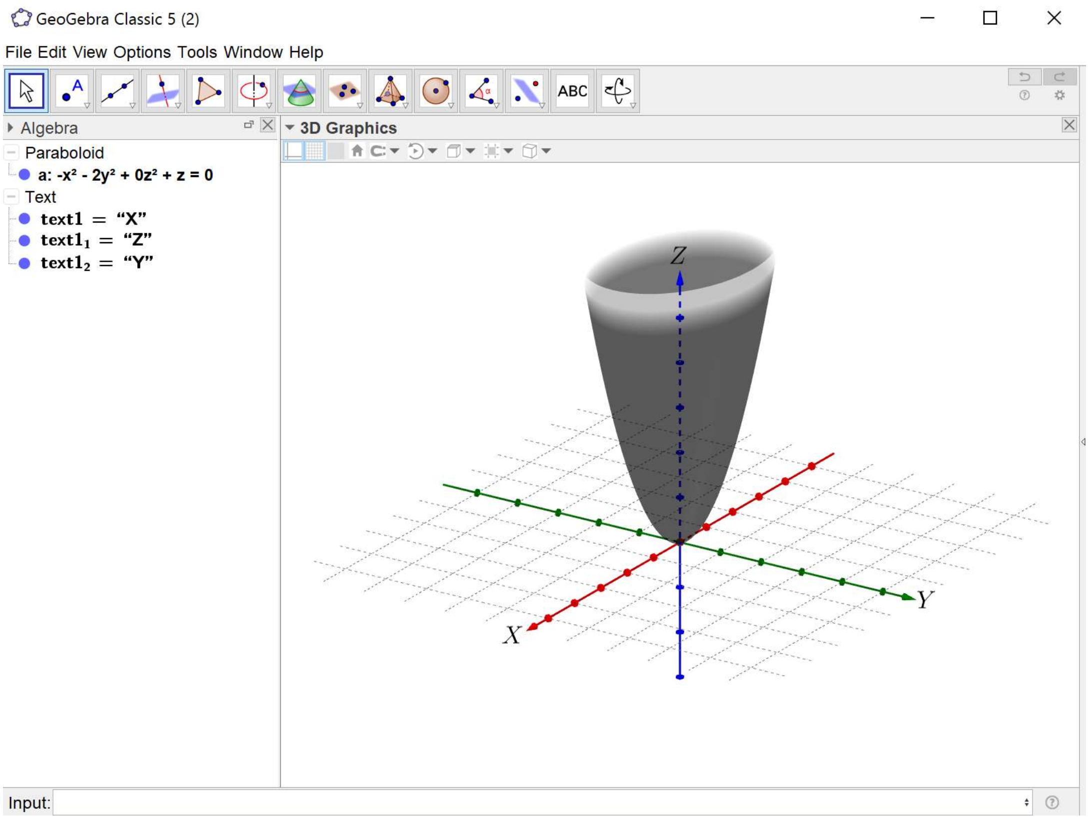
ดังนั้น จุดตัดแกน Y คือจุด $(0,0,0)$

หาจุดตัดแกน Z ให้ $x=0$ และ $y=0$ จะได้

$$z=(0)^2+2(0)^2$$
$$z=0$$

ดังนั้น จุดตัดแกน Z คือจุด $(0,0,0)$

ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 8.1.1.3 ดังรูป 8.2



รูปที่ 8.2 แสดงจุดตัดของ $z=x^2+2y^2$ กับแกนพิกัด X, Y และ Z

ตัวอย่าง 8.1.1.3 กำหนดสมการพื้นผิว $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{36}-\dfrac{z^2}{25}=1$ จงหาจุดตัดแกน X, Y และ Z

วิธีทำ หาจุดตัดแกน X ให้ $y=0$ และ $z=0$ จะได้

$$\frac{x^2}{16}+\frac{(0)^2}{36}-\frac{(0)^2}{25}=1$$
$$x^2=16$$
$$x=\pm 4$$

ดังนั้น จุดตัดแกน X คือจุด $(4,0,0)$ และจุด $(-4,0,0)$

หาจุดตัดแกน Y ให้ $x=0$ และ $z=0$ จะได้

$$\frac{(0)^2}{16}+\frac{y^2}{36}-\frac{(0)^2}{25}=1$$
$$y^2=36$$
$$y=\pm 6$$

ดังนั้น จุดตัดแกน Y คือจุด $(0,6,0)$ และจุด $(0,-6,0)$

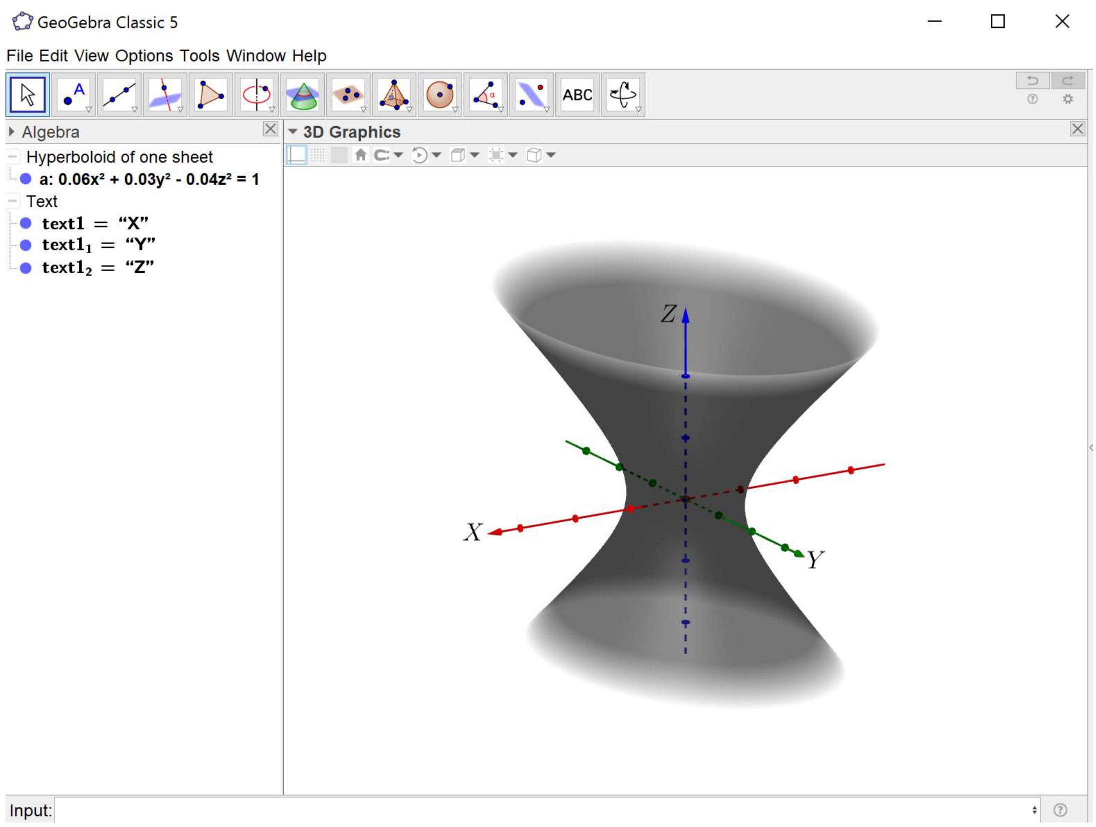
หาจุดตัดแกน Z ให้ $x=0$ และ $y=0$ จะได้

$$\frac{(0)^2}{16}+\frac{(0)^2}{36}-\frac{z^2}{25}=1$$
$$-z^2=25$$

จะเห็นว่าไม่มีจำนวนจริงที่ทำให้สมการนี้เป็นเป็น

ดังนั้น พื้นผิวนี้ไม่ตัดแกน Z

ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 8.1.1.3 ดังรูป 8.3



รูปที่ 8.3 แสดงจุดตัดของ $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{36}-\dfrac{z^2}{25}=1$ กับแกนพิกัด X, Y และ Z

8.1.2 การสมมาตรของพื้นผิว (Symmetry)

ดำรง ทิพย์โยธา ยุวรีย์ พันธ์กล้า นัฏฐนาถ ไตรภพ และสุรชัย สมบัติบริบูรณ์ (2558 : 30-32) ได้กล่าวว่า ในการพิจารณาการสมมาตรนั้นมี 3 ลักษณะ คือ

- สมมาตรกับจุดกำเนิด
- สมมาตรกับแกนพิกัด
- สมมาตรกับระนาบพิกัด

8.1.2.1 สมมาตรกับจุดกำเนิด

ให้ $S = \{(x,y,z) \big| f(x,y,z) = 0\}$ เป็นพื้นผิวแล้ว S จะมีสมมาตรกับจุดกำเนิด ก็ต่อเมื่อถ้า $(x,y,z) \in S$ แล้ว $(-x,-y,-z) \in S$

8.1.2.2 สมมาตรกับแกนพิกัด

S จะสมมาตรกับแกน X ก็ต่อเมื่อ ถ้า $(x,y,z) \in S$ แล้ว $(x,-y,-z) \in S$

S จะสมมาตรกับแกน Y ก็ต่อเมื่อ ถ้า $(x,y,z) \in S$ แล้ว $(-x,y,-z) \in S$

S จะสมมาตรกับแกน Z ก็ต่อเมื่อ ถ้า $(x,y,z) \in S$ แล้ว $(-x,-y,z) \in S$

8.1.2.3 สมมาตรกับระนาบพิกัด

S จะสมมาตรกับระนาบ XY ก็ต่อเมื่อ ถ้า $(x,y,z) \in S$ แล้ว $(x,y,-z) \in S$

S จะสมมาตรกับระนาบ XZ ก็ต่อเมื่อ ถ้า $(x,y,z) \in S$ แล้ว $(x,-y,z) \in S$

S จะสมมาตรกับระนาบ YZ ก็ต่อเมื่อ ถ้า $(x,y,z) \in S$ แล้ว $(-x,y,z) \in S$

ตัวอย่าง 8.1.2.1 กำหนดให้สมการพื้นผิว $z = 2x^2 + 3y^2$ จงพิจารณาการสมมาตร

วิธีทำ **พิจารณาการสมมาตรที่จุดกำเนิด** แทน $x = -x, y = -y$ และ $z = -z$ จะได้

$$z = 2x^2 + 3y^2$$
$$-z = 2(-x)^2 + 3(-y)^2$$
$$-z = 2x^2 + 3y^2$$

สมการเปลี่ยนแปลง

$\therefore$ พื้นผิวนี้ไม่สมมาตรที่จุดกำเนิด

พิจารณาการสมมาตรที่แกนพิกัด

พิจารณาการสมมาตรที่แกน X แทน $y = -y$ และ $z = -z$ จะได้

$$z = 2x^2 + 3y^2$$
$$-z = 2x^2 + 3(-y)^2$$
$$-z = 2x^2 + 3y^2$$

สมการเปลี่ยนแปลง

$\therefore$ พื้นผิวนี้ไม่สมมาตรที่แกน X

พิจารณาการสมมาตรที่แกน Y แทน $x = -x$ และ $z = -z$ จะได้

$$z = 2x^2 + 3y^2$$
$$-z = 2(-x)^2 + 3y^2$$
$$-z = 2x^2 + 3y^2$$

สมการเปลี่ยนแปลง

$\therefore$ พื้นผิวนี้ไม่สมมาตรที่แกน Y

พิจารณาการสมมาตรที่แกน Z แทน $x = -x$ และ $y = -y$ จะได้

$$z = 2x^2 + 3y^2$$
$$z = 2(-x)^2 + 3(-y)^2$$
$$z = 2x^2 + 3y^2$$

สมการคงเดิม

$\therefore$ พื้นผิวนี้สมมาตรที่แกน Z

พิจารณาการสมมาตรที่ระนาบพิกัด

พิจารณาการสมมาตรที่ระนาบ XY แทน $z = -z$ จะได้

$$z = 2x^2 + 3y^2$$
$$-z = 2x^2 + 3y^2$$

สมการเปลี่ยนแปลง

$\therefore$ พื้นผิวนี้ไม่สมมาตรที่ระนาบ XY

พิจารณาการสมมาตรที่ระนาบ XZ แทน $y = -y$ จะได้

$$z = 2x^2 + 3y^2$$
$$z = 2x^2 + 3(-y)^2$$
$$z = 2x^2 + 3y^2$$

สมการคงเดิม

$\therefore$ พื้นผิวนี้สมมาตรที่ระนาบ XZ

พิจารณาการสมมาตรที่ระนาบ YZ แทน $x = -x$ จะได้

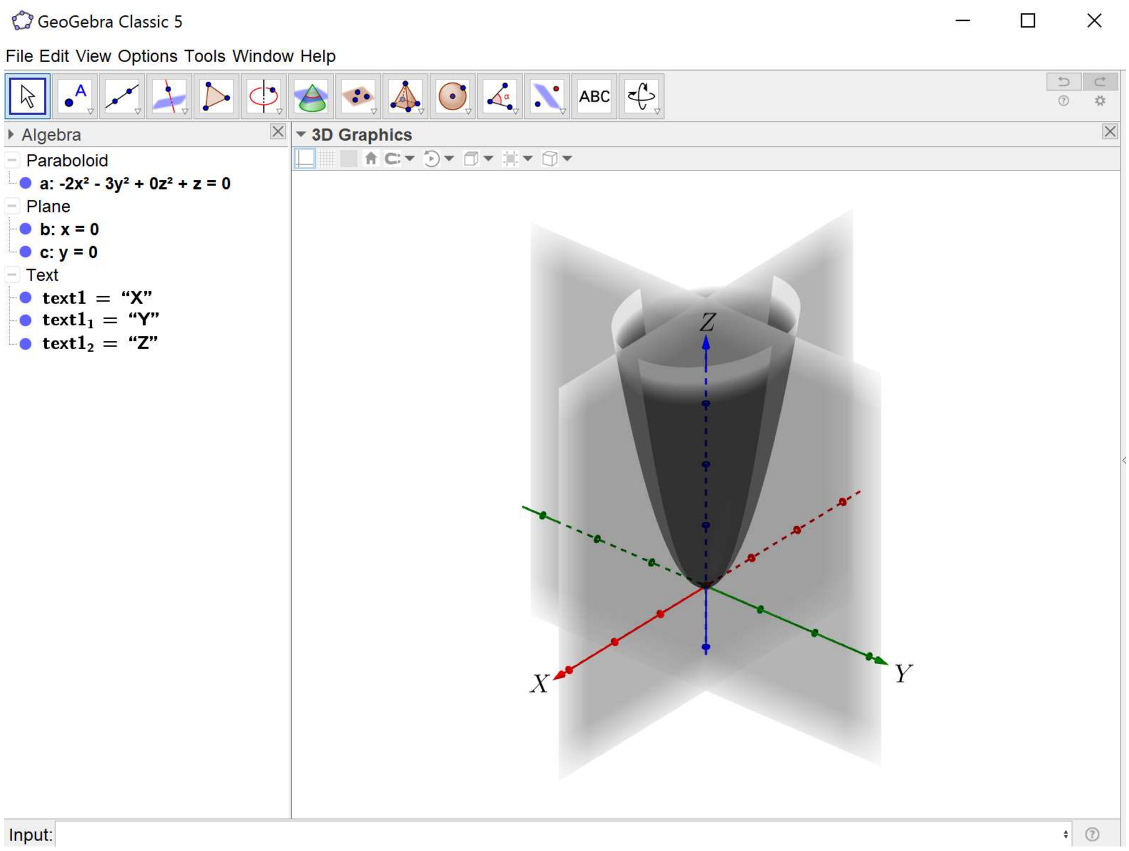
$$z = 2x^2 + 3y^2$$
$$z = 2(-x)^2 + 3y^2$$
$$z = 2x^2 + 3y^2$$

สมการคงเดิม

$\therefore$ พื้นผิวนี้สมมาตรที่ระนาบ YZ

ดังนั้น พื้นผิวนี้มีสมมาตรกับแกน Z ระนาบ XZ และระนาบ YZ

ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 8.1.2.1 ดังรูป 8.4



รูปที่ 8.4 แสดงการสมมาตรของพื้นผิว $z = 2x^2 + 3y^2$

ตัวอย่าง 8.1.2.1 กำหนดให้สมการพื้นผิว $z^2 = x^2 + 4y^2$ จงพิจารณาการสมมาตร

วิธีทำ **พิจารณาการสมมาตรที่จุดกำเนิด** แทน $x = -x, y = -y$ และ $z = -z$ จะได้

$$\begin{aligned} z^2 &= x^2 + 4y^2 \\ (-z)^2 &= (-x)^2 + 4(-y)^2 \\ z^2 &= x^2 + 4y^2 \end{aligned}$$

$\therefore$ สมการคงเดิม พื้นผิวนี้สมมาตรที่จุดกำเนิด

พิจารณาการสมมาตรที่แกนพิกัด

พิจารณาการสมมาตรที่แกน X แทน $y = -y$ และ $z = -z$ จะได้

$$\begin{aligned} z^2 &= x^2 + 4y^2 \\ (-z)^2 &= x^2 + 4(-y)^2 \\ z^2 &= x^2 + 4y^2 \end{aligned}$$

$\therefore$ สมการคงเดิม พื้นผิวนี้สมมาตรที่แกน X

พิจารณาการสมมาตรที่แกน Y แทน $x = -x$ และ $z = -z$ จะได้

$$\begin{aligned} z^2 &= x^2 + 4y^2 \\ (-z)^2 &= (-x)^2 + 4y^2 \\ z^2 &= x^2 + 4y^2 \end{aligned}$$

$\therefore$ สมการคงเดิม พื้นผิวนี้สมมาตรที่แกน Y

พิจารณาการสมมาตรที่แกน Z แทน $x = -x$ และ $y = -y$ จะได้

$$\begin{aligned} z^2 &= x^2 + 4y^2 \\ z^2 &= (-x)^2 + 4(-y)^2 \\ z^2 &= x^2 + 4y^2 \end{aligned}$$

$\therefore$ สมการคงเดิม พื้นผิวนี้สมมาตรที่แกน Z

พิจารณาการสมมาตรที่ระนาบพิกัด

พิจารณาการสมมาตรที่ระนาบ XY แทน $z = -z$ จะได้

$$\begin{aligned} z^2 &= x^2 + 4y^2 \\ (-z)^2 &= x^2 + 4y^2 \\ z^2 &= x^2 + 4y^2 \end{aligned}$$

$\therefore$ สมการคงเดิม พื้นผิวนี้สมมาตรที่ระนาบ XY

พิจารณาการสมมาตรที่ระนาบ XZ แทน $y = -y$ จะได้

$$z^2 = x^2 + 4y^2$$
$$z^2 = x^2 + 4(-y)^2$$
$$z^2 = x^2 + 4y^2$$

$\therefore$ สมการคงเดิม พื้นผิวนี้สมมาตรที่ระนาบ XZ

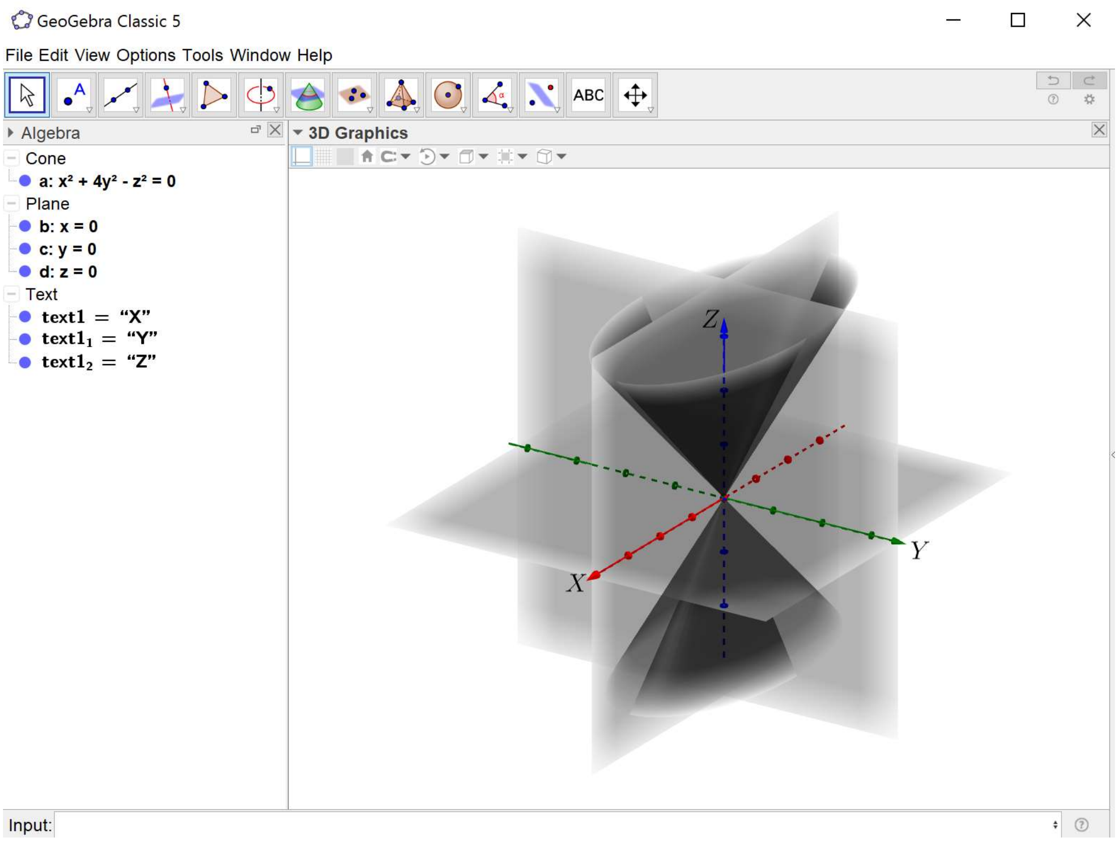
พิจารณาการสมมาตรที่ระนาบ YZ แทน $x = -x$ จะได้

$$z^2 = x^2 + 4y^2$$
$$z^2 = (-x)^2 + 4y^2$$
$$z^2 = x^2 + 4y^2$$

$\therefore$ สมการคงเดิม พื้นผิวนี้สมมาตรที่ระนาบ YZ

ดังนั้น พื้นผิวนี้มีสมมาตรกับที่จุดกำเนิด สมมาตรที่แกนพิกัด และสมมาตรที่ระนาบพิกัด

ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 8.1.2.2 ดังรูป 8.5



รูปที่ 8.5 แสดงการสมมาตรของพื้นผิว $z^2 = x^2 + 4y^2$

8.1.3 รอยตัดของพื้นผิว (Trace)

บทนิยาม 8.1.3 ให้ $S = \{(x,y,z) \big| f(x,y,z) = 0\}$ เป็นพื้นผิวแล้ว

รอยตัดของ S โดยระนาบ $x = k$ คือเส้นโค้ง $f(k,y,z) = 0$

รอยตัดของ S โดยระนาบ $y = k$ คือเส้นโค้ง $f(x,k,z) = 0$

รอยตัดของ S โดยระนาบ $z = k$ คือเส้นโค้ง $f(x,y,k) = 0$

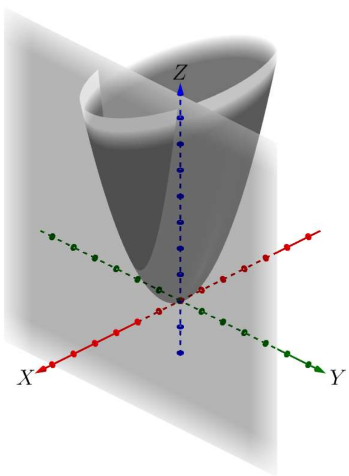
(ดำรง ทิพย์โยธา ยุวรีย์ พันธ์กล้า นัฏฐนาถ ไตรภพ และสุรชัย สมบัติบริบูรณ์, 2558 : 25-26)

ตัวอย่าง 8.1.3.1 กำหนดสมการพื้นผิว $2z = x^2 + 4y^2$ จงพิจารณารอยตัดของพื้นผิว

วิธีทำ พิจารณาที่รอยตัด $x = k$ จะได้

$$2z = x^2 + 4y^2$$
$$2z = k^2 + 4y^2$$
$$y^2 = \frac{1}{2}(z - \frac{k^2}{4})$$

$\therefore$ ที่รอยตัด $x = k$ เป็นรูปพาราโบลาหงาย

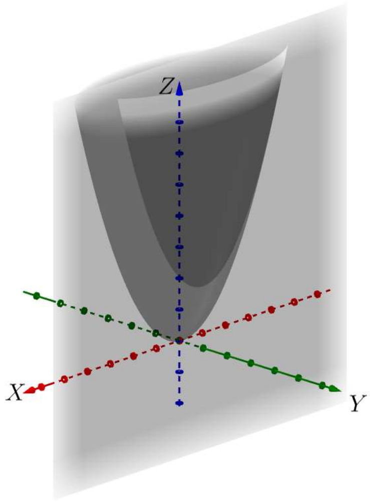


รูปที่ 8.6 แสดงรอยตัด $x = 2$ กับพื้นผิว $2z = x^2 + 4y^2$

พิจารณาที่รอยตัด $y = k$ จะได้

$$2z = x^2 + 4y^2$$
$$2z = x^2 + 4k^2$$
$$y^2 = 2(z - 2k^2)$$

$\therefore$ ที่รอยตัด $y = k$ เป็นรูปพาราโบลาหงาย

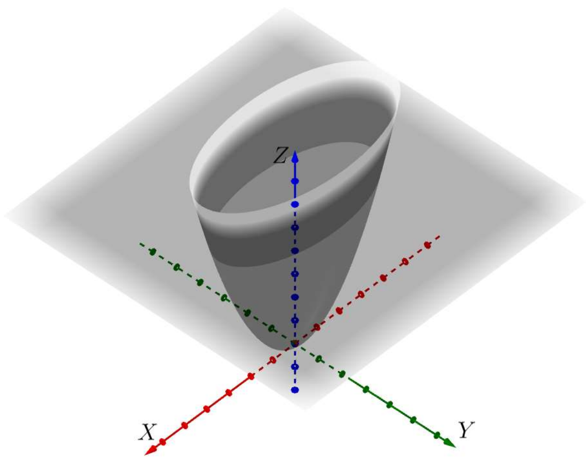


รูปที่ 8.7 แสดงรอยตัด $y = 1$ กับพื้นผิว $2z = x^2 + 4y^2$

พิจารณาที่รอยตัด $z = k$ จะได้

$$2z = x^2 + 4y^2$$
$$2k = x^2 + 4y^2$$
$$\frac{x^2}{2k} + \frac{4y^2}{2k} = 1$$

$\therefore$ ที่รอยตัด $z = k$ เป็นรูปวงรี



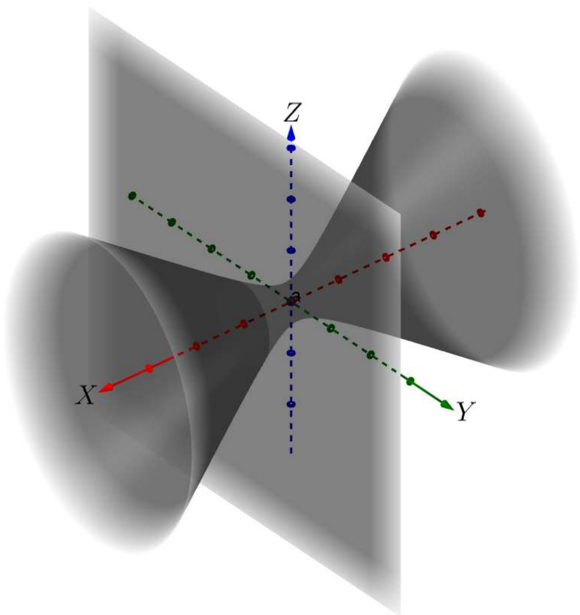
รูปที่ 8.8 แสดงรอยตัด $z = 6$ กับพื้นผิว $2z = x^2 + 4y^2$

ตัวอย่าง 8.1.3.2 กำหนดสมการพื้นผิว $x^2 = 3y^2 + 2z^2 - 1$ จงพิจารณารอยตัดของพื้นผิว

วิธีทำ พิจารณาที่รอยตัด $x = k$ จะได้

$$x^2 = 3y^2 + 2z^2 - 1$$
$$k^2 = 3y^2 + 2z^2 - 1$$
$$3y^2 + 2z^2 = k^2 - 1$$
$$\frac{3y^2}{k^2 - 1} + \frac{2z^2}{k^2 - 1} = 1$$

$\therefore$ ที่รอยตัด $x = k$ เป็นรูปวงรี

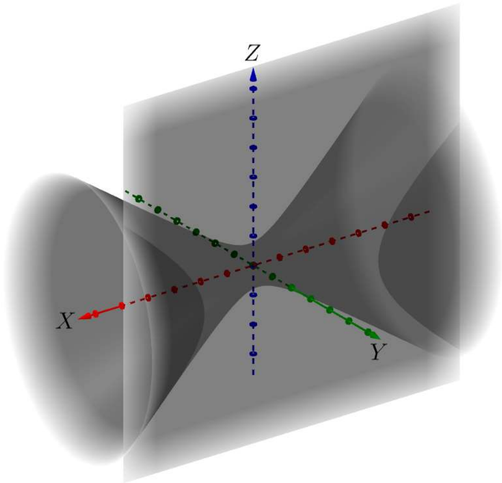


รูปที่ 8.9 แสดงรอยตัด $x = 2$ กับพื้นผิว $x^2 = 3y^2 + 2z^2 - 1$

พิจารณาที่รอยตัด $y = k$ จะได้

$$x^2 = 3y^2 + 2z^2 - 1$$
$$x^2 - 2z^2 = 3k^2 - 1$$
$$\frac{x^2}{3k^2 - 1} - \frac{2z^2}{3k^2 - 1} = 1$$

$\therefore$ ที่รอยตัด $y = k$ เป็นรูปไฮเพอร์โบลา

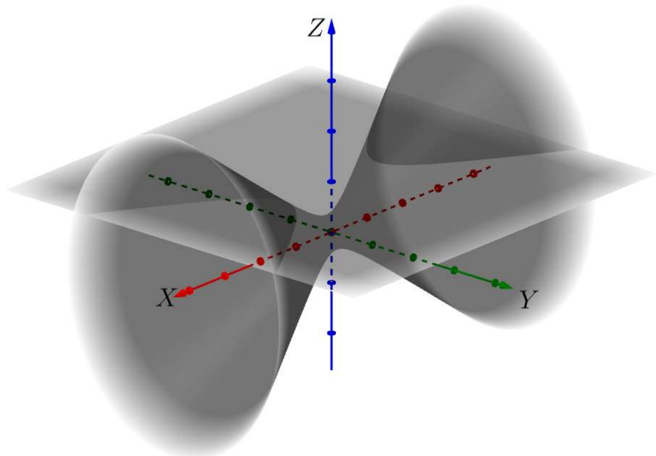


รูปที่ 8.10 แสดงรอยตัด $y = 2$ กับพื้นผิว $x^2 = 3y^2 + 2z^2 - 1$

พิจารณาที่รอยตัด $z = k$ จะได้

$$\begin{aligned} x^2 &= 3y^2 + 2z^2 - 1 \\ x^2 - 3y^2 &= 2k^2 - 1 \\ \frac{x^2}{2k^2 - 1} - \frac{3y^2}{2k^2 - 1} &= 1 \end{aligned}$$

$\therefore$ ที่รอยตัด $z = k$ เป็นไฮเพอร์โบลา



รูปที่ 8.11 แสดงรอยตัด $z = 2$ กับพื้นผิว $2z = x^2 + 4y^2$

8.1.4 ขอบเขตของพื้นผิว (Asymptote)

สำหรับการหาค่าขอบเขตของพื้นผิวนั้น เราจะเอาค่าที่เป็นไปได้ทุกค่าที่เป็นจำนวนจริงของ x, y และ z ซึ่งค่าเหล่านี้คือขอบเขตของ x, y, z นั่นเอง

บทนิยาม 8.1.4 กำหนดสมการพื้นผิว S คือ $f(x,y,z)=0$

ขอบเขตของ $x = \{x \,|\, \exists y, z \in R, f(x,y,z)=0\}$

ขอบเขตของ $y = \{y \,|\, \exists x, z \in R, f(x,y,z)=0\}$

ขอบเขตของ $z = \{z \,|\, \exists x, y \in R, f(x,y,z)=0\}$

(ดำรง ทิพย์โยธา ยุวรีย์ พันธ์กล้า นัฏฐนาถ ไตรภพ และสุรชัย สมบัติบริบูรณ์, 2558 : 24)

ตัวอย่าง 8.1.4.1 จงหาขอบเขตของพื้นผิว $\sqrt{9-x^2-y^2}=z$

วิธีทำ พิจารณาขอบเขตของ x จะได้

$$\sqrt{9-x^2-y^2}=z$$
$$9-x^2-y^2=z^2$$
$$9-x^2=y^2+z^2$$

จะเห็นว่า $9-x^2 \ge 0$ จะได้

$$9-x^2 \ge 0$$
$$x^2-9 \le 0$$
$$(x+3)(x-3) \le 0$$

$\therefore\ -3 \le x \le 3$ หรือ $x \in [-3,3]$

พิจารณาขอบเขตของ y จะได้

$$\sqrt{9-x^2-y^2}=z$$
$$9-x^2-y^2=z^2$$
$$9-y^2=x^2+z^2$$

จะเห็นว่า $9-y^2 \ge 0$ จะได้

$$9-y^2 \ge 0$$
$$y^2-9 \le 0$$
$$(y+3)(y-3) \le 0$$

$\therefore\ -3 \le y \le 3$ หรือ $y \in [-3,3]$

พิจารณาขอบเขตของ z จะได้

$$\begin{aligned}\sqrt{9-x^2-y^2} &= z\\ 9-x^2-y^2 &= z^2\\ 9-z^2 &= x^2+y^2\end{aligned}$$

จะเห็นว่า $9-z^2 \geq 0$ จะได้

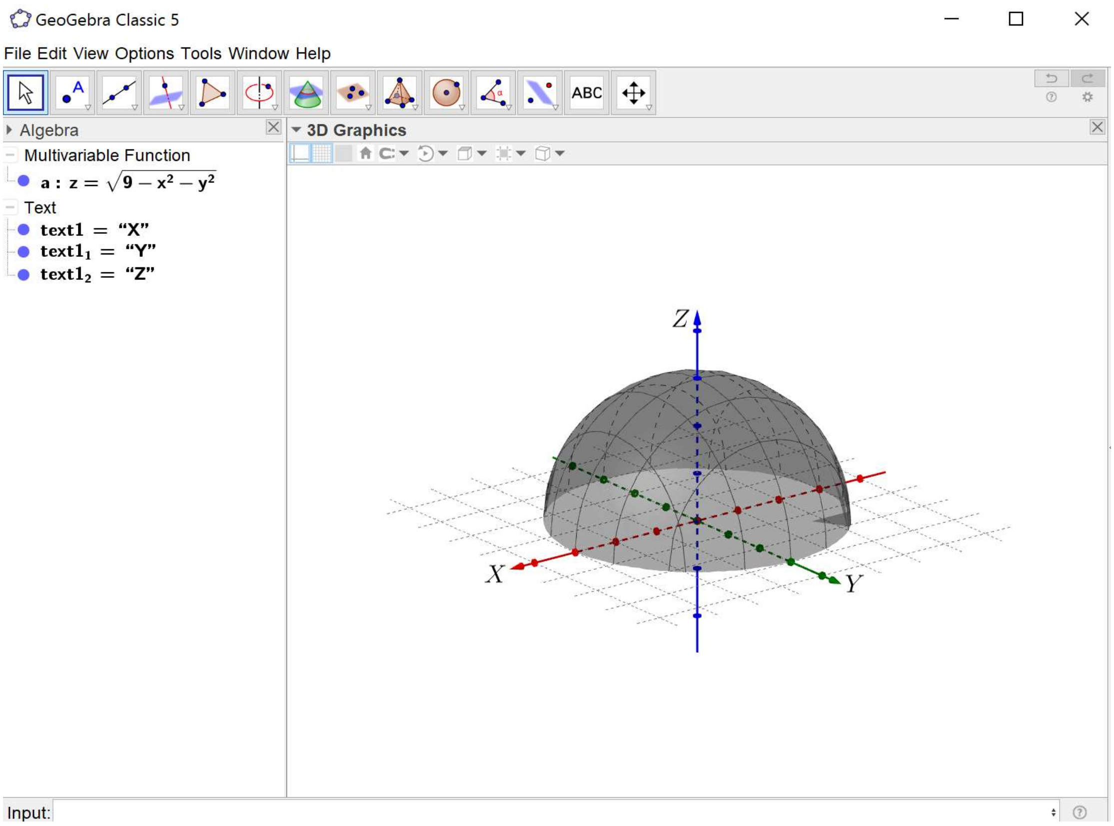
$$\begin{aligned}9-z^2 &\geq 0\\ z^2-9 &\leq 0\\ (z-3)(z+3) &\leq 0\end{aligned}$$

$\therefore\ -3 \leq z \leq 3$ หรือ $z \in [-3,3]$ แต่ z ต้องไม่เป็นค่าลบ นั่นคือ $z \in [0,3]$

ดังนั้น ขอบเขตของ x คือ $x \in [-3,3]$ ขอบเขตของ y คือ $y \in [-3,3]$

และขอบเขตของ z คือ $z \in [0,3]$

ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 8.1.4.1 ดังรูป 8.12



รูปที่ 8.12 แสดงขอบเขตของพื้นผิว $\sqrt{9-x^2-y^2} = z$

ตัวอย่าง 8.1.4.2 จงหาขอบเขตของพื้นผิว $10z = 10 + x^2 - y^2$

วิธีทำ พิจารณาขอบเขตของ x จะได้

$$10z = 10 + x^2 - y^2$$
$$x^2 = y^2 + 10z - 10$$

จะเห็นว่า x เป็นจริงสำหรับทุกค่าของ y และ z $\therefore -\infty \le x \le \infty$ หรือ $x \in \mathbb{R}$

พิจารณาขอบเขตของ y จะได้

$$10z = 10 + x^2 - y^2$$
$$y^2 = x^2 - 10z + 10$$

จะเห็นว่า y เป็นจริงสำหรับทุกค่าของ x และ z $\therefore -\infty \le y \le \infty$ หรือ $y \in \mathbb{R}$

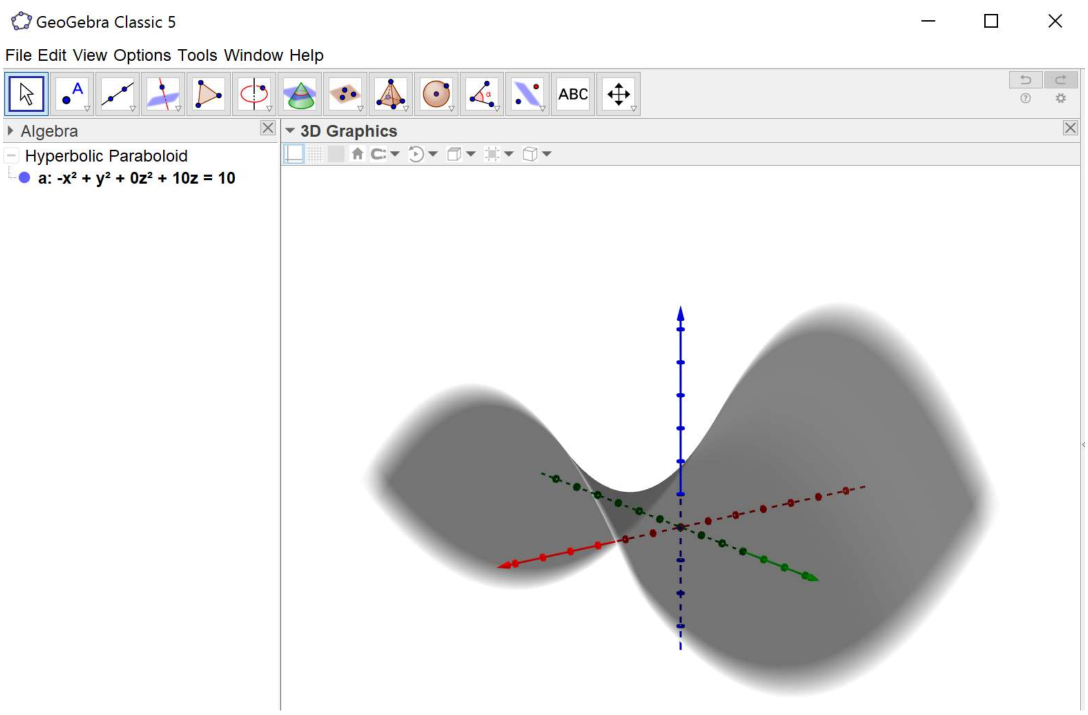
พิจารณาขอบเขตของ z จะได้

$$10z = 10 + x^2 - y^2$$

จะเห็นว่า z เป็นจริงสำหรับทุกค่าของ x และ y $\therefore -\infty \le z \le \infty$ หรือ $z \in \mathbb{R}$

ดังนั้น ขอบเขตของ x คือ $x \in \mathbb{R}$ ขอบเขตของ y คือ $y \in \mathbb{R}$ และขอบเขตของ z คือ $z \in \mathbb{R}$

ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 8.1.4.2 ดังรูป 8.13



รูปที่ 8.13 แสดงขอบเขตของพื้นผิว $10z = 10 + x^2 - y^2$

ตัวอย่าง 8.1.1 จงอธิบายลักษณะของพื้นผิว $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 8$

วิธีทำ **พิจารณาจุดตัดแกนพิกัด**

หาจุดตัดแกน X ให้ $y = 0$ และ $z = 0$ จะได้

$$\begin{aligned} x^2 + 2y^2 + 4z^2 &= 8 \\ x^2 + 2(0)^2 + 4(0)^2 &= 8 \\ x^2 &= 8 \\ x &= \pm 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

$\therefore$ จุดตัดแกน X คือจุด $(2\sqrt{2}, 0, 0)$ และจุด $(-2\sqrt{2}, 0, 0)$

หาจุดตัดแกน Y ให้ $x = 0$ และ $z = 0$ จะได้

$$\begin{aligned} x^2 + 2y^2 + 4z^2 &= 8 \\ (0)^2 + 2y^2 + 4(0)^2 &= 8 \\ y^2 &= 4 \\ y &= \pm 2 \end{aligned}$$

$\therefore$ จุดตัดแกน Y คือจุด $(0, 2, 0)$ และจุด $(0, -2, 0)$

หาจุดตัดแกน Z ให้ $x = 0$ และ $y = 0$ จะได้

$$\begin{aligned} x^2 + 2y^2 + 4z^2 &= 8 \\ (0)^2 + 2(0)^2 + 4z^2 &= 8 \\ z^2 &= 2 \\ z &= \pm\sqrt{2} \end{aligned}$$

$\therefore$ จุดตัดแกน Z คือจุด $(0, 0, \sqrt{2})$ และจุด $(0, 0, -\sqrt{2})$

พิจารณาการสมมาตร

พิจารณาการสมมาตรที่จุดกำเนิด แทน $x = -x, y = -y$ และ $z = -z$ จะได้

$$\begin{aligned} x^2 + 2y^2 + 4z^2 &= 8 \\ (-x)^2 + 2(-y)^2 + 4(-z)^2 &= 8 \\ x^2 + 2y^2 + 4z^2 &= 8 \end{aligned}$$

$\therefore$ สมการคงเดิม พื้นผิวนี้สมมาตรที่จุดกำเนิด

พิจารณาการสมมาตรที่แกนพิกัด

พิจารณาการสมมาตรที่แกน X แทน $y = -y$ และ $z = -z$ จะได้

$$\begin{aligned} x^2 + 2y^2 + 4z^2 &= 8 \\ x^2 + 2(-y)^2 + 4(-z)^2 &= 8 \end{aligned}$$

$$x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 8$$

$\therefore$ สมการคงเดิม พื้นผิวนี้สมมาตรที่แกน X

พิจารณาการสมมาตรที่แกน Y แทน $x = -x$ และ $z = -z$ จะได้

$$x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 8$$
$$(-x)^2 + 2y^2 + 4(-z)^2 = 8$$
$$x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 8$$

$\therefore$ สมการคงเดิม พื้นผิวนี้สมมาตรที่แกน Y

พิจารณาการสมมาตรที่แกน Z แทน $x = -x$ และ $y = -y$ จะได้

$$x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 8$$
$$(-x)^2 + 2(-y)^2 + 4z^2 = 8$$
$$x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 8$$

$\therefore$ สมการคงเดิม พื้นผิวนี้สมมาตรที่แกน Z

พิจารณาการสมมาตรที่ระนาบพิกัด

พิจารณาการสมมาตรที่ระนาบ XY แทน $z = -z$ จะได้

$$x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 8$$
$$x^2 + 2y^2 + 4(-z)^2 = 8$$
$$x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 8$$

$\therefore$ สมการคงเดิม พื้นผิวนี้สมมาตรที่ระนาบ XY

พิจารณาการสมมาตรที่ระนาบ XZ แทน $y = -y$ จะได้

$$x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 8$$
$$x^2 + 2(-y)^2 + 4z^2 = 8$$
$$x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 8$$

$\therefore$ สมการคงเดิม พื้นผิวนี้สมมาตรที่ระนาบ XZ

พิจารณาการสมมาตรที่ระนาบ YZ แทน $x = -x$ จะได้

$$x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 8$$
$$(-x)^2 + 2y^2 + 4z^2 = 8$$
$$x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 8$$

$\therefore$ สมการคงเดิม พื้นผิวนี้สมมาตรที่ระนาบ YZ

รอยตัดของพื้นผิวกับระนาบ

พิจารณาที่รอยตัด $x = k$ จะได้

$$x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 8$$
$$k^2 + 2y^2 + 4z^2 = 8$$
$$2y^2 + 4z^2 = 8 - k^2$$
$$\frac{2y^2}{8-k^2} + \frac{4z^2}{8-k^2} = 1$$

$\therefore$ ที่รอยตัด $x = k$ เป็นรูปวงรี

พิจารณาที่รอยตัด $y = k$ จะได้

$$x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 8$$
$$x^2 + 2k^2 + 4z^2 = 8$$
$$x^2 + 4z^2 = 8 - 2k^2$$
$$\frac{x^2}{8-2k^2} + \frac{4z^2}{8-2k^2} = 1$$

$\therefore$ ที่รอยตัด $y = k$ เป็นวงรี

พิจารณาที่รอยตัด $z = k$ จะได้

$$x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 8$$
$$x^2 + 2y^2 + 4k^2 = 8$$
$$x^2 + 2y^2 = 8 - 4k^2$$
$$\frac{x^2}{8-4k^2} + \frac{2y^2}{8-4k^2} = 1$$

$\therefore$ ที่รอยตัด $z = k$ เป็นวงรี

พิจารณาขอบเขตของพื้นผิว

พิจารณาขอบเขตของ x จะได้

$$x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 8$$
$$2y^2 + 4z^2 = 8 - x^2$$

จะเห็นว่า $8 - x^2 \geq 0$ จะได้

$$x^2 - 8 \leq 0$$
$$(x+\sqrt{8})(x-\sqrt{8}) \leq 0$$

$\therefore\ -\sqrt{8} \leq x \leq \sqrt{8}$ หรือ $x \in [-\sqrt{8}, \sqrt{8}]$

พิจารณาขอบเขตของ y จะได้

$$x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 8$$
$$x^2 + 4z^2 = 8 - 2y^2$$

จะเห็นว่า $8-2y^2 \geq 0$ จะได้

$$y^2 - 4 \leq 0$$

$$(y+2)(y-2) \leq 0$$

$\therefore\ -2 \leq y \leq 2$ หรือ $y \in [-2,2]$

พิจารณาขอบเขตของ z จะได้

$$x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 8$$

$$x^2 + 2y^2 = 8 - 4z^2$$

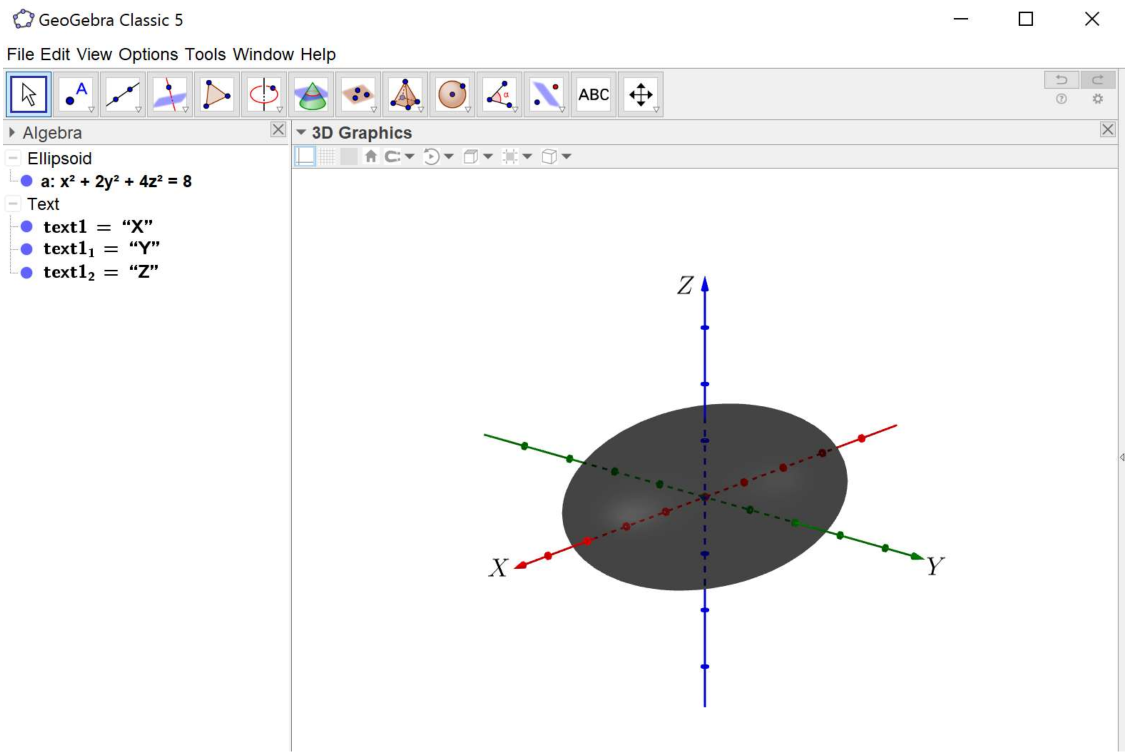
จะเห็นว่า $8-4z^2 \geq 0$ จะได้

$$z^2 - 2 \leq 0$$

$$(z-\sqrt{2})(z+\sqrt{2}) \leq 0$$

$\therefore\ -\sqrt{2} \leq z \leq \sqrt{2}$ หรือ $z \in [-\sqrt{2},\sqrt{2}]$

ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 8.1.1 ดังรูป 8.14



รูปที่ 8.14 ลักษณะของพื้นผิว $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 8$

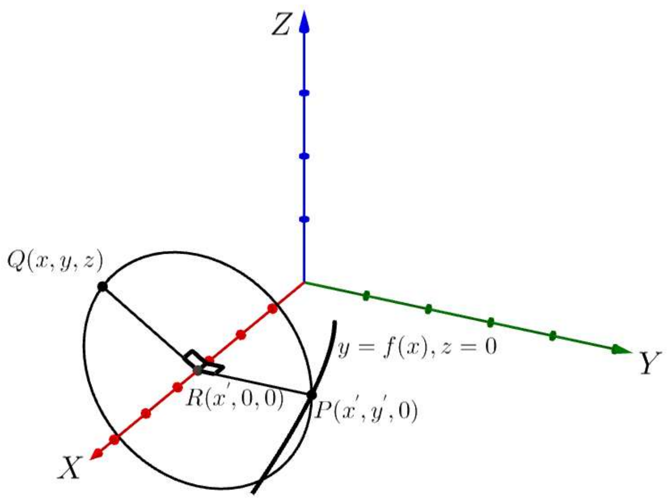
8.2 พื้นผิวซึ่งเกิดจากการหมุนเส้นโค้ง

บทนิยาม 8.2 พื้นผิวซึ่งเกิดจากการหมุนเส้นโค้ง คือ พื้นผิวซึ่งเกิดจากการหมุนเส้นโค้งบนระนาบรอบเส้นตรงคงที่เส้นหนึ่ง ที่อยู่บนระนาบนั้น

(พรชัยชัย สารทวาหา, 2550 : 16 และ Larson, Ron & Edwards H. Bruce, 2011 : 818)

ในหัวข้อนี้ เราจะศึกษาพื้นผิวที่เกิดจากการหมุนเส้นโค้งในระนาบที่กำหนดให้ รอบเส้นตรง ที่อยู่บนระนาบเดียวกับเส้นโค้ง เรียกเส้นตรงที่กำหนดให้ว่า แกนหมุน และเรียกผิวที่ได้จากการ หมุนนี้ว่า พื้นผิวที่เกิดจากการหมุน

ในที่นี้จะศึกษาสมการของพื้นผิวซึ่งเกิดจากการหมุนเส้นโค้ง สมมติเส้นโค้ง C มีสมการ $y = f(x)$, $z = 0$ เป็นเส้นโค้งบนระนาบ XY ดังรูปที่ 8.15 หมุนรอบแกน X พื้นผิวในรูปที่ 8.16 คือพื้นผิวซึ่งเกิดจากการหมุนเส้นโค้ง C รอบแกน X เราเรียก เส้นตรงคงที่บนระนาบในนิยามที่ 8.2 ว่า แกนของพื้นผิว



รูปที่ 8.15 แสดงเส้นโค้ง $y = f(x), z = 0$

ให้ $P(x',\, y',\, 0)$ เป็นจุดใด ๆ บนเส้นโค้ง C จะเห็นว่าจุด $P(x',\, y',\, 0)$ จะอยู่บนเส้นรอบวงของวงกลม จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $R(x',0,0)$ บนแกน X ถ้าจุด $Q(x,y,z)$ เป็นจุดใด ๆ บนวงกลมนี้ จะได้ $x' = x$ และความยาวของส่วนของเส้นตรง QR เท่ากับ ความยาวของส่วนของเส้นตรง PR นั่นคือ

$$\left|QR\right| = \left|PR\right|$$

$$\sqrt{(x-x')^2+(y-0)^2+(z-0)^2} = \sqrt{(x'-x')^2+(y'-0)^2+(0-0)^2}$$
$$\sqrt{y^2+z^2} = \sqrt{y'^2}$$
$$\sqrt{y^2+z^2} = y'$$
$$y' = \sqrt{y^2+z^2}$$

เพราะว่าจุด P สอดคล้องกับสมการ $y = f(x), z = 0$ จะได้

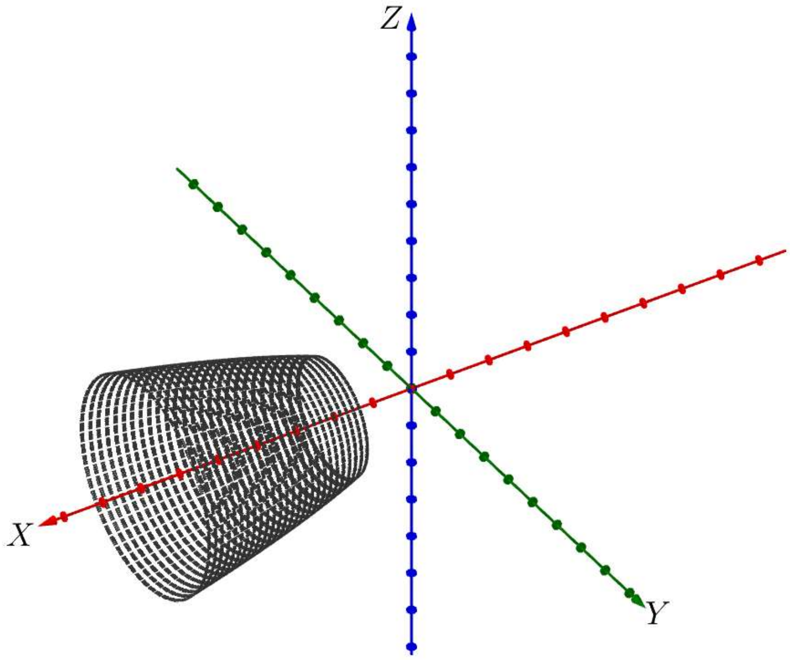
$y' = f(x')$ ดังนั้น $f(x') = \sqrt{y^2+z^2}$

เพราะว่า $x' = x$ เราจะได้

$f(x) = \sqrt{y^2+z^2}$ หรือ $[f(x)]^2 = y^2+z^2$

ดังนั้น สมการของพื้นผิวซึ่งเกิดจากการหมุนเส้นโค้ง $y = f(x), z = 0$ รอบแกน X คือ

$$[f(x)]^2 = y^2+z^2$$



รูปที่ 8.16 สมการของพื้นผิวซึ่งเกิดจากการหมุนเส้นโค้ง $y = f(x), z = 0$ รอบแกน X

ในทำนองเดียวกัน เราสามารถหาสมการของพื้นผิวซึ่งเกิดจากการหมุนเส้นโค้งแบบอื่น ๆ ได้ เช่น $[f(y)]^2 = x^2+z^2$ เป็นสมการของพื้นผิวซึ่งเกิดจากการหมุนเส้นโค้ง $z = f(y),\ x = 0$ รอบแกน Y $[f(z)]^2 = x^2+y^2$ เป็นสมการของพื้นผิวซึ่งเกิดจากการหมุนเส้นโค้ง $x = f(z),\ y = 0$ รอบแกน Z

ตัวอย่างที่ 8.2.1 จงหาสมการของพื้นผิวซึ่งเกิดจากการหมุนเส้นโค้ง $x = y^2$, $z = 0$ รอบแกน X พร้อมทั้งวาดกราฟของพื้นผิว

วิธีทำ ให้จุด $P(x', y', 0)$ เป็นจุดใด ๆ บนเส้นโค้ง $x = y^2, z = 0$ จุด $Q(x, y, z)$ เป็นจุดใด ๆ บนเส้นรอบวงของวงกลมจุดศูนย์กลางที่จุด $R(x', 0, 0)$ รัศมี y' จะได้ว่า $x' = x$ และ $|QR| = |PR|$

นั่นคือ $y' = \sqrt{y^2 + z^2}$

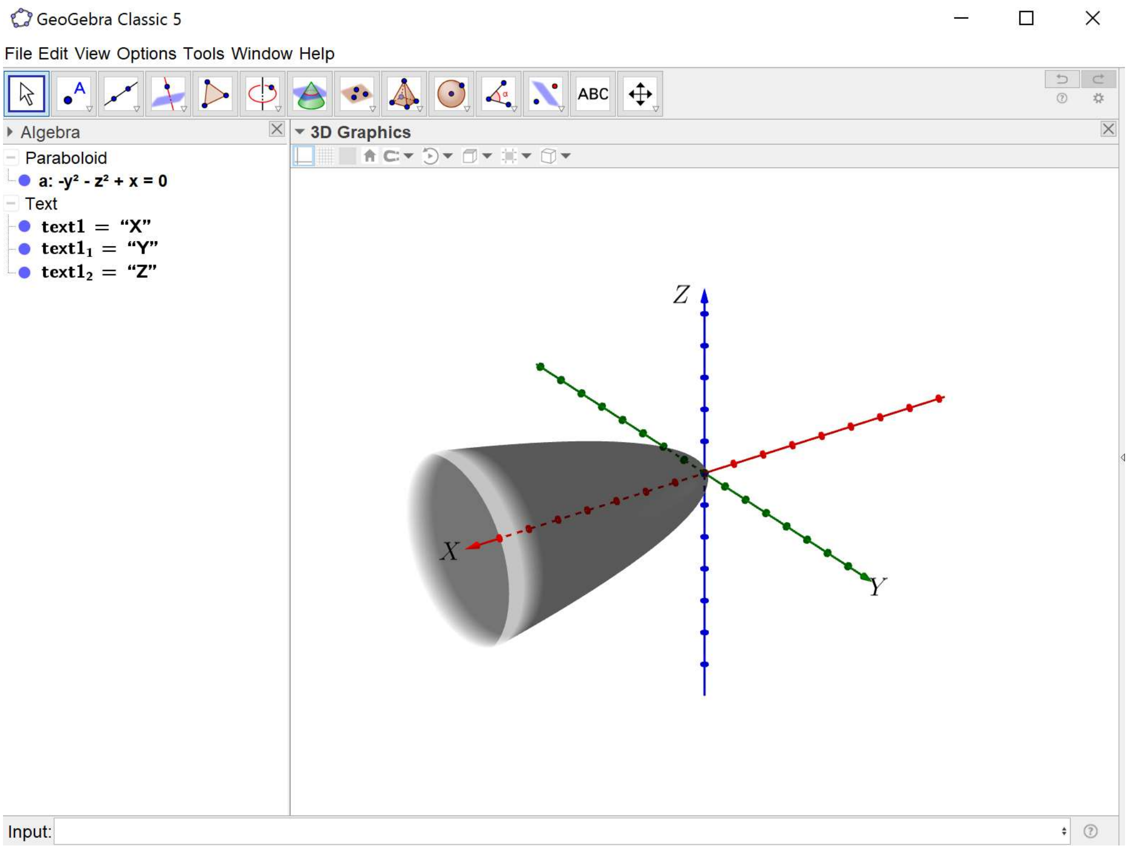
เพราะว่าจุด P สอดคล้องกับสมการ $y = f(x), z = 0$ จะได้ว่า $x' = y'^2$ หรือ $y' = \sqrt{x'}$

เนื่องจาก $x' = x$ จะได้ $y' = \sqrt{x}$

เพราะฉะนั้น $\sqrt{x} = \sqrt{y^2 + z^2}$ หรือ $x = y^2 + z^2$

ดังนั้น $x = y^2 + z^2$ เป็นสมการของพื้นผิวซึ่งเกิดจากการหมุนเส้นโค้ง $x = y^2$, $z = 0$ รอบแกน X

ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 8.2.1 ดังรูป 8.17



รูปที่ 8.17 พื้นผิวซึ่งเกิดจากการหมุนเส้นโค้ง $x = y^2$, $z = 0$ รอบแกน X

ตัวอย่างที่ 8.2.2 จงหาสมการของพื้นผิวซึ่งเกิดจากการหมุนเส้นโค้ง $3z+4y=12,\ x=0$ รอบแกน Y พร้อมทั้งวาดกราฟของพื้นผิว

วิธีทำ ให้จุด $P(0,y',z')$ เป็นจุดใด ๆ บนเส้นโค้ง $3z+4y=12,\ x=0$ จุด $Q(x,y,z)$ เป็นจุดใด ๆ บนเส้นรอบวงของวงกลมจุดศูนย์กลางที่จุด $R(0,y',0)$ รัศมี z'

จะได้ว่า $y'=y$ และ $\left|QR\right|=\left|PR\right|$

นั่นคือ $z'=\sqrt{x^2+z^2}$

เพราะว่าจุด P สอดคล้องกับสมการ $3z+4y=12,\ x=0$

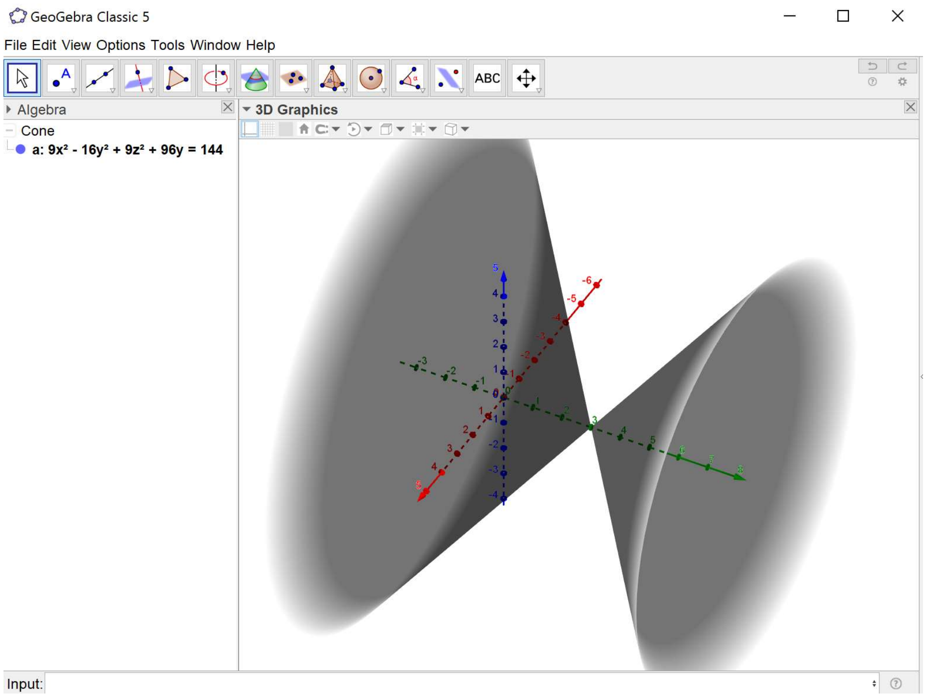
จะได้ว่า $3z'+4y'=12,\ x'=0$ หรือ $z'=\dfrac{12-4y'}{3}$

เนื่องจาก $y'=y$ จะได้ $z'=\dfrac{12-4y}{3}$

เพราะฉะนั้น $\dfrac{12-4y}{3}=\sqrt{x^2+z^2}$ หรือ $9x^2-16y^2+9z^2+96y=144$

ดังนั้น สมการของพื้นผิวนี้คือ $9x^2-16y^2+9z^2+96y=144$

ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 8.2.2 ดังรูป 8.18



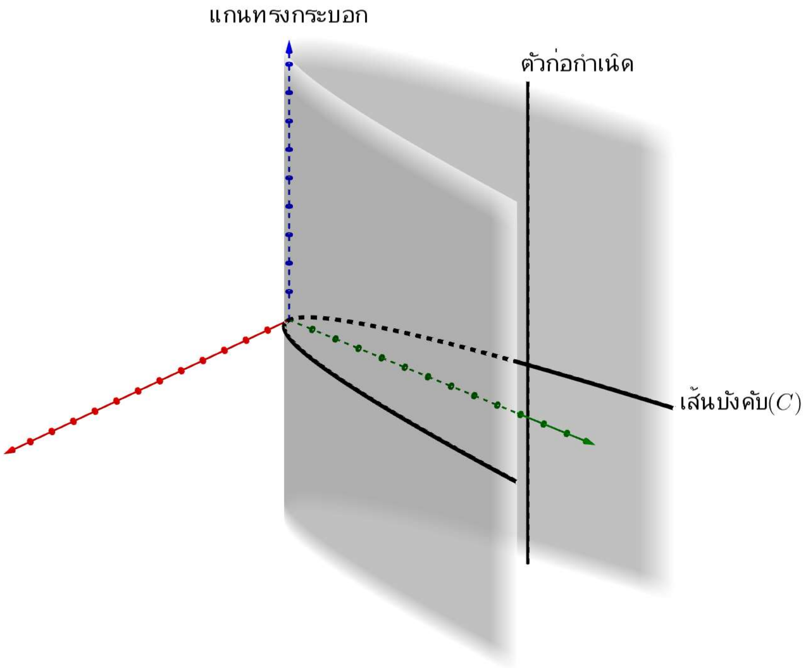
รูปที่ 8.18 พื้นผิวซึ่งเกิดจากการหมุนเส้นโค้ง $3z+4y=12,\ x=0$ รอบแกน Y

8.3 ทรงกระบอก (Cylinder)

บทนิยาม 8.3 ให้ C เป็นเส้นโค้งเส้นหนึ่ง และ L เป็นเส้นตรงเส้นหนึ่ง (ซึ่งไม่ได้อยู่บนระนาบเดียวกับเส้นโค้ง) เซตของจุดที่อยู่บนเส้นตรงที่ขนานกับเส้นตรง L และตัดเส้นโค้ง C เรียกว่า ทรงกระบอก (Cylinder) เรียกเส้นโค้ง C ว่าเส้นบังคับ (Directrix) เรียกเส้นตรงแต่ละเส้นที่ขนานกับเส้นตรง L และผ่านเส้นโค้ง C ว่า ตัวก่อกำเนิด (Generatrix) และตัวก่อกำเนิดแต่ละเส้น เป็นสมาชิกของทรงกระบอก เรียกเส้นตรง L ว่า แกนของทรงกระบอก

(โฆสิต ชาติกำแหง, 2540 : 40 และ Riddle, Douglas F., 1996 : 361)

ศรีบุตร แววเจริญ และ ชนศักดิ์ บ่ายเที่ยง, (2544 : 384-385) ได้กล่าวว่า ลักษณะของทรงกระบอกแต่ละรูปขึ้นอยู่กับเส้นบังคับร่วม และตัวก่อกำเนิด เช่น ถ้าเส้นบังคับร่วมเป็นวงกลม วงรี พาราโบลา หรือ ไฮเพอร์โบลา เราจะเรียก ทรงกระบอกนั้นว่า ทรงกระบอกกลม ทรงกระบอกวงรี ทรงกระบอกพาราโบลิค หรือ ทรงกระบอกไฮเพอร์โบลิค ตามลำดับ เช่น



รูปที่ 8.19 แสดงส่วนประกอบของทรงกระบอก

ในที่นี้เราต้องการหาสมการของทรงกระบอก กำหนดให้ทรงกระบอกมีเส้นบังคับ C เป็นเส้นโค้งที่มีสมการเป็น $F(x,y,z)=0$ และตัวก่อกำเนิดขนานกับเวกเตอร์ $\vec{u}=\left\langle a,b,c\right\rangle$

ให้ $P(x,\ y,\ z)$ เป็นจุดใด ๆ บนทรงกระบอก

จากบทนิยาม 8.3 จะต้องมีตัวก่อกำเนิดเส้นหนึ่งที่ผ่านจุด $P(x,\ y,\ z)$ ขนานกับ $\vec{u}$ และตัดกับเส้นบังคับ C ที่จุด $P_1(x_1,y_1,z_1)$

จะได้ $\overrightarrow{P_1P}$ ขนานกับ $\vec{u}$ เพราะฉะนั้น $\overrightarrow{P_1P}=t\vec{u}$ สำหรับสเกลาร์ t บางค่า

เพราะว่า $\overrightarrow{P_1P}=\left\langle x-x_1,\ y-y_1,\ z-z_1\right\rangle$ จะได้สมการ

$$\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c}=t \quad ....(1)$$

เนื่องจาก จุด $P_1(x_1,y_1,z_1)$ เป็นจุดอยู่บนเส้นโค้ง C เพราะฉะนั้น

$$F(x_1,\ y_1,\ z_1)=0 \quad ....(2)$$

จากสมการ (1) และ (2) เราสามารถกำจัดค่าคงที่ $x_1,\ y_1$ และ z_1 ได้ และสมการที่เหลือเป็นสมการของตัวแปร x,y และ z ซึ่งเป็นสมการของทรงกระบอกตามต้องการ

ตัวอย่าง 8.3.1 จงหาสมการของทรงกระบอกที่มีเส้นบังคับเป็นเส้นโค้ง $\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{16}=1,x=0$ และตัวก่อกำเนิดขนานกับเวกเตอร์ $\vec{u}=\left\langle 4,\ 1,\ 0\right\rangle$ พร้อมทั้งวาดกราฟของทรงกระบอก

วิธีทำ ให้ $P(x,\ y,\ z)$ เป็นจุดใด ๆ บนทรงกระบอก จะมีตัวก่อกำเนิดซึ่งผ่านจุด $P(x,\ y,\ z)$ ตัดกับเส้นบังคับที่จุด $P_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$ และขนานกับเวกเตอร์ $\vec{u}=\left\langle 4,\ 1,\ 0\right\rangle$ จะได้ว่า

$$\left\langle x-x_1,\ y-y_1,\ z-z_1\right\rangle = t\left\langle 4,\ 1,\ 0\right\rangle$$

$$\begin{array}{lcl} x-x_1=4t & & x_1=x-4t \\ y-y_1=t & \text{หรือ} & y_1=y-t \\ z-z_1=0 & & z_1=z \end{array}$$

เพราะว่าจุด $P_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$ อยู่บนเส้นโค้ง $\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{16}=1,\ x=0$

จะได้ว่า $$\frac{y_1^{\,2}}{4}+\frac{z_1^{\,2}}{16}=1 \quad \text{และ} \quad x_1=0$$

เพราะฉะนั้น $\dfrac{(y-t)^2}{4}+\dfrac{z^2}{16}=1$ ....(1)

จาก $x_1 = x-4t$ และจาก $x_1=0$ จะได้ว่า $0=x-4t$ หรือ $t=\dfrac{x}{4}$

แทนค่า $t=\dfrac{x}{4}$ ในสมการ (1) จะได้

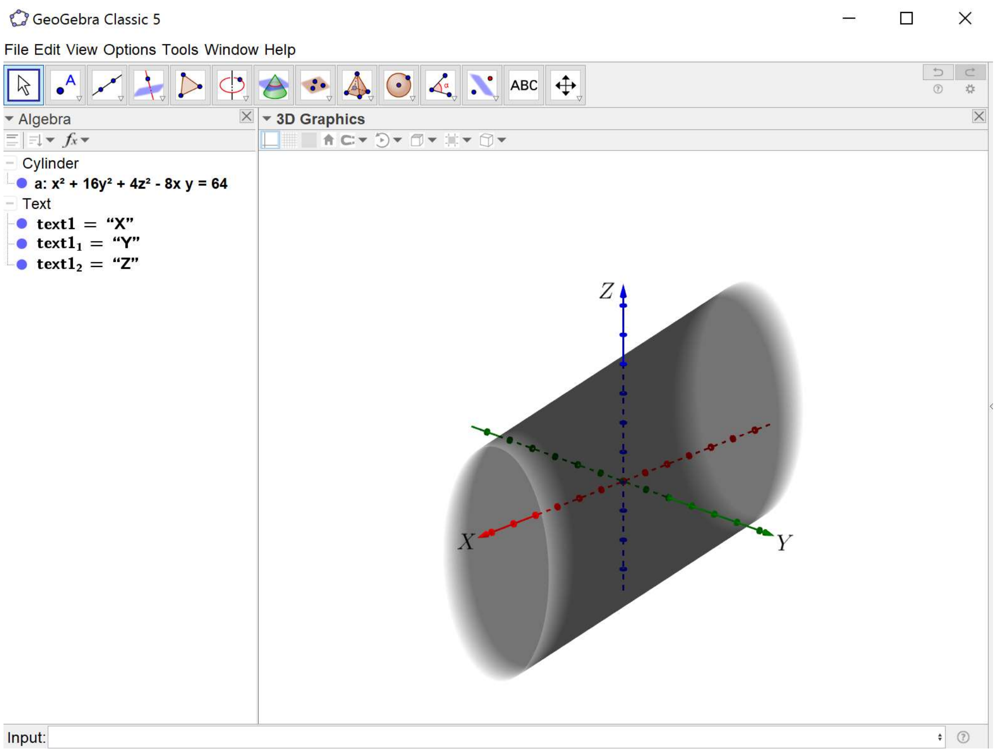
$$\frac{\left(y-\frac{x}{4}\right)^2}{4}+\frac{z^2}{16}=1$$

$$\frac{\left(\frac{4y-x}{4}\right)^2}{4}+\frac{z^2}{16}=1$$

$$x^2+16y^2+4z^2-8xy=64$$

ดังนั้น สมการของทรงกระบอกนี้คือ $x^2+16y^2+4z^2-8xy=64$

ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 8.3.1 ดังรูป 8.20



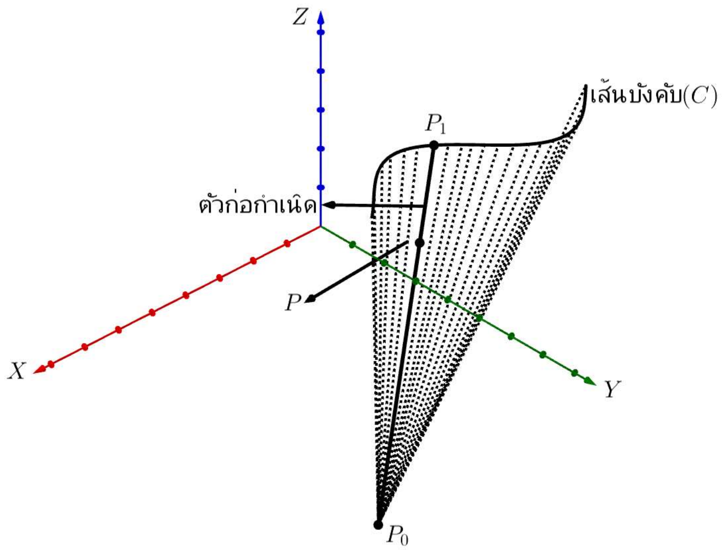
รูปที่ 8.20 ทรงกระบอก $x^2+16y^2+4z^2-8xy=64$

8.4 กรวย (Cone)

บทนิยาม 8.4 ให้ C เป็นเส้นโค้งเส้นหนึ่ง P_0 เป็นจุดคงที่จุดหนึ่ง เซตของจุดที่อยู่บนเส้นตรงทุกเส้นที่ลากผ่านจุด P_0 และตัดกับเส้นโค้ง C เรียกว่า กรวย (Cone) เรียกเส้นโค้ง C ว่า เส้นบังคับ (Directrix) เรียกจุด P_0 ว่า จุดยอด (Vertex) เรียกเส้นตรงแต่ละเส้นที่ผ่านจุด P_0 และตัดเส้นโค้ง C ว่า ตัวก่อกำเนิด (Generatrix) และกล่าวว่า ตัวก่อกำเนิดเป็นสมาชิกของกรวย

(พรชัยชัย สารทวาหา, 2550 : 12-13)

กรวยในรูปที่ 8.21 เป็นพื้นผิวที่มีเส้นโค้ง C เป็นเส้นบังคับและจุด P_0 เป็นจุดยอด ส่วนของเส้นตรง P_0P_1 เป็นตัวก่อกำเนิดหนึ่งของกรวย



รูปที่ 8.21 แสดงส่วนประกอบของกรวย

ในที่นี้เราต้องการหาสมการของกรวย กำหนดให้กรวยมีเส้นบังคับ C เป็นเส้นโค้งที่มีสมการเป็น $F(x,y,z)=0$ และ P_0 เป็นจุดยอดของกรวยมีพิกัด (x_0,y_0,z_0) ดังรูปที่ 8.21

ให้ $P(x,\ y,\ z)$ เป็นจุดใด ๆ บนกรวย จากบทนิยาม 8.4 จะต้องมีตัวก่อกำเนิดหนึ่งที่ผ่านจุด $P_0(x_0,y_0,z_0)$ และจุด $P(x,\ y,\ z)$ และตัดกับเส้นบังคับร่วม C ที่จุด $P_1(x_1,y_1,z_1)$ เนื่องจากจุด P_0 P และ P_1 อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน จะได้ว่า ต้องมีเกลาร์ t ซึ่ง $\overrightarrow{P_0P}=t\,\overrightarrow{P_1P}$

หรือ $$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{z-z_0}{z_1-z_0}=t \quad \text{.......................................(1)}$$

เนื่องจาก จุด $P_1(x_1,y_1,z_1)$ เป็นจุดอยู่บนเส้นโค้ง C เพราะฉะนั้น

$$F(x_1,y_1,z_1)=0 \quad \text{..(2)}$$

ในทำนองเดียวกันกับทรงกระบอก เราสามารถกำจัดค่าคงที่ x_1, y_1 และ z_1 ได้จากสมการ (1) และ (2) และสมการที่เหลือเป็นสมการของตัวแปร x, y และ z ซึ่งเป็นสมการของกรวยตามต้องการ

ตัวอย่าง 8.4.1 จงหาสมการของกรวยซึ่งมีจุดยอดที่ $P_0(0,0,10)$ และสมการของเส้นบังคับร่วมเป็น $x^2+y^2=9,\ z=0$ พร้อมทั้งวาดกราฟของกรวย

วิธีทำ ให้ $P(x,y,z)$ เป็นจุดใด ๆ บนกรวย ตัวก่อกำเนิดซึ่งผ่านจุด P และ P_0 ตัดกับเส้นบังคับ $x^2+y^2=9,\ z=0$ ที่จุด $P_1(x_1,y_1,z_1)$ เนื่องจาก P_0, P_1 และ P_1 อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน จะมีสเกลาร์ t ซึ่ง $\overrightarrow{P_0P}=t\,\overrightarrow{P_1P}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} x&=tx_1\\ y&=ty_1\\ z-10&=t(z_1-10)\end{aligned}$$

หรือ

$$\begin{aligned} x_1&=\frac{x}{t}\\ y_1&=\frac{y}{t}\\ z_1&=\frac{z+10t-10}{t}\end{aligned}$$

เพราะว่าจุด $P_1(x_1,y_1,z_1)$ อยู่บนเส้นโค้ง $x^2+y^2=9,\ z=0$

เพราะฉะนั้น $x_1^2+y_1^2=9,\ z_1=0$ ....(1)

แทนค่า x_1 และ y_1 ในสมการ (1) จะได้

$$\left(\frac{x}{t}\right)^2+\left(\frac{y}{t}\right)^2=9 \quad \text{...(2)}$$

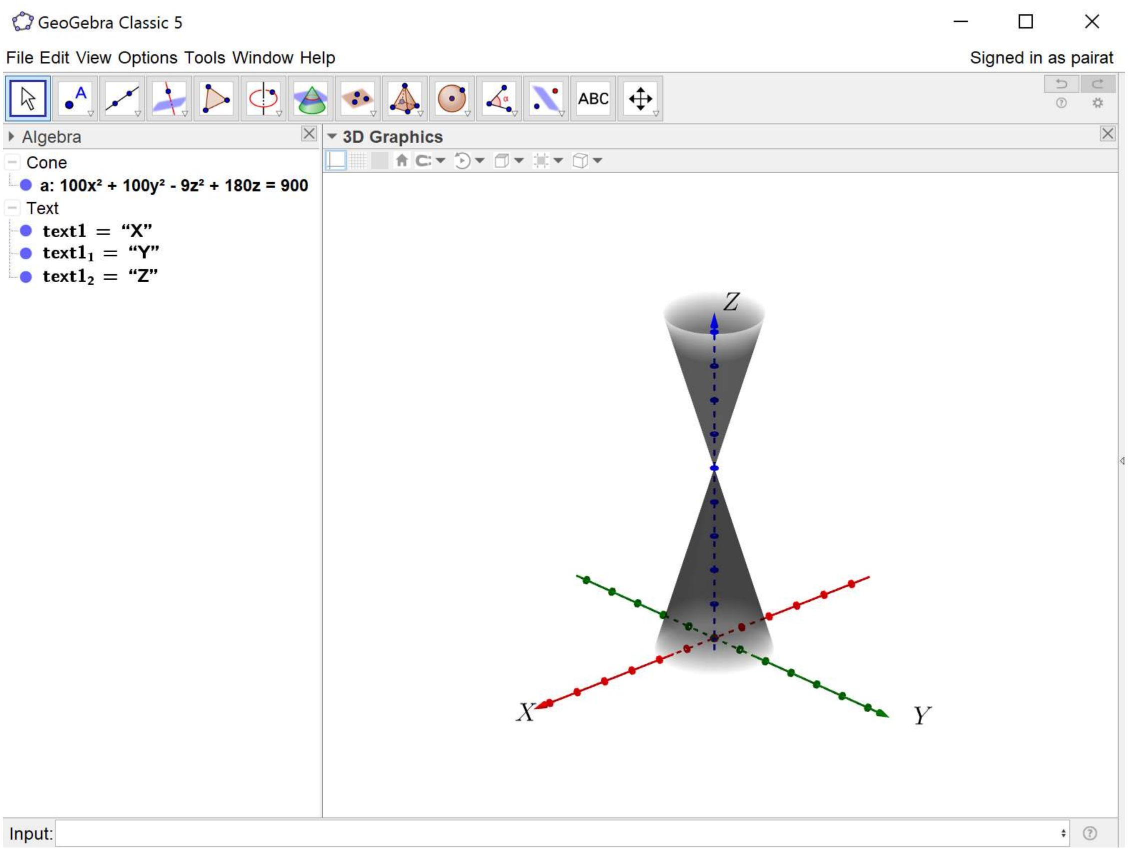
จาก $z_1=0$ จะได้ว่า $0=\dfrac{z+10t-10}{t}$ หรือ $t=\dfrac{10-z}{10}$

แทนค่า t ในสมการ (2) จะได้

$$\left(\frac{10x}{10-z}\right)^2+\left(\frac{10y}{10-z}\right)^2=9$$
$$\frac{100x^2}{(10-z)^2}+\frac{100y^2}{(10-z)^2}=9$$
$$\frac{100x^2+100y^2}{(10-z)^2}=9$$
$$100x^2+100y^2=9(10-z)^2$$
$$100x^2+100y^2=9(100-20z+z^2)$$
$$100x^2+100y^2=900-180z+9z^2$$
$$100x^2+100y^2-9z^2+180z-\ 900=0$$

ดังนั้น สมการของกรวยนี้คือ $100x^2+100y^2-9z^2+180z-900=0$

ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 8.4.1 ดังรูป 8.22



รูปที่ 8.22 กรวย $100x^2+100y^2-9z^2+180z-900=0$

8.5 ผิวกำลังสอง (Quadric Surface)

โฆสิต ชาติกำแหง (2540 : 46) ; ดำรง ทิพย์โยธา ยุวรีย์ พันธ์กล้า นัฏฐนาถ ไตรภพ และสุรชัย สมบัติบริบูรณ์, (2558 : 41) และ Varberg, Dale, Purcell, Edwin J & Rigdon, Steven E (2000 : 619-622) ได้กล่าวว่า พื้นผิวกำลังสอง คือ พื้นผิวของสมการกำลังสองของสามตัวแปร x, y และ z ที่มีความสัมพันธ์กันในรูปทั่วไป ดังนี้

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

เมื่อ A, B, C, D, E และ F ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน และพื้นผิวนั้นไม่เป็นเซตว่าง จุด เส้นตรง หรือระนาบ

หมายเหตุ จุด เส้นตรง และระนาบ เรียกว่าภาคตัดกรวยลดรูป (Degenerate Conic)

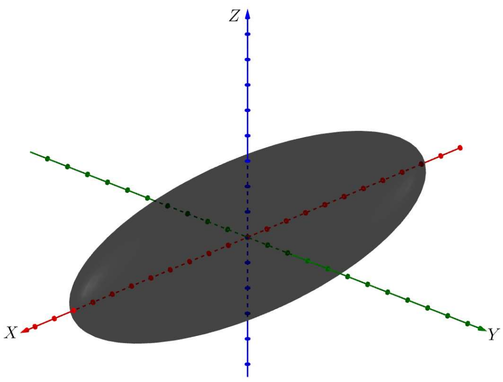
พื้นผิวที่เกิดจากสมการพื้นผิวกำลังสอง ที่ไม่ใช่ภาคตัดกรวยลดรูป มีทั้งหมด 9 แบบซึ่งขึ้นอยู่กับค่าคงที่ $A, B, C, D, E, F, G, H, I$ และ J ดังนี้

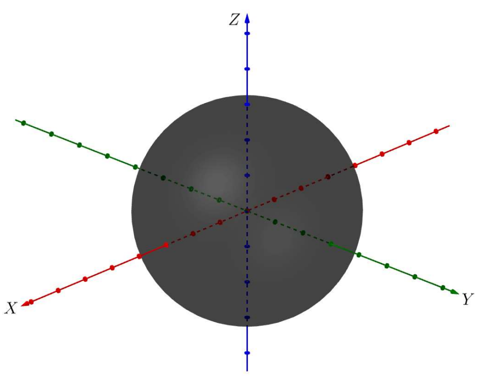
8.5.1 ทรงรี (Ellipsoid)

ทรงรี คือ ผิวกำลังสอง ที่มีสมการในรูปมาตรฐาน เป็นดังนี้

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} + \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1$$

เมื่อ x_0, y_0, z_0, a, b และ c เป็นจำนวนจริงใด ๆ เรียกจุด (x_0, y_0, z_0) ว่าจุดศูนย์กลางของทรงรี ถ้า $a = b = c$ ทรงรีมีชื่อเฉพาะว่า **ทรงกลม (Sphere)**





รูปที่ 8.23 ทรงรี

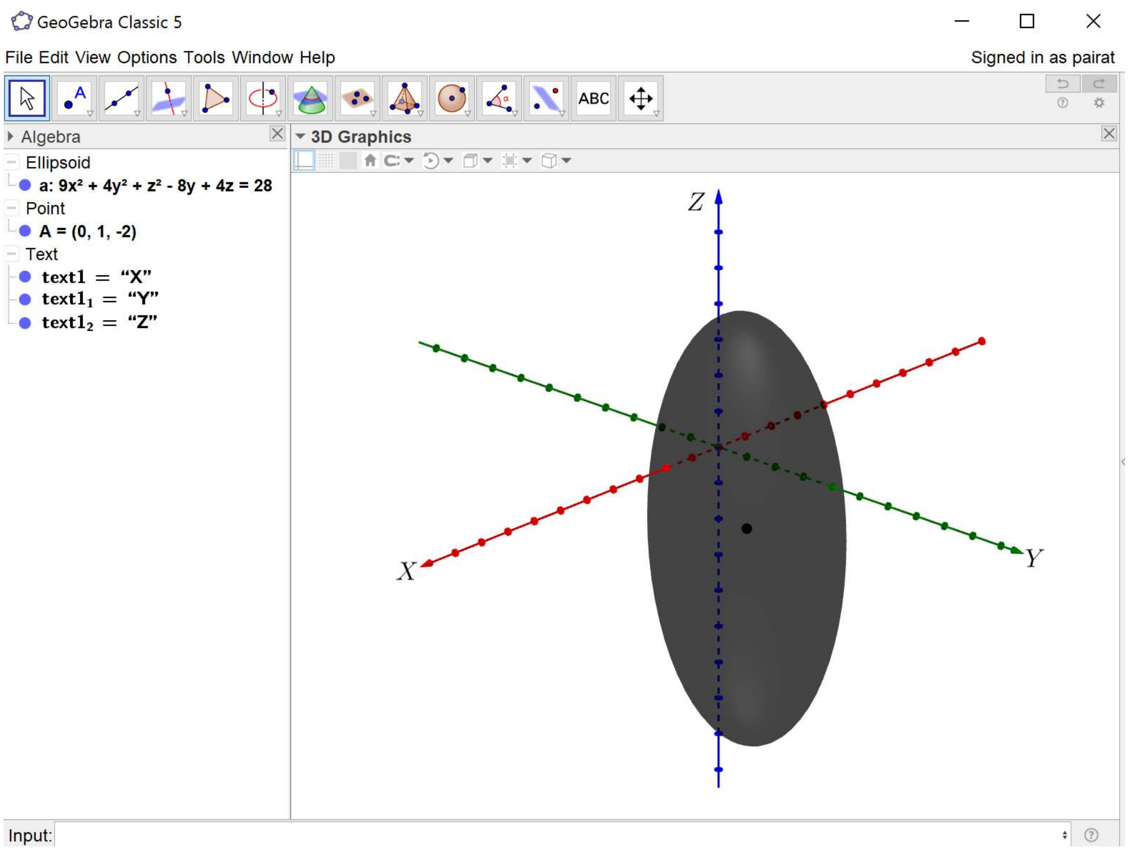
ตัวอย่าง 8.5.1 จงวาดกราฟของทรงรีที่มีสมการทั่วไปคือ $9x^2 + 4y^2 + z^2 - 8y + 4z = 28$

วิธีทำ จัดรูปสมการให้อยู่ในรูปมาตรฐาน จะได้

$$9x^2 + 4y^2 + z^2 - 8y + 4z = 28$$
$$9x^2 + 4y^2 - 8y + z^2 + 4z = 28$$
$$9x^2 + 4(y^2 - 2y + 1) + (z^2 + 4z + 4) = 28 + 4 + 4$$
$$9x^2 + 4(y-1)^2 + (z+2)^2 = 36$$
$$\frac{9x^2}{36} + \frac{4(y-1)^2}{36} + \frac{(z+2)^2}{36} = 1$$
$$\frac{x^2}{2^2} + \frac{(y-1)^2}{3^2} + \frac{(z+2)^2}{6^2} = 1$$

ดังนั้น สมการรูปมาตรฐานของวงรีนี้ คือ $\dfrac{x^2}{2^2} + \dfrac{(y-1)^2}{3^2} + \dfrac{(z+2)^2}{6^2} = 1$

ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 8.5.1 ดังรูป 8.24



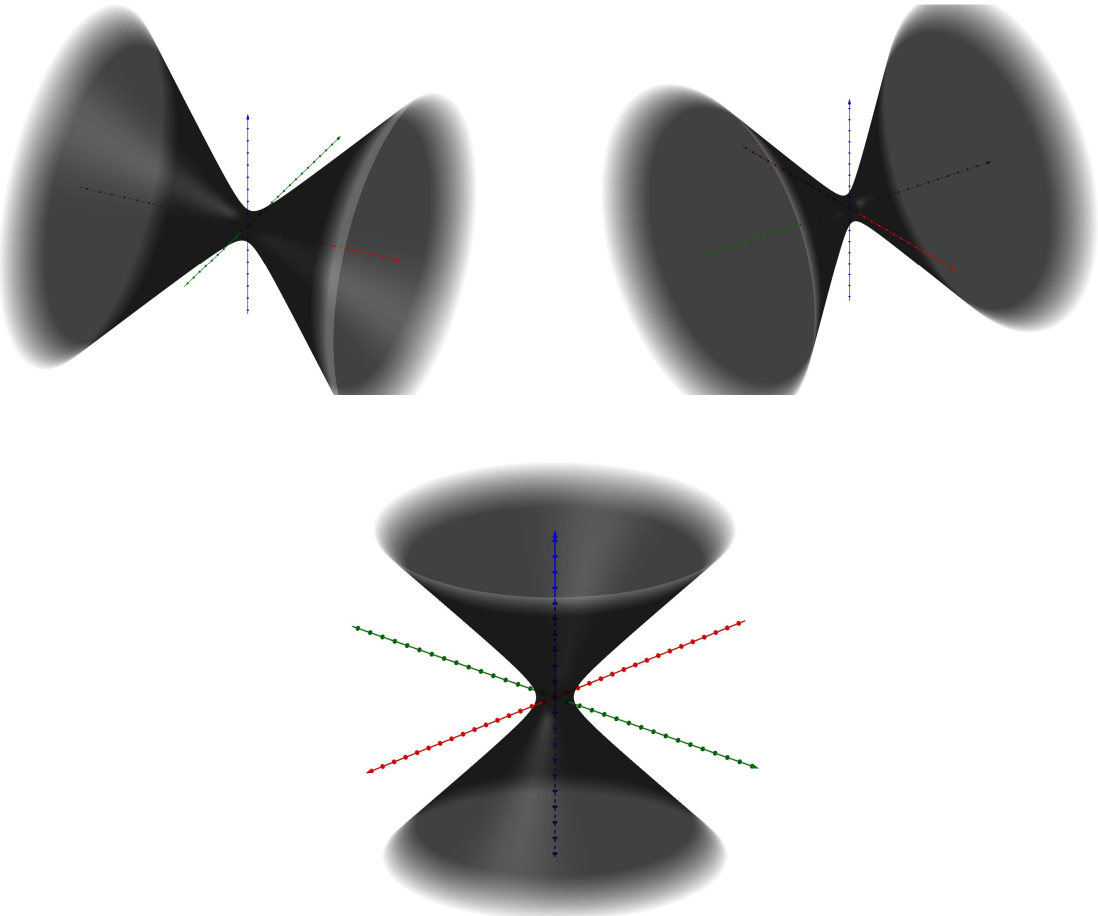
รูปที่ 8.24 กราฟของทรงรี $9x^2 + 4y^2 + z^2 - 8y + 4z = 28$

8.5.2 ทรงไฮเพอร์โบลาเชิงวงรีแบบเชื่อมโยง (Elliptic Hyperboloid of One Sheet)

ทรงไฮเพอร์โบลาเชิงวงรีแบบเชื่อมโยง คือ ผิวกำลังสอง ที่มีสมการในรูปมาตรฐานแบบใดแบบหนึ่งดังต่อไปนี้

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}-\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1$$
$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1$$
$$-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1$$

เมื่อ x_0, y_0, z_0, a, b และ c เป็นจำนวนจริงใด ๆ



รูปที่ 8.25 กราฟของทรงไฮเพอร์โบลาเชิงวงรีแบบเชื่อมโยง

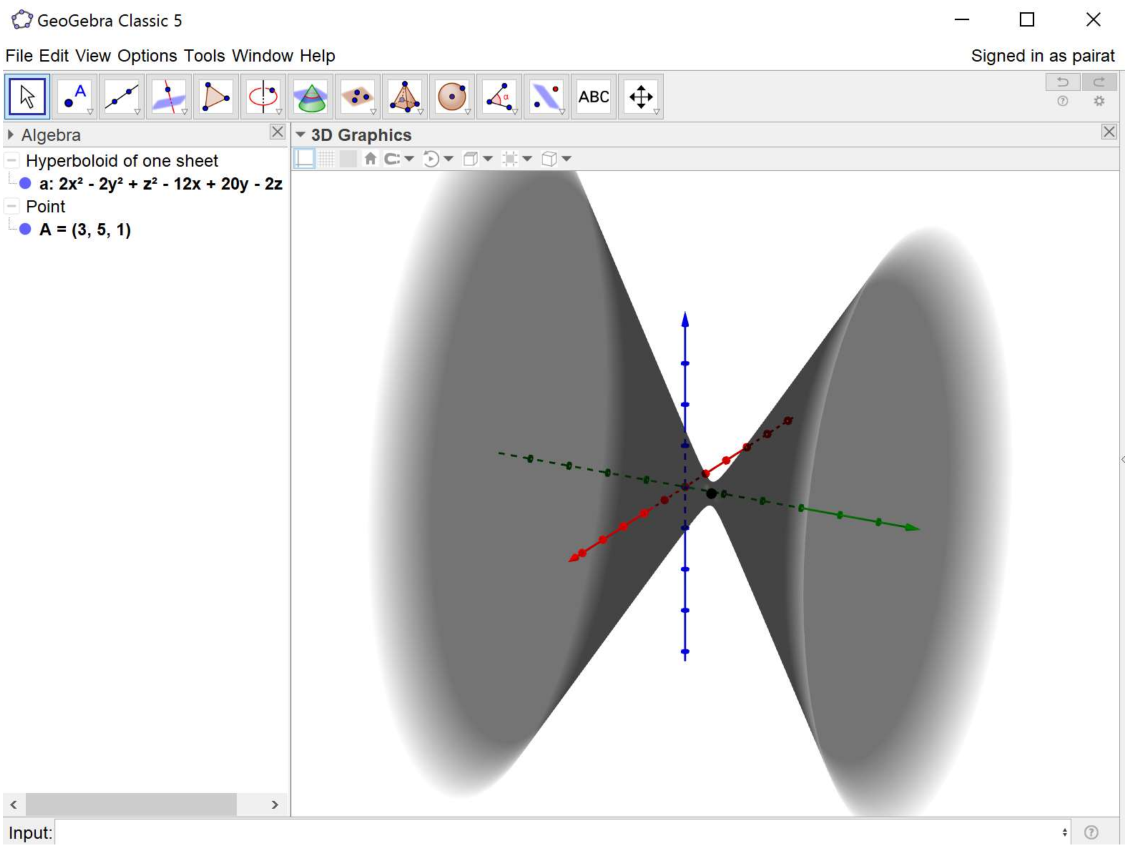
ตัวอย่าง 8.5.2 จงวาดกราฟของทรงไฮเพอร์โบลาเชิงวงรีแบบเชื่อมโยง ที่มีสมการทั่วไปคือ $2x^2 - 2y^2 + z^2 - 12x + 20y - 2z = 33$

วิธีทำ จัดรูปสมการให้อยู่ในรูปมาตรฐาน จะได้

$$\begin{aligned}
2x^2 - 2y^2 + z^2 - 12x + 20y - 2z &= 33 \\
2(x^2 - 6x) - 2(y^2 - 10y) + (z^2 - 2z) &= 33 \\
2(x^2 - 6x + 9) - 2(y^2 - 10y + 25) + (z^2 - 2z + 1) &= 33 + 18 - 50 + 1 \\
2(x-3)^2 - 2(y-5)^2 + (z-1)^2 &= 2 \\
(x-3)^2 - (y-5)^2 + \frac{(z-1)^2}{2} &= 1
\end{aligned}$$

ดังนั้น สมการรูปมาตรฐาน คือ $(x-3)^2 - (y-5)^2 + \dfrac{(z-1)^2}{2} = 1$

ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 8.5.2 ดังรูป 8.26



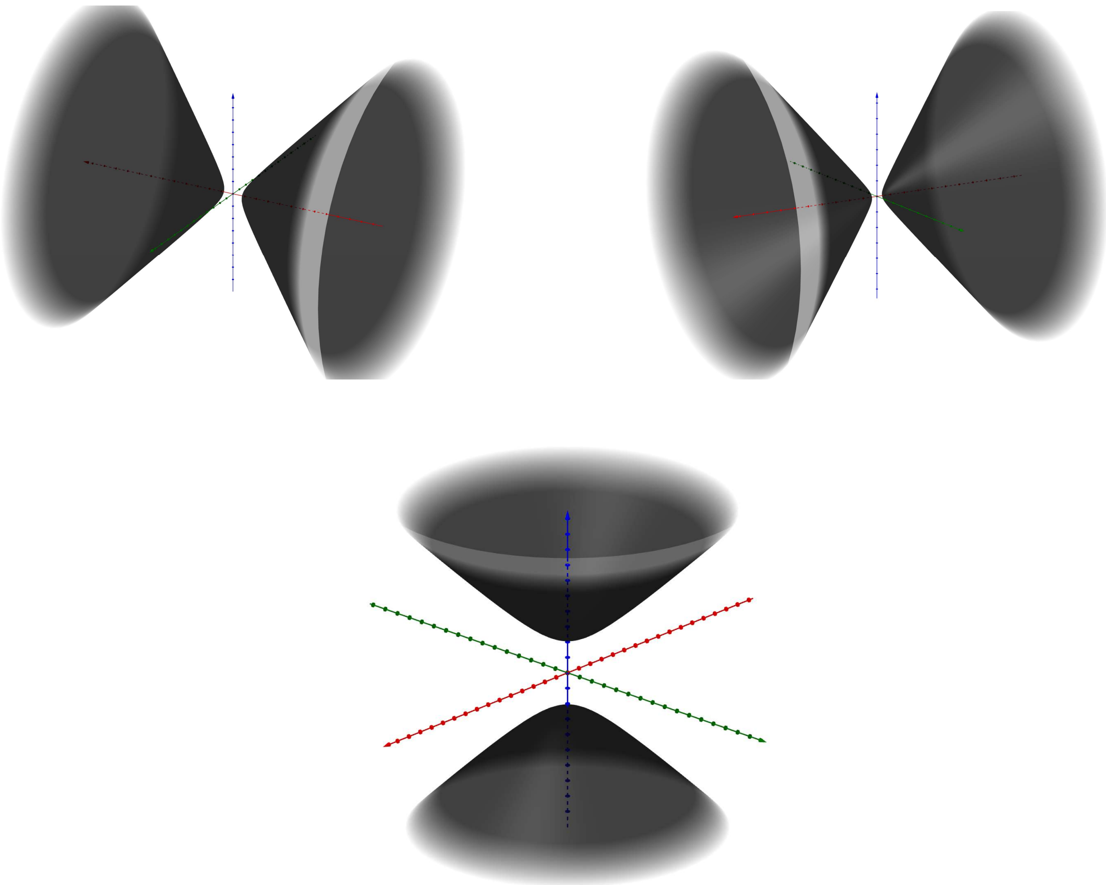
รูปที่ 8.26 กราฟของสมการ $2x^2 - 2y^2 + z^2 - 12x + 20y - 2z = 33$

8.5.3 ทรงไฮเพอร์โบลาเชิงวงรีแบบไม่เชื่อมโยง (Elliptic Hyperboloid of Two Sheet)

ทรงไฮเพอร์โบลาเชิงวงรีแบบไม่เชื่อมโยง คือ ผิวกำลังสอง ที่มีสมการในรูปมาตรฐานแบบใดแบบหนึ่งดังต่อไปนี้

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}-\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=-1$$
$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=-1$$
$$-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=-1$$

เมื่อ x_0, y_0, z_0, a, b และ c เป็นจำนวนจริงใด ๆ



รูปที่ 8.27 กราฟของทรงไฮเพอร์โบลาเชิงวงรีแบบไม่เชื่อมโยง

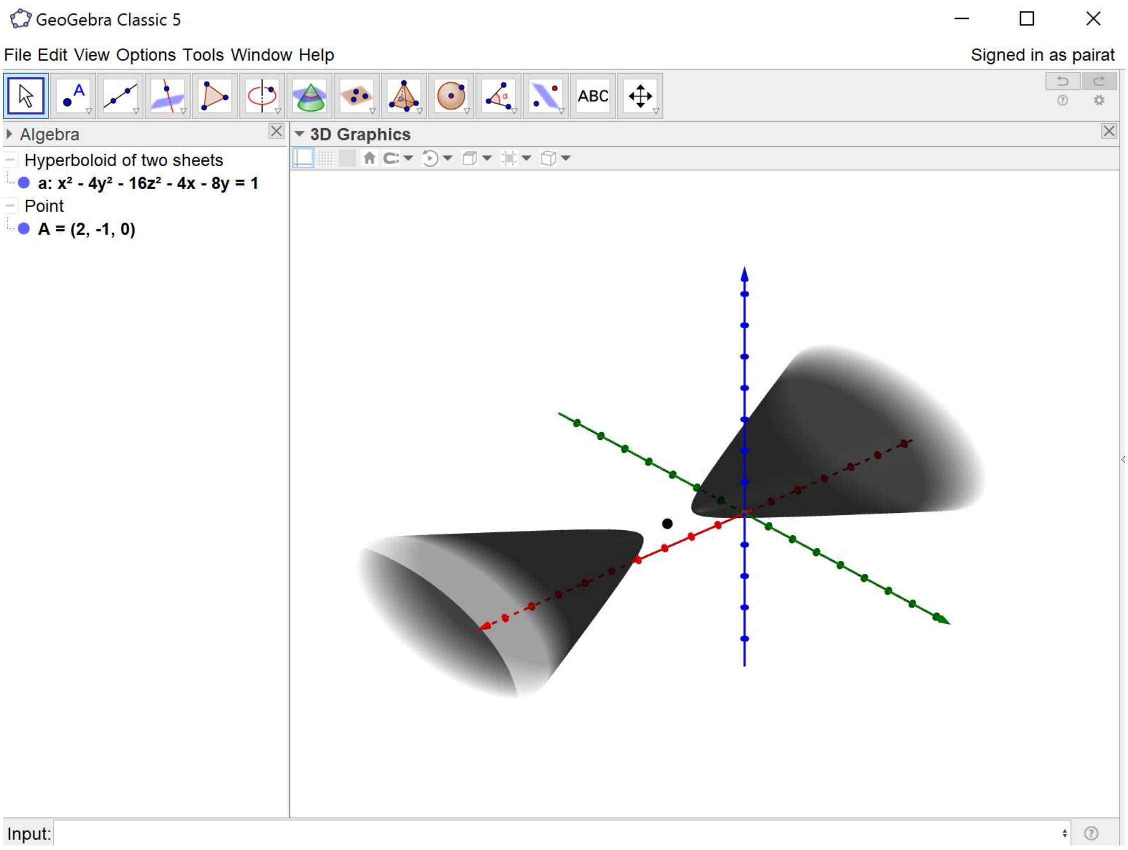
ตัวอย่าง 8.5.3 จงวาดกราฟของทรงไฮเพอร์โบลาเชิงวงรีแบบไม่เชื่อมโยง ที่มีสมการทั่วไปคือ $x^2-4y^2-16z^2-4x-8y=1$

วิธีทำ จัดรูปสมการให้อยู่ในรูปมาตรฐาน จะได้

$$\begin{aligned}
x^2-4y^2-16z^2-4x-8y&=1\\
(x^2-4x)-(4y^2+8y)-16z^2&=1\\
(x^2-4x+4)-4(y^2+2y+1)-16z^2&=1+4-4\\
(x-2)^2-4(y+1)^2-16z^2&=1\\
-(x-2)^2+4(y+1)^2+16z^2&=-1
\end{aligned}$$

ดังนั้น สมการรูปมาตรฐาน คือ $-(x-2)^2+4(y+1)^2+16z^2=-1$

ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 8.5.3 ดังรูป 8.28



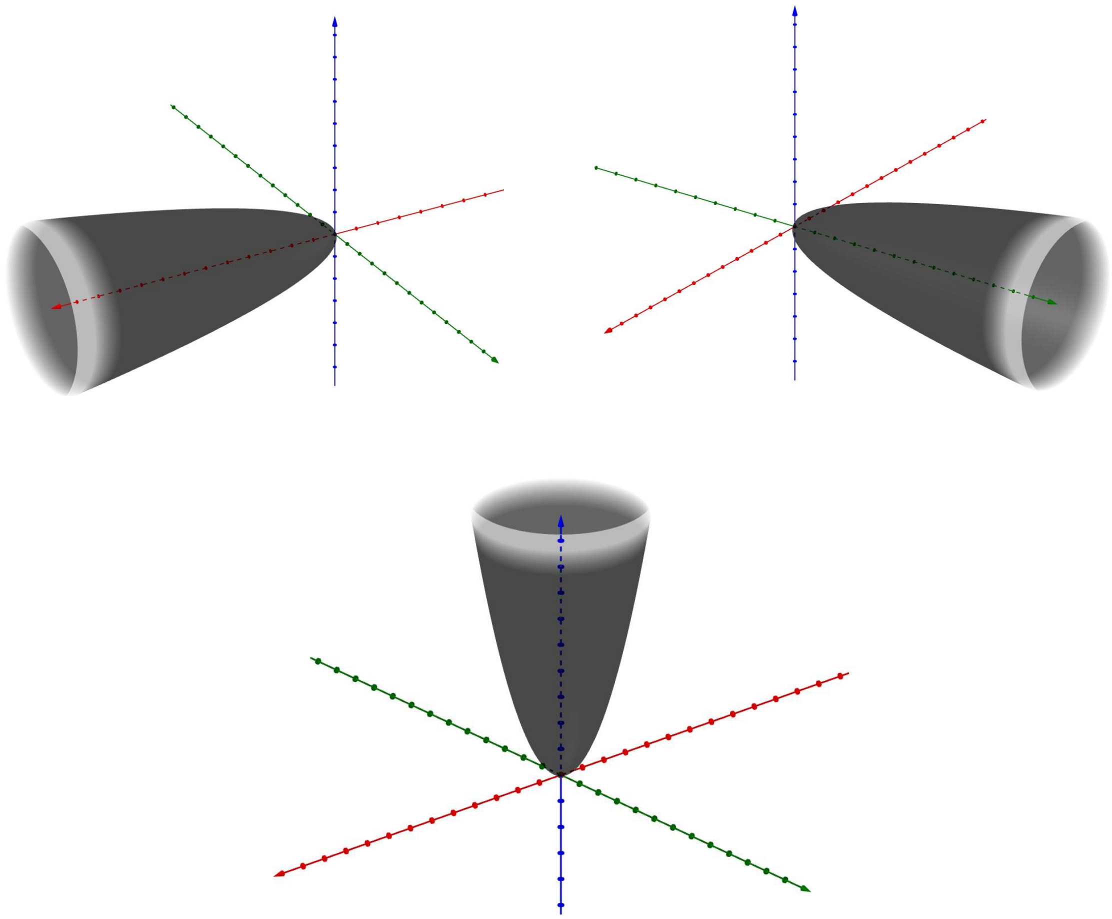
รูปที่ 8.28 กราฟของสมการ $x^2-4y^2-16z^2-4x-8y=1$

8.5.4 ทรงพาราโบลาเชิงวงรี (Elliptic Paraboloid)

ทรงพาราโบลาเชิงวงรี คือ ผิวกำลังสองที่มีสมการในรูปมาตรฐานแบบใดแบบหนึ่งดังต่อไปนี้

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=\pm c(z-z_0)$$
$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=\pm b(y-y_0)$$
$$\frac{(y-y_0)^2}{y^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=\pm a(x-x_0)$$

เมื่อ x_0, y_0, z_0, a, b และ c เป็นจำนวนจริงใด ๆ



รูปที่ 8.29 กราฟของทรงพาราโบลาเชิงวงรี

ตัวอย่าง 8.5.4 จงวาดกราฟของทรงพาราโบลาเชิงวงรี ที่มีสมการทั่วไปคือ

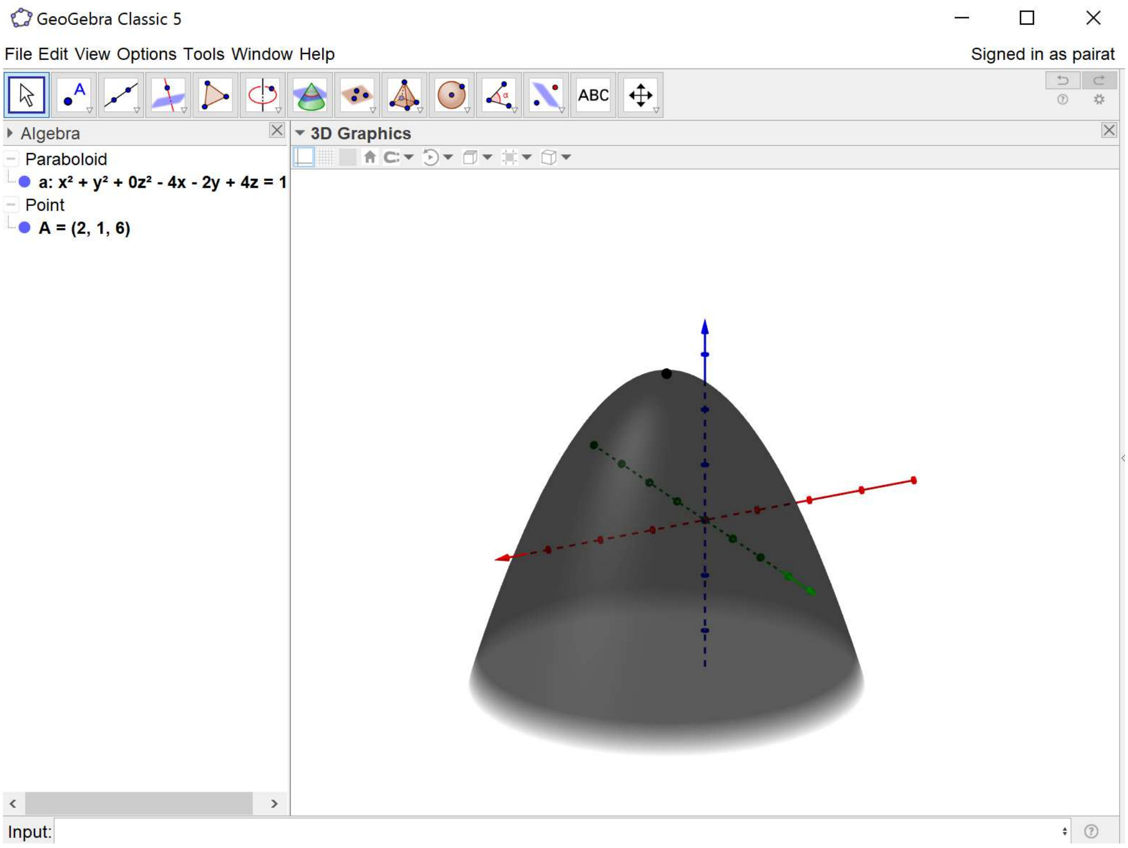
$x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4z = 19$

วิธีทำ จัดรูปสมการให้อยู่ในรูปมาตรฐาน จะได้

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4z &= 19 \\ (x^2 - 4x + 4) + (y^2 - 2y + 1) &= -4z + 19 + 4 + 1 \\ (x-2) + (y-1) &= -4(z-6) \\ \frac{(x-2)}{4} + \frac{(y-1)}{4} &= -(z-6) \\ \frac{(x-2)}{2^2} + \frac{(y-1)}{2^2} &= -(z-6) \end{aligned}$$

ดังนั้น สมการรูปมาตรฐานของทรงพาราโบลาเชิงวงรี คือ $\dfrac{(x-2)}{2^2} + \dfrac{(y-1)}{2^2} = -(z-6)$

ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 8.5.4 ดังรูป 8.30



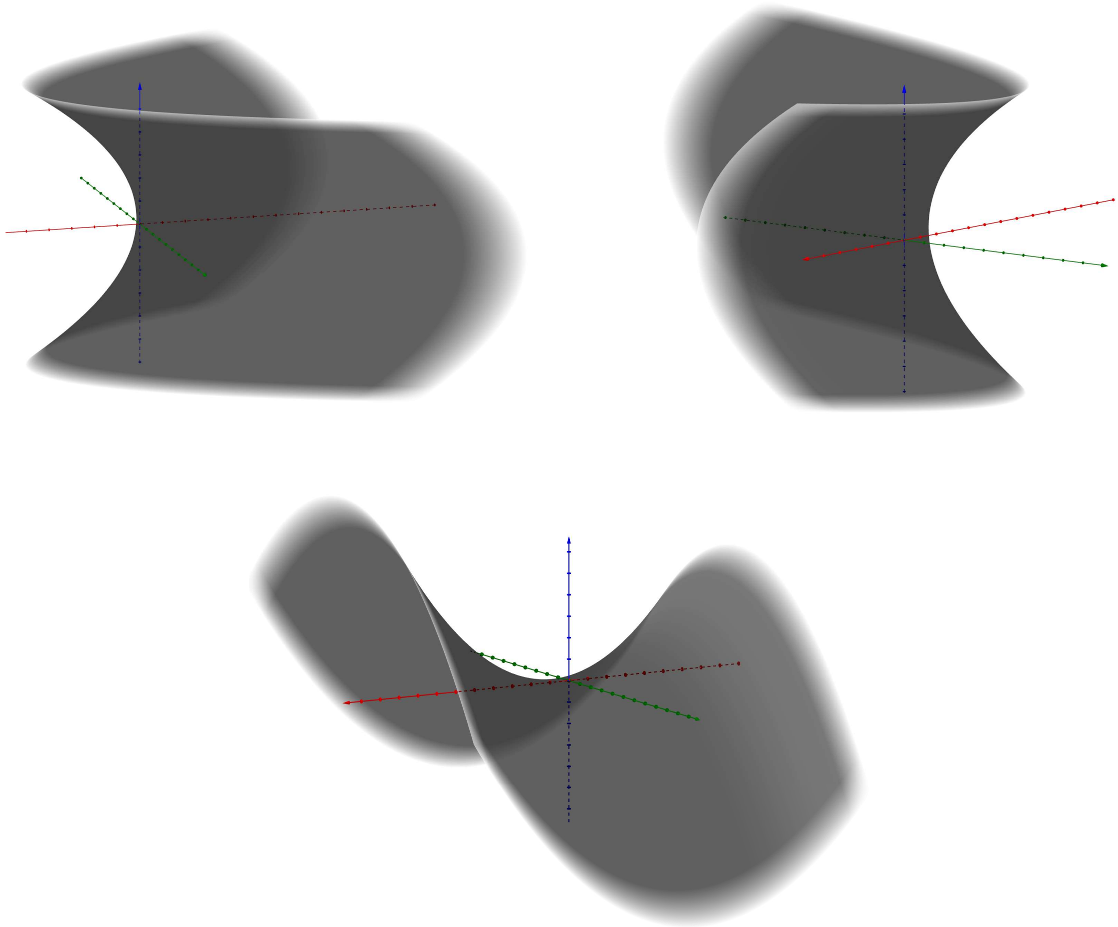
รูปที่ 8.30 กราฟของของทรงพาราโบลาเชิงวงรี $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4z = 19$

8.5.5 ทรงพาราโบลาเชิงไฮเพอร์โบลา (Hyperbolic Paraboloid)

ทรงพาราโบลาเชิงไฮเพอร์โบลา คือ ผิวกำลังสอง ที่มีสมการในรูปมาตรฐานแบบใดแบบหนึ่งดังต่อไปนี้

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=\pm c(z-z_0)$$
$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=\pm b(y-y_0)$$
$$\frac{(y-y_0)^2}{y^2}-\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=\pm a(x-x_0)$$

เมื่อ x_0, y_0, z_0, a, b และ c เป็นจำนวนจริงใด ๆ



รูปที่ 8.31 กราฟของทรงพาราโบลาเชิงไฮเพอร์โบลา

ตัวอย่าง 8.5.5 จงวาดกราฟของทรงพาราโบลาเชิงไฮเพอร์โบลา ที่มีสมการทั่วไปคือ

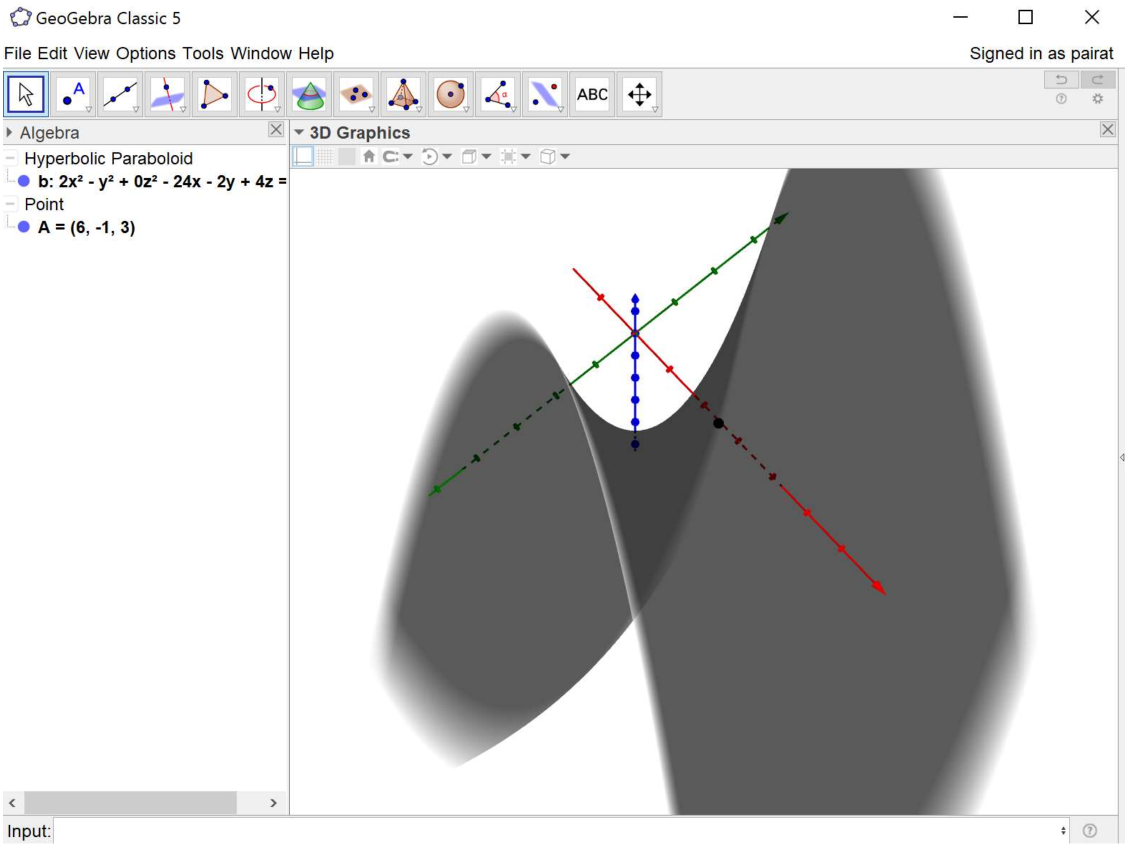
$2x^2 - y^2 - 24x - 2y + 4z + 59 = 0$

วิธีทำ จัดรูปสมการให้อยู่ในรูปมาตรฐาน จะได้

$$\begin{aligned} 2x^2 - y^2 - 24x - 2y + 4z + 59 &= 0 \\ (2x^2 - 24x) - (y^2 + 2y) + 4z &= -59 \\ 2(x^2 - 12x + 36) - (y^2 + 2y + 1) + 4z &= -59 + 72 - 1 \\ 2(x-6)^2 - (y+1)^2 + 4z &= 12 \\ 2(x-6)^2 - (y+1)^2 &= -4z + 12 \\ (y+1)^2 - 2(x-6)^2 &= 4(z-3) \end{aligned}$$

ดังนั้น สมการรูปมาตรฐานทรงพาราโบลาเชิงไฮเพอร์โบลา คือ $(y+1)^2 - 2(x-6)^2 = 4(z-3)$

ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 8.5.4 ดังรูป 8.32



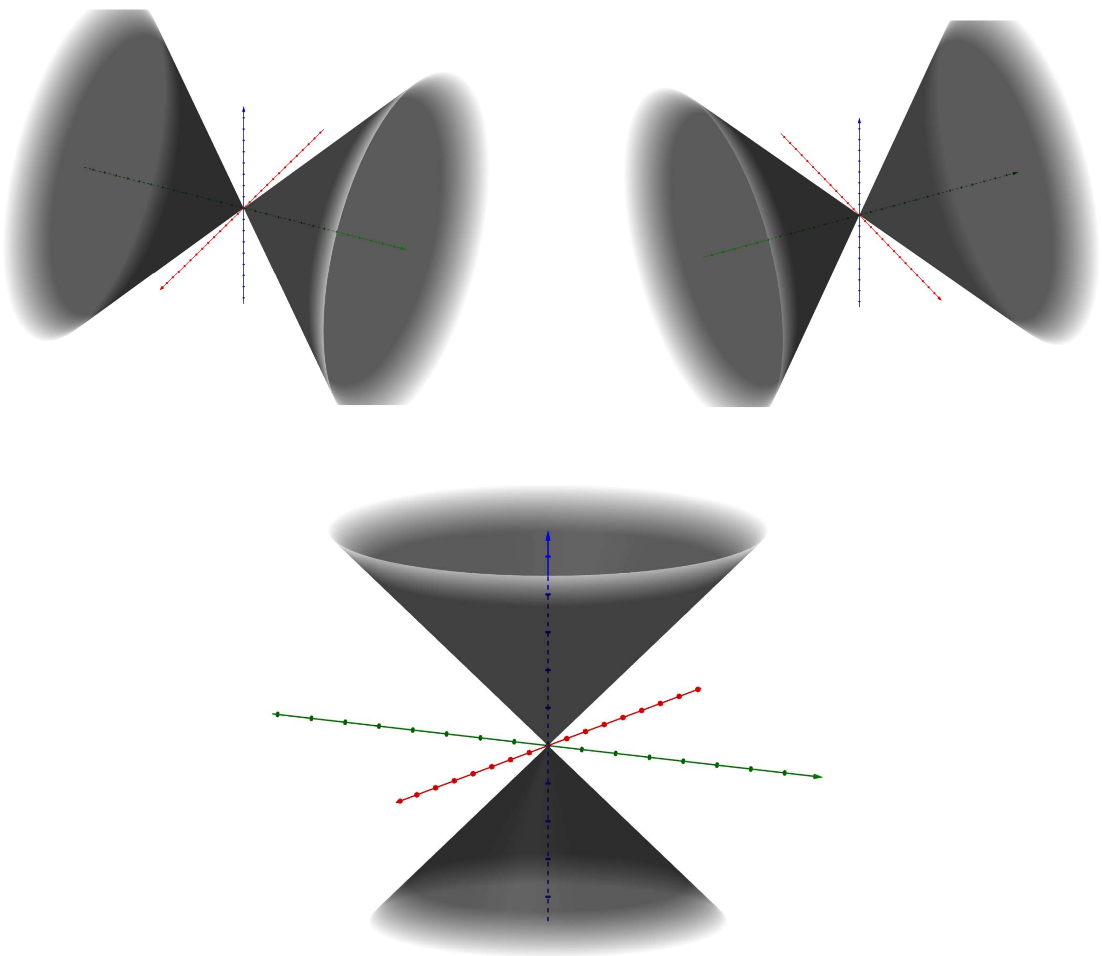
รูปที่ 8.32 กราฟของพาราโบลาเชิงไฮเพอร์โบลา $2x^2 - y^2 - 24x - 2y + 4z + 59 = 0$

8.5.6 กรวยเชิงวงรี (Elliptic Cone)

กรวยเชิงวงรี คือ ผิวกำลังสองที่มีสมการในรูปมาตรฐานแบบใดแบบหนึ่งดังต่อไปนี้

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=\frac{(z-z_0)^2}{c^2}$$
$$\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=\frac{(x-x_0)^2}{a^2}$$
$$\frac{(z-z_0)^2}{c^2}+\frac{(x-x_0)^2}{a^2}=\frac{(y-y_0)^2}{b^2}$$

เมื่อ x_0, y_0, z_0, a, b และ c เป็นจำนวนจริงใด ๆ



รูปที่ 8.33 กราฟของกรวยเชิงวงรี

ตัวอย่าง 8.5.6 จงวาดกราฟของกรวยเชิงวงรีที่มีสมการทั่วไปคือ

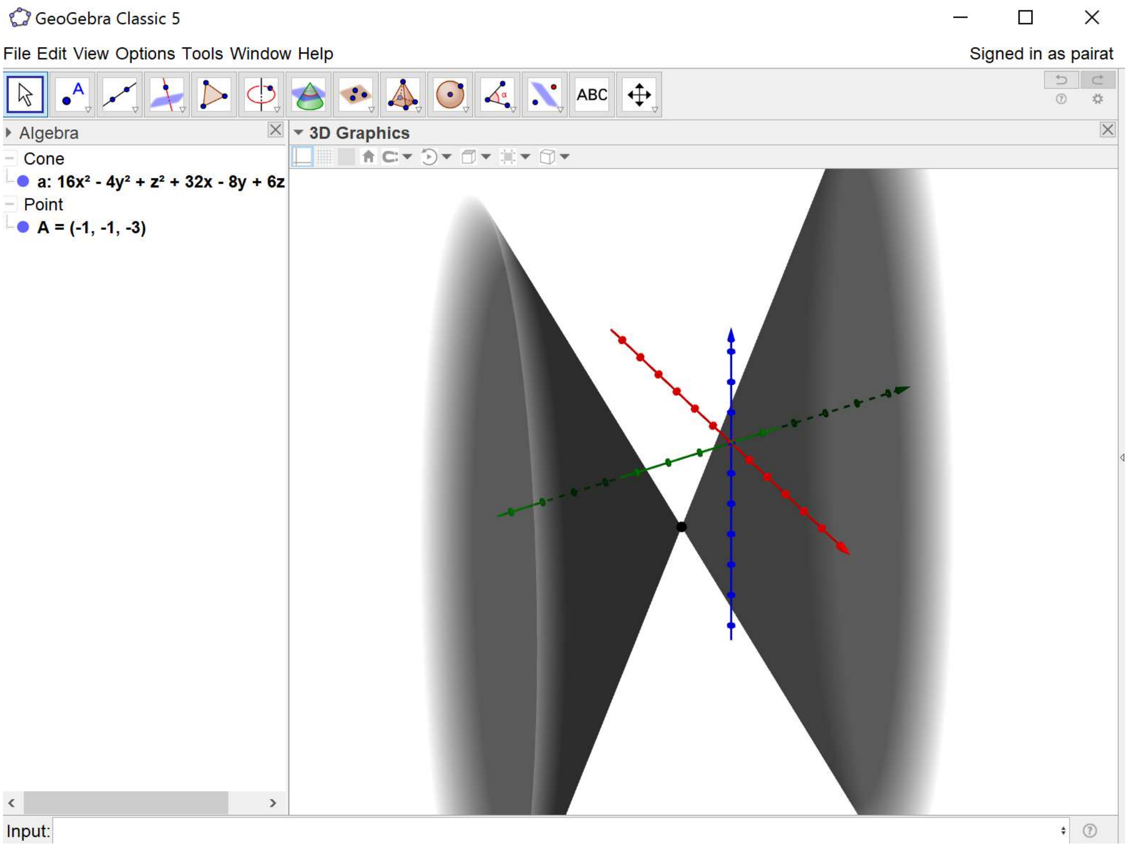
$16x^2 - 4y^2 + z^2 + 32x - 8y + 6z + 21 = 0$

วิธีทำ จัดรูปสมการให้อยู่ในรูปมาตรฐาน จะได้

$$\begin{aligned} 16x^2 - 4y^2 + z^2 + 32x - 8y + 6z + 21 &= 0 \\ 16(x^2 + 2x + 1) - 4(y^2 + 2y + 1) + (z^2 + 6z + 9) &= -21 + 16 - 4 + 9 \\ 16(x+1)^2 - 4(y+1)^2 + (z+3)^2 &= 0 \\ 16(x+1)^2 + (z+3)^2 &= 4(y+1)^2 \\ \frac{(x+1)^2}{2^2} + \frac{(z+3)^2}{8^2} &= \frac{(y+1)^2}{4^2} \end{aligned}$$

ดังนั้น สมการรูปมาตรฐานของกรวยเชิงวงรี คือ $\dfrac{(x+1)^2}{2^2} + \dfrac{(z+3)^2}{8^2} = \dfrac{(y+1)^2}{4^2}$

ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 8.5.6 ดังรูป 8.34



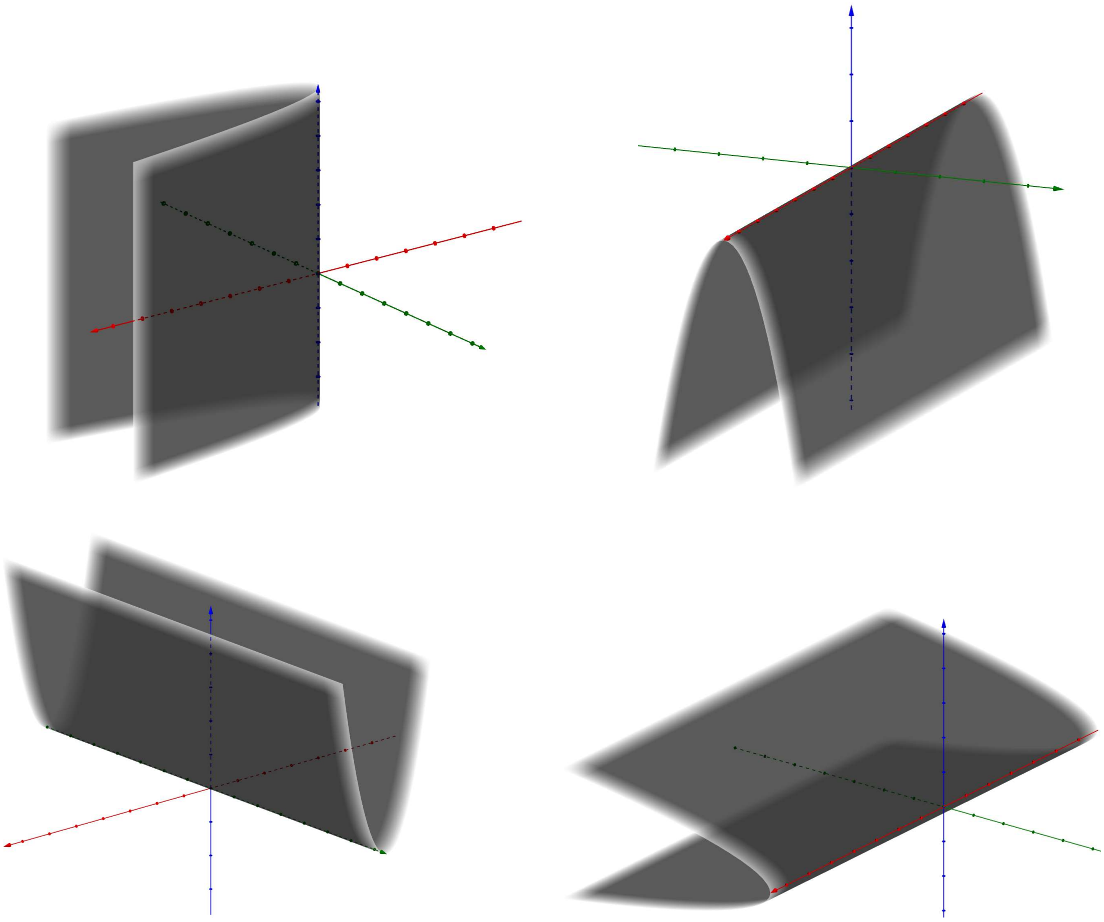
รูปที่ 8.34 กราฟของกรวยเชิงวงรี $16x^2 - 4y^2 + z^2 + 32x - 8y + 6z + 21 = 0$

8.5.7 ทรงกระบอกเชิงพาราโบลา (Parabolic Cylinder)

ทรงกระบอกเชิงพาราโบลา คือ ผิวกำลังสองที่มีสมการในรูปมาตรฐานแบบใดแบบหนึ่งดังต่อไปนี้

$$
\begin{aligned}
(x-x_0)^2 &= \pm 4c(y-y_0) \\
(x-x_0)^2 &= \pm 4c(z-z_0) \\
(y-y_0)^2 &= \pm 4c(x-x_0) \\
(y-y_0)^2 &= \pm 4c(z-z_0) \\
(z-z_0)^2 &= \pm 4c(x-x_0) \\
(z-z_0)^2 &= \pm 4c(y-y_0)
\end{aligned}
$$

เมื่อ x_0, y_0, z_0 และ c เป็นจำนวนจริงใด ๆ



รูปที่ 8.35 กราฟของทรงกระบอกเชิงพาราโบลา

ตัวอย่าง 8.5.7 จงวาดกราฟของทรงกระบอกเชิงพาราโบลา ที่มีสมการทั่วไปคือ

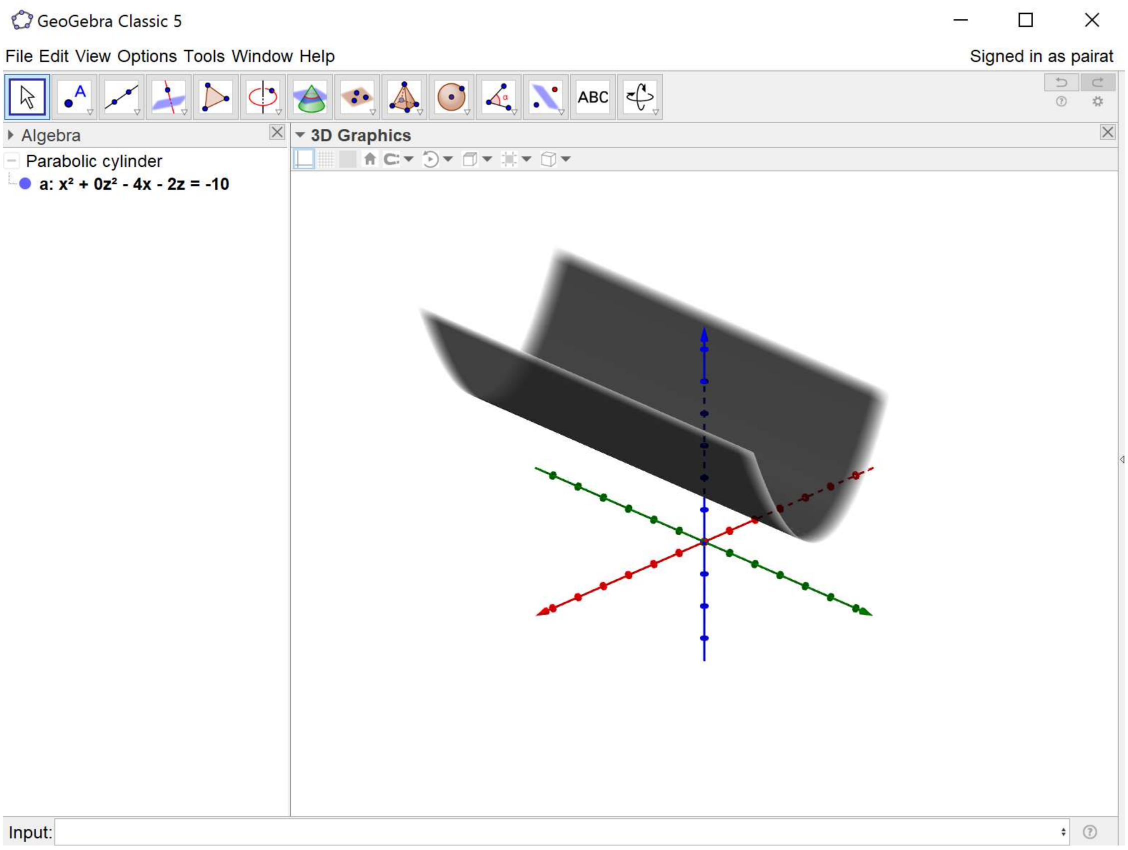
$x^2 - 4x - 2z + 10 = 0$

วิธีทำ จัดรูปสมการให้อยู่ในรูปมาตรฐาน จะได้

$$\begin{aligned} x^2 - 4x - 2z + 10 &= 0 \\ (x^2 - 4x) - 2z &= -10 \\ (x^2 - 4x + 4) - 2z &= -10 + 4 \\ (x-2)^2 - 2z &= -6 \\ (x-2)^2 &= 2(z-3) \end{aligned}$$

ดังนั้น สมการรูปมาตรฐานทรงกระบอกเชิงพาราโบลา คือ $(x-2)^2 = 4\left(\frac{1}{2}\right)(z-3)$

ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 8.5.7 ดังรูป 8.36



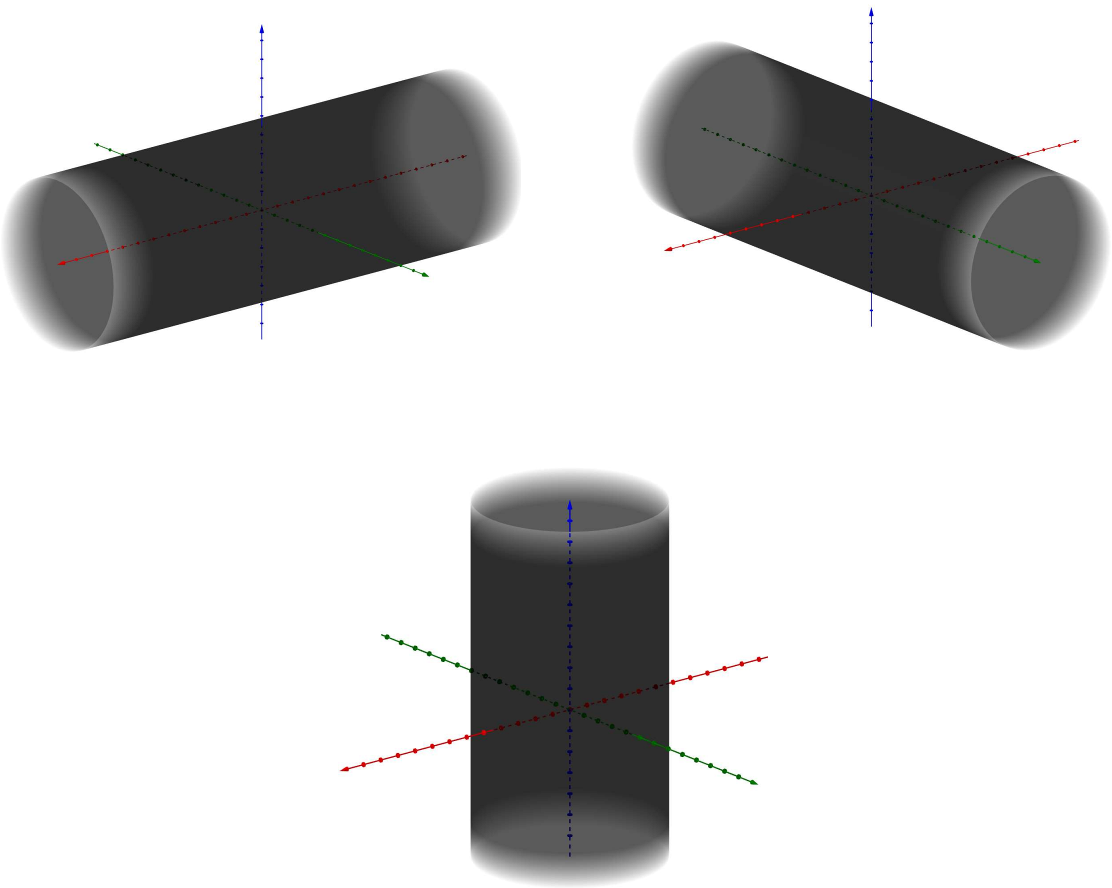
รูปที่ 8.36 กราฟของทรงกระบอกเชิงพาราโบลา $x^2 - 4x - 2z + 10 = 0$

8.5.8 ทรงกระบอกเชิงวงรี (Elliptic Cylinder)

ทรงกระบอกวงรี คือ ผิวกำลังสองที่มีสมการในรูปมาตรฐานแบบใดแบบหนึ่งดังต่อไปนี้

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$
$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1$$
$$\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1$$

เมื่อ x_0, y_0, z_0, a, b และ c เป็นจำนวนจริงใด ๆ



รูปที่ 8.37 กราฟของทรงกระบอกเชิงวงรี

ตัวอย่าง 8.5.8 จงวาดกราฟของทรงกระบอกวงรี ที่มีสมการทั่วไป คือ

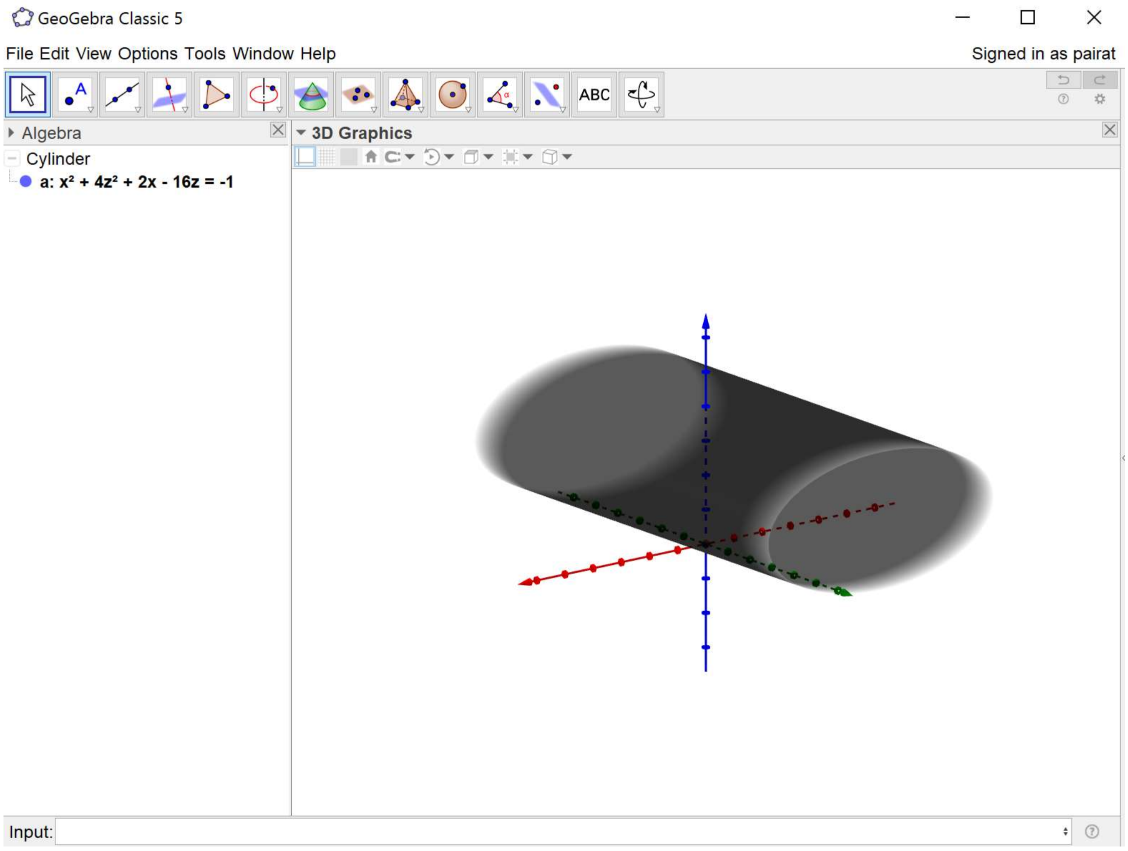
$x^2 + 4z^2 + 2x - 16z + 1 = 0$

วิธีทำ จัดรูปสมการให้อยู่ในรูปมาตรฐาน จะได้

$$x^2 + 4z^2 + 2x - 16z = -1$$
$$(x^2 + 2x) + (4z^2 - 16z) = -1$$
$$(x^2 + 2x + 1) + 4(z^2 - 4z + 4) = -1 + 1 + 16$$
$$(x+1)^2 + 4(z-2)^2 = 16$$
$$\frac{(x+1)^2}{16} + \frac{(z-2)^2}{4} = 1$$

ดังนั้น สมการรูปมาตรฐานของทรงกระบอกวงรี คือ $\frac{(x+1)^2}{4^2} + \frac{(z-2)^2}{2^2} = 1$

ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 8.5.8 ดังรูป 8.38



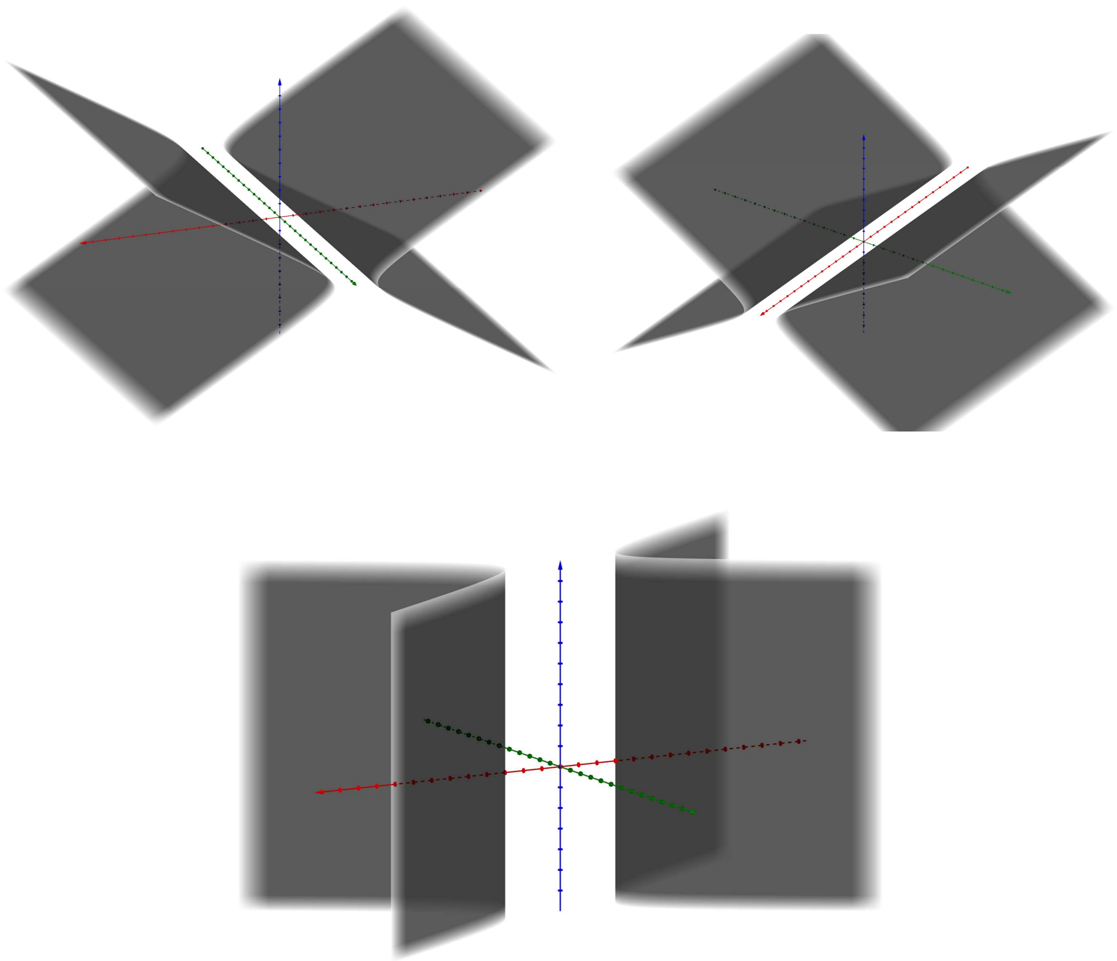
รูปที่ 8.38 กราฟของทรงกระบอกวงรี $x^2 + 4z^2 + 2x - 16z + 1 = 0$

8.5.9 ทรงกระบอกเชิงไฮเพอร์โบลา (Hyperbolic Cylinder)

ทรงกระบอกเชิงไฮเพอร์โบลา คือ ผิวกำลังสองที่มีสมการในรูปมาตรฐานแบบใดแบบหนึ่งดังต่อไปนี้

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=\pm 1$$
$$\frac{(y-y_0)^2}{b^2}-\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=\pm 1$$
$$\frac{(z-z_0)^2}{c^2}-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}=\pm 1$$

เมื่อ x_0, y_0, z_0 , a , b และ c เป็นจำนวนจริงใด ๆ



รูปที่ 8.39 กราฟของทรงกระบอกเชิงไฮเพอร์โบลา

ตัวอย่าง 8.5.9 จงวาดกราฟของทรงกระบอกเชิงไฮเพอร์โบลา ที่มีสมการทั่วไปคือ

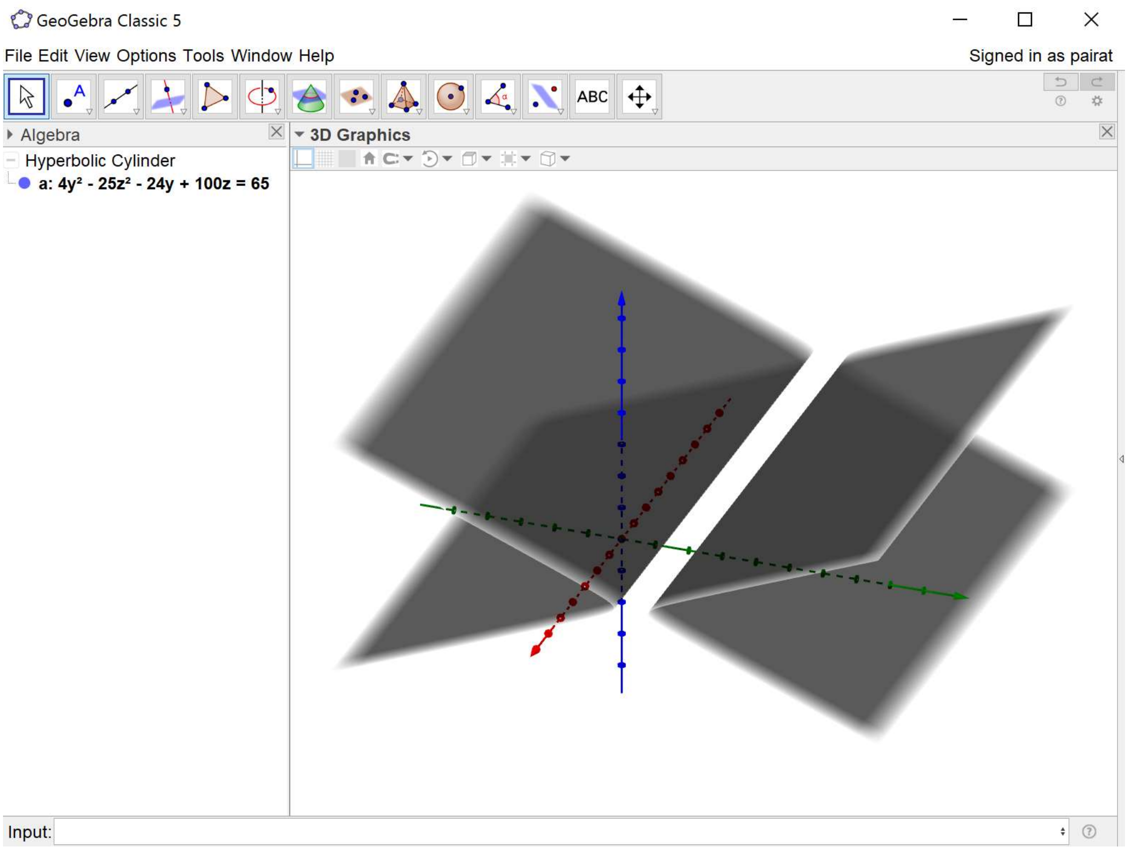
$4y^2 - 25z^2 - 24y + 100z = 65$

วิธีทำ จัดรูปสมการให้อยู่ในรูปมาตรฐาน จะได้

$$\begin{aligned} 4y^2 - 25z^2 - 24y + 100z &= 65 \\ (4y^2 - 24y) - (25z^2 - 100z) &= 65 \\ 4(y^2 - 6y) - 25(z^2 - 4z) &= 65 \\ 4(y^2 - 6y + 9) - 25(z^2 - 4z + 4) &= 65 + 36 + 100 \\ 4(y-3)^2 - 25(z-2)^2 &= 1 \end{aligned}$$

ดังนั้น สมการรูปมาตรฐานของทรงกระบอกเชิงไฮเพอร์โบลา คือ $4(y-3)^2 - 25(z-2)^2 = 1$

ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 8.5.9 ดังรูป 8.40



รูปที่ 8.40 กราฟของทรงกระบอกเชิงไฮเพอร์โบลา $4y^2 - 25z^2 - 24y + 100z = 65$

สรุปท้ายบทที่ 8

สำหรับบทที่ 8 นั้นเราได้ศึกษาผิวกำลังสอง สำหรับในการพิจารณาผิวกำลังสองนั้นเราได้พิจารณาจุดตัดของพื้นผิวกับแกนพิกัด การสมมาตรของพื้นผิว รอยตัดของพื้นผิวกับระนาบ และขอบเขตของพื้นผิว

พื้นผิวซึ่งเกิดจากการหมุนเส้นโค้ง คือ พื้นผิวซึ่งเกิดจากการหมุนเส้นโค้งบนระนาบรอบเส้นตรงคงที่เส้นหนึ่ง ที่อยู่บนระนาบนั้น ในหัวข้อนี้ เราได้ศึกษาพื้นผิวที่เกิดจากการหมุนเส้นโค้งในระนาบที่กำหนดให้รอบเส้นตรงที่อยู่บนระนาบเดียวกับเส้นโค้ง เรียกเส้นตรงที่กำหนดให้ว่า แกนหมุน และเรียกผิวที่ได้จากการหมุนนี้ว่า พื้นผิวที่เกิดจากการหมุน

ให้ C เป็นเส้นโค้งเส้นหนึ่ง และ L เป็นเส้นตรงเส้นหนึ่ง (ซึ่งไม่ได้อยู่บนระนาบเดียวกับเส้นโค้ง) เซตของจุดที่อยู่บนเส้นตรงที่ขนานกับเส้นตรง L และตัดเส้นโค้ง C เรียกว่า **ทรงกระบอก (Cylinder)** เรียกเส้นโค้ง C ว่าเส้นบังคับ (Directrix) เรียกเส้นตรงแต่ละเส้นที่ขนานกับเส้นตรง L และผ่านเส้นโค้ง C ว่า ตัวก่อกำเนิด (Generatrix) และตัวก่อกำเนิดแต่ละเส้น เป็นสมาชิกของทรงกระบอก เรียกเส้นตรง L ว่า แกนของทรงกระบอก

ให้ C เป็นเส้นโค้งเส้นหนึ่ง P_0 เป็นจุดคงที่จุดหนึ่ง เซตของจุดที่อยู่บนเส้นตรงทุกเส้นที่ลากผ่านจุด P_0 และตัดกับเส้นโค้ง C เรียกว่า **กรวย (Cone)** เรียกเส้นโค้ง C ว่า เส้นบังคับ (Directrix) เรียกจุด P_0 ว่า จุดยอด (Vertex) เรียกเส้นตรงแต่ละเส้นที่ผ่านจุด P_0 และตัดเส้นโค้ง C ว่า ตัวก่อกำเนิด (Generatrix) และกล่าวว่า ตัวก่อกำเนิดเป็นสมาชิกของกรวย

กราฟของพื้นผิวกำลังสองที่สำคัญมีดังนี้

- ทรงรี มีสมการในรูปมาตรฐาน คือ

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1$$

- ทรงไฮเพอร์โบลาเชิงวงรีแบบเชื่อมโยง มีสมการในรูปมาตรฐาน คือ

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}-\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1$$
$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1$$
$$-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1$$

- ทรงไฮเพอร์โบลาเชิงวงรีแบบไม่เชื่อมโยง มีสมการในรูปมาตรฐาน คือ

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}-\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=-1$$
$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=-1$$
$$-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=-1$$

- ทรงพาราโบลาเชิงวงรี มีสมการในรูปมาตรฐาน คือ

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=\pm c(z-z_0)$$
$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=\pm b(y-y_0)$$
$$\frac{(y-y_0)^2}{y^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=\pm a(x-x_0)$$

- กรวยเชิงวงรี มีสมการในรูปมาตรฐาน คือ

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=\frac{(z-z_0)^2}{c^2}$$
$$\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=\frac{(x-x_0)^2}{a^2}$$
$$\frac{(z-z_0)^2}{c^2}+\frac{(x-x_0)^2}{a^2}=\frac{(y-y_0)^2}{b^2}$$

- ทรงกระบอกเชิงพาราโบลา มีสมการในรูปมาตรฐาน คือ

$$(x-x_0)^2=\pm 4c(y-y_0)$$
$$(x-x_0)^2=\pm 4c(z-z_0)$$
$$(y-y_0)^2=\pm 4c(x-x_0)$$
$$(y-y_0)^2=\pm 4c(z-z_0)$$
$$(z-z_0)^2=\pm 4c(x-x_0)$$
$$(z-z_0)^2=\pm 4c(y-y_0)$$

- ทรงกระบอกวงรี มีสมการในรูปมาตรฐาน คือ

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$
$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1$$
$$\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1$$

- ทรงกระบอกเชิงไฮเพอร์โบลา มีสมการในรูปมาตรฐาน คือ

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=\pm 1$$
$$\frac{(y-y_0)^2}{b^2}-\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=\pm 1$$
$$\frac{(z-z_0)^2}{c^2}-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}=\pm 1$$

แบบฝึกหัดบทที่ 8

จงหาจุดตัดแกน การสมมาตร รอยตัดของระนาบ และขอบเขต ของสมการต่อไปนี้ (ข้อ 8.1 - 8.18)

8.1 $x^2 + y^2 + z^2 = 16$

8.2 $3x + 2y + 2z = 12$

8.3 $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

8.4 $x = \sqrt{y^2 + x^2}$

8.5 $x^2 + y^2 = z$

8.6 $z = 4 - x^2 - y^2$

8.7 $z = 3 - x - y$

8.8 $z = e^x$

8.9 $z = \sin y$

8.10 $y^2 - z^2 = 4$

8.11 $z = x^3$

8.12 $4x^2 + 9y^2 + 16z^2 = 144$

8.13 $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{16} = 0$

8.14 $x^2 + y^2 - 4y = 0$

8.15 $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{16} = -1$

8.16 $(x+1)^2 + 9(y-5)^2 + 16z^2 = 144$

8.17 $z - 1 = (x-2)^2$

8.18 $\dfrac{(x-1)^2}{25} + \dfrac{(y-2)^2}{16} + \dfrac{(z-3)^2}{36} = 1$

จงหาสมการของพื้นผิวที่กำหนดเงื่อนไขให้ต่อไปนี้ (ข้อ 8.19 - 8.29)

8.19 พื้นผิวซึ่งเกิดจากการหมุนเส้นโค้ง $y^2 - x^2 = 1,\ z = 0$ รอบแกน Y

8.20 พื้นผิวซึ่งเกิดจากการหมุนเส้นโค้ง $z = e^{-x^2},\ y = 0$ รอบแกน Z

8.21 พื้นผิวซึ่งเกิดจากการหมุนเส้นโค้ง $5z = x^2 + 3,\ y = 0$ รอบแกน X

8.22 พื้นผิวซึ่งเกิดจากการหมุนเส้นโค้ง $z = \sin y,\ x = 0$ รอบแกน Z

8.23 พื้นผิวซึ่งเกิดจากการหมุนเส้นโค้ง $1 - x = y,\ z = 0$ รอบแกน X

8.24 พื้นผิวซึ่งเกิดจากการหมุนเส้นโค้ง $x = \sqrt{y},\ z = 0$ รอบแกน X

8.25 พื้นผิวซึ่งเกิดจากการหมุนเส้นโค้ง $x = \sqrt{y},\ z = 0$ รอบแกน Y

8.26 พื้นผิวซึ่งเกิดจากการหมุนเส้นโค้ง $z = \cos x,\ y = 0$ รอบแกน X

8.27 พื้นผิวซึ่งเกิดจากการหมุนเส้นโค้ง $z = \cos x,\ y = 0$ รอบแกน Z

8.28 พื้นผิวซึ่งเกิดจากการหมุนเส้นโค้ง $x + z = 2,\ y = 0$ รอบแกน X

8.29 พื้นผิวซึ่งเกิดจากการหมุนเส้นโค้ง $1 = x^2 - y^2,\ z = 0$ รอบแกน Y

จงหาสมการของทรงกระบอกที่มีเส้นบังคับ (D) และตัวก่อกำเนิด (G) ดังต่อไปนี้ พร้อมทั้งวาดกราฟของทรงกระบอก (ข้อ 8.30 - 8.39)

8.30 D : $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$
G : แกน Z

8.31 D : $3x^2 + z^2 + 4z = 0$, $y = 0$
G : ขนานกับเวกเตอร์ $\langle 4,1,0 \rangle$

8.32 D : $y^2 = 4x$, $z = 0$
G : ขนานกับเวกเตอร์ $\langle 1,2,3 \rangle$

8.33 D : $2x^2 + y^2 + 2y = 0$, $z = 0$
G : ขนานกับเวกเตอร์ $\langle 2,0,1 \rangle$

8.34 D : $x^2 = 4y$, $z = 0$
G : ขนานกับเวกเตอร์ $\langle 1,2,3 \rangle$

8.35 D : $x^2 + y^2 = 25$, $z = 0$
G : ขนานกับเวกเตอร์ $\langle 0,1,1 \rangle$

8.36 D : $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{z^2}{9} = 1$, $y = 0$
G : ขนานกับเวกเตอร์ $\langle 1,2,0 \rangle$

8.37 D : $(y-4)^2 = 12(x-1)$, $z = 0$
G : ขนานกับเวกเตอร์ $\langle 2,0,1 \rangle$

8.38 D : $\dfrac{y^2}{4} + \dfrac{z^2}{16} = 1$, $x = 0$
G : ขนานกับเวกเตอร์ $\langle 4,1,0 \rangle$

8.39 D : $3x + 4y = 24$, $z = 0$
G : ขนานกับเวกเตอร์ $\langle 2,3,4 \rangle$

จงหาสมการของกรวยที่มีเส้นบังคับ (D) และจุดยอด (V) ดังต่อไปนี้ พร้อมทั้งวาดกราฟของกรวย (ข้อ 8.30 - 8.39)

8.40 D : $z^2 = 4y$, $x = 0$ และจุด $V = (2,0,0)$

8.41 D : $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{z^2}{9} = 1$, $y = 0$ และจุด $V = (2,5,1)$

8.42 D : $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$ และจุด $V = (1,1,3)$

8.43 D : $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = 1$, $z = 0$ และจุด $V = (0,0,2)$

8.44 D : $4x^2 + 16z^2 = 1$, $y = 8$ และจุด $V = (0,0,0)$

8.45 D : $x^2 + 4y^2 = 1$, $z = 4$ และจุด $V = (0,0,0)$

8.46 D : $x^2 + 4y^2 = 16$, $z = 4$ และจุด $V = (2,1,0)$

8.47 D : $(y-2)^2 = 24(x-4)$, $z = 2$ และจุด $V = (1,0,0)$

8.48 D : $x = z^2$, $y = 3$ และจุด $V = (1,0,2)$

8.49 D : $(z-1)^2 = 4y$, $x = 3$ และจุด $V = (0,1,2)$

บอกชื่อของกราฟต่อไปนี้ พร้อมทั้งวาดกราฟ (ข้อ 8.50 - 8.57)

8.50 $z=(x+2)^2+(y-3)^2-9$

8.51 $\dfrac{(x+2)^2}{4}-\dfrac{(y-1)^2}{2}+\dfrac{(z-2)^2}{8}=1$

8.52 $z=4-x^2-y^2-2y$

8.53 $4x^2+y^2-24x-4y+20=0$

8.54 $x^2=y^2+z^2$

8.55 $2x^2-3y^2-8x-12y+12z=52$

8.56 $z^2=\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}$

8.57 $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{9}=1$

8.58 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{16}+\dfrac{z^2}{9}=1$

8.59 $z=\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}$

8.60 $y^2+z^2-x^2=1$

8.61 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{9}=-1$

8.62 $y-z^2=0$

8.63 $36x^2-9y^2+16z^2=144$

8.64 $2x^2+y^2-z=0$

8.65 $x^2+y^2-z+1=0$

8.66 $4x^2-6y^2-16x-24y+24z=104$

8.67 $9x^2+y^2+4z^2-18x+2y+16z=10$

8.68 กำหนดสมการของพื้นผิวเป็น $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{z^2}{2}=1$

1. บอกชื่อของกราฟต่อไปนี้และเขียนกราฟของพื้นผิว
2. จงหาสมการรอยตัดบนระนาบ $z=0$ และ $z=-\sqrt{6}$ พร้อมทั้งเขียนกราฟของรอยตัดบนกราฟของพื้นผิว

8.69 กำหนดสมการของพื้นผิวเป็น $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{36}=1$

1. บอกชื่อของกราฟต่อไปนี้และเขียนกราฟของพื้นผิว
2. จงหาสมการรอยตัดบนระราบ $z=0$ และ $z=3\sqrt{2}$ พร้อมทั้งเขียนกราฟของรอยตัดบนกราฟของพื้นผิว

8.70 กำหนดสมการของพื้นผิวเป็น $x^2+\frac{y^2}{4}=\frac{z}{2}$

1. บอกชื่อของกราฟต่อไปนี้และเขียนกราฟของพื้นผิว
2. จงหาสมการรอยตัดบนระราบ $x=1, y=0$ และ $z=8$ พร้อมทั้งเขียนกราฟของรอยตัดบนกราฟของพื้นผิว

8.71 กำหนดสมการของพื้นผิวเป็น $16x^2+4y^2-z^2=0$

1. บอกชื่อของกราฟต่อไปนี้และเขียนกราฟของพื้นผิว
2. จงหาสมการรอยตัดบนระราบ $z=8$ และ $y=3$ พร้อมทั้งเขียนกราฟของรอยตัดบนกราฟของพื้นผิว

8.72 กำหนดสมการของพื้นผิวเป็น $2x^2-3y^2-8x-12y+12z=52$

1. บอกชื่อของกราฟต่อไปนี้และเขียนกราฟของพื้นผิว
2. จงหาสมการรอยตัดบนระราบ $x=2, y=3$ และ $z=4$ พร้อมทั้งเขียนกราฟของรอยตัดบนกราฟของพื้นผิว