บทที่ 1
เวกเตอร์ในสองมิติและสามมิติ (Vector in Plane and Spaces)

เวกเตอร์ใน 2 มิติ

1. ความหมายของเวกเตอร์

เวกเตอร์ คือ ปริมาณที่มีทั้งขนาดและทิศทาง เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\overrightarrow{AB}$, $\vec{u}$, $\vec{v}$

ตัวอย่าง 1.1 กำหนดให้ $A\left(0,0\right)$, $B\left(1,2\right)$, $C\left(4,1\right)$ และ $D\left(5,3\right)$ เป็นจุดบนระนาบ จงหา $\overrightarrow{AB}$ และ $\overrightarrow{CD}$

....

....

....

....

....

....

....

อาจเขียนได้เป็น $\vec{u} = a\hat{i} + b\hat{j} = \left\langle a, b \right\rangle = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

เราเรียก $a\hat{i}$ และ $b\hat{j}$ ว่า ....

และเรียกเรียก a และ b ว่า ....

2. การเท่ากันของเวกเตอร์

นิยาม 2.1 เวกเตอร์สองเวกเตอร์ใด ๆ จะเท่ากันก็ต่อเมื่อมีขนาดเท่ากันและทิศทางเดียวกัน เช่นกำหนดให้ $\vec{u} = a\hat{i} + b\hat{j}$ และ $\vec{v} = c\hat{i} + d\hat{j}$ จะได้ว่า $\vec{u} = \vec{v}$ ก็ต่อเมื่อ $a = c$ และ $b = d$

ตัวอย่าง 2.1 กำหนดให้ $A\left(0,0\right)$, $B\left(1,2\right)$, $C\left(4,1\right)$ และ $D\left(5,3\right)$ จงแสดงว่า $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

3. การบวกและการลบของเวกเตอร์

นิยาม 3.1 ถ้า $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ แล้วผลบวกของ $\vec{u}$ กับ $\vec{v}$ เขียนแทนด้วย $\vec{u}+\vec{v}$

ตัวอย่าง 3.1 กำหนดให้ $A\left(0,0\right),\ B\left(1,2\right),\ C\left(4,1\right)$ และ $D\left(5,3\right)$ จงหา $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

....

....

....

....

....

....

....

....

นิยาม 3.2 ถ้า $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ แล้วผลลบของ $\vec{u}$ กับ $\vec{v}$ เขียนแทนด้วย $\vec{u}+\left(-\vec{v}\right)$

ตัวอย่าง 3.2 กำหนดให้ $A\left(0,0\right),\ B\left(1,2\right),\ C\left(4,1\right)$ และ $D\left(5,3\right)$ จงหา $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$

....

....

....

....

....

....

....

....

นิยาม 3.3 ถ้า $\vec{u}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ และ k เป็นสเกลาร์ใด ๆ แล้วผลคูณของ $\vec{u}$ กับ k เขียนแทนด้วย $k\vec{u}$

ตัวอย่าง 3.3 กำหนดให้ $\vec{u}=3\hat{i}-4\hat{j}$ และ $k=2$ จงหา $k\vec{u}$

....

....

....

....

....

....

....

4. เวกเตอร์ศูนย์ (Zero Vector)

นิยาม 4.1 เวกเตอร์ที่มีขนาดเป็นศูนย์หรือเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นและจุดปลายสิ้นสุดเป็นจุดเดียวกัน เรียกว่า เวกเตอร์ศูนย์ (Zero Vector) เขียนแทนด้วย $\vec{0}$

ตัวอย่าง 4.1 กำหนดให้ $\vec{u} = 3\hat{i} - 4\hat{j}$ จงแสดงว่า $\vec{u} - \vec{u} = \vec{0}$

....

....

....

....

....

....

....

....

5. เวกเตอร์ที่ขนานกัน

นิยาม 5.1 เวกเตอร์ที่ขนานกัน คือเวกเตอร์ที่มีทิศทางเดียวกันหรือมีทิศทางตรงข้ามกัน

ตัวอย่าง 5.1 กำหนดให้ $\vec{u} = \hat{i} + 4\hat{j}$ และ $\vec{v} = 3\hat{i} + k\hat{j}$ จงหา k ที่ทำให้ $\vec{u} \mathbin{//} \vec{v}$

....

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 5.2 ถ้า $ABCD$ เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนานมีพิกัดจุด A เป็น $\left(-1, 2\right)$ และ $\overrightarrow{AB} = 9\hat{i} + 4\hat{j}$, $\overrightarrow{AD} = -\hat{i} + 5\hat{j}$ จงหาพิกัดจุด B, C และจุด D

....

....

....

....

....

....

....

6. ขนาดของเวกเตอร์

นิยาม 6.1 ถ้า $\vec{u} = a\hat{i} + b\hat{j}$ ขนาดของ $\vec{u}$ เขียนแทนด้วย $\left\|\vec{u}\right\| = \left\|a\hat{i} + b\hat{j}\right\| = \sqrt{a^2 + b^2}$

ตัวอย่าง 6.1 กำหนดให้ $\vec{u} = 3\hat{i} + 4\hat{j}$ จงหา $\left\|\vec{u}\right\|$

....

....

....

....

....

7. เวกเตอร์หน่วย (Unit Vector)

นิยาม 7.1 ถ้า $\vec{u} = a\hat{i} + b\hat{j}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ $\dfrac{\vec{u}}{\left\|\vec{u}\right\|} = \dfrac{a\hat{i} + b\hat{j}}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ เป็นเวกเตอร์หน่วยในทิศทางของ $\vec{u}$

ตัวอย่าง 7.1 กำหนดให้ $A\left(-1,3\right)$ และ $B\left(2,-7\right)$ เป็นจุดสองจุด จงหาเวกเตอร์หน่วยในทิศทางของ $\overrightarrow{AB}$ และ $\overrightarrow{BA}$

....

....

....

....

....

8. ผลคูณเชิงสเกลาร์ (Scalar Product or Dot Product)

ผลคูณเชิงสเกลาร์ คือ ขนาดของเงาของเวกเตอร์หนึ่งที่ทาบบนเวกเตอร์หนึ่งคูณกับขนาดของเวกเตอร์นั้น

นิยาม 8.1 ให้ $\vec{u} = a\hat{i} + b\hat{j}$ และ $\vec{v} = c\hat{i} + d\hat{j}$ ผลคูณเชิงสเกลาร์เขียนแทนด้วย $\vec{u} \cdot \vec{v}$ นิยามโดย $\vec{u} \cdot \vec{v} = ac + bd$ หรือ $\vec{u} \cdot \vec{v} = \left\|\vec{u}\right\|\left\|\vec{v}\right\|\cos\theta$

ตัวอย่าง 8.1 กำหนดให้ $\vec{u} = \left\langle 6,\ 0\right\rangle$ และ $\vec{v} = \left\langle 5,\ 5\right\rangle$ จงหา $\vec{u} \cdot \vec{v}$ และมุมระหว่างสองเวกเตอร์นี้

....

....

....

....

....

....

หมายเหตุ ถ้า $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ แล้ว $\vec{u} \perp \vec{v}$

9. เวกเตอร์ภาพฉาย (Vector Projection)

นิยาม 9.1 ให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ และมีจุด O เป็นจุดเริ่มต้นร่วมกัน จากจุดปลายของ $\vec{u}$ ลากตั้งฉากกับ $\vec{v}$ ที่จุด P จะเรียก $\overrightarrow{OP}$ ว่า ภาพฉายของ $\vec{u}$ บน $\vec{v}$ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\vec{u}_{\vec{v}}$ หรือ $proj_{\vec{v}}\vec{u}$ นิยามโดย

- ภาพฉายเชิงเวกเตอร์ของ $\vec{u}$ บน $\vec{v}$ คือ $\vec{u}_{\vec{v}} = \left(\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\left\|\vec{v}\right\|^2}\right)\vec{v}$
- ภาพฉายสเกลาร์ของ $\vec{u}$ บน $\vec{v}$ คือ $\left\|\vec{u}_{\vec{v}}\right\| = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\left\|\vec{v}\right\|}$

ตัวอย่าง 9.1 กำหนดให้ $\vec{u} = \left\langle 4,\, 3\right\rangle$ และ $\vec{v} = \left\langle 5,\, 0\right\rangle$ จงหาภาพฉายของ $\vec{u}$ บน $\vec{v}$

เวกเตอร์ใน 3 มิติ

เวกเตอร์ในสามมิติสามารถดำเนินการได้เช่นเดียวกับเวกเตอร์ในสองมิติ และมีคุณสมบัติเพิ่มเติมดังนี้

10. ผลคูณเชิงเวกเตอร์หรือผลคูณไขว้ (Vector Product or Cross Product)

นิยาม 10 ให้ $\vec{u} = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$ และ $\vec{v} = d\hat{i} + e\hat{j} + f\hat{k}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ในสามมิติ ผลคูณเชิงเวกเตอร์เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\vec{u} \times \vec{v}$ นิยามโดย

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix}$$

ตัวอย่าง 10.1 กำหนดให้ $\vec{u} = \left\langle 0,\ 1,\ -2 \right\rangle$ และ $\vec{v} = \left\langle 2,\ 0,\ 3 \right\rangle$ จงหา $\vec{u} \times \vec{v}$ และ $\vec{v} \times \vec{u}$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 10.2 กำหนดให้ $\vec{u} = \left\langle 1,\ 2,\ 3 \right\rangle$ และ $\vec{v} = \left\langle -2,\ 3,\ -4 \right\rangle$ จงหา $\vec{v} \times \vec{v}$ และ $\vec{u} \times \vec{u}$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

11. เวกเตอร์ภาพฉาย (Vector Projection)

นิยาม 11 ให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ และมีจุด O เป็นจุดตั้งต้นร่วมกัน จุดปลายของ $\vec{u}$ ลากตั้งฉากกับ $\vec{v}$ ที่จุด P และเรียกเวกเตอร์ $\overrightarrow{OP}$ ว่า ภาพฉายของ $\vec{u}$ บน $\vec{v}$ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\vec{u}_{\vec{v}}$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 11.1 กำหนดให้ $\vec{u} = \left\langle 1,\, 2,\, 3 \right\rangle$ และ $\vec{v} = \left\langle 2,\, -1,\, -2 \right\rangle$ จงหาเวกเตอร์ภาพฉายของ $\vec{u}$ บน $\vec{v}$ และภาพฉายสเกลาร์ของ $\vec{u}$ บน $\vec{v}$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

12. พื้นที่ (Area)

ให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นด้านประชิดของสี่เหลี่ยมด้านขนานในปริภูมิ 3 มิติ จะได้ว่า

พื้นที่สี่เหลี่ยมด้านขนาน $= $ ฐาน × สูง

$$= \left|\vec{u}\right|\left|\vec{v}\right|\sin\theta$$

$$= \left|\vec{u}\times\vec{v}\right|$$

ตัวอย่าง 12.1 เวกเตอร์ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ ทำมุมกันเป็นมุม $\frac{\pi}{6}$ เรเดียน ถ้าขนาดของ $\vec{u}$ ยาว 5 หน่วย และขนาด $\vec{v}$ ยาว 8 หน่วย จงหาพื้นที่ของสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มี $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นด้านประชิดมุม

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 12.2 จงหาพื้นที่สี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีจุดยอดเป็น
$\left(1,\,-2,\,3\right)$, $\left(4,\,3,\,-1\right)$, $\left(5,\,7,\,-3\right)$ และ $\left(2,\,2,\,1\right)$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

13. ปริมาตร (Volume)

ให้ $\vec{A}, \vec{B}$ และ $\vec{C}$ เป็นด้านของขอบรูปทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานในปริภูมิสามมิติ โดยมีจุดเริ่มต้นเดียวกัน

$$
\begin{aligned}
V &= \text{พื้นที่ฐาน} \times \text{สูง} \\
&= \left|\vec{A}\times\vec{B}\right|\left|\vec{C}\right|\cos\theta \\
&= \left|\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\cdot\vec{C}\right|
\end{aligned}
$$

ตัวอย่าง 13.1 จงหาปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีด้านขอบเป็นเวกเตอร์

$\vec{A} = \hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k},\ \vec{B} = -4\hat{i} + 7\hat{j} - 11\hat{k},\ \vec{C} = 5\hat{i} + 9\hat{j} - \hat{k}$

14. งาน (Work)

งานที่ได้จากแรง $\vec{F}$ กระทำให้วัตถุเคลื่อนที่ไปในทิศทางของ $\vec{D}$ คือ

$$\begin{aligned} W &= \vec{F} \cdot \vec{D} \\ &= \left|\vec{F}\right|\left|\vec{D}\right|\cos\theta \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 14.1 จงหางานที่เกิดจากแรง $\vec{F} = 5\hat{k}$ ที่ทำให้วัตถุเคลื่อนที่ไปตามแนวเส้นตรงจากจุดกำเนิดไปยังจุด $\left(1,\ 2,\ 3\right)$

ตัวอย่าง 14.2 จงหางานที่เกิดจากกระทำให้วัตถุเคลื่อนที่ไปในแนวเส้นตรงที่เริ่มต้นจากจุด $P\left(-3,\ -5,\ 4\right)$ และสิ้นสุดที่จุด $Q\left(4,\ 9,\ 11\right)$ ด้วยแรง $\vec{F} = \frac{6}{7}\hat{i} - \frac{2}{7}\hat{j} + \frac{5}{7}\hat{k}$

ตัวอย่าง 14.3 จงหางานที่ได้จากการสไลด์ลังไม้ ในการขนสินค้าไปในแนวยาว $20\ m$ โดยการดึงด้วยแรง $10\ N$ ที่แนวแรงทำมุมกับพื้นดิน 60°

15. การรวมเชิงเส้น

ให้ $\vec{v}_1,\ \vec{v}_2,\ \vec{v}_3,\ldots,\vec{v}_n$ เป็นเวกเตอร์ในปริภูมิสามมิติ และ $c_1,\ c_2,\ c_3,\ldots,c_n$ เป็นสเกลาร์ เวกเตอร์ $\vec{V}=c_1\vec{v}_1+c_2\vec{v}_2+c_3\vec{v}_3,\ldots,c_n\vec{v}_n$ เรียกว่า การรวมเชิงเส้นของ $\vec{v}_1,\ \vec{v}_2,\ \vec{v}_3,\ldots,\vec{v}_n$

ตัวอย่าง 15.1 จงแสดงว่า $\vec{V}=5\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$ เป็นการรวมเชิงเส้นของ $\vec{v}_1,\ \vec{v}_2,\ \vec{v}_3$ เมื่อ $\vec{v}_1=\hat{i},\ \vec{v}_2=\hat{i}+\hat{j},\ \vec{v}_3=\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 15.2 จงพิจารณาว่า $\vec{V}=2\hat{i}-\hat{j}+4\hat{k}$ เป็นการรวมเชิงเส้นของ $\vec{v}_1,\ \vec{v}_2,\ \vec{v}_3$ หรือไม่ เมื่อ $\vec{v}_1=\left\langle 1,0,1\right\rangle,\ \vec{v}_2=\left\langle 1,-1,2\right\rangle,\ \vec{v}_3=\left\langle 0,1,-1\right\rangle$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

16. อิสระเชิงเส้น

เวกเตอร์ $\vec{v}_1,\ \vec{v}_2,\ \vec{v}_3,\dots,\vec{v}_n$ เป็นอิสระเชิงเส้นก็ต่อเมื่อ ถ้า $c_1\vec{v}_1+c_2\vec{v}_2+c_3\vec{v}_3,\dots,c_n\vec{v}_n=\vec{0}$ แล้ว $c_1=c_2=c_3=\dots=c_n=0$

ตัวอย่าง 16.1 จงพิจารณาว่า $\langle 2,1,0\rangle,\langle 1,2,0\rangle$ และ $\langle 0,1,-1\rangle$ เป็นอิสระเชิงเส้นหรือไม่

ตัวอย่าง 16.2 จงพิจารณาว่า $\langle 3,2,-5\rangle,\langle 2,6,-1\rangle$ และ $\langle -1,0,2\rangle$ เป็นอิสระเชิงเส้นหรือไม่