บทที่ 2
เส้นตรง และระนาบในปริภูมิสามมิติ

1. สมการเส้นตรงในปริภูมิสามมิติ

ในปริภูมิสามมิติเราสามารถหาสมการเส้นตรงได้จากจุดหนึ่งจุดบนเส้นตรงและเวกเตอร์ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ซึ่งขนานกับเส้นตรง

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ตัวอย่าง 1.1 จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $P\left(1,\,2,\,3\right)$ ขนานกับเวกเตอร์ $\vec{v}=\left\langle 3,\,-4,\,7\right\rangle$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ตัวอย่าง 1.2 จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $A\left(2,\ 4,\ -1\right)$ และจุด $B\left(5,\ 0,\ 7\right)$ และพิจารณาว่าเส้นตรงนี้ผ่านจุด $C\left(1,\ 2,\ 3\right)$ และผ่านจุด $D\left(8,\ -4,\ 15\right)$ หรือไม่

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

ตัวอย่าง 1.3 จงหาสมการส่วนของเส้นตรงที่ผ่านจุด $A\left(2,\ 4,\ -1\right)$ และจุด $B\left(5,\ 0,\ 7\right)$

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

ตัวอย่าง 1.4 กำหนดสมการเส้นตรง L_1 และ L_2 ดังนี้

$$L_1 : x = 1 - t,\ y = 1 + t,\ z = 1 + 2t$$
$$L_2 : x = 2t,\ y = 2 + t,\ z = 3 - 3t$$

โดยที่ t เป็นพารามิเตอร์ จงหาจุดตัดของเส้นตรง L_1 และ L_2

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ตัวอย่าง 1.5 กำหนดสมการเส้นตรง L_1 และ L_2 ดังนี้

$$L_1 : x = 1 + 4t,\ y = 5 - 4t,\ z = -1 + 5t$$
$$L_2 : x = 2 + 8t,\ y = 4 - 3t,\ z = 5 + t$$

1. เส้นตรง L_1 และ L_2 ขนานกันหรือไม่
2. เส้นตรง L_1 และ L_2 ตัดกันหรือไม่

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. สมการระนาบในปริภูมิสามมิติ

ให้ระนาบ S ผ่านจุด $P_0\left(x_0,\, y_0,\, z_0\right)$ และตั้งฉากกับเวกเตอร์ $\vec{n} = \left\langle a,\, b,\, c\right\rangle$ จะพบว่าระนาบ S สามารถเขียนให้อยู่ในรูปเวกเตอร์ดังนี้ $\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ตัวอย่าง 2.1 จงหาสมการระนาบที่ผ่านจุด $\left(3,\, 0,\, 7\right)$ และตั้งฉากกับเวกเตอร์ $\vec{n} = \left\langle 4,\, 2,\, -5\right\rangle$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ตัวอย่าง 2.2 จงหาสมการระนาบที่ผ่านจุด $\left(1,\,2,\,1\right)$ และตั้งฉากกับเวกเตอร์ $3\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}$

ตัวอย่าง 2.3 จงหาสมการระนาบที่ผ่านจุด $A\left(1,\,2,\,3\right)$, $B\left(-1,\,4,\,5\right)$, $C\left(0,\,1,\,-6\right)$

3. มุมระหว่างระนาบ

ให้ $\overrightarrow{N_1}$ และ $\overrightarrow{N_2}$ เป็น normal vectors ของระนาบ S_1 และระนาบ S_2 ตามลำดับ มุมระหว่างระนาบ S_1 และระนาบ S_2 หมายถึง มุมระหว่าง $\overrightarrow{N_1}$ และ $\overrightarrow{N_2}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ตัวอย่าง 3.1 จงหามุมระหว่างระนาบ $5x-2y+5z-12=0$ และระนาบ $2x+y-7z+11=0$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ตัวอย่าง 3.2 จงหามุมระหว่างระนาบ $4x-2y+4z=10$ และระนาบ $3x-6y-2z=-5$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

4. เส้นตรงที่เกิดจากการตัดกันของระนาบ

ระนาบสองระนาบถ้าไม่ขนานกันจะต้องตัดกันเสมอ และรอยตัดของระนาบทั้งสองระนาบเป็นเส้นตรงในปริภูมิสามมิติ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ตัวอย่าง 4.1 จงหาสมการเส้นตรงที่เกิดจากการตัดกันของระนาบ $3x - 2y + z = 4$ และระนาบ $x + 2y + 3z = 8$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ตัวอย่าง 4.2 จงหาสมการเส้นตรงที่เกิดจากการตัดกันของระนาบ $x + y - z = 4$ และระนาบ $2x - y + 3z = 1$

5. ระยะทางจากจุดไปยังระนาบ

ระยะทางระหว่างจุด $P_0\left(x_0,\, y_0,\, z_0\right)$ กับระนาบ $ax+by+bz+d=0$ คือ $D=\dfrac{\left|ax_0+by_0+bz_0+d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ตัวอย่าง 5.1 จงหาระยะทางระหว่างจุด $\left(1,\,-4,\,-3\right)$ ไปยังระนาบ $2x-3y+6z=-1$

.....

.....

.....

.....

.....

ตัวอย่าง 5.1 จงหาระยะทางระหว่างจุด $\left(1,\,-4,\,-3\right)$ ไปยังระนาบ $2x-3y+6z=-1$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

6. ระยะทางระหว่างเส้นตรงกับเส้นตรงในปริภูมิสามมิติ

ระยะทางระหว่างเส้นตรงสองเส้น หมายถึงระยะที่สั้นที่สุดระหว่างเส้นตรงสองเส้น

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ตัวอย่าง 6.1 จงหาระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่างเส้นตรง $L_1 : \dfrac{x-6}{2} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z-3}{4}$ กับเส้นตรง $L_2 : \dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y-5}{-2} = \dfrac{z-1}{5}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ตัวอย่าง 6.2 จงหาระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่างเส้นตรง $L_1 : x = 2 - t,\ y = 5 + 2t,\ z = 3t$ กับเส้นตรง $L_2 : x = 2t,\ y = -1 - t,\ z = 1 + 2t$

7. ระยะทางจากจุดไปยังเส้นตรงในปริภูมิสามมิติ

พื้นที่สี่เหลี่ยมด้านขนาน $= \text{ฐาน} \times \text{สูง}$

$$= \left|\vec{v}\right|\left|\overrightarrow{ps}\sin\theta\right|$$

$$= \left|\overrightarrow{ps} \times \vec{v}\right|$$

$$d = \frac{\left|\overrightarrow{ps} \times \vec{v}\right|}{\left|\vec{v}\right|}$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ตัวอย่าง 7.1 จงหาระยะทางจากจุด $\left(1,1,5\right)$ ไปยังเส้นตรง $L_2 : x = 1 + t,\ y = 3 - t,\ z = 2t$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ตัวอย่าง 7.2 จงหาระยะทางจากจุด $\left(6, -4, 4\right)$ ไปยังเส้นตรงซึ่งเชื่อมจุด $\left(6, -4, 4\right)$ กับ $\left(3, -1, 4\right)$