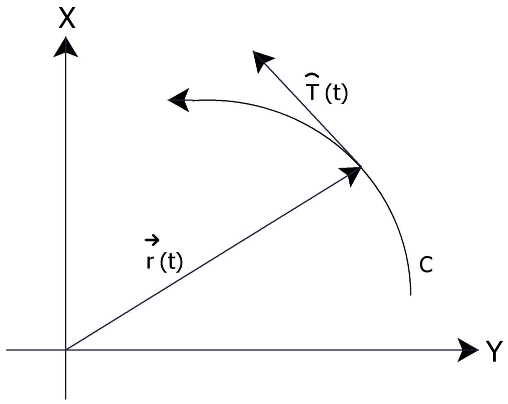
บทที่ 4
เวกเตอร์แคลคูลัส

1. เวกเตอร์สัมผัสหนึ่งหน่วย (Unit Tangent Vector)

จากการศึกษาอนุพันธ์ของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ที่ผ่านมาเราทราบว่า $\vec{r}'(t)$ เป็นเวกเตอร์สัมผัสของเส้นโค้ง C ที่จุด t ของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ $\vec{r}(t)$ โดย $\vec{r}'(t)$ ไม่เป็นเวกเตอร์ศูนย์ และมีทิศทางตามเส้นโค้ง C ที่ค่า t เพิ่มมากขึ้น และใช้สัญลักษณ์แทนเวกเตอร์สัมผัสหนึ่งหน่วยซึ่งมีทิศทางเดียวกับโค้ง C ด้วย $\vec{T}(t)$ จะได้ $\vec{T}(t)$ ในรูปของ $\vec{r}'(t)$ คือ

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{\left|\vec{r}'(t)\right|}$$

จะเรียก $\vec{T}(t)$ ว่าเวกเตอร์สัมผัสหนึ่งหน่วย (Unit Tangent Vector) ของเส้นโค้ง C ที่จุด t โดยมีจุดเริ่มต้นของ $\vec{T}(t)$ อยู่ที่จุดสิ้นสุดของ $\vec{r}(t)$ ดังนั้น $\vec{T}(t)$ จะอยู่บนเส้นสัมผัสของเส้นโค้ง C ที่จุด t ดังรูป



ตัวอย่าง 1 จงหาเวกเตอร์สัมผัสหนึ่งหน่วยของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ ณ จุดที่กำหนดให้ต่อไปนี้

1.1 $\vec{r}(t) = 3t^2\hat{i} + 2t^4\hat{j}$ ที่จุด $t = 1$

....

....

....

....

1.2 $\vec{r}(t) = \ln(t)\hat{i} + \dfrac{1}{t}\hat{j}$ ที่จุด $t = 1$

....

....

....

....

1.3 $\vec{s}(t)=\cos(t)\hat{i}+\sin(t)\hat{j}+t\,\hat{k}$ ที่จุด $t=\dfrac{\pi}{3}$

....

....

....

....

....

....

....

....

1.4 $x=t^2+1,\ y=4t-3,\ z=t^3-6t$ ที่จุด t ใดๆ

....

....

....

....

....

....

....

....

1.5 $x=t,\ y=t^2,\ z=t^3$ ที่จุด $t=0$

....

....

....

....

....

....

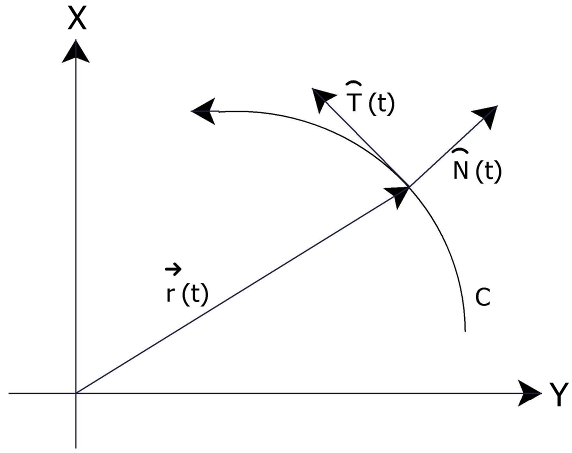
....

2. เวกเตอร์ตั้งฉากหนึ่งหน่วย (Unit Normal Vector)

เนื่องจาก $\vec{T}(t)$ มีขนาด 1 หน่วยเสมอ ดังนั้นโดยทฤษฎีจะได้ $\vec{T}(t)\cdot\vec{T}'(t)=0$ แสดงว่า $\vec{T}(t)$ และ $\vec{T}'(t)$ ตั้งฉากซึ่งกันและกัน ทำให้ $\vec{T}'(t)$ ตั้งฉากกับเส้นสัมผัสเส้นโค้ง C ที่จุด t ซึ่งเรียก $\vec{T}'(t)$ ว่าเป็นเวกเตอร์ตั้งฉากหรือเวกเตอร์ปกติ (Normal Vector) ของ C ที่จุด t และถ้า $\left|\vec{T}'(t)\right|\neq 0$ แล้วจะใช้ $\vec{N}(t)$ แทนเวกเตอร์ตั้งฉากหนึ่งหน่วยหรือเวกเตอร์ปกติหนึ่งหน่วย (Unit Normal Vector) และเขียน $\vec{N}(t)$ ในรูปของ $\vec{T}'(t)$ คือ

$$\vec{N}(t)=\frac{\vec{T}'(t)}{\left|\vec{T}'(t)\right|}$$

ทิศทางของ $\vec{T}(t)$ และ $\vec{N}(t)$ ในปริภูมิ 2 มิติ แสดงได้ดังรูป



ตัวอย่าง 2 จงหาเวกเตอร์ตั้งฉากหนึ่งหน่วยของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ ณ จุดที่กำหนดให้ต่อไปนี้

2.1 $\vec{r}(t)=\cos(t)\hat{i}+\sin(t)\hat{j}$ ที่จุด $t=\dfrac{\pi}{4}$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

2.2 $\vec{r}(t)=\dfrac{t^3}{3}\hat{i}+\dfrac{t^2}{2}\hat{j}$ ที่จุด $t>0$

....

....

....

....

....

....

....

2.3 $\vec{r}(t)=\left(\dfrac{t^3}{3}-t\right)\hat{i}+t^2\hat{j}$ ที่จุด $t=3$

....

....

....

....

....

....

....

2.4 ฮีลิกซ์กลม $x=3\cos(t),\ y=3\sin(t),\ z=4t$

....

....

....

....

....

....

....

....

3. เวกเตอร์แนวฉากคู่ในปริภูมิสามมิติ (Binormal Vector)

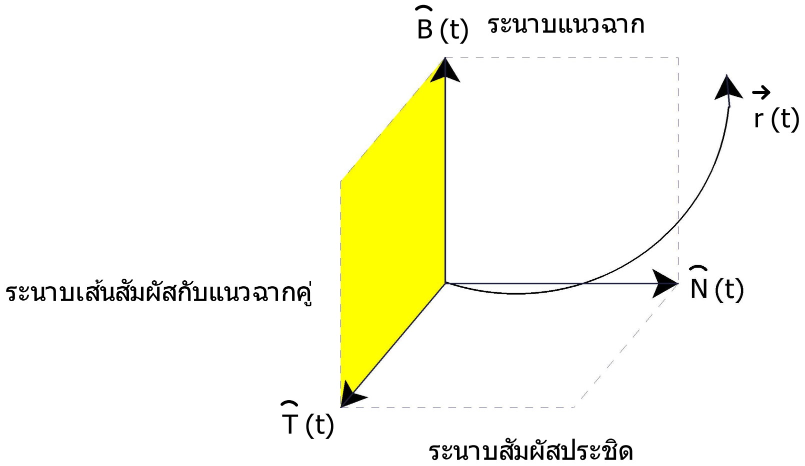
นิยาม ถ้า C เป็นกราฟของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ $\vec{r}(t)$ ในปริภูมิ 3 มิติ แล้วจะเรียกผลคูณไขว้ $\vec{T}(t)\times\vec{N}(t)$ ว่าเวกเตอร์แนวฉากคู่ (Binormal Vector) ของ C ที่จุด t และแทนด้วย

$$\vec{B}(t)=\vec{T}(t)\times\vec{N}(t)$$

ดังนั้นทุก ๆ จุดบนเส้นโค้งของ C ในปริภูมิ 3 มิติ เวกเตอร์ $\vec{T}(t)$, $\vec{N}(t)$ และ $\vec{B}(t)$ จะเป็นตัวกำหนดระนาบที่ตั้งฉากกัน 3 ระนาบ คือ

1. ระนาบสัมผัสประชิด (Osculating Plane) บรรจุ $\vec{T}(t)$ และ $\vec{N}(t)$
2. ระนาบแนวฉาก (Normal Plane) บรรจุ $\vec{N}(t)$ และ $\vec{B}(t)$
3. ระนาบเส้นสัมผัสกับแนวฉากคู่ (Rectifying Plane) บรรจุ $\vec{T}(t)$ และ $\vec{B}(t)$

ดังรูป



สามารถหา $\vec{B}(t)$ ในรูปของ $\vec{r}(t)$ ได้ดังนี้

$$\vec{B}(t)=\frac{\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)}{\left|\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)\right|}$$

ตัวอย่าง 3 จงหาเวกเตอร์แนวฉากคู่ของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ ณ จุดที่กำหนดให้ต่อไปนี้

3.1 $\vec{r}(t)=t\,\hat{i}+t^2\hat{j}+t^2\hat{k}$ ที่จุด $t>0$

....

....

....

....

....

....

....

....

3.2 $\vec{r}(t) = 6\sin(2t)\hat{i} + 6\cos(2t)\hat{j} + 5\hat{k}$ ณ จุด t ใด ๆ

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

3.3 $\vec{r}(t) = t\,\hat{i} + t^2\hat{j} + \dfrac{2t^3}{3}\hat{k}$ ที่จุด $t = 1$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

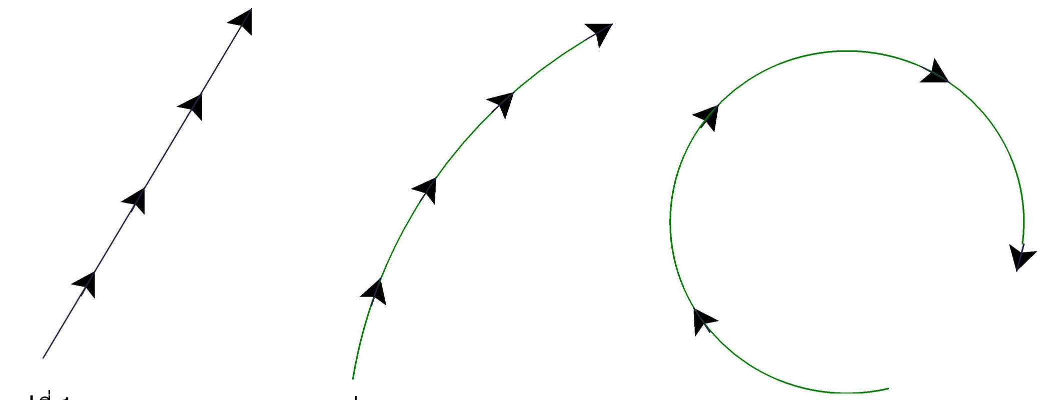
....

....

4. ความโค้ง (Curvature)

ในหัวข้อนี้จะศึกษาค่าเชิงตัวเลขที่ใช้วัดความโค้งของเส้นโค้ง ในปริภูมิ 2 มิติ หรือ 3 มิติ เพื่อนำไปประยุกต์ใช้ในเรขาคณิต และศึกษาการเคลื่อนที่บนเส้นโค้งต่อไป

ถ้า C เป็นโค้งเรียบของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ในปริภูมิ 2 มิติ หรือ 3 มิติ ซึ่งมีตัวแปรเสริมในรูปของความยาวเส้นโค้ง เราทราบว่าเวกเตอร์สัมผัส $\vec{T}(s)$ ของโค้ง C มีขนาดหนึ่งหน่วยพิจารณาเส้นโค้ง C ในปริภูมิ 2 มิติ ถ้า C เป็นเส้นตรงแล้วทิศทางของ $\vec{T}$ จะคงที่ ถ้า C โค้งไม่มากแล้วทิศทางของ $\vec{T}$ จะเปลี่ยนอย่างช้า ๆ แต่ถ้า C โค้งมาก แล้วทิศทางของ C จะเปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็ว ซึ่งทิศทางการเปลี่ยนแปลงของ C เข้าใกล้ $\dfrac{d\vec{T}}{ds}$ ดังรูป



รูปที่ 1 รูปที่ 2 รูปที่ 3

ทฤษฎีบท ถ้า $\vec{r}(t)$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ที่มีกราฟเป็นโค้งเรียบในปริภูมิ 2 มิติ หรือ 3มิติ แล้วความโค้งของ C สำหรับแต่ละค่า t ที่ $\vec{T}'(t)$และ $\vec{r}'(t)$ หาค่าได้ คือ

1. $\kappa = \dfrac{\left|\vec{T}'(t)\right|}{\left|\vec{r}'(t)\right|}$
2. $\kappa = \dfrac{\left|\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)\right|}{\left|\vec{r}'(t)\right|^3}$

ตัวอย่าง 4 จงหาความโค้งของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ ณ จุดที่กำหนดให้ต่อไปนี้

4.1 $\vec{r}(t) = e^t\hat{i} + e^{-t}\hat{j} + \sqrt{2}\,t\,\hat{k}$ ที่จุด $t=0$

....

....

....

....

....

....

....

4.2 วงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิดและรัศมียาว 2 หน่วย

....

....

....

....

....

....

....

....

4.3 ฮีลิกซ์ $x = 2\cos(t),\ y = 2\sin(t),\ z = t$

....

....

....

....

....

....

....

....

4.4 วงรีซึ่งมีฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ $\vec{r}(t) = 3\cos(t)\hat{i} + 2\sin(t)\hat{j}$ เมื่อ $0 \leq t \leq \pi$ ณ จุด ปลายของแกนเอก และแกนโท

....

....

....

....

....

....

....

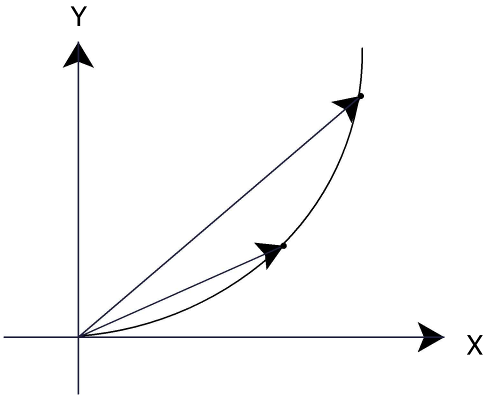
5. ความยาวส่วนโค้ง (Arc Length)

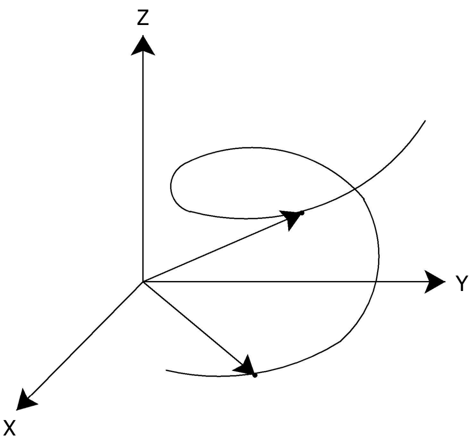
ถ้า $\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k},\ \ a \le t \le b$ เป็นเส้นโค้งราบเรียบในปริภูมิ 3 มิติ ความยาวเส้นโค้ง เมื่อ t เพิ่มขึ้นจาก a ถึง b หาได้จาก

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt$$

หรือ

$$L = \int_a^b \left|\vec{r}'(t)\right| dt$$





ตัวอย่าง 5 จงหาความยาวของเส้นโค้งของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ ณ จุดที่กำหนดให้ต่อไปนี้

5.1 $\vec{r}(t) = 2t\,\hat{i} + \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\hat{j}$ เมื่อ $5 \le t \le 12$

....

....

....

....

....

5.2 $x = 2t,\ y = t^2,\ z = \frac{t^3}{3}$ ระหว่าง $t = 0$ และ $t = 1$

....

....

....

....

....

5.3 $x = 6\sin(t),\ y = 6\cos(t)$ จาก $t = -\dfrac{\pi}{3}$ และ $t = \dfrac{\pi}{2}$

5.4 $x = t^2,\ y = t^3$ บนช่วง $\left[0,3\right]$

5.5 $\vec{r}(t) = 6\cos(t)\hat{i} + 6\sin(t)\hat{j} + 8t\,\hat{k}$ สำหรับ $0 \le t \le 2\pi$

6. อนุพันธ์ระบุทิศทาง (Directional Derivatives)

นิยาม 1 ถ้าฟังก์ชันของ $f(x,y)$ หาอนุพันธ์ได้ที่จุด (x_0,y_0) และถ้า $\hat{u}=u_1\hat{i}+u_2\hat{j}$ เป็นเวกเตอร์หน่วย แล้วอนุพันธ์ระบุทิศทางเขียนแทนด้วย $D_{\hat{u}}f(x_0,y_0)$ จะได้ว่า

$$D_{\hat{u}}f(x_0,y_0)=f_x(x_0,y_0)u_1+f_y(x_0,y_0)u_2$$

นิยาม 2 ถ้าฟังก์ชันของ $f(x,y,z)$ หาอนุพันธ์ได้ที่จุด (x_0,y_0,z_0) และถ้า $\hat{u}=u_1\hat{i}+u_2\hat{j}+u_3\hat{k}$ เป็นเวกเตอร์หน่วย แล้วอนุพันธ์ระบุทิศทางเขียนแทนด้วย $D_{\hat{u}}f(x_0,y_0,z_0)$ จะได้ว่า

$$D_{\hat{u}}f(x_0,y_0,z_0)=f_x\left(x_0,y_0,z_0\right)u_1+f_y(x_0,y_0,z_0)u_2+f_z(x_0,y_0,z_0)u_3$$

ตัวอย่าง 6.1 จงหาอนุพันธ์ระบุทิศทางของฟังก์ชัน $f(x,y)=3x^2y$ ที่จุด $(1,2)$ ในทิศทางของเวกเตอร์หน่วย $\hat{u}=\frac{1}{2}\hat{i}-\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{j}$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 6.2 จงหาอนุพันธ์ระบุทิศทางของฟังก์ชัน $f(x,y)=y^2\ln(x)$ ที่จุด $(e,2)$ ในทิศทางของเวกเตอร์ $\vec{u}=\sqrt{3}\,\hat{i}+\hat{j}$

....

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 6.3 จงหาอนุพันธ์ระบุทิศทางของฟังก์ชัน $f(x,y,z) = x^2y - yz^3 + z$ ที่จุด $(1,-2,\,0)$ ในทิศทางของเวกเตอร์ $\vec{a} = 2\,\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$

ตัวอย่าง 6.4 จงหาอนุพันธ์ระบุทิศทางของฟังก์ชัน $f(x,y) = e^{xy}$ ที่จุด $(-2,\,0)$ ในทิศทางของเวกเตอร์หน่วยทำมุม $\dfrac{\pi}{3}$ กับแกน X

7. แกรเดียนเวกเตอร์ (Gradient Vector)

นิยาม 1 กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่จุด (x,y) แกรเดียน (Gradient) ของ f จะเขียนแทนด้วย ∇f ซึ่งหมายถึงเวกเตอร์ที่กำหนดโดย

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \nabla f = f_x\hat{i} + f_y\hat{j}$$

นิยาม 2 กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่จุด (x,y,z) แกรเดียน (Gradient) ของ f จะเขียนแทนด้วย ∇f ซึ่งหมายถึงเวกเตอร์ที่กำหนดโดย

$$\operatorname{grad} f\left(x,y,z\right) = \nabla f = f_x\hat{i} + f_y\hat{j} + f_z\hat{k}$$

ข้อสังเกต

1. แกรเดียนของฟังก์ชัน 2 ตัวแปร $\nabla f = f_x\hat{i} + f_y\hat{j}$ จะได้ว่าอนุพันธ์ระบุทิศทางของฟังก์ชัน 2 ตัวแปร ทำได้โดย $\nabla f \cdot \hat{u}$ เมื่อ $\hat{u} = u_1\hat{i} + u_2\hat{j}$ เป็นเวกเตอร์หน่วย
2. แกรเดียนของฟังก์ชัน 3 ตัวแปร $\nabla f = f_x\hat{i} + f_y\hat{j} + f_z\hat{k}$ จะได้ว่าอนุพันธ์ระบุทิศทางของฟังก์ชัน 3 ตัวแปรทำได้โดย $\nabla f \cdot \hat{u}$ เมื่อ $\hat{u} = u_1\hat{i} + u_2\hat{j} + u_3\hat{k}$ เป็นเวกเตอร์หน่วย

หมายเหตุ สัญลักษณ์ ∇ อ่านว่า “เดล” (del) ในเอกสารบางฉบับอาจจะอ่านว่า “นาบลา” (nabla)

ตัวอย่าง 7.1 จงหาแกรเดียนของฟังก์ชัน $f(x,y) = xe^{2y-x}$ ที่จุด $(2,1)$

ตัวอย่าง 7.2 จงหาแกรเดียนของฟังก์ชัน $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - 2z^2 + z\ln(x)$ ที่จุด $(1,1,1)$

ตัวอย่าง 7.3 จงหาแกรเดียน ∇f และอนุพันธ์ระบุทิศทางของฟังก์ชัน $D_{\hat{u}}f$ $f(x,y,z) = x^3 - xy^2 - z$ ในทิศทาง $\vec{V} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k}$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 7.4 จงหาแกรเดียน ∇f และอนุพันธ์ระบุทิศทางของฟังก์ชัน $D_{\hat{u}}f$ $f(x,y) = xe^y$ ในทิศทางจากจุด $A(2,0)$ ไปยังจุด $Q(4,1)$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....