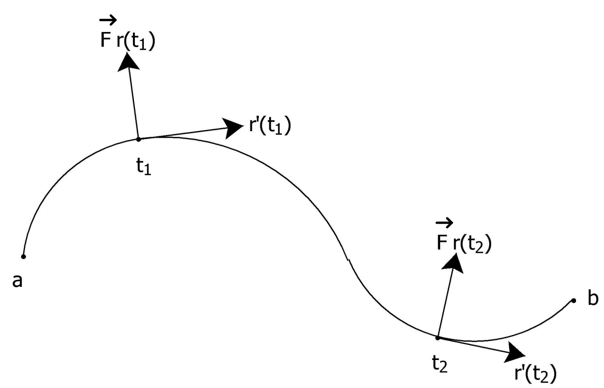
บทที่ 5
อินทิกรัลเชิงผิวโค้ง (Surface Integral)

1. ปริพันธ์ตามเส้น (Line Integrals)

เราทราบว่าอินทิกรัลจำกัดเขต $\int_a^b f(x)\,dx$ เป็นการอินทิเกรตค่าฟังก์ชัน $f(x)$ ตามแนวแกน x จาก $x=a$ ถึง $x=b$ ในหัวข้อนี้จะขยายแนวคิดไปสู่อินทิกรัลตามเส้น (line Integrals)ซึ่งเป็นอินทิกรัลของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ตามเส้นโค้งที่กำหนด

บทนิยาม 1.1 กำหนดให้ $\vec{F}\left(x,y,z\right)=f(x,y,z)\hat{i}+g(x,y,z)\hat{j}+h(x,y,z)\hat{k}$ เป็นสนามเวกเตอร์ และ C เป็นสมการเส้นโค้งเป็น $\vec{r}(t)=x(t)\hat{i}+y(t)\hat{j}+z(t)\hat{k}$ เมื่อ $a\le t\le b$ อินทิกรัลตามเส้นของ $\vec{F}$ บนเส้นโค้ง C เขียนแทนด้วย $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ โดยที่ $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_a^b \vec{F}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}dt$



ข้อสังเกต

เนื่องจาก $\vec{F}\cdot d\vec{r}$ เป็นค่าสเกลาร์ อินทิกรัลตามเส้น $\int_a^b \vec{F}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}dt$ จึงเป็นอินทิกรัลจำกัดเขตที่มี t เป็นตัวแปรอินทิเกรต

ตัวอย่าง 1.0 จงหาค่าของ $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ เมื่อ $\vec{F}(x,y)=y\hat{i}-x\hat{j}$ และ C เป็นส่วนของเส้นตรงจากจุด $(2,0)$ ไปยัง $(0,2)$

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 1.1 วัตถุเคลื่อนที่บนเส้นโค้งพาราโบลา $y = x^2$ ด้วยแรงซึ่งกำหนดโดยสนามเวกเตอร์ $\vec{F}(x,y) = 2xy\hat{i} + (x^2 + y^2)\hat{j}$ จงหางานที่เกิดขึ้นเมื่อวัตถุเคลื่อนที่จาก $(1,1)$ ไป $(2,4)$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 1.2 จงหางานของวัตถุที่เคลื่อนที่บนส่วนโค้งในทิศทวนเข็มนาฬิกาของวงกลมรัศมี 2 หน่วย ในจตุภาคที่ 1 ด้วยแรงซึ่งกำหนดโดยสนามเวกเตอร์ $\vec{F}(x,y) = -y\hat{i} + x\hat{j}$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

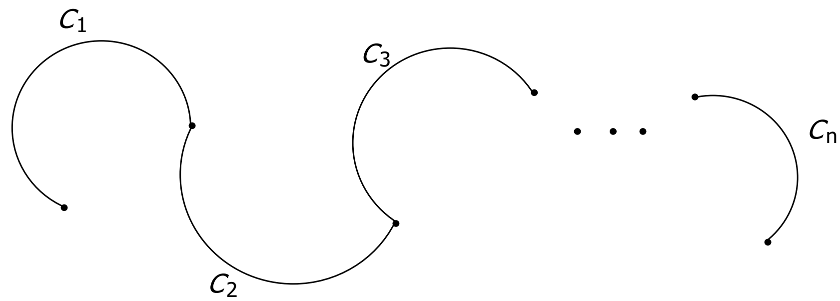
....

ตัวอย่าง 1.3 จงหางานของสนามเวกเตอร์ $\vec{F}(x,y) = xy^2\hat{i} + x^2y\hat{j}$ ที่เคลื่อนที่ไปตามส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจากจุด $(1,2)$ ไปยัง $(2,4)$

ตัวอย่าง 1.4 จงหางานของสนามเวกเตอร์ $\vec{F}(x,y,z) = xy\hat{i} + yz\hat{j} + zx\hat{k}$ ที่เคลื่อนที่ไปตามส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจากจุด $(0,0,0)$ ไปยัง $(1,3,2)$

ทฤษฎีบท 1.1 ถ้าเส้นโค้ง C ประกอบไปด้วยเส้นโค้ง $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n$ แล้ว

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{R} = \int_{C_1} \vec{F}\cdot d\vec{R} + \int_{C_2} \vec{F}\cdot d\vec{R} + \ldots + \int_{C_n} \vec{F}\cdot d\vec{R}$$



ตัวอย่าง 1.5 จงคำนวณหาค่าของ $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{R}$ เมื่อ $\vec{F}(x,y) = (2x-y)\hat{i} + (3y-x)\hat{j}$ และ C เป็นเส้นโค้งที่ประกอบด้วย เส้นตรงจากจุด $(-4,2)$ ไปยังจุด $(-2,0)$ และครึ่งวงกลมในทิศทางตามเข็มนาฬิกาจากจุด $(-2,0)$ ไปยังจุด $(2,0)$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 1.6 จงหาค่าของ $\int_C [(x+y)^2 dx - (x-y)^2 dy]$ เมื่อ C เป็นเส้นโค้งที่กำหนดโดย $y = |2x|$ จากจุด $(-1,2)$ ไปยังจุด $(1,2)$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 1.7 จงหาค่าของ $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{R}$ เมื่อ C_1 เป็นส่วนหนึ่งของพาราโบลา $y = 4 - x^2, z = 0$ จากจุด $(2,0,0)$ ไปยังจุด $(0,4,0)$ และ C_2 เป็นส่วนของเส้นตรงจากจุด $(0,4,0)$ ไปยังจุด $(0,4,1)$ และ C_3 เป็นส่วนของเส้นตรงจากจุด $(0,4,1)$ ไปยังจุด $(1,1,2)$ ซึ่งมีสนามเวกเตอร์เป็น $\vec{F}(x,y,z) = xe^z\hat{i} + z\hat{j} + y\hat{k}$

....

....

....

....

....

....

....

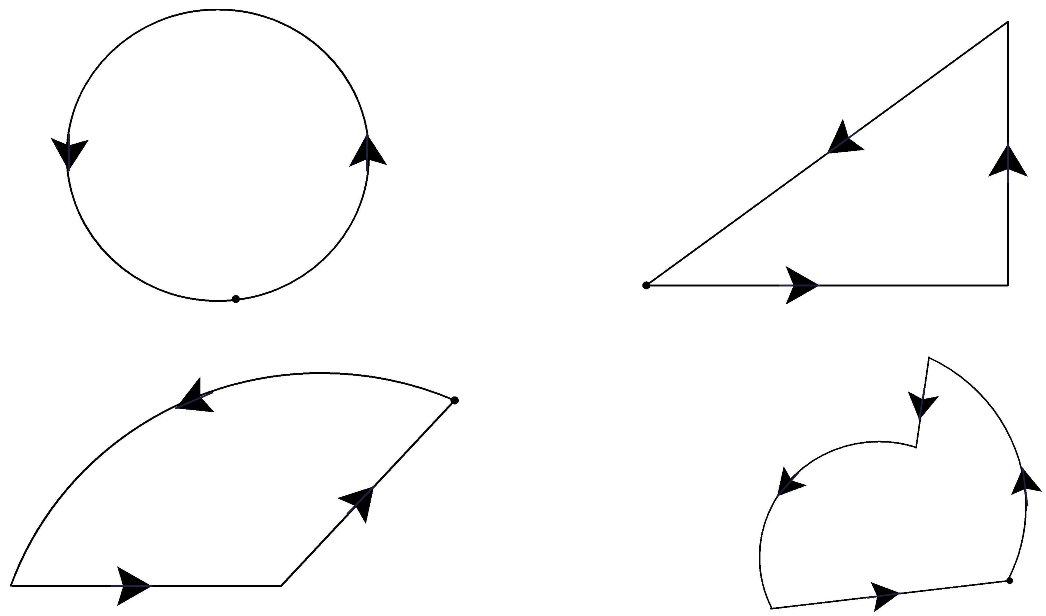
....

....

....

....

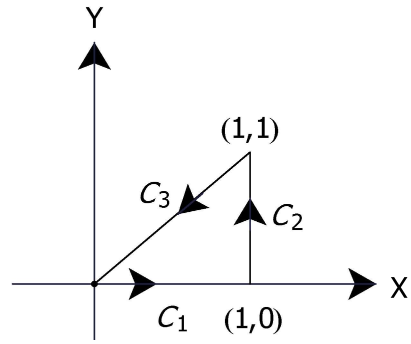
บทนิยาม 1.2 ถ้า C เป็นเส้นโค้ง จะกล่าวว่า C เป็น**เส้นโค้งปิด** (Closed Curve) ก็ต่อเมื่อจุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดของเส้นโค้ง C เป็นจุดเดียวกัน เราจะเขียนอินทิกรัลตามเส้นบนเส้นโค้งปิดด้วย $\oint\limits_C \vec{F}\cdot d\vec{R}$



ตัวอย่าง 1.8 จงหางานที่เกิดจากสนามแรง $\vec{F}(x,y) = -y\hat{i} + x\hat{j}$ ทำให้วัตถุเคลื่อนที่ไปตามวงกลมรัศมีหนึ่งหน่วยในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาหนึ่งรอบ

ตัวอย่าง 1.9 จงหาค่าของ $\oint\limits_{C} (y^2 dx + x^2 dy)$

เมื่อ C เป็นเส้นโค้งปิดดังรูป



....

....

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 1.10 จงหาค่าของ $\oint\limits_{C} \vec{F} \cdot d\vec{R}$ เมื่อ $\vec{F}(x,y) = xy\hat{i} + ye^{x}\hat{j}$ และ C เป็นเส้นรอบรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีจุดยอดทั้ง 4 คือ $(0,0)$, $(2,0)$, $(2,1)$, $(0,1)$ โดยเริ่มจากจุด $(0,0)$ ในทิศทางตามเข็มนาฬิกา

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 1.11 วัตถุชิ้นหนึ่งถูกบังคับให้เคลื่อนที่ในทิศทางตามเข็มนาฬิกาภายในรางวงรี $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{25}=1$ ถ้าแรงที่กระทำต่อวัตถุคือ $\vec{F}(x,y)=y\hat{i}-x\hat{j}$ จงหางานของแรง เมื่อ $\dfrac{\pi}{2}\le t\le\dfrac{3\pi}{2}$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

2. ความเป็นอิสระของวิถี (Independence of Path)

ในหัวข้อ 3.1 เราได้พิจารณางานที่เกิดจากการเคลื่อนที่ของวัตถุด้วยสนามแรงไปตามเส้นโค้ง C จากจุด A ไปยังจุด B ต่อไปเราจะพิจารณาผลกระทบของเส้นโค้ง C ที่มีต่องาน เราอาจคิดว่า ถ้าหากเราตรึงจุด A และจุด B เอาไว้และให้ C เป็นเส้นโค้งใด ๆ ที่มีจุดเริ่มต้นที่ A และจุดสิ้นสุดที่ B งานที่เกิดจากการเคลื่อนที่ของวัตถุด้วยสนามแรงไปตามเส้นโค้ง C ที่ต่างกัน น่าจะมีค่าไม่เท่ากัน แต่มีคำถามว่า จะมีสนามแรงแบบไหนหรือไม่ที่ทำให้งานมีค่าเท่ากันเสมอ ไม่ว่าวัตถุจะเคลื่อนที่ไปตามเส้นโค้ง C ที่ต่างกัน ก่อนที่จะตอบคำถามนี้ให้นักศึกษาพิจารณาค่าปริพันธ์ตามเส้นบนเส้นโค้งต่าง ๆ ในตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 2.1 จงหาค่าของ $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{R}$ เมื่อ $\vec{F}(x,y)=x^3\hat{i}+(x+y^2)\hat{j}$ และ C เป็นเส้นโค้งจากจุด $(0,0)$ ไปยังจุด $(1,1)$ ที่มี 3 แบบดังนี้

(ก) C เป็นเส้นตรง $y=x$

(ข) C เป็นพาราโบลา $y=x^2$

(ค) C เป็นเส้นโค้งกำลังสาม $y=x^3$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่างที่ 2.2 จงหาค่าของ $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{R}$ เมื่อ $\vec{F}(x,y)=y^2\hat{i}+2xy\hat{j}$ และ C เป็นเส้นโค้งจากจุด $(0,0)$ ไปยังจุด $(1,1)$ ที่มี 3 แบบดังนี้

(ก) C เป็นเส้นตรง $y=x$

(ข) C เป็นพาราโบลา $y=x^2$

(ค) C เป็นเส้นโค้งกำลังสาม $y=x^3$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ข้อสังเกต

จากตัวอย่างที่ 1 และตัวอย่างที่ 2 สรุปได้ว่า

....

....

ซึ่งแสดงให้เห็นว่าอาจมีสนามแรงบางกลุ่มที่ทำให้ค่าปริพันธ์ตามเส้นบนวิถีที่ต่างกันมีค่าเท่ากันเสมอซึ่งเราจะได้กล่าวต่อไปถึงเงื่อนไขที่ทำให้เกิดผลดังกล่าว

บทนิยาม 2.1 ปริพันธ์ตามเส้น จะเรียกว่าเป็นอิสระจากวิถี (Independence of Path) ถ้าปริพันธ์ตามเส้นโค้ง C ซึ่งเรียกเป็นช่วง ๆ หรือตามวิถีทุก ๆ วิถีที่เชื่อมจุด A และ B
ไม่เปลี่ยนแปลง สำหรับจุด A และ B แต่ละคู่ใด ๆ ในบริเวณ R

บทนิยาม 2.2 กำหนดให้ $\vec{F}$ เป็นสนามเวกเตอร์นิยามบนบริเวณ D สำหรับทุกจุด A และ B ใด ๆ ในบริเวณ D ปริพันธ์ตามเส้น $\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{R}$ จะกล่าวว่าเป็นอิสระของวิถี (Independence of Path) ก็ต่อเมื่อ $\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{R}$ มีค่าเท่ากันทุก ๆ เส้นจาก A และ B และจะกล่าวว่า $\vec{F}$ เป็น Conservative บน D นั่นคือ

$$\int_{C_1} \vec{F}\cdot d\vec{R} = \int_{C_2} \vec{F}\cdot d\vec{R} = \int_{C_3} \vec{F}\cdot d\vec{R} = \int_{C_4} \vec{F}\cdot d\vec{R} = \dots$$

ทฤษฎีบท 2.1 ถ้า $\vec{F}(x,y) = M(x,y)\hat{i} + N(x,y)\hat{j}$ เมื่อ M, N เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแล้ว $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{R}$ เป็นอิสระของวิถีก็ต่อเมื่อ

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

ทฤษฎีบท 2.2 ถ้า $\vec{F}(x,y,z) = M(x,y,z)\hat{i} + N(x,y,z)\hat{j} + P(x,y,z)\hat{k}$ เมื่อ M, N และ P เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง แล้ว $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{R}$ เป็นอิสระของวิถีก็ต่อเมื่อ

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}\ ,\ \frac{\partial N}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial y}\ \text{ และ }\ \frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x}$$

หมายเหตุ จากทฤษฎีบท 2.1 และทฤษฎีบท 2.2 จะได้ว่า $\vec{F} = \nabla f$

ทฤษฎีบท 2.3 ถ้า $\vec{F}(x,y,z) = M(x,y,z)\hat{i} + N(x,y,z)\hat{j} + P(x,y,z)\hat{k}$ เมื่อ M, N และ P เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง แล้ว $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{R}$ เป็นอิสระของวิถีก็ต่อเมื่อ

$$\nabla f \times \vec{F} = \vec{0}$$

ทฤษฎีบท 2.4 ถ้า $\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{R}$ เป็นอิสระของวิถีจาก A ไป B แล้ว

$$\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{R} = f(B) - f(A)$$

ทฤษฎีบท 2.5 $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{R}$ เป็นอิสระของวิถีก็ต่อเมื่อ $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{R} = 0$ ทุก ๆ เส้นโค้งปิด C

ตัวอย่างที่ 2.3 จงหาค่าของ $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{R}$ เมื่อ $\vec{F}(x,y) = 2xy\hat{i} + x^2\hat{j}$ และ C เป็นส่วนของเส้นตรงจากจุด $(-1,2)$ ไปยังจุด $(4,-3)$

ตัวอย่างที่ 2.4 จงหาค่าของ $\int_{(1,1)}^{(2,3)} \vec{F} \cdot d\vec{R}$ เมื่อ $\vec{F}(x,y) = \left(4x^3y^3 + \frac{1}{x}\right)\hat{i} + \left(3x^4y^2 - \frac{1}{y}\right)\hat{j}$

ตัวอย่างที่ 2.5 จงหาค่าของ $\int\limits_C \vec{F}\cdot d\vec{R}$ เมื่อ $\vec{F}(x,y)=(e^x\sin(y)-y)\hat{i}+(e^x\cos(y)-x-2)\hat{j}$ และ C เป็นส่วนโค้งซึ่งกำหนดโดย $\vec{r}(t)=\left(t^3\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)\right)\hat{i}-\frac{\pi}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi t}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\right)\hat{j}$ เมื่อ $0\le t\le 1$

ตัวอย่างที่ 2.6 จงหาค่าของ $\int\limits_{(1,2,3)}^{(2,-1,-3)} \vec{F}\cdot d\vec{R}$ เมื่อ $\vec{F}(x,y,z)=y\hat{i}+(x+2y)\hat{j}+z^2\hat{k}$

ตัวอย่างที่ 2.7 จงหาค่าของ $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{R}$ เมื่อ $\vec{F}(x,y,z) = yz\hat{i} + xz\hat{j} + xy\hat{k}$ และ C เป็นโค้งจากจุด $(1,1,1)$ ไปยังจุด $(2,-1,3)$

ตัวอย่างที่ 2.8 จงแสดงว่า $\int_C (3x^2dx + 2yzdy + y^2dz)$ เป็นอิสระจากวิถี และจงคำนวณค่าปริพันธ์ตามเส้นเมื่อ C เป็นโค้งเริ่มจากจุด $(0,1,2)$ ไปยังจุด $(1,-1,7)$

3. ทฤษฎีของกรีนในระนาบ (Green Theorem in Plane)

ทฤษฎีบท 3.1 ถ้า C เป็นเส้นโค้งปิดอย่างง่าย (Simple Closed Curve) และเป็น Positively Oriented ในบริเวณ R และ $\vec{F}(x,y)=M(x,y)\hat{i}+N(x,y)\hat{j}$ เป็นสนามเวกเตอร์ที่ต่อเนื่องและหาอนุพันธ์ในบริเวณ R เราจะได้ว่า

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{R}=\oint_C \Big(Mdx+Ndy\Big)=\iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)dA$$

ตัวอย่าง 3.1 จงใช้ทฤษฎีบทของกรีนหาค่าอินทิกรัล $\oint_C \Big((x^2-4y^2+4)dx-8xydy\Big)$ เมื่อ C เป็นรูปวงรี $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$ ในทิศทวนเข็มนาฬิกา

....

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 3.2 กำหนดให้ R เป็นบริเวณที่อยู่เหนือเส้นโค้ง $y=x^2$ และอยู่ใต้เส้นตรง $y=x$ จงใช้ทฤษฎีบทของกรีนหางานในการเคลื่อนที่ของวัตถุไปตามเส้นรอบรูปของ R ในทิศทวนเข็มนาฬิกา ด้วยสนามเวกเตอร์ $\vec{F}(x,y)=(e^{x^2}+y^2)\hat{i}+(e^{y^2}+x^2)\hat{j}$

....

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 3.3 จงหาค่าของ $\oint_{2R}\left(xydx+(x-y)dy\right)$ เมื่อ $R=\left\{(x,y)\middle|0\le x\le 1,1\le y\le 3\right\}$

....

....

....

....

....

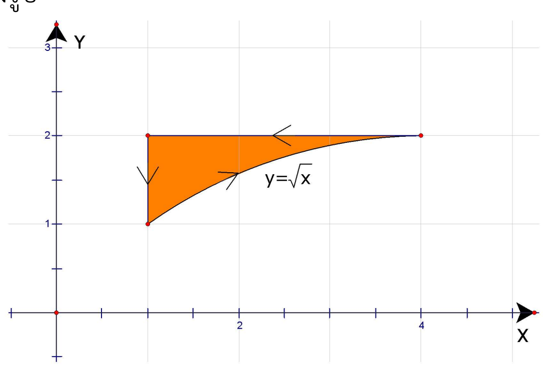
....

....

....

....

ตัวอย่าง 3.4 จงหาค่าของ $\oint_{C}\left((y^2+\sin x)dx+(xy+\ln x)dy\right)$ เมื่อ C เป็นเส้นโค้งเรียบวิถีปิด ในทิศทวนเข็มนาฬิกา ดังรูป



....

....

....

....

....

....

....

....

....

4. อินทิกรัลเชิงผิวโค้ง (Surface Integrals)

ให้ $\vec{F}(x,y,z) = M(x,y,z)\hat{i} + N(x,y,z)\hat{j} + P(x,y,z)\hat{k}$ เป็นสนามเวกเตอร์ให้ s เป็นพื้นผิว ที่มีสมการเป็น $z = f(x,y)$ และให้ $\vec{N}$ เป็นเวกเตอร์ตั้งฉากหนึ่งหน่วย การศึกษาปริพันธ์ตามผิว เราเริ่มจากการศึกษาการไหลของของเหลวผ่านส่วนหนึ่งของพื้นผิว s เหนือบริเวณปิด R_{xy}, R_{yz} และ R_{xz} ในระนาบ xy ระนาบ yz และ ระนาบ xz ตามลำดับ

หมายเหตุ

ที่จุดแต่ละจุดบนพื้นผิว s มีเวกเตอร์ตั้งฉากหนึ่งหน่วยสองเวกเตอร์ ที่ทำกับพื้นผิว s คือ เวกเตอร์ตั้งฉากหนึ่งหน่วยด้านบน (unit upper normal vector) และเวกเตอร์แนวฉากด้านล่าง (unit lower normal vector)

พิจารณาปริมาณของของเหลวที่ไหลผ่านอย่างตั้งฉากกับสี่เหลี่ยมฐานโค้งรูปที่ i ซึ่งมีพื้นที่ $\Delta_i A$ ด้วยสนามเวกเตอร์ $\vec{F}_i$ ในทิศทางเวกเตอร์ตั้งฉากหนึ่งหน่วย คือแรง $\vec{F}_i \cdot \hat{N}_i$ และปริมาณของของเหลวที่ได้เรียกว่า **ฟลักซ์ (flux)** ของ $\vec{F}_i$ ผ่านพื้นที่ $\Delta_i A$ ซึ่งปริมาณที่ได้ คือ

$$\text{Flux ของ } \vec{F}_i = \vec{F}_i \cdot \hat{N}_i \, \Delta_i A$$

และ **Flux** ของ $\vec{F}$ ผ่านพื้นผิว s เหนือบริเวณปิด R ทั้งหมดคือ

$$\text{Flux ของ } \vec{F} = \iint_s \vec{F} \cdot \hat{N} \, dA$$

และสัญลักษณ์ $\iint_s \vec{F} \cdot \hat{N} \, dA$ เรียกว่าปริพันธ์ตามพื้นผิว s ของสนามเวกเตอร์ $\vec{F}$

Flux ของ $\vec{F} = \iint_s \vec{F} \cdot \hat{N} \, dA$ คือปริมาณของเหลวรวมทั้งหมดที่ไหลผ่านพื้นผิว s ต่อหน่วยเวลา หรือเรียกว่า อัตราการไหล มีหน่วยเป็น ลูกบาศก์หน่วย/หน่วยเวลา

ต่อไปเราจะพิจารณาการหาค่าปริพันธ์ตามผิว โดยแยกเป็น 3 กรณีดังนี้

กรณีที่ 1

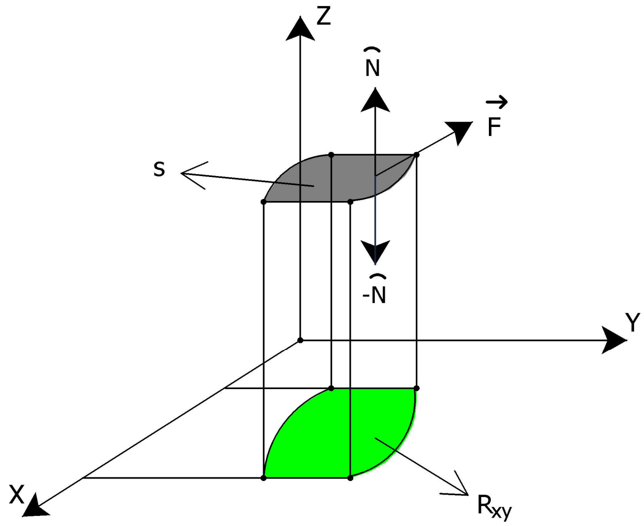
1.1 ในกรณีที่สมการของพื้นผิว S คือ $z = f(x,y)$ และ $\vec{N}$ ชี้ไปทางแกน Z ด้านบวก ให้ R_{xy} เป็นบริเวณที่เกิดจากการฉายพื้นผิว S ไปยังระนาบ XY จะได้ว่า

$$\iint_s \vec{F} \cdot \hat{N} \, dA = \iint_{R_{xy}} \left(-M \frac{\partial z}{\partial x} - N \frac{\partial z}{\partial y} + P \right) dA$$

1.2 ในกรณีที่สมการของพื้นผิว S คือ $z = f\left(x,y\right)$ และ $\vec{N}$ ชี้ไปทางแกน Z ด้านลบ ให้ R_{xy} เป็นบริเวณที่เกิดจากการฉายพื้นผิว S ไปยังระนาบ XY จะได้ว่า

$$\iint_s \vec{F} \cdot \hat{N} \, dA = \iint_{R_{xy}} \left(M \frac{\partial z}{\partial x} + N \frac{\partial z}{\partial y} - P \right) dA$$

ดังรูป 4.1



รูป 4.1

กรณีที่ 2

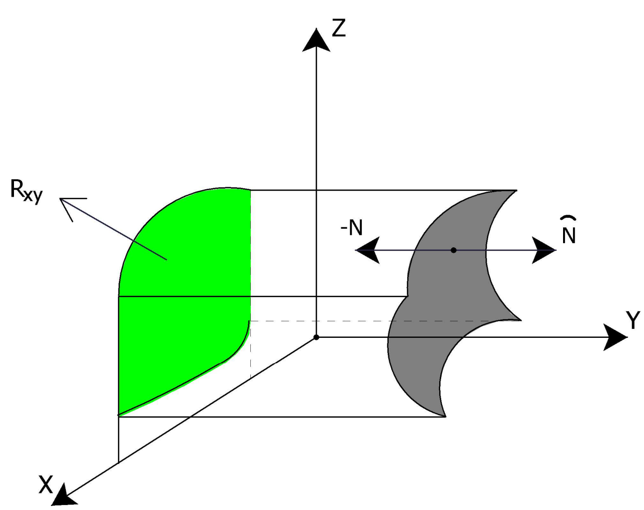
2.1 ในกรณีที่สมการของพื้นผิว S คือ $y = g(x,z)$ และ $\vec{N}$ ชี้ไปทางแกน Y ด้านบวก ให้ R_{xz} เป็นบริเวณที่เกิดจากการฉายพื้นผิว S ไปยังระนาบ XZ จะได้ว่า

$$\iint_{s} \vec{F}\cdot\hat{N}\,dA = \iint_{R_{xz}} \left(-M\frac{\partial y}{\partial x} + N - P\frac{\partial y}{\partial z}\right) dA$$

2.2 ในกรณีที่สมการของพื้นผิว S คือ $y = g\left(x,z\right)$ และ $\vec{N}$ ชี้ไปทางแกน Y ด้านลบ ให้ R_{xz} เป็นบริเวณที่เกิดจากการฉายพื้นผิว S ไปยังระนาบ XZ จะได้ว่า

$$\iint_{s} \vec{F}\cdot\hat{N}\,dA = \iint_{R_{xz}} \left(M\frac{\partial y}{\partial x} - N + P\frac{\partial y}{\partial z}\right) dA$$

ดังรูป 4.2



รูป 4.2

กรณีที่ 3

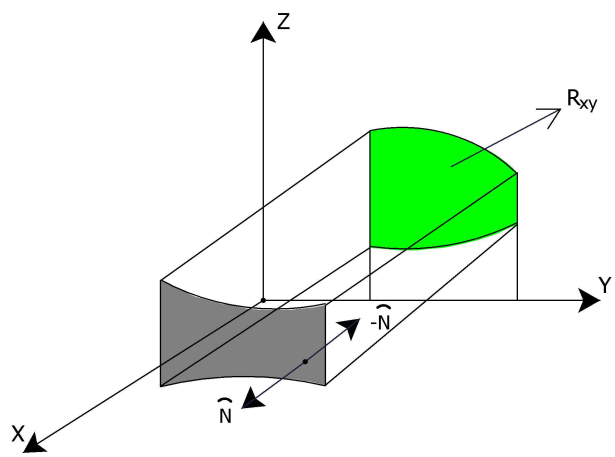
3.1 ในกรณีที่สมการของพื้นผิว S คือ $x = h(y,z)$ และ $\vec{N}$ ชี้ไปทางแกน X ด้านบวก ให้ R_{yz} เป็นบริเวณที่เกิดจากการฉายพื้นผิว S ไปยังระนาบ YZ จะได้ว่า

$$\iint_{s} \vec{F}\cdot\hat{N}\,dA = \iint_{R_{yz}} \left(M - N\frac{\partial x}{\partial y} - P\frac{\partial x}{\partial z} \right) dA$$

3.2 ในกรณีที่สมการของพื้นผิว S คือ $x = h(y,z)$ และ $\vec{N}$ ชี้ไปทางแกน X ด้านลบ ให้ R_{yz} เป็นบริเวณที่เกิดจากการฉายพื้นผิว S ไปยังระนาบ YZ จะได้ว่า

$$\iint_{s} \vec{F}\cdot\hat{N}\,dA = \iint_{R_{yz}} \left(-M + N\frac{\partial x}{\partial y} + P\frac{\partial x}{\partial z} \right) dA$$

ดังรูป 4.3



รูป 4.3

ตัวอย่าง 4.1 ให้ $\vec{F} = 3x\hat{i} + y\hat{j} - 3z\hat{k}$ และ S เป็นผิวทรงกระบอก $x = 4 - y^2$ เฉพาะส่วนที่ถูกตัดด้วยระนาบ XY ระนาบ YZ และระนาบ $z = 4$ จงหาฟลักซ์ (flux) ของ $\vec{F}$ ผ่านผิวโค้ง S ไปทางด้านบวกของแกน X

....

....

....

....

....

....

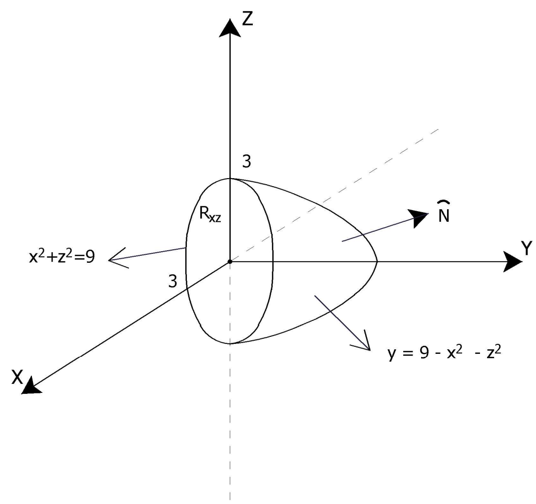
....

....

ตัวอย่าง 4.2 ให้ S เป็นส่วนหนึ่งของทรงกระบอก $y = e^x$ ใน Quadrant ที่ 1 ที่ฉายลงบนระนาบ YZ ได้ระนาบ $R_{yz}; 1 \le y \le 2$, $0 \le z \le 1$ ให้ $\vec{N}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยตั้งฉากกับ S ซึ่งชี้ออกจากระนาบ YZ จงหาฟลักซ์ (flux) ของ $\vec{F}(x,y,z) = -2\hat{i} + 2y\hat{j} + z\hat{k}$ ผ่านผิวโค้ง S ในทิศทางของ $\vec{N}$

ตัวอย่าง 4.3 ให้ $\vec{F}(x,y,z) = y\hat{i} - x\hat{j} + 8\hat{k}$ เป็นสนามความเร็วของการไหลของเหลว พื้นผิว S เป็นส่วนหนึ่งของทรงกลม $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ เหนือระนาบ XY และอยู่ภายในทรงกระบอกที่มีฐานเป็น $x^2 + y^2 = 4$ จงหาฟลักซ์ (flux) ของ $\vec{F}$ ผ่านผิวโค้ง S ชี้ไปทางแกน Z ด้านลบ

ตัวอย่าง 4.4 จงหาปริพันธ์ตามผิว $\iint_s \vec{F}\cdot\hat{N}\,dS$ เมื่อ S เป็นส่วนหนึ่งของพื้นผิวทรงพาราโบลา $y=9-x^2-z^2$ อยู่ทางด้านขวาของระนาบ XZ ให้ $\vec{N}$ เป็นเวกเตอร์ตั้งฉากหนึ่งหน่วยชี้ไปทางด้านบวกของแกน Y และ $\vec{F}(x,y,z)=3x\hat{i}+y\hat{j}+3z\hat{k}$ ดังรูป



....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 4.5 จงคำนวณหาค่าของฟลักซ์ (flux) ของสนามเวกเตอร์ $\vec{F}(x,y,z) = y\hat{i} + x\hat{j} + z\hat{k}$ ผ่านพื้นผิว S ซึ่งเป็นพื้นผิวของ $z = 1 - x^2 - y^2$ เหนือระนาบ xy เมื่อ $\vec{N}$ ชี้ไปทางด้านบวกของแกน Z

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

5. ทฤษฎีบทไดเวอร์เจนซ์ (Divergence Theorem)

นิยาม 5.1 ให้ $\vec{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\hat{i}+Q(x,y,z)\hat{j}+R(x,y,z)\hat{k}$ เป็นสนามเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^3$ โดยที่ P, Q และ R มีอนุพันธ์แล้ว divergence ของ $\vec{F}$ คือ

$$\operatorname{div}\vec{F}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$$

ข้อสังเกต ให้ $\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$ และ $\vec{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\hat{i}+Q(x,y,z)\hat{j}+R(x,y,z)\hat{k}$ และนิยาม $\nabla\cdot\vec{F}$ ในทำนองเดียวกันกับผลคูณสเกลาร์กล่าวคือ $\nabla\cdot\vec{F}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$ ดังนั้นเราอาจเขียนแทน $\operatorname{div}\vec{F}$ ได้ด้วยสัญลักษณ์ $\nabla\cdot\vec{F}$

ตัวอย่าง 5.1 ให้ $\vec{F}(x,y,z)=\left\langle x,y,z\right\rangle$ จงหา $\operatorname{div}\vec{F}$

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 5.2 ให้ $\vec{F}(x,y,z)=xz\hat{i}+(z^2-2y)\hat{j}+(x+\sin yz)\hat{k}$ จงหา $\operatorname{div}\vec{F}$

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 5.3 ให้ $\vec{F}(x,y,z)=xyz\hat{i}+(xz+y^3)\hat{j}+(y^2+xz)\hat{k}$ จงหา $\operatorname{div}\vec{F}$ ที่จุด $(2,1,-1)$

....

....

....

....

....

ทฤษฎีบท 5.1 ทฤษฎีบทไดเวอร์เจนซ์ (Divergence Theorem)

ให้ E เป็นทรงตันใน $\mathbb{R}^3$ ซึ่งถูกล้อมรอบด้วยผิวเรียบปิดที่ต่อเนื่อง และให้ $\vec{F}$ เป็นสนามเวกเตอร์ที่ต่อเนื่องและมีอนุพันธ์บน E แล้ว

$$\iint\limits_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = \iiint\limits_E \operatorname{div}\vec{F}\,dV$$

ตัวอย่าง 5.4 จงคำนวณหาค่าของฟลักซ์ (flux) ของสนามเวกเตอร์ $\vec{F}(x,y,z) = y\hat{i} + x\hat{j} + z\hat{k}$ ผ่านพื้นผิว S ซึ่งเป็นพื้นผิวของ $z = 1 - x^2 - y^2$ เหนือระนาบ xy เมื่อ $\vec{N}$ ชี้ไปทางด้านบวกของแกน Z

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 5.5 ถ้า $\vec{F}(x,y,z) = xy\hat{i} + y^2z\hat{j} + z^3\hat{k}$ จงหาค่า $\iint\limits_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$ ซึ่ง S เป็นลูกบาศก์ขนาด 1 หน่วย กำหนดโดย $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1$ และ $0 \le z \le 1$

ตัวอย่าง 5.6 จงหาค่าของ $\iint\limits_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$ เมื่อ $\vec{F}(x,y,z)=2xy\hat{i}+3y\hat{j}+2z\hat{k}$ เมื่อ S เป็นผิวของทรงตันที่ถูกปิดล้อมด้วยระนาบโคออดิเนตทั้งสามและระนาบ $x+y+z=1$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 5.7 จงคำนวณหา Flux ของสนามเวกเตอร์ $\vec{F} = x^3\hat{i} + y^3\hat{j} + z^2\hat{k}$ ผ่านผิว S ซึ่งเป็นผิวของทรงกระบอกตันที่ถูกปิดล้อมด้วยผิว $x^2 + y^2 = 4$ ระนาบ $z = 0$ และระนาบ $z = 1$

6. ทฤษฎีบทสโตกส์ (Stokes Theorem)

ทฤษฎีบทของกรีนที่กล่าวมาแล้วเกี่ยวข้องกับรูปแบบของ 2 มิติในหัวข้อนี้เป็นการปรับขยายทฤษฎีบทของกรีนไปใช้ในบริเวณ 3 มิติ

นิยาม 6.1 ให้ $\vec{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\hat{i}+Q(x,y,z)\hat{j}+R(x,y,z)\hat{k}$ เป็นสนามเวกเตอร์ซึ่งฟังก์ชัน P, Q, R สามารถหาอนุพันธ์ย่อยได้ curl ของ $\vec{F}$ คือฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ซึ่งเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\mathrm{curl}\,\vec{F}$ นิยามโดย

$$\mathrm{curl}\,\vec{F}=\nabla\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}$$

ตัวอย่าง 6.1 ให้ $\vec{F}(x,y,z)=3yz\hat{i}+2xz\hat{j}+xy\hat{k}$ จงหา $\mathrm{curl}\,\vec{F}$

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 6.2 ให้ $\vec{F}(x,y,z)=\left\langle 2x^2+3yz,3y^2+2xz,4z^2+xy\right\rangle$ จงหา $\mathrm{curl}\,\vec{F}$

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 6.3 ให้ $\vec{F}(x,y,z)=xz\hat{i}+(z^2-2y)\hat{j}+(x+\sin yz)\hat{k}$ จงหา $\mathrm{curl}\,\vec{F}$

....

....

....

....

....

ทฤษฎีบท 6.1 ทฤษฎีบทสโตกส์ (Stokes Theorem)

ถ้า S เป็นผิวแบบเรียบเป็นช่วง ๆ และมีเส้นโค้งปิด C แบบเรียบเชิงเดียวเป็นช่วง ๆ เป็นขอบเขตของ S ให้ $\vec{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\hat{i}+Q(x,y,z)\hat{j}+R(x,y,z)\hat{k}$ เป็นสนามเวกเตอร์ ซึ่งฟังก์ชัน $P,\ Q,\ R$ มีความต่อเนื่องและสามารถหาอนุพันธ์ย่อยได้ในบริเวณ S ถ้า C เป็นไปตามทิศทางบวก จะได้

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=\iint_S \operatorname{curl}\vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$$

ตัวอย่าง 6.4 ให้ใช้ทฤษฎีบทสโตกส์หาค่าของ $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ ซึ่ง C เป็นเส้นขอบของระนาบ $z=1-y,\ 0\le x\le 2$ และ $0\le y\le 1$ ซึ่ง C มีทิศทางทวนเข็มนาฬิกา เมื่อมองรูปจากด้านบน โดยกำหนดให้ $\vec{F}=xy\hat{i}+2yz\hat{j}+xz\hat{k}$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 6.5 จงหาค่าปริพันธ์ตามเส้นของ S ซึ่งเป็นส่วนหนึ่งของทรงกระบอก $z = 1 - x^2$ $0 \le x \le 1$ และ $-2 \le y \le 2$ กำหนดให้ $\vec{F}(x,y,z) = xy\hat{i} + yz\hat{j} + zx\hat{k}$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 6.6 ให้ใช้ทฤษฎีบทสโตกส์หาค่าของ $\oint_{C} (zdx + xdy + ydz)$ ซึ่ง C เป็นเส้นตามทรงกระบอก $x^2 + y^2 = 1$ ในระนาบ $y + z = 2$ และ ซึ่ง C มีทิศทางทวนเข็มนาฬิกา เมื่อมองรูปจากด้านบนของทรงกระบอก