เอกสารประกอบการสอน

รหัสวิชา 1143409 การวิเคราะห์เชิงตัวเลข

0

1 2

3 4 5

6 7 8 9

ผู้สอน

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ไพรัชช์ จันทร์งาม

สำหรับนักศึกษาสาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ ชั้นที่ 3

มหาวิทยาลัยราชภัฏบุรีรัมย์

แผนการสอน

รายวิชา : 1143409 การวิเคราะห์เชิงตัวเลข **จำนวนหน่วยกิต :** 3 (2-2-5)

อาจารย์ผู้สอน : ผู้ช่วยศาสตราจารย์ไพรัชช์ จันทร์งาม **สาขาวิชา :** คณิตศาสตร์

คณะ : ครุศาสตร์ **ติดต่อ :** 087-8767663

<u>คำอธิบายรายวิชา</u>

การวิเคราะห์ความคลาดเคลื่อน ผลเฉลยของสมการไม่เชิงเส้น ระบบสมการเชิงเส้น การประมาณค่าในช่วง การหาอนุพันธ์และปริพันธ์เชิงตัวเลข ผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์ การใช้โปรแกรมสำเร็จรูปทางคณิตศาสตร์หาคำตอบเบื้องต้น และการประยุกต์ใช้ในการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ขั้นพื้นฐาน

<u>จุดมุ่งหมายรายวิชา</u>

- เพื่อให้นักศึกษามีความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับการวิเคราะห์ค่าคลาดเคลื่อน
- เพื่อให้นักศึกษามีความรู้ความเข้าใจและสามารถหาคำตอบของสมการเชิงเส้น สมการ ไม่เชิงเส้นระบบสมการเชิงเส้นและระบบสมการไม่เชิงเส้นโดยใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขได้
- เพื่อให้นักศึกษามีความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับการประมาณค่าในช่วงด้วยพหุนาม และ นำไปใช้ได้
- เพื่อให้นักศึกษามีความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับการประมาณค่าในช่วงโดยใช้ฟังก์ชันสไปลน์ วิธีกำลังสองน้อยที่สุดและนำไปใช้ได้
- เพื่อให้นักศึกษามีความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับการหาอนุพันธ์เชิงตัวเลขของฟังก์ชันได้
- เพื่อให้นักศึกษามีความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับการหาปริพันธ์เชิงตัวเลขของฟังก์ชันได้
- เพื่อให้นักศึกษามีความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ โดยใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขได้
- เพื่อให้นักศึกษาเกิดทักษะเกี่ยวกับกระบวนการคิด การวิเคราะห์อย่างเป็นระบบเกี่ยวกับการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์และสามารถประยุกต์ใช้ในสาขาวิชาได้
- สามารถใช้โปรแกรมสำเร็จรูปทางด้านคณิตศาสตร์หาคำตอบเบื้องต้น
- สามารถประยุกต์ใช้ในการจัดการเรียนรู้คณิตศสาสตร์ขั้นพื้นฐานได้

<u>การวางแผนการสอน</u>

บทที่ 1 ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับการคำนวณเชิงตัวเลข

- ความคลาดเคลื่อน
- ตัวอย่างปัญหาความคลาดเคลื่อนจากการคำนวณโดยคอมพิวเตอร์

บทที่ 2 คำตอบของสมการตัวแปรเดียว

- ระเบียบวิธีแบ่งครึ่งช่วง
- ระเบียบวิธีนิวตัน – ราฟสัน
- ระเบียบวิธีเส้นตัดโค้ง
- ระเบียบวิธีของการทำซ้ำจุดคงที่

บทที่ 3 ระบบสมการเชิงเส้น

- เมทริกซ์และเวกเตอร์
- วิธีเชิงตัวเลขในการหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น
- ระเบียบวิธีการแยกแบบแอลยู
- ระเบียบวิธีการทำซ้ำแบบจาโคบี
- ระเบียบวิธีทำซ้ำของเกาส์-ไซเดล

บทที่ 4 การประมาณค่าในช่วง

- พหุนามลากรางจ์
- การประมาณค่าในช่วงโดยพหุนามเป็นช่วง
- การประมาณค่าในช่วงโดยระเบียบวิธีผลต่างย่อยของนิวตัน

บทที่ 5 อนุพันธ์และปริพันธ์เชิงตัวเลข

- การประมาณค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่ง
- การประมาณค่าอนุพันธ์อันดับสอง
- การประมาณค่าปริพันธ์โดยใช้ระเบียบวิธีสี่เหลี่ยมคางหมู
- การประมาณค่าปริพันธ์โดยใช้ระเบียบวิธีซิมป์สัน
- การประมาณค่าปริพันธ์โดยใช้ระเบียบเกาส์ควอดราเจอร์

บทที่ 6 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

- ระเบียบวิธีของเทย์เลอร์
- ระเบียบวิธีของรุงเง-คุตตา

<u>การวัดผลและประเมินผล</u>

1. การสอบย่อย 25%
2. การสอบกลางภาค 25%
3. การสอบปลายภาค 25%
4. การประเมินผลชิ้นงาน 15%
5. การเข้าเรียน + พฤติกรรม 10%

<u>เกณฑ์การตัดสินผลการเรียน</u>

คะแนน	87 – 100	A	คะแนน	80 – 86	B+
คะแนน	73 – 79	B	คะแนน	66 – 72	C+
คะแนน	59 – 65	C	คะแนน	52 – 58	D+
คะแนน	45 – 51	D	คะแนน	0 – 44	F
ขาดสอบ		I			
ชิ้นงานไม่สมบูรณ์		I			
เข้าเรียนไม่ครบ 80%		I			

∞∞∞∞∞∞∞∞∞∞∞∞∞∞∞∞∞∞∞∞∞∞∞∞∞∞∞∞∞∞∞∞∞∞

บทที่ 1
การวิเคราะห์ความคลาดเคลื่อน

การคำนวณเชิงตัวเลขนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อที่จะประมาณค่าคำตอบของปัญหาต่าง ๆ ให้ได้ค่าที่ใกล้เคียงกับความเป็นจริงมากที่สุดเท่าที่จะทำได้ ในส่วนของการคำนวณเกี่ยวกับจำนวนจริงใน เครื่องคิดเลขและคอมพิวเตอร์นั้น เครื่องจะคำนวณโดยประมาณค่าจำนวนจริงด้วยจำนวนตรรกยะที่มีตัวเลขจำกัด เช่น ผลบวกของ $\sqrt{2}$ กับ $\frac{1}{3}$ เขียนได้เป็น $\sqrt{2}+\frac{1}{3}$ ซึ่งเรียกว่า ผลลัพธ์จริง (exact value) โดยไม่สามารถเขียนให้เป็นเลขจำนวนเดียวได้ ถ้าจะให้เครื่องคำนวณบวกจำนวนดังกล่าว เครื่องคำนวณจะประมาณค่าของ $\sqrt{2}$ และ $\frac{1}{3}$ แยกกันแล้วจึงบวกกันถ้าเครื่องสามารถทำได้ถึงทศนิยม 7 หลักค่าประมาณของ $\sqrt{2}$ เป็น 1.4142136 และค่าประมาณของ $\frac{1}{3}$ เป็น 0.3333333 ดังนั้นรวมกันได้ เป็น 1.7475469 ค่านี้เป็นค่าประมาณของผลลัพธ์จริง $\sqrt{2}+\frac{1}{3}$ การที่คอมพิวเตอร์ต้องประมาณค่าของ จำนวนจริงแทนที่จะใช้ค่าจริงก็เพราะว่าคอมพิวเตอร์มีที่เก็บตัวเลขจำกัด ค่าจริงของ $\sqrt{2}$ กับ $\frac{1}{3}$ เป็นทศนิยมไม่รู้จบ คอมพิวเตอร์จึงไม่สามารถเก็บค่าจริงได้

โดยปกติเครื่องคอมพิวเตอร์จะเก็บจำนวนเป็น 2 แบบ คือจำนวนเต็ม (integer number) และจำนวนจุดลอย (floating point number) จำนวนเต็มที่มีค่าระหว่างค่าบวกและค่าลบของจำนวนเต็มใหญ่สุด (ที่เครื่องจะเก็บไว้ได้) คอมพิวเตอร์จะเก็บไว้ในแบบจำนวนเต็ม การเก็บแบบนี้ไม่มีความคลาดเคลื่อน คอมพิวเตอร์จะคำนวณได้เที่ยงตรงถ้าผลลัพธ์ไม่เกินค่าสูงสุดที่จะเก็บไว้ได้ แต่ถ้าจำนวนที่จะเก็บมีขนาดใหญ่กว่าค่าสูงสุด คอมพิวเตอร์จะเก็บไว้ในรูปของจำนวนจุดลอยรวมทั้งจำนวนจริงที่ไม่ใช่จำนวนเต็มคอมพิวเตอร์ก็จะเก็บไว้ในรูปจำนวนจุดลอยเช่นเดียวกันซึ่งการคำนวณโดยใช้จำนวน จุดลอยจะได้ผลลัพธ์เป็นเพียงค่าประมาณเท่านั้น

1. ความคลาดเคลื่อน

การคำนวณในคอมพิวเตอร์โดยใช้จำนวนจุดลอยแทนจำนวนจริงนั้น จะทำให้มีความคลาดเคลื่อนเกิดขึ้น ความคลาดเคลื่อนอาจเกิดขึ้นตั้งแต่เริ่มแรกของการประมาณค่าและอาจเกิดจากการประมาณค่าในระหว่างการคำนวณเมื่อนำตัวเลขนี้ไปคำนวณหลาย ๆ ครั้งความคลาดเคลื่อนก็จะขยายมากขึ้นดังนั้นจึงควรศึกษาให้เข้าใจถึงธรรมชาติอันนี้เพื่อที่จะรู้ว่าผลลัพธ์สุดท้ายจากการคำนวณนั้นมีความแม่นยำเพียงไร

เพื่อความสะดวกในการวิเคราะห์ความคลาดเคลื่อน จะให้นิยามค่าของความคลาดเคลื่อน ประเภทต่าง ๆ ดังนี้ (ค่าของความคลาดเคลื่อนเรียกสั้น ๆ ว่าค่าคลาดเคลื่อน)

1. ค่าคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ (absolute error) เขียนแทนด้วย $\left|\alpha-\beta\right|$

   เมื่อ α เป็นค่าจริงที่ได้จากวิธีเชิงวิเคราะห์

   และ β เป็นค่าประมาณจากค่าจริง

2. ค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ (relative error) เขียนแทนด้วย $\dfrac{|\alpha-\beta|}{|\alpha|}$

ค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์บ่งชี้ถึงความแม่นยำในการประมาณเมื่อเทียบกับขนาดของค่าจริง ดังนั้น หากต้องการเปรียบเทียบค่าคลาดดเคลื่อนของจำนวนที่มีขนาดแตกต่างกันเรามักจะใช้ค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์

ตัวอย่าง 1.1 ให้ $\alpha_1 = 1.333,\ \beta_1 = 1.334$ และ $\alpha_2 = 0.001,\ \beta_2 = 0.002$ จงหาค่าคลาดเคลื่อนสัมบูรณและค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

เราอาจบ่งบอกความแม่นได้ด้วยเลขนัยสำคัญ (significant digit, S.D.) การคำนวนค่าของเลขนัยสำคัญโดยใช้ความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ทำได้โดยใช้บทนิยามต่อไปนี้

นิยาม 1.1 จำนวน β ประมาณ α ได้แม่นถึง t S.D. ถ้า t เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากที่สุดที่สอดคล้องกับ

$$\frac{|\alpha-\beta|}{|\alpha|} = \frac{10^{-t}}{2}$$

ตัวอย่าง 1.2 ให้ค่าจริง $\alpha = 3.141529$ และประมาณ $\beta = 3.14$ จงหาค่าความแม่นยำ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ตัวอย่าง 1.3 ให้ค่าจริง $\alpha = 1,000,000$ และประมาณ $\beta = 999,996$ จงหาค่าความแม่นยำ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ตัวอย่าง 1.4 ให้ค่าจริง $\alpha = 0.0000012$ และประมาณ $\beta = 0.0000009$ จงหาค่าความแม่นยำ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. ตัวอย่างปัญหาความคลาดเคลื่อนจากการคำนวณโดยคอมพิวเตอร์

ความคลาดเคลื่อนนั้นนอกจากจะมาจากการเก็บจำนวนเป็นจำนวนเครื่องแล้วในการดำเนิน การทางคณิตศาสตร์พื้นฐาน เช่น การบวก ลบ คูณ หาร ก็อาจมีค่าคลาดเคลื่อนเกิดขึ้นอีกได้ สมมุติว่าคอมพิวเตอร์ใช้จำนวนจุดลอยในระบบเลขฐานสิบและมีตัวเลขแมนทิสซา 4 ตำแหน่งโดยใช้วิธีการตัดในตัวอย่างดังต่อไปนี้

1) ความคลาดเคลื่อนจากการบวก หรือลบของจำนวนสองจำนวนซึ่งจำนวนหนึ่งมีค่ามาก และอีกจำนวนหนึ่งมีค่าน้อย

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2) ความคลาดเคลื่อนเกิดจากการลบจำนวนสองจำนวนซึ่งมีค่าใกล้เคียงกัน จะเหลือตัวเลขนัยสำคัญ (ตัวเลขที่แสดงความแม่นยำ) น้อยตัว

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3) Overflow และ Underflow เกิดขึ้นเมื่อจำนวนมีค่าใหญ่เกินไปหรือมีค่าเล็กเกินไปกว่า ที่คอมพิวเตอร์จะเก็บไว้ในรูปจำนวนจุดลอยได้

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

4) ความคลาดเคลื่อนการปัดเศษจากการคูณและการหาร ตามปกติเมื่อคูณหรือหารจำนวน สองจำนวน ตัวเลขของผลลัพธ์จะมากกว่าตัวเลขของจำนวนเดิมและบางทีมากเกินกว่าที่คอมพิวเตอร์จะเก็บไว้ได้ นั่นคือเกิดความคลาดเคลื่อนที่เรียกว่าความคลาดเคลื่อนจากการปัดเศษซึ่งเกิดขึ้นบ่อยๆ แม้ว่าจำนวนเริ่มแรกสองจำนวนจะไม่มีความคลาดเคลื่อนเลย

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

5) การหารด้วยเลขจำนวนน้อย มีลักษณะคล้ายกับการคูณด้วยเลขจำนวนมาก ทำให้ความคลาดเคลื่อนที่มีมาแต่เดิมขยายใหญ่ขึ้น

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

6) ความคลาดเคลื่อนจากการพิมพ์ผลลัพธ์ ถึงแม้ว่าการคำนวณในคอมพิวเตอร์จะถูกต้อง แต่การพิมพ์ผลลัพธ์อาจทำให้ผู้ใช้เข้าใจผิดได้

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....