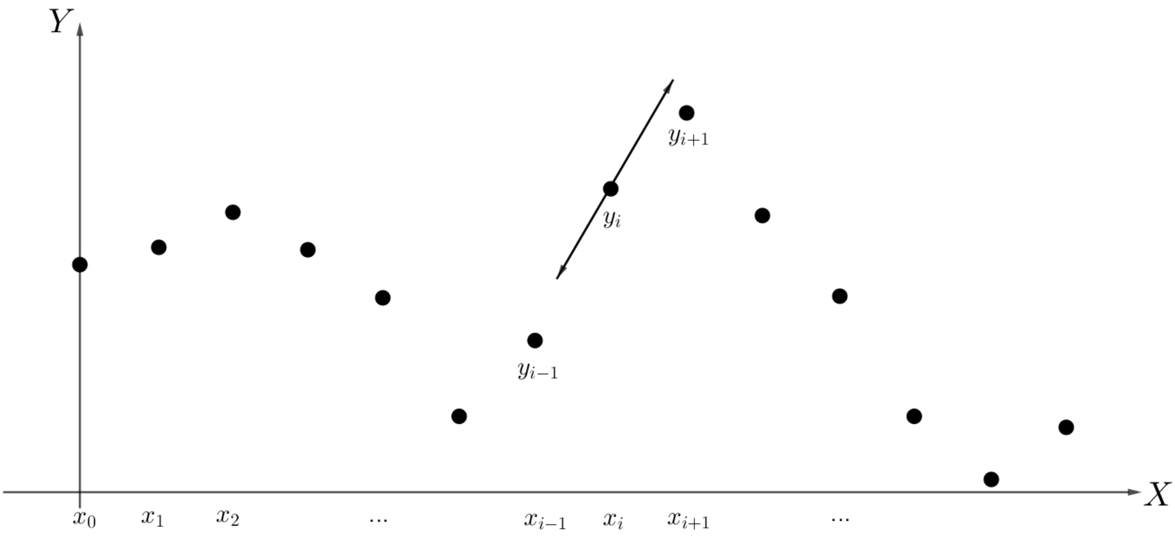
บทที่ 5
การหาอนุพันธ์และปริพันธ์เชิงตัวเลข

สาเหตุที่ต้องใช้การประมาณค่าเชิงตัวเลขในการอินทิกรัลจำกัดเขตบางฟังก์ชันเราไม่สามารถหาค่าอินทิเกรตได้ เช่น $f(x)=x^x,\ f(x)=e^{-x^2}$ การเขียนโปรแกรมซึ่งการเขียนโปรแกรมเพื่อประมาณพื้นที่ใต้กราฟใด ๆ เป็น เรื่องไม่ง่ายในคำนวณค่าของอินทิเกรตแบบสัญลักษณ์

5.1 การประมาณค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่ง

พิจารณา อนุพันธ์อันดับหนึ่งของฟังก์ชันของตัวแปรตาม y เทียบกับตัวแปรอิสระ x ซึ่งเขียน แทนด้วย $\frac{dy}{dx}$ เราสามารถประมาณค่าโดยตรงของ $\frac{dy}{dx}$ ได้ 3 วิธีโดยพิจารณาจากรูปต่อไปนี้



ในทางเรขาคณิตเราทราบว่า $\frac{dy_i}{dx_i}$ หมายถึงความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง y_i ที่จุด x_i ดังนั้นเราสามารถประมาณค่าของความชันของเส้นสัมผัสดังกล่าวได้ 3 วิธีโดยตรงดังนี้

1. ผลต่างทางหน้า (Forward difference) เป็นการประมาณค่าจากความชันของเส้นตรง ที่ผ่านจุด x_i และ x_{i+1} นั่นคือ

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x_i} = f'(x_i) \approx \frac{y_{i+1}-y_i}{h}$$

หรือ

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x_i} = f'(x_i) \approx \frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{h}$$

เมื่อ $h = x_{i+1} - x_i$

จากอนุกรมเทย์เลอร์รอบจุด x_i

$$f(x_i + h) = f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f''(\xi)}{2}h^2$$

เมื่อ $\xi \in (x_i, x_i + h)$

ดังนั้น จะได้

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i + h) - f(x_i)}{h} - \frac{f''(\xi)}{2}h$$

พิจารณาค่าคลาดเคลื่อนตัดปลาย

$$E = -\frac{f''(\xi)}{2}h$$

เขียนได้เป็น

$$E(h) = -\frac{f''(\xi)}{2}h$$

พิจารณา

$$\lim_{h \to 0} \frac{-\frac{f''(\xi)}{2}h}{h} = -\frac{f''(\xi)}{2} = c < \infty$$

ให้ $E(h) = O(h)$

จะได้ว่า ระเบียบวิธีอันดับหนึ่ง (First-order method) คือ

$$\boxed{f'(x_i) = \frac{f(x_i + h) - f(x_i)}{h} + O(h)}$$

2. ผลต่างทางหลัง (Backward difference) เป็นการประมารจากความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด x_{i-1} และ x_i นั่นคือ

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x_i} = f'(x_i) \approx \frac{y_i - y_{i-1}}{h}$$

หรือ

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x_i} = f'(x_i) \approx \frac{f(x_{i-1}) - f(x_i)}{h}$$

เมื่อ $h = x_i - x_{i-1}$

จากอนุกรมเทย์เลอร์รอบจุด x_i

$$f(x_i - h) = f(x_i) - f'(x_i)h + \frac{f''(\xi)}{2}h^2$$

เมื่อ $\xi \in (x_i - h, x_i)$

ดังนั้น จะได้

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_i - h)}{h} + \frac{f''(\xi)}{2}h$$

หรือ

$$\boxed{f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_i - h)}{h} + O(h)}$$

3. ผลต่างศูนย์กลาง (Central difference) เป็นการประมารจากความชันของเส้นตรงที่ ผ่านจุด x_{i-1} และ x_{i+1}

พิจารณาอนุกรมเทย์เลอร์รอบจุด x_i

$$f(x_i+h)=f(x_i)+f'(x_i)h+\frac{f''(x_i)}{2!}h^2+\frac{f'''(\xi_1)}{3!}h^3$$

และ

$$f(x_i-h)=f(x_i)-f'(x_i)h+\frac{f''(x_i)}{2!}h^2-\frac{f'''(\xi_2)}{3!}h^3$$

เมื่อ $\xi_1\in(x_i,x_i+h)$ และ $\xi_2\in(x_i-h,x_i)$

จะได้

$$f(x_i+h)-f(x_i-h)=2hf'(x_i)+\frac{h^3}{6}\left[f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)\right]$$

จัดรูปใหม่

$$f'(x_i)=\frac{f(x_i+h)-f(x_i-h)}{2h}-\frac{h^2}{12}\left[f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)\right]$$

ถ้า $f'''(x)$ ต่อเนื่องบนช่วง (x_i-h,x_i+h) โดยทฤษฎีบทค่ากลาง จะได้ว่า

$$f'''(\xi)=\frac{1}{2}\left[f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)\right],\quad \xi\in(x_i-h,x_i+h)$$

ดังนั้น

$$f'(x_i)=\frac{f(x_i+h)-f(x_i-h)}{2h}-\frac{h^2}{6}f'''(\xi)$$

หรือ

$$\boxed{f'(x_i)=\frac{f(x_i+h)-f(x_i-h)}{2h}+O(h^2)}$$

ตัวอย่าง 5.1.1 จงประมาณค่า $f'(1)$ เมื่อกำหนดให้ $f(x)=x^2$ และพิจารณาค่าความคลาดเคลื่อน

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 5.1.2 จงประมาณค่า $f'(6)$ เมื่อกำหนดให้ $f(x) = x\sin x$ และพิจารณาค่าความคลาดเคลื่อน

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 5.1.3 จงประมาณค่า $f'(2)$ เมื่อกำหนดให้ $f(x) = x^x$ และพิจารณาค่าความคลาดเคลื่อน

5.2 การประมาณค่าอนุพันธ์อันดับสอง

พิจารณาอนุกรมเทย์เลอร์รอบจุด x_i

$$f(x_i+h)=f(x_i)+f'(x_i)h+\frac{f''(x_i)}{2!}h^2+\frac{f'''(x_i)}{3!}h^3+\frac{f^{(4)}(\xi_1)}{4!}h^4 \quad ....(1)$$

และ

$$f(x_i-h)=f(x_i)-f'(x_i)h+\frac{f''(x_i)}{2!}h^2-\frac{f'''(x_i)}{3!}h^3+\frac{f^{(4)}(\xi_2)}{4!}h^4 \quad ....(2)$$

เมื่อ $\xi_1\in(x_i,x_i+h)$ และ $\xi_2\in(x_i-h,x_i)$

นำ $(1)+(2)$ จะได้

$$\frac{f(x_i+h)-2f(x_i)+f(x_i-h)}{h^2}=f''(x_i)+\frac{h^2}{24}\left[f^{(4)}(\xi_1)+f^{(4)}(\xi_2)\right] \quad ....(3)$$

โดยทฤษฎีบทค่ากลาง จะได้ว่า

$$f^{(4)}(\xi)=\frac{1}{2}\left[f^{(4)}(\xi_1)+f^{(4)}(\xi_2)\right]$$

แทนในสมการ (3) จะได้

$$\frac{f(x_i+h)-2f(x_i)+f(x_i-h)}{h^2}=f''(x_i)+\frac{h^2}{12}f^{(4)}(\xi)$$

หรือ

$$f''(x_i)=\frac{f(x_i+h)-2f(x_i)+f(x_i-h)}{h^2}-\frac{h^2}{12}f^{(4)}(\xi)$$

ดังนั้น จะได้ระเบียบวิธีอันดับสอง (Second-order method) ดังนี้

$$\boxed{f''(x_i)=\frac{f(x_i+h)-2f(x_i)+f(x_i-h)}{h^2}+O(h^2)}$$

ตัวอย่าง 5.2.1 จงประมาณค่าอนุพันธ์อันดับสองของ $f(x)=x^2e^{2x}$ ที่จุด $x=0$ โดยใช้ค่าความกว้างช่วง $h=0.2,\ h=0.1,\ h=0.05$

....

....

....

....

....

....

....

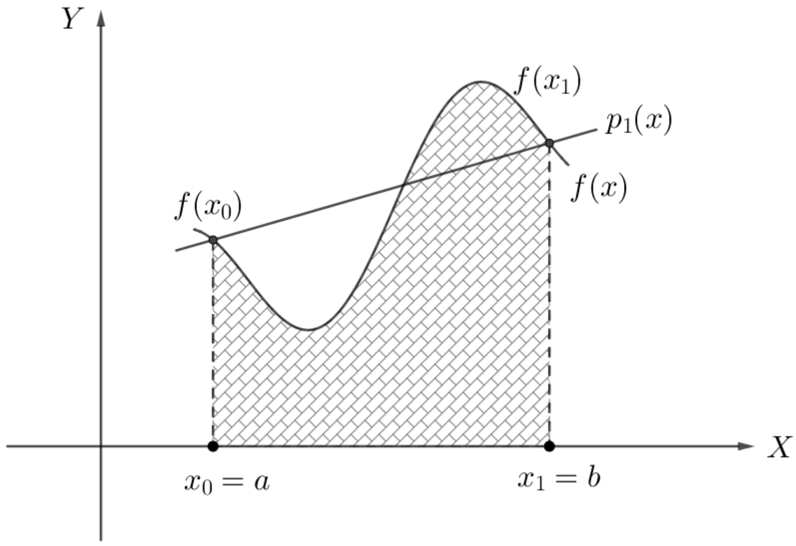
....

....

....

ตัวอย่าง 5.2.2 จงประมาณค่าอนุพันธ์อันดับสองของ $f(x) = x^2 e^x \cos x$ ที่จุด $x = 1$ โดยใช้ค่าความกว้างช่วง $h = 0.1$, $h = 0.05$, $h = 0.025$

5.3 การประมาณค่าปริพันธ์โดยใช้ระเบียบวิธีสี่เหลี่ยมคางหมู



จากรูปจะได้ว่า

$$f(x) \approx p_1(x)$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p_1(x)dx$$

พิจารณาพหุนามลากรางจ์

$$p_1(x) = \frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)}f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}f(x_1)$$

ดังนั้น

$$f(x) \approx \frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)}f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}f(x_1)$$

เขียนใหม่

$$f(x) = \frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)}f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}f(x_1) + \frac{1}{2}f''(\xi(x))(x-x_0)(x-x_1)$$

เมื่อ $\xi \in (x_0, x_1)$
ดังนั้น

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \left[\frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)}f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}f(x_1)\right] + \frac{1}{2}f''(\xi(x))(x-x_0)(x-x_1)\,dx$$

พิจารณา $\int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)}f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}f(x_1)\right]dx$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)}f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}f(x_1)\right]dx &= \left[\frac{(x-x_1)^2}{2(x_0-x_1)}f(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2(x_1-x_0)}f(x_1)\right]_{x_0}^{x_1} \\ &= \frac{(x_1-x_0)}{2}\big[f(x_0)+f(x_1)\big] \\ &= \frac{h}{2}\big[f(x_0)+f(x_1)\big]\end{aligned}$$

พิจารณา $\frac{1}{2}f''(\xi(x))(x-x_0)(x-x_1)dx$ โดยทฤษฎีบทค่าเฉลี่ย จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1} f''(\xi(x))(x-x_0)(x-x_1)dx &= \frac{1}{2}f''(\xi)\int_{x_0}^{x_1}(x-x_0)(x-x_1)dx \\ &= \frac{1}{2}f''(\xi)\left[\frac{x^3}{3}-\frac{(x_1+x_0)}{2}x^2+x_0x_1x\right]_{x_0}^{x_1} \\ &= -\frac{h^3}{12}f''(\xi)\end{aligned}$$

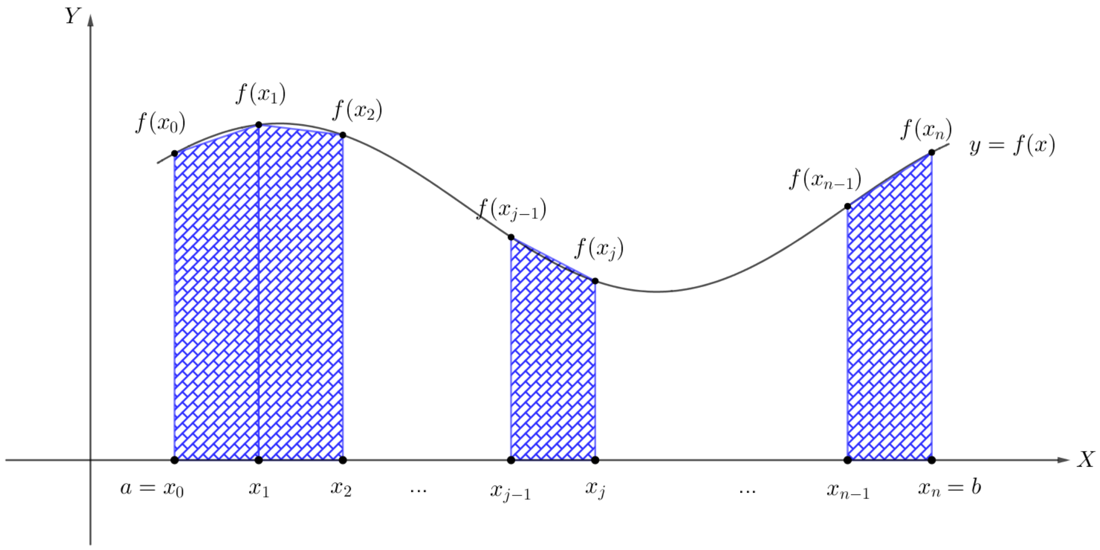
เมื่อ $\xi \in (x_0, x_1)$
ดังนั้น

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\left[f(x_0)+f(x_1)\right]-\frac{h^3}{12}f''(\xi)$$

หรือ

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}\left[f(x_0)+f(x_1)\right]}$$

เราจะขยายแนวคิดนี้ไปยัง การใช้พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมคางหมูหลายรูปในการประมาณพื้นที่ใต้กราฟ



จากรูปจะได้ว่า

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &\approx \left[\frac{1}{2}(f(x_0)+f(x_1))h+\frac{1}{2}(f(x_1)+f(x_2)h+\ldots+\frac{1}{2}(f(x_{n-1})+f(x_n)h\right] \\ &\approx \frac{h}{2}\left[f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+\ldots+2f(x_{n-1})+f(x_n)\right] \\ &\approx \frac{h}{2}\left[f(x_0)+2\sum_{j=1}^{n-1}f(x_j)+f(x_n)\right]\end{aligned}$$

หรือ

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\left[f(x_0)+2\sum_{j=1}^{n-1}f(x_j)+f(x_n)\right]-\frac{(b-a)h^2}{12}f''(\xi)}$$

ตัวอย่าง 5.3.1 จงหาประมาณค่าปริพันธ์ $\int_{1}^{5} x^2dx$ โดยใช้สูตรสี่เหลี่ยมคางหมู เมื่อกำหนด $n = 4$

ตัวอย่าง 5.3.2 จงหาประมาณค่าปริพันธ์ $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$ โดยใช้สูตรสี่เหลี่ยมคางหมู เมื่อกำหนด $n = 5$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

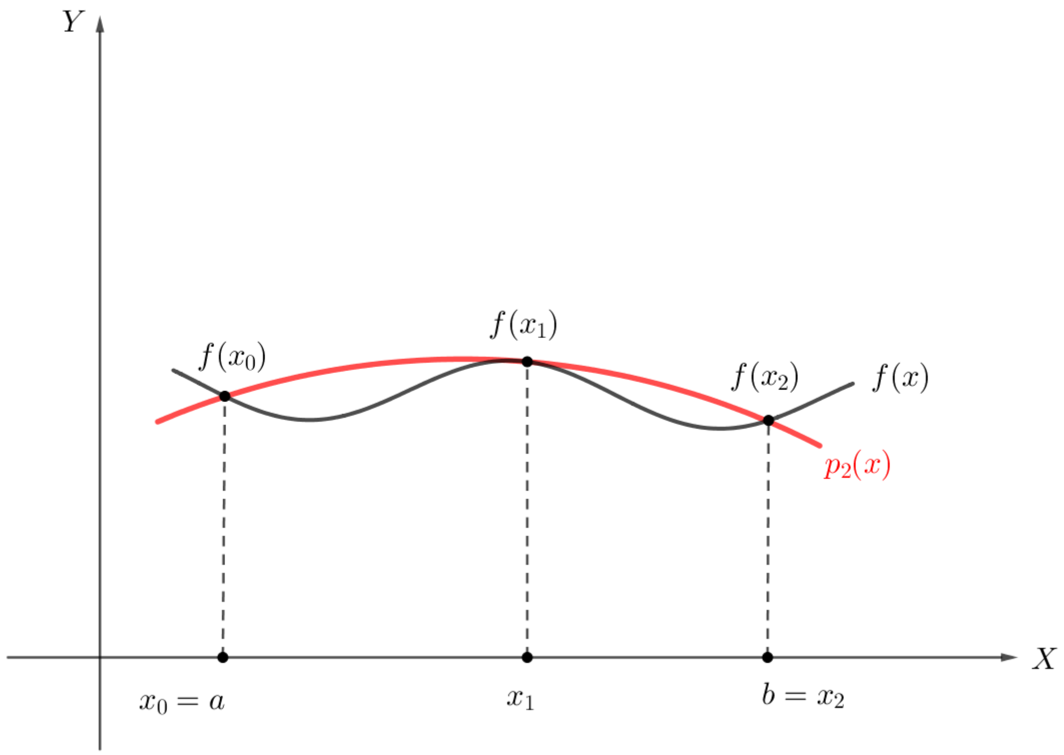
....

....

....

....

5.4 การประมาณค่าปริพันธ์โดยใช้ระเบียบวิธีซิมป์สัน



จากพหุนามลากรางจ์ดีกรีสอง

$$p_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}f(x_1) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}f(x_2)$$

ดังนั้น

$$f(x) \approx p_2(x)$$

หรือ

$$f(x) = p_2(x) + \text{remainder term}$$

จาก

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2}\left[\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}f(x_1) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}f(x_2)\right]dx +$$
$$+\int_{x_0}^{x_2}\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{6}f'''(\xi(x))dx$$

พิจารณาใหม่ โดยใช้อนุกรมเทย์เลอร์

$$f(x) = f(x_1) + f'(x_1)(x-x_1) + \frac{f''(x_1)}{2!}(x-x_1)^2 + \frac{f'''(x_1)}{3!}(x-x_1)^3 + \frac{f^{(4)}(\xi(x))}{4!}(x-x_1)^4$$

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) = \left[f(x_1)x + f'(x_1)\frac{(x-x_1)^2}{2} + f''(x_1)\frac{(x-x_1)^3}{6} + f'''(x_1)\frac{(x-x_1)^3}{24}\right]_{x_0}^{x_2} +$$
$$+\frac{1}{24}\int_{x_0}^{x_2} f^{(4)}(\xi(x))(x-x_1)^4 dx$$

โดยใช้สูตรผลต่างตรงกลาง และโดยใช้ทฤษฎีบทค่าเฉลี่ย จะได้ว่า

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) = \frac{h}{3}\left[f(x_0) - 4f(x_1) + f(x_2)\right] - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi)$$

หรือ

$$\boxed{\int_{x_0}^{x_2} f(x) \approx \frac{h}{3}\left[f(x_0) - 4f(x_1) + f(x_2)\right]}$$

หรือสูตรของซิมป์สันในรูปทั่วไป (Composite Simpson’s Rule) คือ

$$\boxed{\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left[f(a) + 2\sum_{j=1}^{\frac{n}{2}-1} f(x_{2j}) + 4\sum_{j=1}^{\frac{n}{2}} f(x_{2j-1}) + f(b)\right] - \frac{(b-a)}{180} h^4 f^{(4)}(\xi)}$$

เมื่อ $\xi \in (a,b)$

ตัวอย่าง 5.4.1 จงหาประมาณค่าปริพันธ์ $\int_1^5 x^2 dx$ โดยใช้ระเบียบวิธีซิมป์สัน เมื่อกำหนด $n = 4$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

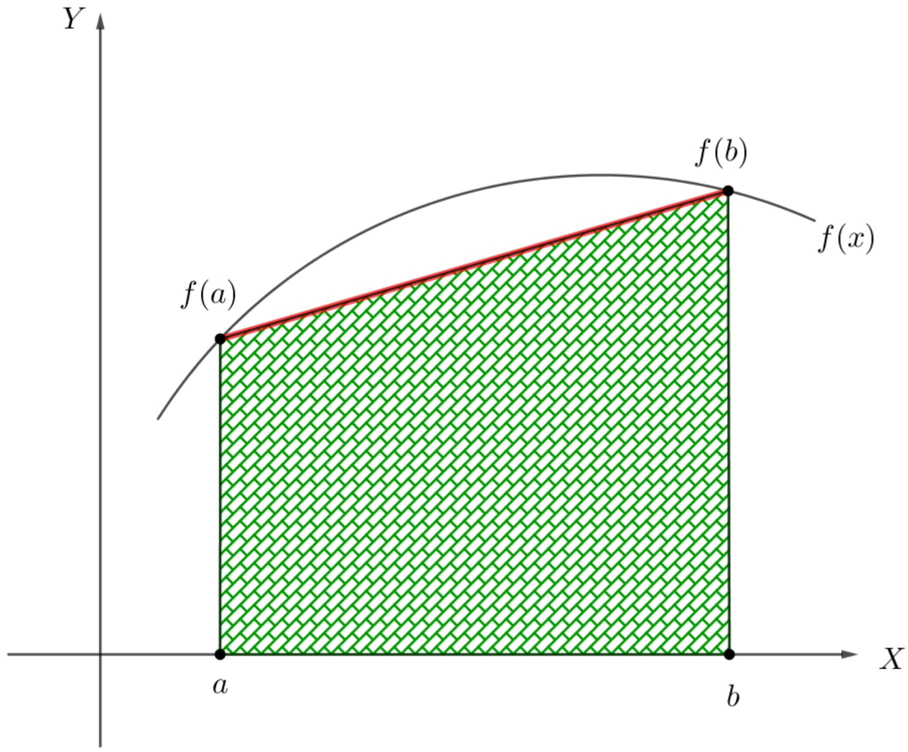
....

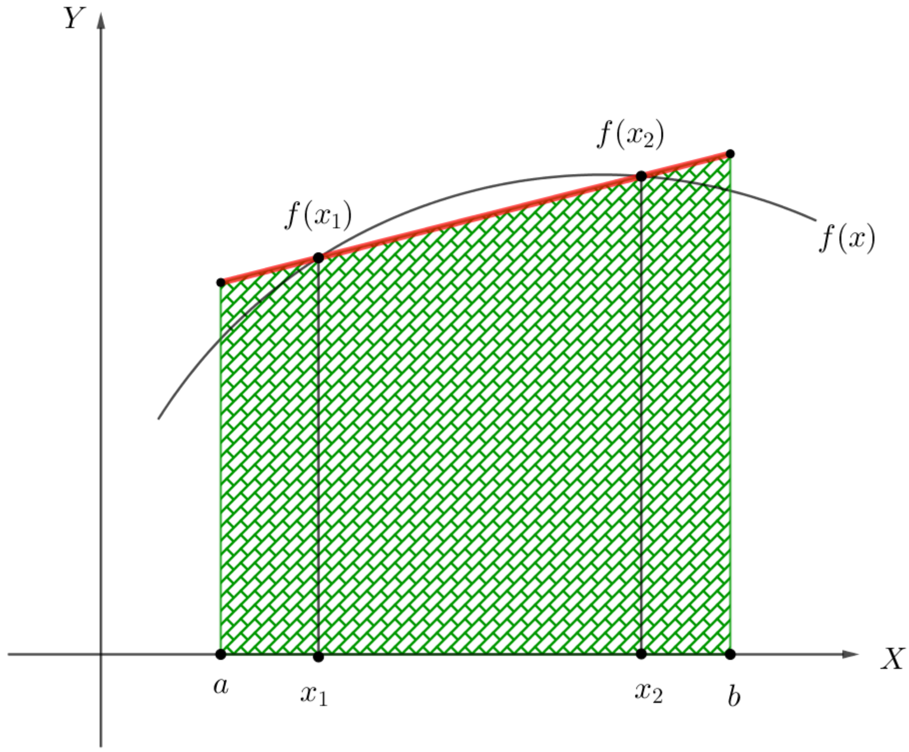
....

....

ตัวอย่าง 5.4.2 จงหาประมาณค่าปริพันธ์ $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$ โดยใช้ระเบียบวิธีซิมป์สัน เมื่อกำหนด $n = 5$

5.5 การประมาณค่าปริพันธ์โดยใช้ระเบียบเกาส์ควอดราเจอร์





สมมติการประมาณค่าปริพันธ์

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} c_i f(x_i)$$

เมื่อ c_i เป็นค่าคงที่

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)$$

ถ้า $n = 2, 2n-1 = 3$

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

เมื่อ a_0, a_1, a_2, a_3 เป็นค่าคงที่

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} f(x) &= \int_{-1}^{1} (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3)dx \\ &= a_0 \int_{-1}^{1} 1dx + a_1 \int_{-1}^{1} xdx + a_2 \int_{-1}^{1} x^2 dx + a_3 \int_{-1}^{1} x^3 dx \\ &= c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)\end{aligned}$$

เงื่อนไขในการหา c_1, c_2, x_1, x_2

$$f(x) = 1,\ f(x) = x,\ f(x) = x^2,\ f(x) = x^3$$

<u>กรณีที่ 1</u> $f(x) = 1$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} 1dx = 2$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) = c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 1$$

ดังนั้นจะได้เงื่อนไขแรกคือ $c_1 + c_2 = 2$ .... (1)

<u>กรณีที่ 2</u> $f(x) = x$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} xdx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1} = 0$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2$$

ดังนั้นจะได้เงื่อนไขแรกคือ $c_1 x_1 + c_2 x_2 = 0$ .... (2)

<u>กรณีที่ 3</u> $f(x) = x^2$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3}$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) = c_1 \cdot x_1^2 + c_2 \cdot x_2^2$$

ดังนั้นจะได้เงื่อนไขแรกคือ $c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 = \frac{2}{3}$ .... (3)

<u>กรณีที่ 4</u> $f(x) = x^3$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{1} = 0$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) = c_1 \cdot x_1^3 + c_2 \cdot x_2^3$$

ดังนั้นจะได้เงื่อนไขแรกคือ $c_1 x_1^3 + c_2 x_2^3 = 0$ .... (4)

แก้ระบบสมการเชิงเส้น

$$c_1 + c_2 = 2 \quad \text{...........} \ (1)$$
$$c_1x_1 + c_2x_2 = 0 \ \text{.......} \ (2)$$
$$c_1x_1^2 + c_2x_2^2 = \frac{2}{3} \ \text{......} \ (3)$$
$$c_1x_1^3 + c_2x_2^3 = 0 \quad \text{.....} \ (4)$$

จะได้

$$c_1 = 1, c_2 = 1, x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}, x_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

ดังนั้น

$$\int_{-1}^{1} f(x) \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)$$
$$= 1\cdot f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + 1\cdot f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

จุดเกาส์สองจุดบนช่วง $(-1,1)$ คือ $-\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\frac{\sqrt{3}}{3}$ หรือ -0.5773 , 0.5773

ถ้าเราเพิ่มจุดเกาส์เพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ จะได้ว่า

n	ค่าถ่วงน้ำหนัก	ตำแหน่งจุดเกาส์
2	$c_1 = 1.0000$	$x_1 = -0.5773$
	$c_2 = 1.0000$	$x_2 = 0.5773$

n	ค่าถ่วงน้ำหนัก	ตำแหน่งจุดเกาส์
3	$c_1 = 0.5556$	$x_1 = -0.7746$
	$c_2 = 0.8889$	$x_2 = 0.0000$
	$c_3 = 0.5556$	$x_3 = 0.7746$

n	ค่าถ่วงน้ำหนัก	ตำแหน่งจุดเกาส์
4	$c_1 = 0.3479$	$x_1 = -0.8611$
	$c_2 = 0.6521$	$x_2 = -0.3400$
	$c_3 = 0.6521$	$x_3 = 0.3400$
	$c_4 = 0.3479$	$x_4 = 0.8611$

n	ค่าถ่วงน้ำหนัก	ตำแหน่งจุดเกาส์
5	$c_1 = 0.2369$	$x_1 = -0.9062$
	$c_2 = 0.4786$	$x_2 = -0.5385$
	$c_3 = 0.5689$	$x_3 = 0.0000$
	$c_4 = 0.0.4786$	$x_4 = 0.5385$
	$c_5 = 0.2369$	$x_5 = 0.9062$

ตัวอย่าง ถ้า $n = 3$

$$\int_{-1}^{1} f(x) \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + c_3 f(x_3)$$
$$= 0.556\cdot f \ \ -0.7746 \ \ + 0.8889\cdot f \ \ 0.0000 \ \ + 0.5556\cdot f(0.7746)$$

การเปลี่ยนช่วงการอินทิเกรต

$$\int_{-1}^{1} f(t)\,dt \Rightarrow \int_{a}^{b} f(x)\,dx$$
$$t = \frac{2x-a-b}{b-a}$$

เขียนในรูปของ x ได้เป็น

$$x = \frac{1}{2}\Big[(b-a)t + a + b\Big]$$
$$t = -1 \to x = a$$
$$t = 1 \to x = b$$

หาอนุพันธ์

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}(b-a)$$

หรือ

$$dx = \frac{1}{2}(b-a)dt$$

ดังนั้น

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{-1}^{1} f\left(\frac{(b-a)t+a+b}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}(b-a)dt$$

ตัวอย่าง 5.5.1 จงหาประมาณค่าปริพันธ์ $\int_{1}^{5} x^2 dx$ โดยใช้ระเบียบเกาส์ควอดราเจอร์ เมื่อใช้จำนวนจุดเกาส์เป็น $2,\ 3,\ 4$ และ 5 ตามลำดับ

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 5.5.2 จงหาประมาณค่าปริพันธ์ $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$ โดยใช้ระเบียบเกาส์ควอดราเจอร์ เมื่อใช้จำนวนจุดเกาส์เป็น $2,\ 3,\ 4$ และ 5 ตามลำดับ

ตัวอย่าง 5.5.3 จงหาประมาณค่าปริพันธ์ $\int_{-3}^{3} x\cos x dx$ โดยใช้ระเบียบเกาส์ควอดราเจอร์ เมื่อใช้จำนวนจุดเกาส์เป็น $2,\ 3,\ 4$ และ 5 ตามลำดับ (ค่าจริงมีค่า 1.9691)