บทที่ 6
ผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

พิจารณาปัญหาค่าเริ่มต้นซึ่งกำหนดโดยสมการเชิงอนุพันธ์และเงื่อนไขค่าเริ่มต้นดังนี้ $\dfrac{dy}{dx} = f(x,y)$ เมื่อ $y(x_0) = y_0$ ในการหาผลเฉลย $y(x)$ ที่สอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์และเงื่อนไขค่าเริ่มต้น ถ้าปัญหานี้มีผลเฉลย ฟังก์ชัน $y = y(x)$ จะเป็นผลเฉลยที่แม่นตรง (exact solution) ของปัญหาดังกล่าว วิธีการหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้นโดยวิธีตรงนั้นได้เคยศึกษามาแล้ว สำหรับวิธีเชิงตัวเลขนั้นจะนำเสนอ วิธีการดังนี้ กำหนดจุด $x_1,\, x_2,\, x_3, \ldots$ และหาค่าของ $y(x_i),\;\; i = 1,\, 2,\, 3, \ldots$ เป็นผลเฉลย กล่าวคือ ผลเฉลยจะเป็นตัวเลขซึ่งเป็นค่าของฟังก์ชันซึ่งค่าที่ได้เป็นเพียงค่าประมาณเท่านั้น ให้ y_i เป็นค่าประมาณของ $y(x_i)$ เมื่อ $i = 1, 2, 3, \ldots$ จากที่กำหนดเงื่อนไขค่าเริ่มต้น จะได้ $y_0 = y(x_0)$ ลำดับถัดไปจะเป็นการหาสูตรที่จะให้ค่าของ $y_1,\, y_2,\, y_3, \ldots$ ซึ่งในบทนี้ จะนำเสนอเพียง 3 ระเบียบวิธีนั่นคือ ระเบียบวิธีของออยเลอร์ และระเบียบวิธีของฮวน (Heun’s method) และระเบียบวิธีของรุงเง-คุตตา (Runge-Kutta method)

6.1 ระเบียบวิธีของออยเลอร์

ระเบียบวิธีของออยเลอร์ (Euler’s method) จัดได้ว่าเป็นวิธีที่ง่ายแก่ความเข้าใจมากที่สุดในการแก้สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ ซึ่งอยู่ในรูปแบบโดยทั่วไปดังนี้

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

หลักการที่ใช้แก้สมการเชิงอนุพันธ์สามัญนี้ เราจะหาค่าผลเฉลยโดยประมาณ y_{i+1} ที่ x_{i+1} จากผลลัพธ์ y_i ซึ่งรู้ค่าที่ x_i โดยใช้ค่าความชันที่ x_i ดังนี้

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

โดย $h = x_{i+1} - x_i$ คือความกว้างช่วง (Step size) ที่ใช้ในการคำนวณ ทำการแทนค่าของความชันที่ x_i แทนค่าสมการ (2) ในสมการ (1) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} &= f(x_i, y_i) \\
\frac{y_{i+1} - y_i}{h} &= f(x_i, y_i) \\
y_{i+1} &= y_i + f(x_i, y_i)h
\end{aligned}$$

ซึ่งหมายความว่า เราสามารถทำการคำนวณโดยเริ่มจากเงื่อนไขค่าเริ่มต้นของ y_i ที่ x_i แล้วคำนวณค่า y_{i+1} ใหม่จากความกว้างช่วง h ที่กำหนดให้ ความเที่ยงตรงของผลเฉลยโดยประมาณนั้นขึ้นอยู่กับค่า h ที่ใช้ในการคำนวณนี้ กล่าวคือ ยิ่งใช้ค่า h มีค่าน้อยเท่าใด ก็จะได้ผลลัพธ์ที่มีความเที่ยงตรงมากยิ่งขึ้นเท่านั้น

ตัวอย่าง 6.1.1 จงใช้ระเบียบวิธีของออยเลอร์ในการแก้สมการ $\dfrac{dy}{dx} = y\cos x$ ในช่วง $0 \le x \le 3$ ซึ่งมีเงื่อนไขเริ่มต้น $y(0) = 1$ โดยใช้ความกว้างช่วง $h = 1,\, h = 0.5,\, h = 0.25$

ตัวอย่าง 6.1.2 จงใช้ระเบียบวิธีของออยเลอร์ในการแก้สมการ $\dfrac{dy}{dx} = 1 + \dfrac{y}{x}$ ในช่วง $1 \leq x \leq 2$ ซึ่งมีเงื่อนไขเริ่มต้น $y(1) = 2$ โดยใช้ความกว้างช่วง $h = 1,\ h = 0.5,\ h = 0.25$

ตัวอย่าง 6.1.3 จงใช้ระเบียบวิธีของออยเลอร์ในการแก้สมการ $y' = x - 2xy$ ในช่วง $0 \leq x \leq 1$ ซึ่งมีเงื่อนไขเริ่มต้น $y(0) = 1$ โดยใช้ความกว้างช่วง $h = 1$, $h = 0.5$, $h = 0.25$

6.2 ระเบียบวิธีของฮวน

ระเบียบวิธีของฮวน (Heun's method) เป็นวิธีที่ดัดแปลงมาจากวิธีของออยเลอร์เพื่อก่อให้เกิดผลลัพธ์จากการแก้สมการเชิงอนุพันธ์สามัญที่มีความเที่ยงตรงมากยิ่งขึ้น ในวิธีของออยเลอร์เราพบว่าผลเฉลยโดยประมาณที่คำนวณได้จะมีความเที่ยงตรงมากขึ้นหากเราลดขนาดช่วงความกว้าง h ลง หรือหากเราสามารถคำนวณค่าความชัน $\left(y' = \dfrac{dy}{dx}\right)$ ให้มีความเที่ยงตรงได้มากยิ่งขึ้น ค่าความชันในวิธีของออยเลอร์นั้นคำนวณที่จุดเริ่มต้นของความกว้างช่วงที่ตำแหน่ง x_i นั่นคือ

$$y_i' = f(x_i, y_i) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

แล้วจึงนำไปใช้ในการคำนวณค่าผลเฉลยโดยประมาณที่ x_{i+1} ดังนี้

$$y_{i+1}^* = y_i + f(x_i,\, y_i)h \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

หากเรานำค่าที่ได้นี้ไปคำนวณหาค่าของความชันที่จุดปลายความกว้างช่วงที่ x_{i+1} เราจะได้

$$y_{i+1}' = f(x_i, y_{i+1}^*) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

หลักการในวิธีของงฮวนก็คือ เราจะนำค่าความชันที่จุดเริ่มต้นและจุดปลายของความกว้างช่วงนี้มาทำการเฉลี่ยกัน ก่อให้เกิดค่าความชันเฉลี่ยที่ใกล้เคียงความเป็นจริงมากขึ้น และหากเราใช้ค่าความชันเฉลี่ยนี้ในการคำนวณตั้งแต่แรกที่จุดเริ่มต้น เราควรจะได้ผลลัพธ์ที่จุดปลายของความกว้างซึ่งมีค่าความเที่ยงตรงมากขึ้นตามไปด้วย จากสมการ (1) และ (3) ค่าความชันเฉลี่ยคือ

$$\overline{y}' = \frac{y_i' + y_{i+1}'}{2} \;=\; \frac{f(x_i,\, y_i) + f(x_{i+1},\, y_{i+1}^*)}{2} \;\ldots\ldots(4)$$

ดังนั้น ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญโดยประมาณที่ตำแหน่ง x_{i+1} คือ

$$y_{i+1} = y_i + \frac{f(x_i,\, y_i) + f(x_{i+1},\, y_{i+1}^*)}{2}h \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

โดยสรุปวิธีของฮวนประกอบด้วย 2 ขั้นตอนคือ ขั้นตอนแรกเป็นการทำนายค่าโดยประมาณที่ x_{i+1} ดังแสดงในสมการรที่ (2) ก่อให้เกิดผลลัพธ์ y_{i+1}^* ที่เรียกว่าตัวทำนาย (predictor) ผลลัพธ์ที่ได้นี้จะนำไปใช้ในการคำนวณค่าความชันที่ x_{i+1} ค่าความชันที่ได้นี้จะนำไปหาค่าความชันเฉลี่ยในขั้นตอนที่สองเพื่อใช้ในการคำนวณผลลัพธ์ y_{i+1} ที่เรียกว่าตัวแก้ (corrector) ซึ่งจะมีความเที่ยงตรงสูงขึ้น

ดังนั้น อาจกล่าวได้ว่าว่าวิธีของฮวนเป็นวิธีที่ประกอบไปด้วยการคำนวณตัวทำนายและตัวแก้ (predictor – corrector method) ที่มีขั้นตอนดังนี้

ตัวทำนาย $\Rightarrow$ $\quad y_{i+1}^* = y_i + f(x_i,\, y_i)h$

ตัวแก้ $\Rightarrow$ $\quad y_{i+1} = y_i + \dfrac{f(x_i,\, y_i) + f(x_{i+1},\, y_{i+1}^*)}{2}h$

ตัวอย่าง 6.2.1 จงใช้ระเบียบวิธีของฮวนในการแก้สมการ $\dfrac{dy}{dx} = y\cos x$ ในช่วง $0 \le x \le 3$ ซึ่งมีเงื่อนไขเริ่มต้น $y(0) = 1$ โดยใช้ความกว้างช่วง $h = 1,\ h = 0.5,\ h = 0.25$

ตัวอย่าง 6.2.2 จงใช้ระเบียบวิธีของออยเลอร์ในการแก้สมการ $\dfrac{dy}{dx} = 1 + \dfrac{y}{x}$ ในช่วง $1 \le x \le 2$ ซึ่งมีเงื่อนไขเริ่มต้น $y(1) = 2$ โดยใช้ความกว้างช่วง $h = 1$, $h = 0.5$, $h = 0.25$

ตัวอย่าง 6.2.3 จงใช้ระเบียบวิธีของออยเลอร์ในการแก้สมการ $y' = x - 2xy$ ในช่วง $0 \leq x \leq 1$ ซึ่งมีเงื่อนไขเริ่มต้น $y(0) = 1$ โดยใช้ความกว้างช่วง $h = 1,\ h = 0.5,\ h = 0.25$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

6.3 ระเบียบวิธีของออยเลอร์ที่ปรับปรุงแล้ว

ระเบียบวิธีของออยเลอร์ที่ปรับปรุงแล้ว (modified Euler's method) เป็นวิธีที่เกิดขึ้นจากความเข้าใจในทำนองเดียวกันกับวิธีของฮวน กล่าวคือผลลัพธ์ที่คำนวณได้มีความเที่ยงตรงมากขึ้นหากเราสามารถหาค่าความชันที่นำมาใช้ในการคำนวณได้แม่นยำมากยิ่งขึ้น ดังนั้น ในวิธีของออยเลอร์ที่ปรับปรุงแล้วนี้จะหาค่าความชันที่จุดกึ่งกลางของขนาดช่วงความกว้าง h แล้วจะใช้ค่าความชันนี้เพื่อการคำนวณหาผลลัพธ์ของช่วงความกว้างที่ต้องการ

เราจะเริ่มจากการใช้วิธีออยเลอร์เดิมในการคำนวณผลลัพธ์ที่จุดกึ่งกลางของความกว้างช่วง ดังนี้

$$y_{i+\frac{1}{2}} = y_i + f(x_i,\, y_i)\frac{h}{2} \quad \text{......................}(1)$$

จากนั้นจึงคำนวณหาค่าความชันที่จุดกึ่งกลางของความกว้างช่วงนี้ ซึ่งคือ

$$y'_{i+\frac{1}{2}} = f(x_{i+\frac{1}{2}},\, y_{i+\frac{1}{2}}) \quad \text{.........................}(2)$$

แล้วจึงใช้ค่าความชันที่จุดกึ่งกลางของความกว้างช่วงที่คำนวณได้เพื่อหาผลลัพธ์ที่จุดปลายของ

$$y_{i+1} = y_i + f\left(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}}\right)\frac{h}{2} \quad \text{...........................}(3)$$

ตัวอย่าง 6.3.1 จงใช้ระเบียบวิธีของฮวนในการแก้สมการ $\dfrac{dy}{dx} = y\cos x$ ในช่วง $0 \le x \le 3$ ซึ่งมีเงื่อนไขเริ่มต้น $y(0) = 1$ โดยใช้ความกว้างช่วง $h = 1,\, h = 0.5,\, h = 0.25$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 6.3.2 จงใช้ระเบียบวิธีของออยเลอร์ในการแก้สมการ $\dfrac{dy}{dx} = 1 + \dfrac{y}{x}$ ในช่วง $1 \leq x \leq 2$ ซึ่งมีเงื่อนไขเริ่มต้น $y(1) = 2$ โดยใช้ความกว้างช่วง $h = 1,\ h = 0.5,\ h = 0.25$

ตัวอย่าง 6.3.3 จงใช้ระเบียบวิธีของออยเลอร์ในการแก้สมการ $y' = x - 2xy$ ในช่วง $0 \le x \le 1$ ซึ่งมีเงื่อนไขเริ่มต้น $y(0) = 1$ โดยใช้ความกว้างช่วง $h = 1,\ h = 0.5,\ h = 0.25$