บทที่ 1

จำนวนจริงและจำนวนเชิงซ้อน

เมื่อกลาวถึงจำนวนจริงนักศึกษาคงทราบคุณสมบัติเบื้องตนของจำนวนจริงเกี่ยวกับการบวก ลบ คูณ หาร การยกกำลัง และหารากอันดับที่ n ในวิชาคณิตศาสตรระดับตนมาดีแลว ในบทนี้จะกลาวถึงคุณสมบัติบางประการของจำนวนจริง เพื่อเปนพื้นฐานในการศึกษา ระบบจำนวนเชิงซอนจำนวนจริง

1. จำนวนจริง

สมบัติพื้นฐานของจำนวนจริงมีอะไรบ้าง

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

2. จำนวนตรรกยะและจำนวนอตรรกยะ

บทนิยาม จำนวนจริง a จะเป็นจำนวนตรรกยะ ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม m และ n, $n \neq 0$ โดยที่ $a = \frac{m}{n}$

บทนิยาม เรียกจำนวนจริงที่ไม่ใช่จำนวนตรรกยะว่าจำนวนอตรรกยะ

ทฤษฎีบท กำหนดให้ a เป็นจำนวนเต็ม ถ้า a^2 เป็นจำนวนคู่ จะได้ว่า a เป็นจำนวนคู่

ทฤษฎีบท ถ้ามีจำนวนจริง a ซึ่ง $a^2 = 2$ จะได้ว่า a เป็นจำนวนอตรรกยะ

3. จำนวนเต็ม

ทฤษฎีบท วิธีพิสูจน์โดยการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

สำหรับจำนวนเต็มบวก n แต่ละตัว $P\ n$ เป็นประพจน์

ถ้า (1) $P\ 1$ เป็นจริง

และ (2) สำหรับจำนวนเต็มบวก k ทุกตัว ถ้า $P\ k$ เป็นจริง แล้ว $P\ k+1$ เป็นจริง

จะสรุปได้ว่า $P\ n$ เป็นจริงสำหรับจำนวนเต็มบวก n ทุกตัว

ตัวอย่าง สำหรับจำนวนเต็มบวก n ทุกตัว จงพิสูจน์ว่า $1+3+5+...+(2n+1)=n^2$

ตัวอย่าง สำหรับจำนวนเต็มบวก n ทุกตัว จงพิสูจน์ว่า

$$1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

ทฤษฎีบท สำหรับจำนวนเต็มบวก n แต่ละตัว $P\ n$ เป็นประพจน์ ให้ k เป็นจำนวนเต็มบวกที่กำหนดให้

ถ้า (1) $P\ k$ เป็นจริง

และ (2) สำหรับจำนวนเต็มบวก n ทุกตัว ที่ $n \geq k$ ถ้า $P\ n$ เป็นจริงแล้ว $P\ n+1$ เป็นจริงด้วย

จะสรุปได้ว่า $P\ n$ เป็นจริงสำหรับจำนวนเต็มบวก n ทุกตัว ซึ่ง $n \geq k$

ตัวอย่าง ให้ a เป็นจำนวนจริงบวก จงพิสูจน์ว่า $a^{n} > 0$ สำหรับจำนวนเต็มบวก n ทุกตัว

....

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง ถ้า x เป็นจำนวนจริงซึ่ง $x > -1$ สำหรับจำนวนเต็มบวก $x \neq 0$ จะได้ว่า $1+x^{\ n} > 1+nx$ สำหรับจำนวนเต็มบวก n ทุกตัวที่ $n \geq 2$

....

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง จงพิสูจน์ว่า $n^{n} > n!$ สำหรับจำนวนเต็มบวก n ทุกตัวที่ $n \geq 2$

....

....

....

....

....

....

....

4. การเขียนจำนวนจริงในรูปทศนิยม

จำนวนจริง x ใด ๆ สามารถเขียนในรูปทศนิยม $x = b.a_1a_2a_3...a_n...$ เมื่อ b เป็นจำนวนเต็ม และ $a_i \in \ 0,1,2,3,...,9$ เมื่อ n, $i = 1,2,3,...,n,...$ โดยที่ $b.a_1a_2a_3...a_n...$ เป็นสัญลักษณ์ย่อของอนุกรมอนันต์ ต่อไปนี้ $b + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} + \cdots$

....

....

....

....

....

....

....

....

5. อสมการ

พิจารณาอสมการ

$x-a_1 \quad x-a_2 \ ... \ x-a_{n-1} \quad x-a_n \quad > 0$

$x-a_1 \quad x-a_2 \ ... \ x-a_{n-1} \quad x-a_n \quad < 0$

$x-a_1 \quad x-a_2 \ ... \ x-a_{n-1} \quad x-a_n \quad \le 0$

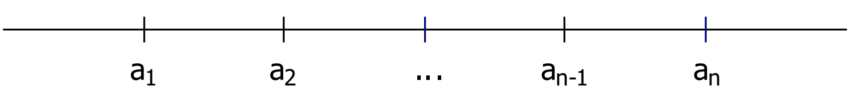
$x-a_1 \quad x-a_2 \ ... \ x-a_{n-1} \quad x-a_n \quad \ge 0$

โดยที่ $a_1 < a_2 < ... < \mathrm{a}_n$

ขั้นแรกหารากของสมการ $x-a_1 \quad x-a_2 \ ... \ x-a_{n-1} \quad x-a_n \quad = 0$

จะได้ว่ารากของสมการคือ $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$

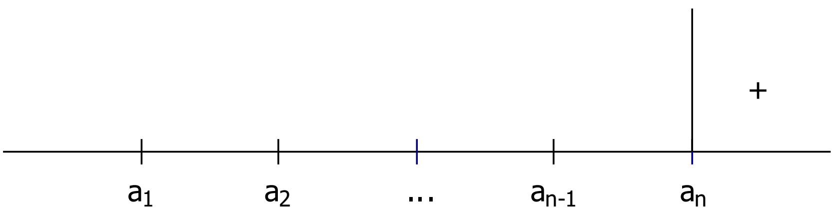
เขียนรากทั้งหมดลงบนเส้นจำนวน



$a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n$ ก่อให้เกิด $n+1$ ช่วงดังนี้ $-\infty, a_1$, a_1, a_2 ,..., a_{n-1}, a_n , a_n, ∞

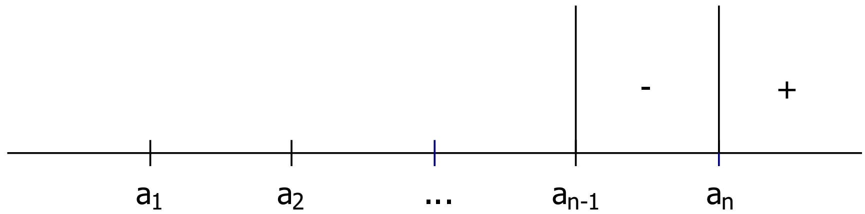
เนื่องจาก ถ้า $x \in \ a_n, \infty$ จะได้ว่า $x > a_n$, $x > a_{n-1}, ..., x > a_2, x > a_1$

ดังนั้น $x-a_1 \quad x-a_2 \ ... \ x-a_{n-1} \quad x-a_n \quad > 0$



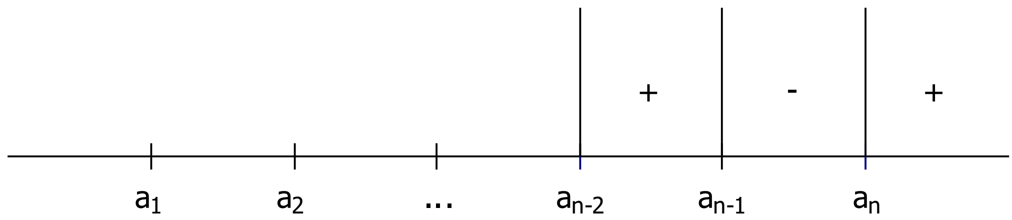
เนื่องจาก ถ้า $x \in \ a_{n-1}, a_n$ จะได้ว่า $x < a_n$, $x > a_{n-1}, \ldots, x > a_2 , x > a_1$

ดังนั้น $x - a_1 \quad x - a_2 \ \ldots \ x - a_{n-1} \quad x - a_n \ < 0$



เนื่องจาก ถ้า $x \in \ a_{n-2}, a_{n-1}$ จะได้ว่า $x < a_n$, $x < a_{n-1}, x > a_{n-2}, \ldots, x > a_2 , x > a_1$

ดังนั้น $x - a_1 \quad x - a_2 \ \ldots \ x - a_{n-2} \quad x - a_{n-1} \quad x - a_n \ > 0$



ตัวอย่าง จงหาเซตคำตอบของอสมการ $x - 1 \quad x - 4 \ > 0$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง จงหาเซตคำตอบของอสมการ $x \quad x - 2 \quad x - 1 \quad x + 3 \ \leq 0$

....

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง จงหาเซตคำตอบของอสมการ $-3x+1\quad x-2\ <0$

ตัวอย่าง จงหาเซตคำตอบของอสมการ $x-1\quad x-2^{\ 4}\ x-3\ <0$

ตัวอย่าง จงหาเซตคำตอบของอสมการ $x-1\quad x-2^{\ 5}\ x-3\ >0$

6. จำนวนเชิงซ้อน

บทนิยาม จำนวนเชิงซ้อนคือจำนวนซึ่งเขียนอยู่ในรูปคู่อันดับ a,b โดย a และ b เป็นจำนวนจริง และมีสมบัติดังนี้

1. $a_1,b_1 = a_2,b_2$ ก็ต่อเมื่อ $a_1 = a_2$ และ $b_1 = b_2$
2. $a_1,b_1 + a_2,b_2 = a_1 + a_2, b_1 + b_2$
3. $a_1,b_1 \times a_2,b_2 = a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + a_2b_1$

บทนิยาม ถ้า $z = a + bi$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน คอนจุเกต (conjugate) ของ z คือ จำนวนเชิงซ้อน $\overline{z} = a - bi$

จำนวนเชิงซ้อนในรูปพิกัดเชิงขั้ว

จำนวนเชิงซ้อนในรูปพิกัดของระบบแกนมุมฉาก สามารถเขียนในรูปพิกัดของระบบแกนเชิงขั้ว

ถ้า r,θ เป็นพิกัดเชิงขั้วของจำนวนเชิงซ้อน $z = a + bi$

จะได้ว่า $z = a + bi = r\ \cos\theta + i\sin\theta$

เรียก θ ว่าอาร์กิวเมนต์ (argument) หรือแอมพลิจูด (amplitude) ของ z เขียนแทนด้วย $\arg z$

ถ้า θ อยู่ในช่วง $-\pi,\pi]$ เรียก θ ว่า อาร์กิวเมนต์หลัก (principal argument) และเขียนแทนด้วย $A\,\mathrm{rg}\, z$

ตัวอย่าง จงหา r และ $\mathrm{Arg}z$ ของจำนวนตอไปนี้

1. $z = 3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

....

....

....

2. $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

....

....

....

3. $z = 5\left(-\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

....

....

....

4. $z = 7\left(\sin\frac{\pi}{3} + i\cos\frac{\pi}{3}\right)$

....

....

....

5. $z = -5\left(\sin\frac{\pi}{3} + i\cos\frac{\pi}{3}\right)$

....

....

....

6. $z = 4\left(-\sin\frac{\pi}{6} + i\cos\frac{\pi}{6}\right)$

....

....

....

ตัวอย่าง จงหาเปลี่ยนจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปเชิงขั้ว

1. $z = 5i$

....

....

....

2. $z = -3$

....

....

....

3. $z = 2 + 2i$

....

....

....

4. $z = -1 + \sqrt{3}\,i$

....

....

....

ถ้า A เป็นจำนวนเชิงซ้อน และ n เป็นจำนวนเต็มบวก รากของสมการ $z^n = A$ คือ

$$z_k = r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\left(\frac{2k\pi}{n}+\frac{\theta}{n}\right)+i\sin\left(\frac{2k\pi}{n}+\frac{\theta}{n}\right)\right]$$ เมื่อ $k = 0,1,2,3,\ldots,n-1$

ตัวอย่าง จงหารากของสมการ $z^2 = -2-2\sqrt{3}\,i$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง จงหารากของสมการ $z^3 = i$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....