บทที่ 3
ค่ารากของสมการพีชคณิต

3.1 สมการเชิงพีชคณิต (Algebraic Equation)

กำหนดให้ $f(x)$ เป็นพหุนามใน x ที่มีสัมประสิทธิ์ของพจน์ต่าง ๆ เป็นจำนวนจริงหรือจำนวนเชิงซ้อนและมีดีกรี $n \geq 1$ เราทราบว่า $f(x)=0$ เป็นสมการพหุนาม ซึ่ง ณ ที่นี้จะเรียกว่า $f(x)=0$ เป็นสมการเชิงพีชคณิตดีกรี n เช่น

ในกรณีที่ $n=1$ สมการ $f(x)=0$ จะอยู่ในรูป $a_0 + a_1x = 0$ เรียกว่า สมการเชิงเส้น (Linear equation)

ในกรณีที่ $n=2$ สมการ $f(x)=0$ จะอยู่ในรูป $a_0 + a_1x + a_2x^2 = 0$ เรียกว่า สมการกำลังสอง (Quadratic equation)

ในกรณีที่ $n=3$ สมการ $f(x)=0$ จะอยู่ในรูป $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 = 0$ เรียกว่า สมการกำลังสาม (Cubic equation)

ในกรณีที่ $n=4$ สมการ $f(x)=0$ จะอยู่ในรูป $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 = 0$ เรียกว่า สมการกำลังสี่ (Biquadratic equation)

c จะเรียกว่า เป็นรากของสมการ $f(x)=0$ ก็ต่อเมื่อ $f(c)=0$ จากความหมายของค่าราก ของสมการพหุนาม เราอาจพิจารณาหาค่ารากของสมการ $f(x)=0$ ได้โดยอาศัยกระบวนวิธีคิด ดังต่อไปนี้

1. ถ้า c_1 เป็นค่ารากของสมการ $f(x)=0$ จะได้ว่า $f(c_1)=0$ โดยทฤษฎีเศษเหลือ จะได้ว่า $(x-c_1) \mid f(x)$ ดังนั้นจะมีพหุนาม $f_1(x)$ ที่มีดีกรี $n-1$ โดยที่

$$f(x) = (x-c_1)f_1(x)$$

2. ถ้า c_2 เป็นค่ารากของสมการ $f(x)=0$ และ $c_1 \neq c_2$ จะได้ว่า $f(c_2)=0$ และ $f_1(c_2)=0$ (เพราะ $c_2 - c_1 \neq 0$) ดังนั้นจะมีพหุนาม $f_2(x)$ ที่มีดีกรี $n-2$ โดยที่

$$f(x) = (x-c_1)(x-c_2)f_2(x)$$

3. ถ้า c_3 เป็นค่ารากของสมการ $f(x)=0$ โดยที่ $c_3 \neq c_2$ และ $c_3 \neq c_1$ โดยเหตุผลเช่นเดียวกันกับข้อ 1. และ 2. มีพหุนาม $f_3(x)$ ที่มีดีกรี $n-3$ โดยที่

$$f(x) = (x-c_1)(x-c_2)(x-c_3)f_3(x)$$

โดยกระบวนวิธีคิดเช่นเดียวกับ ข้อ 1., 2. และ 3. กระทำต่อเนื่องกันไปเรื่อย ๆ จะได้ว่า $f(x) = (x-c_1)(x-c_2)(x-c_3)\ldots(x-c_n) = 0$ ซึ่งสรุปได้ว่า $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n$ เป็นค่ารากของสมการ $f(x)=0$ ทั้งหมด n ค่าที่ต่างกัน

บทนิยาม 3.1.1 กำหนดให้ $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1x + a_0 = 0$ เป็นสมการพหุนามใน x ดีกรี n และ $f(x) = (x-c_1)f_1(x)$ เมื่อ $f_1(x)$ เป็นพหุนามใน x ดีกรี $n-1$ สมการ $f_1(x)=0$ เรียกว่า สมการลดกำลังของ $f(x)=0$

ตัวอย่าง 3.1.1 จงหาค่ารากของสมการ $x^3 + 4x^2 - 47x - 210 = 0$

ตัวอย่าง 3.1.2 จงหาสมการพหุนามดีกรีสามที่มีค่ารากเป็น $1, -2$ และ 3

3.2 ทฤษฎีพื้นฐานทางพีชคณิต

บทนิยาม 3.2.1 กำหนดให้ $f(x)$ เป็นพหุนามใน x ดีกรี n และ $f(x)=(x-c)^m g(x)$ เมื่อ $g(x)$ เป็นพหุนามใน x ถ้า c ไม่ใช่ค่ารากของ $g(x)=0$ แล้ว เรียกว่า c เป็นค่ารากซ้ำที่ n ของ $f(x)=0$ และสมการ $f(x)=0$ มี c เป็นค่ารากซ้ำ m ตัว

หมายเหตุ จากบทนิยาม 3.2.1

ในกรณีที่ $m=1$; c เรียกว่า รากเชิงเดียว (Simple root) ของ $f(x)=0$

ในกรณีที่ $m=2$; c เรียกว่า รากซ้ำที่สอง (Double root) ของ $f(x)=0$

ในกรณีที่ $m=3$; c เรียกว่า รากซ้ำที่สาม (Triple root) ของ $f(x)=0$

ในกรณีที่ $m=4$; c เรียกว่า รากซ้ำที่สี่ (Quadruple root) ของ $f(x)=0$

ในกรณีที่ $m=p$; c เรียกว่า รากซ้ำที่ p ของ $f(x)=0$

ตัวอย่าง 3.2.1 ให้ $x^2+2x+1=0$ จงหาค่ารากของสมการ

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 3.2.2 ให้ $x^4-3x^3+3x^2-x=0$ จงหาค่ารากของสมการ

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ทฤษฎีบท 3.2.1 ถ้า c เป็นค่ารากซ้ำที่ m ของสมการ $f(x)=0$ แล้ว c จะเป็นค่ารากซ้ำที่ $m-1$ ของสมการ $f'(x)=0$ ด้วย เมื่อ $f(x)$ เป็นพหุนามใด ๆ

ตัวอย่าง 3.2.3 ให้ $f(x)=x^2+2x+1=0$

ตัวอย่าง 3.2.4 ให้ $f(x)=\left(x-1\right)^3=0$

ทฤษฎีบท 3.2.2 กำหนดให้ $f(x) = 0$ เป็นสมการพหุนามใน x ดีกรี n ถ้า c เป็นค่ารากซ้ำที่ m ของสมการ $f(x) = 0$ แล้ว $f(c) = f'(x) = f''(x) = \ldots = f^{m-1}(x) = 0$

ตัวอย่าง 3.2.5 กำหนดให้ $f(x) = x^4 - 4x + 3$ จงพิจารณาว่า 1 เป็นค่ารากซ้ำที่เท่าไร ของสมการ $f(x) = 0$

ตัวอย่าง 3.2.6 กำหนดให้ $f(x) = x^4 + 10x^3 + 24x^2 - 32x - 128$ จงแก้สมการ $f(x) = 0$ โดยการพิจารณาค่ารากซ้ำ

3.3 ค่ารากจินตภาพของสมการพหุนามที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง

ทฤษฎีบท 3.3.1 ถ้า $f(x)=0$ เป็นสมการพหุนามใน x ดีกรี n ที่มีสัมประสิทธิ์ทุกเทอมเป็นจำนวนจริง และมี $a+bi$ เป็นค่ารากซ้ำที่ k แล้ว $a-bi$ จะเป็นค่ารากซ้ำที่ k ของสมการ $f(x)=0$ ด้วย

ถ้า $a+bi$ เป็นค่ารากหนึ่งของ สมการ $f(x)=0$ แล้ว $a-bi$ จะเป็นค่ารากของสมการ $f(x)=0$ ด้วย

ถ้าดีกรีของ $f(x)$ เป็นจำนวนจริงบวกคี่ ค่ารากของสมการ $f(x)=0$ จะมีอย่างน้อยหนึ่งค่าที่เป็นจำนวนจริง

ถ้าดีกรีของ $f(x)$ เป็นจำนวนจริงบวกคู่และสมการ $f(x)=0$ มีค่ารากเป็นจำนวนจินตภาพ ค่ารากของสมการ $f(x)=0$ จะเป็นจำนวนจินตภาพทั้งหมด

ตัวอย่าง 3.3.1 กำหนดให้ $f(x)=x^3+1=0$ และ $f(x)=x^4+1=0$

....

....

....

....

ทฤษฎีบท 3.3.2 ถ้า $f(x)=0$ เป็นสมการพหุนามใน x ดีกรี n มีสัมประสิทธิ์แต่ละพจน์เป็นจำนวนตรรกยะ และมี $a+\sqrt{b}$ เป็นค่ารากหนึ่งของสมการ $f(x)=0$ โดยที่ a เป็นจำนวนตรรกยะ และ $\sqrt{b}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ แล้ว $a-\sqrt{b}$ จะเป็นค่ารากหนึ่งของสมการ $f(x)=0$ ด้วย

ตัวอย่าง 3.3.2 จงแก้สมการ $x^4-2x^3+6x^2+22x+13=0$ เมื่อ มีค่ารากหนึ่งเป็น $2+3i$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 3.3.3 จงแก้สมการ $x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 4x + 4 = 0$ เมื่อมีค่ารากหนึ่งเป็น $1+i$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

3.4 ความสัมพันธ์ระหว่างค่ารากและสัมประสิทธิ์ของพจน์ต่าง ๆ ในสมการ

ก. $(x+b_1)(x+b_2) = x^2 + (b_1 + b_2)x + b_1b_2$

ข. $(x+b_1)(x+b_2)(x+b_3) = x^3 + (b_1 + b_2 + b_3)x^2 + (b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3)x + b_1b_2b_3$

ค. $(x+b_1)(x+b_2)(x+b_3)(x+b_4) = x^4 + (b_1 + b_2 + b_3 + b_4)x^3$

$$+(b_1b_2 + b_1b_3 + b_1b_4 + b_2b_3 + b_2b_4 + b_3b_4)x^2$$

$$+(b_1b_2b_3 + b_1b_2b_4 + b_1b_3b_4 + b_2b_3b_4)x + b_1b_2b_3b_4$$

กำหนดให้ $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ และมี $c_1, c_2, \ldots, c_n$ เป็นค่ารากของสมการ $f(x) = 0$ หรือ $(x-c_1)(x-c_2)\ldots(x-c_n) = 0$

จะได้ว่า $(x-c_1)(x-c_2)\ldots(x-c_n) = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n \qquad (1)$

เนื่องจาก $(x-c_1)(x-c_2)\ldots(x-c_n) = x^n - S_1x^{n-1} + S_2x^{n-2} + \ldots + (-1)^nS_n \qquad (2)$

เมื่อ $S_1 = c_1 + c_2 + \ldots + c_n$

$S_2 =$ ผลบวกของผลคูณครั้งละ 2 ค่าราก

$S_3 =$ ผลบวกของผลคูณครั้งละ 3 ค่าราก

$\vdots$

$S_i =$ ผลบวกของผลคูณครั้งละ i ค่าราก

$\vdots$

$S_n = c_1 \cdot c_2 \cdot c_3 \cdot c_4 \cdots c_n$

จาก (1) และ (2) จะได้ว่า

$$S_1 = -a_1$$
$$S_2 = a_2$$
$$S_3 = -a_3$$
$$\vdots$$
$$S_i = (-1)^i a_i$$
$$\vdots$$
$$S_n = (-1)^n a_n$$

ในกรณีสมการ $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n = 0$ และ $a_0 \neq 1$ แล้ว $c_1, c_2, \ldots, c_n$ เป็นค่ารากของสมการ $f(x) = 0$ หรือสมการ $a_0(x - c_1)(x - c_2)\ldots(x - c_n) = 0$ จะได้ว่า

$$a_0 S_1 = -a_1 \rightarrow S_1 = -\frac{a_1}{a_0}$$
$$a_0 S_2 = a_2 \rightarrow S_2 = -\frac{a_2}{a_0}$$
$$\vdots$$
$$a_0 S_n = (-1)^n a_n \rightarrow S_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_0}$$

ตัวอย่าง 3.4.1 จงแก้สมการ $3x^3 - 16x^2 + 23x - 6 = 0$ เมื่อผลคูณของค่าราก 2 ค่ามีค่าเท่ากับ 1 เมื่อ a, b และ c เป็นค่ารากของสมการ

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 3.4.2 จงแก้สมการ $2x^3 - x^2 - 18x + 9 = 0$; $a + b = 0$ เมื่อ a, b และ c เป็นค่ารากของสมการ

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

ตัวอย่าง 3.4.3 จงแก้สมการ $x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$; $a + b = 1$ เมื่อ a, b, c และ d เป็นค่ารากของสมการ

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

3.5 การค้นหาค่ารากซ้ำของสมการพหุนาม

การค้นหาค่ารากซ้ำของสมการพหุนาม สามารถดำเนินการค้นหาได้โดยการดำเนินการทางพีชคณิตดังนี้

1. กำหนดให้ $f(x)=0$ เป็นสมการพหุนามใน x ดีกรี n และ $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_k$ เป็นค่ารากซ้ำที่ $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_k$ ของ $f(x)=0$ ตามลำดับ โดยที่ $m_i > 1$ เมื่อ $i = 1,2,3,\ldots,k$ และ $m_1 + m_2 + \ldots + m_k = n$

จากทฤษฎีบทที่ผ่านมา เราทราบว่าค่ารากซ้ำที่ m ของสมการ $f(x)=0$ จะเป็นค่ารากซ้ำที่ $m-1$ ของ $f'(x)=0$ ด้วย (เมื่อ $m>1$) ซึ่งจะเห็นได้ชัดว่า $(x-c_1)^{m_1-1}(x-c_2)^{m_2-1}(x-c_3)^{m_3-1}\ldots(x-c_k)^{m_k-1}$ หาร $f(x)$ และ $f'(x)$ ลงตัว ซึ่งถ้าให้ $D(x)$ เป็นตัวหารร่วมมากของ $f(x)$ และ $f'(x)$ แล้วจะได้ว่า

$D(x) = (x-c_1)^{m_1-1}(x-c_2)^{m_2-1}(x-c_3)^{m_3-1}\ldots(x-c_k)^{m_k-1}$

2. กำหนดให้ $f(x)=0$ เป็นพหุนามใน x ดีกรี n และ $f(x)=0$ มีทั้งค่ารากเชิงเดียว ค่ารากซ้ำที่ k เมื่อ $k = 2,\ 3,\ 4, \ldots, m$ ปนกันอยู่ เราสามารถใช้หลักการเช่นเดียวกับข้อ 1. พิจารณาค้นหาค่ารากซ้ำได้ดังนี้

สมมุติให้ X_1 เป็นผลคูณของตัวประกอบเชิงเส้นของ $f(x)$

X_k เป็นผลคูณของตัวประกอบที่สอดคล้องกับค่ารากซ้ำที่ k ของ $f(x)=0$ เมื่อ $k = 2,3,\ldots,m$ และ X_c เป็นค่าคงที่ เมื่อ $f(x)=0$ ไม่มีค่ารากซ้ำ

จะได้ว่า $X_1 X_2^2 X_3^3 \ldots X_m^m$ เป็นตัวประกอบของ $f(x)$ และจะแตกต่างกับ $f(x)$ เฉพาะตัวสัมประสิทธิ์ในเทอม x^n เท่านั้น แล้วจะได้ว่า

ก. $D = X_2 X_3^2 X_4^3 \ldots X_m^{m-1}$ เป็นตัวหารร่วมมากของ $f(x)$ กับ $f'(x)$

ข. $D_1 = X_3 X_4^2 X_5^3 \ldots X_m^{m-2}$ เป็นตัวหารร่วมมากของ D กับ D'

ค. $D_2 = X_4 X_5^2 X_6^3 \ldots X_m^{m-3}$ เป็นตัวหารร่วมมากของ D_1 กับ D_1'

โดยการพิจารณาเช่นนี้ต่อไปเรื่อย ๆ เมื่อจัดลำดับของตัวหารร่วมมากดังกล่าวจะได้ดังนี้ $D, D_1, D_2, \ldots, D_{m-1}$ ซึ่ง D_{m-1} จะเป็นค่าคงที่ ดังนั้นจะได้ว่า

$$f_1(x) = \frac{f(x)}{D} = X_1 X_2 \ldots X_m$$

$$f_2(x) = \frac{D}{D_1} = X_2 X_3 \ldots X_m$$

$$f_3(x) = \frac{D_1}{D_2} = X_3 X_4 \ldots X_m$$

$$\vdots$$

$$f_m(x) = \frac{D_{m-2}}{D_{m-1}} = X_m$$

จะเห็นว่า $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = X_1$, $\dfrac{f_2(x)}{f_3(x)} = X_2$, $\dfrac{f_3(x)}{f_4(x)} = X_3$, $\ldots$, $\dfrac{f_{m-1}(x)}{f_m(x)} = X_{m-1}$ และ $f_m(x) = X_m$

ตัวอย่าง 3.5.1 จงพิจารณาหาค่ารากซ้ำของสมการ $f(x) = x^5 - x^4 - 2x^3 + 2x^2 + x - 1$

ตัวอย่าง 5.2 จงพิจารณาหาค่ารากซ้ำของ $f(x) = x^5 - x^3 - 4x^2 - 3x - 2 = 0$

ตัวอย่าง 5.2 จงพิจารณาหาค่ารากซ้ำของ $f(x) = x^5 - x^3 - 4x^2 - 3x - 2 = 0$