บทที่ 5

สมการกำลังสอง สมการกำลังสาม สมการกำลังสี่

1 สมการกำลังสอง

บทนิยาม 1.1 สมการ $ax^2+bx+c=0$ เมื่อ x เป็นตัวแปรและ $a \neq 0, b, c$ เป็นค่าคงที่ใด ๆ เรียกว่า **รูปทั่วไปของสมการกำลังสอง**

ทฤษฎีบท 1.1 สมการ $ax^2+bx+c=0$ เมื่อ x เป็นตัวแปรและ $a \neq 0,\ b,\ c$ เป็นค่าคงที่ใด ๆ จะมีค่ารากเป็น $x=\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

ตัวอย่าง 1.1 จงหาค่ารากของสมการ $x^2 - 5x + 4 = 0$

ตัวอย่าง 1.2 จงหาค่ารากของสมการ $6x^2 - 12x + 7 = 0$

ตัวอย่าง 1.3 จงแก้สมการ $x^2 + \frac{1}{4} = 0$

2 การแก้สมการให้อยู่ในรูปสมการกำลังสอง

สมการบางสมการที่ไม่ใช่สมการกำลังสองแต่สามารถจัดรูปสมการให้อยู่ในรูปของสมการกำลังสองได้ โดยการแทนค่าด้วยตัวแปรตัวใหม่

ตัวอย่าง 2.1 จงแก้สมการ $(x^2+3x)^2-2(x^2+3x)-8=0$

ตัวอย่าง 2.2 จงแก้สมการ $x+2\sqrt{x}-8=0$

ตัวอย่าง 2.3 จงแก้สมการ $\dfrac{x^2-4}{x}-\dfrac{4x}{x^2-4}+3=0$

3 สมการกำลังสาม

สมการพหุนามใน x ดีกรี 3 จะมีรูปทั่วไปเป็น $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ เมื่อ x เป็นตัวแปร และ $a \neq 0, b, c, d$ เป็นค่าคงที่ใด ๆ เรียกว่า **รูปทั่วไปของสมการกำลังสาม**

- **การเปลี่ยนรูปพหุนาม**

กำหนดให้ $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + a_2x^2 + a_1x + a_0$ เป็นพหุนามดีกรี n

ถ้าแทนค่า $x = y - c$ ลงในพหุนาม จะได้ว่า

$$a_n(y-c)^n + a_{n-1}(y-c)^{n-1} + a_{n-2}(y-c)^{n-2} + a_2(y-c)^2 + a_1(y-c) + a_0$$
$$= a_n y^n + (-na_n c + a_{n-1})y^{n-1} + \left(\binom{n}{2}a_n c^2 - \binom{n-1}{1}a_{n-1}c + a_{n-2}\right)y^{n-2} + \ldots$$

ในที่นี้เราให้ความสนใจเฉพาะเทอมของ y^{n-1} เท่านั้น จะพบว่าหากเราต้องการให้พหุนามใด ๆ ก็ตามที่เปลี่ยนรูปแล้ว ทำให้เทอมของ y^{n-1} หายไป ก็คือทำให้ค่า $-na_n c + a_{n-1} = 0$ หรือ $c = \dfrac{a_{n-1}}{na_n}$ นั่นเอง

- **การเปลี่ยนรูปพหุนามสำหรับสมการกำลังสอง**

จาก $ax^2 + bx + c = 0$ จะเห็นว่า $n = 2,\ c = \dfrac{a_1}{2a_2} = \dfrac{b}{2a}$

แทนค่า $x = y - \dfrac{b}{2a}$ ลงใน $ax^2 + bx + c = 0$ จะได้ว่า

$$ax^2 + bx + c = 0$$
$$a\left(y - \frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(y - \frac{b}{2a}\right) + c = 0$$
$$a\left(y^2 - \frac{b}{a}y + \frac{b^2}{4a^2}\right) + b\left(y - \frac{b}{2a}\right) + c = 0$$
$$ay^2 - by + \frac{b^2}{4a} + by - \frac{b^2}{2a} + c = 0$$
$$ay^2 - \frac{b^2}{4a} + c = 0$$
$$ay^2 = \frac{b^2}{4a} - c$$
$$y^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$
$$y = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

จาก $x = y - \dfrac{b}{2a}$

จะได้ว่า $x = \pm\dfrac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} - \dfrac{b}{2a}$ หรือ $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

ตัวอย่าง 3.1 จงหาค่ารากของสมการ $x^2-3x+2=0$ โดยการเปลี่ยนรูปพหุนาม

ตัวอย่าง 3.2 จงหาค่ารากของสมการ $2x^2-5x-3=0$ โดยการเปลี่ยนรูปพหุนาม

- **การเปลี่ยนรูปพหุนามสำหรับสมการกำลังสาม**

จาก $ax^3+bx^2+cx+d=0$ จะเห็นว่า $n=3,\ c=\dfrac{a_2}{3a_3}=\dfrac{b}{3a}$

แทนค่า $x=y-\dfrac{b}{3a}$ ลงใน $ax^3+bx^2+cx+d=0$ จะได้ว่า

$$a\left(y-\frac{b}{3a}\right)^3+b\left(y-\frac{b}{3a}\right)^2+c\left(y-\frac{b}{3a}\right)+d=0$$

$$a\left(y^3-\frac{by^2}{a}+\frac{b^2y}{3a^2}-\frac{b^3}{27a^3}\right)+b\left(y^2-\frac{2by}{3a}+\frac{b^2}{9a^2}\right)+c\left(y-\frac{b}{3a}\right)+d=0$$

$$ay^3-by^2+\frac{b^2y}{3a}-\frac{b^3}{27a^2}+by^2-\frac{2b^2y}{3a}+\frac{b^3}{9a^2}+cy-\frac{bc}{3a}+d=0$$

$$ay^3+\left(c-\frac{b^2y}{3a}\right)y+\left(\frac{2b^3}{27a^2}-\frac{bc}{3a}+d\right)=0$$

$$y^3+\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2y}{3a^2}\right)y+\left(\frac{2b^3}{27a^3}-\frac{bc}{3a^2}+\frac{d}{a}\right)=0$$

จะเห็นว่าสมการเปลี่ยนมาอยู่ในรูปแบบ $y^3+py+q=0$ เมื่อ $p=\dfrac{c}{a}-\dfrac{b^2y}{3a^2}$ และ $q=\dfrac{2b^3}{27a^3}-\dfrac{bc}{3a^2}+\dfrac{d}{a}$

การหาค่ารากของสมการกำลังสาม

- การแก้สมการ $y^3+py+q=0$ การ์ดาน (Girolamo Cardano) นักพีชคณิตชาวอิตาเลี่ยน ซึ่งมีชีวิตอยู่ในช่วง ค.ศ. 1501 – 1576 เป็นผู้เสนอกลวิธีในการแก้สมการ ดังนี้

จาก $y^3+py+q=0$ เมื่อ $p=\dfrac{c}{a}-\dfrac{b^2y}{3a^2}$ และ $q=\dfrac{2b^3}{27a^3}-\dfrac{bc}{3a^2}+\dfrac{d}{a}$

แทนค่า $y=u+v$ ใน $y^3+py+q=0$ จะได้ว่า

$(u+v)^3+p(u+v)+q=0$

$u^3+v^3+(p+3uv)(u+v)+q=0$

เราจะลดความยุ่งยากของสมการลงโดยการทำให้เทอมที่สามหายไป โดยใช้การกำหนดเงื่อนไขทำให้เทอมที่สามหายไปนั่นคือเราต้องการให้ $p+3uv=0$ หรือ $uv=-\dfrac{p}{3}$ จะได้ว่า $u^3+v^3+q=0$ หรือ $u^3+v^3=-q$ หากเราสามารถแก้สมการหาค่า u และ v ออกมาได้ ก็จะหาค่า y ได้ซึ่งถ้าสังเกตให้ดีจะพบว่าจากเงื่อนไข

$uv=-\dfrac{p}{3}$ หรือ $u^3v^3=-\dfrac{p^3}{27}$ ....(1) และ $u^3+v^3=-q$ ....(2)

จาก (1) และ (2) ผลคูณของสองจำนวน $\left(u^3v^3\right)$ ได้ค่าหนึ่ง และผลบวกของสองจำนวน $\left(u^3+v^3\right)$ ได้ค่าหนึ่ง นี่คือรากคำตอบของสมการกำลังสอง $t^2+qt-\dfrac{p^3}{27}=0$ ....(3)

จากสมการ (3) หาค่ารากสมการได้ 2 ค่า ดังนี้

$u^3=-\dfrac{q}{2}+\sqrt{\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^3}{27}}$ หรือ $u=\sqrt[3]{-\dfrac{q}{2}+\sqrt{\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^3}{27}}}$

และ $v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$ หรือ $v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$

ดังนั้น $y = u + v$

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

และจาก $x = y - \frac{b}{3a}$

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} - \frac{b}{3a}$$

วิเคราะห์รากคำตอบ

เนื่องจากรากที่ 3 ของจำนวนเชิงซ้อนมีทั้งหมด 3 ค่า เราจึงมีค่า u และ v ที่เป็นไปได้อย่างละ 3 ค่า นั่นหมายความว่าเราจะได้ค่าของ y ที่เป็นไปได้ 3×3 ค่า หรือมีค่า x ที่เป็นไปได้ 9 ค่า (ใช่หรือไม่)

เราไม่สามารถเลือกคู่ u และ v ได้อย่างอิสระ ค่าที่เลือกมาต้องสอดคล้องกับเงื่อนไข $uv = -\frac{p}{3}$ ด้วย

สมมติว่า $u = A$ และ $v = B$ เป็นคู่หนึ่งที่ทำให้ $uv = AB = -\frac{p}{3}$

เพื่อความสะดวกในการเขียนสัญลักษณ์กำหนดให้ ω เป็นคำตอบของสมการ $\omega^3 = 1$ โดยที่ $\omega \neq 1$

$\left(\omega = \frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}, \frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}\right)$ ω มี 2 ค่า เลือกค่าไหนก็ได้

เพราะว่าค่า u ที่เป็นไปได้ทั้งหมดคือ $A, \omega A, \omega^2 A$

และค่า v ที่เป็นไปได้ทั้งหมดคือ $B, \omega B, \omega^2 B$

จับคู่ผลคูณ uv ที่เป็นไปได้ทั้งหมด จะพบว่ามีเพียง 3 ค่าที่แตกต่างกันเท่านั้นคือ $AB, \omega AB, \omega^2 AB$

เนื่องจาก $AB = -\frac{p}{3}$ เป็นจำนวนจริง แต่ $\omega AB, \omega^2 AB$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน ค่าเหล่านี้จึงใช้ไม่ได้

(ยกเว้นกรณี $p = 0$ ซึ่งเราไม่สนใจ เพราะหาคำตอบได้ง่าย ว่า $y = -q^{\frac{1}{3}}$)

ดังนั้น คู่ u, v ที่ทำให้ $uv = -\frac{p}{3}$ จึงเป็น $(A, B), (\omega A, \omega^2 B), (\omega^2 A, \omega B)$ เพียง 3 คู่เท่านั้น คือ

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$
$$= \begin{cases} A + B \\ \omega A + \omega^2 B \\ \omega^2 A + \omega B \end{cases}$$

พิจารณาค่าของ $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$

ค่าของ $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ เรียกว่า ค่าดิสคริมิแนนท์ (Discriminant) ของสมการกำลังสาม

กรณีที่ 1 $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}>0$ **หรือ** $4p^3+27q^2>0$

จะพบว่า $A=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$ และ $B=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$

ดังนั้นจะได้ $y=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$ เป็นคำตอบหนึ่งของสมการ

ส่วนรากคำตอบอีกสองค่าที่เหลือก็คือ

$$\begin{aligned} y&=\omega A+\omega^2 B\\ &=\left(\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)A+\left(\frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}\right)B\\ &=-\frac{1}{2}\big(A+B\big)+\frac{\sqrt{3}\,i}{2}\big(A-B\big)\end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned} y&=\omega^2 A+\omega B\\ &=\left(\frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}\right)A+\left(\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)B\\ &=-\frac{1}{2}\big(A+B\big)-\frac{\sqrt{3}\,i}{2}\big(A-B\big)\end{aligned}$$

จาก $x=y-\frac{b}{3a}$ จะได้ว่า

$x=A+B-\frac{b}{3a}$ และ

$x=-\frac{1}{2}\big(A+B\big)+i\frac{\sqrt{3}}{2}\big(A-B\big)-\frac{b}{3a}$ และ

$x=-\frac{1}{2}\big(A+B\big)-i\frac{\sqrt{3}}{2}\big(A-B\big)-\frac{b}{3a}$

กรณีที่ 2 $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=0$ **หรือ** $4p^3+27q^2=0$

จาก $A=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$ และ $B=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$

จะพบว่า $A=B=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}$

ดังนั้นจะได้ $y=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}=-2\sqrt[3]{\frac{q}{2}}$

และ $y=\omega A+\omega^2 B=2\sqrt[3]{\frac{q}{2}}$

และ $y=\omega A+\omega^2 B=2\sqrt[3]{\frac{q}{2}}$

จาก $x=y-\frac{b}{3a}$ จะได้ว่า

ดังนั้นจะได้ $x=-2\sqrt[3]{\frac{q}{2}}-\frac{b}{3a}$ และ $x=2\sqrt[3]{\frac{q}{2}}-\frac{b}{3a}$ และ $x=2\sqrt[3]{\frac{q}{2}}-\frac{b}{3a}$

หมายเหตุ จะเห็นว่าค่ารากจะเป็นจำนวนจริงทั้ง 3 ค่า และมีค่ารากซ้ำที่ 2

กรณีที่ 3 $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0$ **หรือ** $4p^3+27q^2<0$

พิจารณา $A=-\frac{q}{2}+i\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$

จะพบว่า $A=-\frac{q}{2}+i\sqrt{-\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right)}$

การหาค่ารากที่สามของ $A=-\frac{q}{2}+i\sqrt{-\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right)}$ กระทำได้โดยใช้คุณสมบัติทางตรีโกณมิติดังนี้

ให้ $r=\left|A\right|$ (Modulus of A)

จะได้ว่า $r^2=\left(-\frac{q}{2}\right)^2+\left(-\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right)\right)$

$$r^2=\frac{q}{4}^2-\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}$$

$$r^2=-\frac{p^3}{27}$$

$$r=\left(-\frac{p}{3}\right)^{\frac{3}{2}}=\frac{-p\sqrt{-p}}{\sqrt{27}}$$

ถ้า θ เป็นอาร์กิวเมนต์ (Argument) ของ A เมื่อ $-\pi\le\theta\le\pi$ จะได้ว่า

$$\cos\theta=\frac{-\frac{q}{2}}{r}=\frac{-\frac{q}{2}}{\frac{-p\sqrt{-p}}{\sqrt{27}}}=\frac{\sqrt{27}q}{2p\sqrt{-p}} \quad \text{และ} \quad \sin\theta=\frac{\sqrt{\frac{\Delta}{108}}}{r}=\frac{\sqrt{\frac{\Delta}{108}}}{\frac{-p\sqrt{-p}}{\sqrt{27}}}=\frac{-\sqrt{\Delta}}{2p\sqrt{-p}}$$

จาก $\quad A=r\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)$

จะได้ $\quad \sqrt[3]{A}=\sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{\theta}{3}+i\sin\frac{\theta}{3}\right)=\sqrt{-\frac{p}{3}}\left(\cos\frac{\theta}{3}+i\sin\frac{\theta}{3}\right)$

เนื่องจาก B เป็นสังยุคของ A จะได้ว่า

$$\sqrt[3]{B}=\sqrt{-\frac{p}{3}}\left(\cos\frac{\theta}{3}-i\sin\frac{\theta}{3}\right)$$

เพราะว่า $\omega=-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$

ดังนั้นค่ารากของสมการ $y^3+py+q=0$ คือ

$$y=\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}=2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos\frac{\theta}{3}$$

และ $\quad y=\omega\sqrt[3]{A}+\omega^2\sqrt[3]{B}=2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos\left(\frac{\theta}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)$

และ $\quad y=\omega^2\sqrt[3]{A}+\omega\sqrt[3]{B}=2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos\left(\frac{\theta}{3}+\frac{4\pi}{3}\right)$

ตัวอย่าง 3.3 จงหาค่ารากของสมการ $x^3 + x^2 - 2 = 0$

ตัวอย่าง 3.4 จงหาค่ารากของสมการ $y^3 - 3y + 1 = 0$

ตัวอย่าง 3.5 จงหาค่ารากของสมการ $y^3 + 9y - 2 = 0$

ตัวอย่าง 3.6 จงหาค่ารากของสมการ $y^3 - 6y + 2 = 0$

4 สมการกำลังสี่

กระบวนวิธีการแก้สมการกำลังสี่ที่เป็นรูปแบบที่สมบูรณ์ คิดโดยนักคณิตศาสตร์ชาวอิตาเลี่ยน ชื่อ โลโดวิโก เฟอร์ราริ (Lodovico Ferrari) ซึ่งเป็นลูกศิษย์ของการ์ดาน กระบวนวิธีของเฟอร์ราริ กระทำได้ดังนี้

สมมุติให้ สมการรูปทั่วไปของสมการกำลังสี่ เป็น $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$ ....(1)

จากสมการ (1) แปลงให้อยู่ในรูป $x^4+ax^3=-bx^2-cx-d$ ....(2)

จากสมการ (2) บวก $\frac{a^2}{4}x^2$ เข้าทั้งสองข้างของสมการจะได้สมการใหม่เป็น

$x^4+ax^3+\frac{a^2}{4}x^2=\frac{a^2}{4}x^2-bx^2-cx-d$ ....(2)

$\left(x^2+\frac{a}{2}x\right)^2=\left(\frac{a^2}{4}-b\right)x^2-cx-d$ ....(3)

สมการ (1) และ (3) เป็นสมการที่สมมูลกัน พิจารณาสมการ (3) ในกรณีต่อไปนี้

กรณีที่ 1 ถ้า $\left(\frac{a^2}{4}-b\right)x^2-cx-d$ สามารถเขียนในรูปกำลังสองสมบูรณ์ การหาค่ารากของสมการ (3) กระทำได้ง่ายโดยใช้ความสัมพันธ์ต่อไปนี้

$$\left(x^2+\frac{a}{2}x\right)^2=\pm\sqrt{\left(\frac{a^2}{4}-b\right)x^2-cx-d}$$

กรณีที่ 2 ถ้า $\left(\frac{a^2}{4}-b\right)x^2-cx-d$ ไม่สามารถเขียนในรูปกำลังสองสมบูรณ์ กระบวนวิธีของเฟอร์ราริ กระทำโดยการบวก $y\left(x^2+\frac{a}{2}x\right)+\frac{y^2}{4}$ เข้าทั้งสองข้างของสมการ (3) สามารถเขียนเป็นกำลังสองสมบูรณ์ที่มี y เป็นตัวแปรตัวหนึ่ง ซึ่งจะได้สมการเป็นดังนี้

$$\left(x^2+\frac{a}{2}x\right)^2+y\left(x^2+\frac{a}{2}x\right)+\frac{y^2}{4}=y\left(x^2+\frac{a}{2}x\right)+\frac{y^2}{4}+\left(\frac{a^2}{4}-b\right)x^2-cx-d$$

$$\left(x^2+\frac{a}{2}x+\frac{y}{2}\right)^2=\left(\frac{a^2}{4}-b+y\right)x^2+\left(\frac{1}{2}ay-c\right)x+\left(\frac{y^2}{4}-d\right) \text{.............(4)}$$

จากสมการ (4) จะเห็นว่า $\left(\frac{a^2}{4}-b+y\right)x^2+\left(\frac{1}{2}ay-c\right)x+\left(\frac{y^2}{4}-d\right)$ สามารถเขียนในรูป $\left(ex+f\right)^2$ ได้ เมื่อ e, f เป็นค่าคงที่ หรือ ถ้ากำหนดให้ $A=\frac{a^2}{4}-b+y,\ B=\frac{a}{2}y-c$ และ $C=\frac{y^2}{4}-d$ จะได้ว่า

$Ax^2+Bx+C=\left(ex+f\right)^2$ ....(5)

และ $B^2-4AC=0$ ....(6)

จากสมการ (5) ได้ความสัมพันธ์ว่า $A=e^2,\ B=2ef$ และ $C=f^2$ ....(7)

พิจารณาสมการ (6)

- ถ้า $A=0$ และ $C=0$ จะได้ว่า $B=0$ ซึ่งก็จะได้ว่า $e=f=0$

- ถ้า $A \neq 0$ หรือ $B \neq 0$ หาค่า e และ f ได้ดังนี้

  ก. ถ้า $A \neq 0$ จะได้ว่า $e = \sqrt{A}$ และ $f = \dfrac{B}{2e}$

  ข. ถ้า $C \neq 0$ จะได้ว่า $f^2 = C \neq 0$

เนื่องจากพจน์ทางด้านขวามือของสมการ (2) สามารถเขียนในรูป $\left(ex + f\right)^2$ หรือ

$$\left(\frac{a^2}{4} - b + y\right)x^2 + \left(\frac{1}{2}ay - c\right)x + \left(\frac{y^2}{4} - d\right) = \left(ex + f\right)^2$$

ดังนั้นค่า y ที่จะนำไปใช้แก้สมการกำลังสี่ $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ตามกระบวนวิธีของเฟอร์รารี่ จะต้องสอดคล้องกับสมการ

$$\left(\frac{a}{2}y - c\right)^2 - 4\left(\frac{a^2}{4} - b + y\right)\left(\frac{y^2}{4} - d\right) = 0 \qquad \text{หรือ}$$

$$\left(\frac{a}{2}y - c\right)^2 = 4\left(\frac{a^2}{4} - b + y\right)\left(\frac{y^2}{4} - d\right) \qquad \text{หรือ}$$

$$y^3 - by^2 + \left(ac - 4d\right)y + 4bd - a^2d - c^2 = 0 \text{ ....(I)}$$

สมการ (I) เรียกว่า สมการช่วยแก้สมการกำลังสี่ เมื่อเลือกค่า e, f และ หาค่า y จากสมการ (I) ได้แล้ว สามารถนำไปแก้สมการกำลังสี่ จากสมการ

$$\left(\frac{a^2}{4} - b + y\right)x^2 + \left(\frac{1}{2}ay - c\right)x + \left(\frac{y^2}{4} - d\right) = \left(ex + f\right)^2 \qquad \text{หรือ สมการ}$$

$$\left(x^2 + \frac{a}{2}x + \frac{1}{2}y\right)^2 = \left(ex + f\right)^2 \qquad \text{ซึ่งแยกเป็นสมการกำลังสองได้สองสมการดังนี้}$$

$$\left.\begin{aligned} x^2 + \frac{a}{2}x + \frac{1}{2}y &= ex + f \\ x^2 + \frac{a}{2}x + \frac{1}{2}y &= -ex - f \end{aligned}\right\} \text{.................(J)}$$

สมการ (J) ดำเนินการแก้สมการกำลังสองทั้งสองสมการ จะได้ค่ารากของสมการกำลังสี่ ซึ่งจะได้ค่า x จำนวน 4 ค่า ที่เป็นค่ารากของสมการ $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

ตัวอย่าง 4.1 จงหาค่ารากของสมการ $x^4 + 4x - 1 = 0$

ตัวอย่าง 4.2 จงหาค่ารากของสมการ $x^4 - 8x^2 - 4x + 3 = 0$