บทที่ 1
สมบัติพื้นฐานของระบบจำนวนจริง

วิธีศึกษาระบบจำนวนจริงมีหลายวิธี วิธีที่นิยมกันมากวิธีหนึ่งคือ วิธีที่ให้จำนวนเต็มบวกเป็นคำ อนิยามและกำหนดสัจพจน์ของจำนวนเต็มบวกจากนี้สร้างระบบจำนวนตรรกยะแล้วสร้างจำนวนอตรรกยะจนได้ระบบจำนวนจริง

ในบทเรียนนี้ จะศึกษาระบบจำนวนจริงโดยให้จำนวนจริงเป็นคำอนิยาม ระบบจำนวนจริงประกอบด้วยเซตของจำนวนจริง R กับการดำเนินการการบวกและการคูณ ซึ่งสอดคล้องกับสัจพจน์ 15 ข้อ สมบัติทุกประการของระบบจำนวนจริงจะเป็นผลที่ได้รับจากสัจพจน์เหล่านี้เพื่อความสะดวกในการศึกษา จะเริ่มด้วยสัจพจน์ 11 ข้อแรกก่อน และเพิ่มสัจพจน์ข้ออื่น ๆ ในตอนต่อไป

1.1 สมบัติพื้นฐานของจำนวนจริง

สัจพจน์ 1 สมบัติปิดของการบวก

สำหรับจำนวนจริง a และ b ทุกตัว $a + b$ เป็นจำนวนจริง

สัจพจน์ 2 สมบัติการเปลี่ยนกลุ่มของการบวก

สำหรับจำนวนจริง a , b และ c ทุกตัว $(a + b) + c = a + (b + c)$

สัจพจน์ 3 สมบัติการมีเอกลักษณ์การบวก

มีจำนวนจริง 0 ซึ่ง $0 + a = a = a + 0$ สำหรับจำนวนจริง a ทุกตัว

สัจพจน์ 4 สมบัติการมีอินเวอร์สการบวก

สำหรับจำนวนจริง a แต่ละจำนวน จะมีจำนวนจริง $-a$ ซึ่ง
$-a + a = 0 = a + (-a)$

สัจพจน์ 5 สมบัติการสลับที่ของการบวก

สำหรับจำนวนจริง a และ b ทุกตัว $a + b = b + a$

สัจพจน์ 6 สมบัติปิดของการคูณ

สำหรับจำนวนจริง a และ b ทุกตัว ab เป็นจำนวนจริง

สัจพจน์ 7 สมบัติการเปลี่ยนกลุ่มของการคูณ

สำหรับจำนวนจริง a, b และ c ทุกตัว $(ab)c = a(bc)$

สัจพจน์ 8 สมบัติการมีเอกลักษณ์การคูณ

มีจำนวนจริง 1 ซึ่ง $1 \neq 0$ และ $1a = a = a1$ สำหรับจำนวนจริง a ทุกตัว

สัจพจน์ 9 สมบัติการมีอินเวอร์สการคูณ

ซึ่ง $a^{-1}a = 1 = aa^{-1}$

สัจพจน์ 10 สมบัติการสลับที่ของการคูณ

สำหรับจำนวนจริง a และ b ทุกตัว $ab = ba$

สัจพจน์ 11 สมบัติการแจกแจงทางซ้าย

สำหรับจำนวนจริง a, b และ c ทุกตัว $a(b + c) = ab + ac$

หมายเหตุ 1. ระบบใดซึ่งประกอบด้วยเซต ๆ หนึ่งกับการดำเนินการทวิภาค (binary operation) 2 การดำเนินการ และมีสมบัติสอดคล้องกับสัจพจน์ทั้ง 11 ข้อข้างต้น เรียกระบบนี้ว่าฟิลด์ (field) ดังนั้นระบบจำนวนจริงเป็นฟิลด์

2. ในระบบจำนวนจริง นอกจากสัจพจน์ต่าง ๆ แล้วยังใช้สมบัติเกี่ยวกับการใช้เครื่องหมายเท่ากับ $(=)$ อีก 5 ข้อ

(1) **สมบัติการสะท้อน (reflexive property)**

สำหรับจำนวนเต็ม a ทุกตัว $a = a$

(2) **สมบัติการสมมาตร (symmetric property)**

สำหรับจำนวนจริง a และ b ทุกตัว ถ้า $a = b$ แล้ว $b = a$

(3) **สมบัติการถ่ายทอด (transitive property)**

สำหรับจำนวนจริง a, b และ c ทุกตัว ถ้า $a = b$ และ $b = c$ แล้ว $a = c$

(4) **สมบัติการบวกด้วยจำนวนเดียวกัน**

สำหรับจำนวนจริง a, b และ c ทุกตัว ถ้า $a = b$ แล้ว $c + a = c + b$

(5) **สมบัติการคูณด้วยจำนวนเดียวกัน**

สำหรับจำนวนจริง a, b และ c ทุกตัว ถ้า $a = b$ แล้ว $ca = cb$

ทฤษฎีบท 1.1.1 สมบัติการตัดออกของการบวก

สำหรับจำนวนจริง a, b และ c ใดๆ

(1) ถ้า $a + b = a + c$ แล้ว $b = c$

(2) ถ้า $b + a = c + a$ แล้ว $b = c$

พิสูจน์ (1) ถ้า $a + b = a + c$ แล้ว $b = c$

$a + b$	$=$	$a + c$	กำหนดให้
$-a + (a + b)$	$=$	$-a + (a + b)$	สมบัติการบวกด้วยจำนวนเดียวกัน
$(-a + a) + b$	$=$	$(-a + a) + c$	สมบัติการเปลี่ยนกลุ่มของการบวก
$0 + b$	$=$	$0 + c$	สมบัติของอินเวอร์สการบวก
b	$=$	c	สมบัติของเอกลักษณ์การบวก

(2) ถ้า $b + a = c + a$ แล้ว $b = c$

....

....

....

....

....

....

ทฤษฎีบท 1.1.2 สำหรับจำนวนจริง x และ a ใด ๆ

(1) ถ้า $x + a = a$ แล้ว $x = 0$

(2) ถ้า $a + x = a$ แสัว $x = 0$

พิสูจน์ (1) ถ้า $x + a = a$ แล้ว $x = 0$

$x + a$	$= a$	กำหนดให้
$0 + a$	$= a$	สมบัติของเอกลักษณ์การบวก
$x + a$	$= 0 + a$	สมบัติการถ่ายทอด
x	$= 0$	สมบัติการตัดออกของการบวก

(2) ถ้า $a + x = a$ แล้ว $x = 0$

....

....

....

....

....

....

ข้อสังเกต จากทฤษฎีบท 1.1.2 จะได้ในระบบจำนวนจริงเอกลักษณ์การบวกมีเพียงตัวเดียวเท่านั้น

ทฤษฎีบท 1.1.3 สำหรับจำนวนจริง x และ a ใด ๆ

(1) ถ้า $x + a = 0$ แล้ว $x = -a$

(2) ถ้า $a + x = 0$ แล้ว $x = -a$

พิสูจน์ (1) ถ้า $x + a = 0$ แล้ว $x = -a$

$x + a$	$= 0$	กำหนดให้
$-a + a$	$= 0$	สมบัติของอินเวอร์สการบวก
$x + a$	$= -a + a$	สมบัติการถ่ายทอด
x	$= -a$	สมบัติการตัดออกของการบวก

(2) ถ้า $a + x = 0$ แล้ว $x = -a$

....

....

....

....

....

....

ข้อสังเกต จากทฤษฎีบท 1.1.3 จะได้อินเวอร์สการบวกของจำนวนจริงแต่ละตัวจะมีเพียงตัวเดียวเท่านั้น

ทฤษฎีบท 1.1.4 สำหรับจำนวนจริง a ทุกตัว $a0 = 0$ และ $0a = 0$

พิสูจน์ เนื่องจาก $0a = a0$ จึงจะพิสูจน์เฉพาะกรณี $a0 = 0$

....

....

....

....

....

....

....

....

ทฤษฎีบท 1.1.5 สำหรับจำนวนจริง a แต่ละตัว $(-1)\,a = -a$

พิสูจน์

....

....

....

....

....

....

....

....

ทฤษฎีบท 1.1.6 สำหรับจำนวนจริง a แต่ละตัว $-(-a) = a$

พิสูจน์ วิธีที่ 1

....

....

....

....

....

....

....

....

ทฤษฎีบท 1.1.7 สมบัติการตัดออกของการคูณ

สำหรับจำนวนจริง a , b และ c ทุกตัวที่ $a \neq 0$

(1) ถ้า $ab = ac$ แล้ว $b = c$

(2) ถ้า $ba = ca$ แล้ว $b = c$

พิสูจน์ (1) ถ้า $ab = ac$ แล้ว $b = c$

ab	$=$	ac	กำหนดให้
$a^{-1}(ab)$	$=$	$a^{-1}(ac)$	จาก $a \neq 0$ และสมบัติการคูณด้วยจำนวนเดียวกัน
$(a^{-1}a)b$	$=$	$(a^{-1}a)c$	สมบัติการเปลี่ยนกลุ่มของการคูณ
$1b$	$=$	$1c$	สมบัติของอินเวอร์สการคูณ
b	$=$	c	สมบัติของเอกลักษณ์การคูณ

(2) ถ้า $ba = ca$ แล้ว $b = c$

....

....

....

....

....

....

....

....

ทฤษฎีบท 1.1.8 สำหรับจำนวนจริง x และ a ใด ๆ ซึ่ง $a \neq 0$

(1) ถ้า $xa = a$ แล้ว $x = 1$

(2) ถ้า $ax = a$ แล้ว $x = 1$

พิสูจน์ (1) ถ้า $xa = a$ แล้ว $x = 1$

....

....

....

....

....

....

....

....

(2) ถ้า $ax = a$ แล้ว $x = 1$

....

....

....

....

....

....

....

....

ข้อสังเกต จากทฤษฎี 1.1.8 จะได้ในระบบจำนวนจริงเอกลักษณ์การคูณมีเพียงตัวเดียวเท่านั้น

ทฤษฎีบท 1.1.9 สำหรับจำนวนจริง x และ a ใด ๆ

(1) ถ้า $xa = 1$ แล้ว $x = a^{-1}$

(2) ถ้า $ax = 1$ แล้ว $x = a^{-1}$

พิสูจน์ (1) ถ้า $xa = 1$ แล้ว $x = a^{-1}$

....

....

....

....

....

....

....

(2) ถ้า $ax = 1$ แล้ว $x = a^{-1}$

....

....

....

....

....

....

....

ข้อสังเกต จากทฤษฎีบท 1.1.9 จะได้อินเวอร์สการคูณของจำนวนจริงแต่ละตัวซึ่งไม่เท่ากับ 0 จะมีเพียงตัวเดียวเท่านั้น

ทฤษฎีบท 1.1.10 สำหรับจำนวนจริง a ทุกตัวซึ่งไม่เท่ากับ 0 จะได้ว่า $(a^{-1})^{-1} = a$

พิสูจน์

……

……

……

……

……

……

ทฤษฎีบท 1.1.11 สมบัติการแจกแจงทางขวา

สำหรับจำนวนจริง a, b และ c ทุกตัว $(b + c)a = ba + ca$

พิสูจน์

……

……

……

……

……

……

ทฤษฎีบท 1.1.12 สำหรับจำนวนจริง a และ b ทุกตัว จะได้ว่า

(1) $a(-b) = -(ab)$

(2) $(-a)b = -(ab)$

(3) $(-a)(-b) = ab$

พิสูจน์ (1) $a(-b) = -(ab)$

……

……

……

……

……

……

……

……

……

(2) $(-a)b = -(ab)$

....

....

....

....

....

(3) $(-a)(-b) = ab$

....

....

....

....

....

ทฤษฎีบท 1.1.13 สำหรับจำนวนจริง a และ b ใด ๆ ถ้า $ab = 0$ แล้ว $a = 0$ หรือ $b = 0$
พิสูจน์

....

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 1.1.1 จงหาเซตคำตอบของสมการ $x^2 - 7x + 12 = 0$

วิธีทำ จาก $x^2 - 7x + 12 = 0$ ....(*)

จะได้ $(x-3)(x-4) = 0$

ดังนั้น $x - 3 = 0$ หรือ $x - 4 = 0$

$x = 3$ หรือ $x = 4$

เนื่องจากเมื่อนำ 3 และ 4 ไปตรวจสอบในสมการ (*) ได้ว่า ทั้งสองจำนวนเป็นรากของสมการ ดังนั้นเซตคำตอบของสมการ (*) คือ $\{3, 4\}$

ข้อสังเกต ทฤษฎีบท 1.1.13 สมมูลกับข้อความ

"ถ้า $a \neq 0$ และ $b \neq 0$ แล้ว $ab \neq 0$ "

บทนิยามการลบ สำหรับจำนวนจริง a และ b ใด ๆ

$$a - b = a + (-b)$$

บทนิยามการหาร สำหรับจำนวนจริง a และ b ใด ๆ โดยที่ $b \neq 0$

$$\frac{a}{b} = ab^{-1}$$

ทฤษฎีบท 1.1.14 สำหรับจำนวนจริง a, b, c และ d ใด ๆ ซึ่ง $b \neq 0,\ d \neq 0$

จะได้ว่า $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ก็ต่อเมื่อ $ad = bc$

พิสูจน์ (1) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

(2) $ad = bc$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ทฤษฎีบท 1.1.15 สำหรับจำนวนจริง a, b, c และ d ใด ๆ จะได้ว่า

$a - b = c - d$ ก็ต่อเมื่อ $a + d = c + b$

พิสูจน์

(1) $a - b = c - d$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

(2) $a + d = c + b$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ทฤษฎีบท 1.1.16 สำหรับจำนวนจริง b และ d ใด ๆ ซึ่งต่างก็ไม่เท่ากับศูนย์

จะได้ว่า $(bd)^{-1} = b^{-1}d^{-1}$

พิสูจน์

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ทฤษฎีบท 1.1.17 สำหรับจำนวนจริง $a,\ b,\ c$ และ d ใด ๆ ซึ่ง $b \neq 0$ และ $d \neq 0$

จะได้ว่า $\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right) = \frac{ac}{bd}$

พิสูจน์

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ทฤษฎีบทที่ 1.1.18 สำหรับจำนวนจริง b, c, d ใด ๆ ซึ่ง $b \neq 0$ และ $d \neq 0$ จะได้ว่า $\frac{c}{d} = \frac{bc}{bd}$

....

....

....

....

....

....

....

ทฤษฎีบทที่ 1.1.19 สำหรับจำนวนจริง c และ d ทุกตัวซึ่งต่างก็ไม่เท่ากับศูนย์ จะได้ว่า $\left(\frac{c}{d}\right)^{-1} = \frac{d}{c}$

....

....

....

....

....

....

....

....

ทฤษฎีบทที่ 1.1.20 สำหรับจำนวนจริง a, b, c, d ทุกตัวซึ่ง $b \neq 0$, $c \neq 0$ และ $d \neq 0$ จะได้ว่า $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$

....

....

....

....

....

....

....

ทฤษฎีบทที่ 1.1.21 สำหรับจำนวนจริง a, b, c ทุกตัวซึ่ง $b \neq 0$ และ $c \neq 0$

จะได้ว่า $$\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{c} = \frac{a}{bc}$$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ทฤษฎีบทที่ 1.1.22 สำหรับจำนวนจริง a, b, c ทุกตัวซึ่ง $b \neq 0$ และ $c \neq 0$

จะได้ว่า $$\frac{a}{\left(\frac{b}{c}\right)} = \frac{ac}{b}$$

....

....

....

....

....

....

....

....

แบบฝึกหัด 1.1

1. วิธีทำต่อไปนี้ผิดตรงไหน

วิธีทำ เนื่องจาก $a^2 - a^2 = (a-a)(a+a)$

ดังนั้น $a(a-a) = (a-a)(a+a)$

โดยสมบัติการตัดออก $a = a+a$

ดังนั้น $1a = 2a$

โดยสมบัติการตัดออก $1 = 2$

2. พิจารณาข้อความแต่ละข้อต่อไปนี้ว่าเป็นจริงหรือเท็จ เพราะเหตุใด สำหรับจำนวนจริง a, b และ c ใด ๆ

(1) ถ้า $ab = a$ แล้ว $b = 1$

(2) ถ้า $ab = ac$ แล้ว $b = c$

(3) ถ้า $ab = 1$ แล้ว $a = b^{-1}$ เมื่อ $b \neq 0$

(4) ถ้า $ab = 0$ แล้ว $a = 0$ และ $b = 0$

(5) ถ้า $a \neq 0$ และ $b \neq 0$ แล้ว $ab \neq 0$

3. ถ้า b เป็นจำนวนจริงซึ่งไม่เท่ากับศูนย์ จงพิสูจน์ว่า $\frac{a}{b} = 0$ ก็ต่อเมื่อ $a = 0$

4. จงพิสูจน์

(1) $-0 = 0$

(2) $1^{-1} = 1$

(3) $(-1)^{-1} = -1$

5. สำหรับจำนวนจริง a , b และ c ทุกตัว จงพิสูจน์

(1) $-(a + b) = -a - b$

(2) $-(a - b) = b - a$

(3) $\frac{-a}{b} = -\left(\frac{a}{b}\right)$, $b \neq 0$

(4) $(-b)^{-1} = -(b)^{-1}$, $b \neq 0$

(5) $\frac{a}{-b} = -\left(\frac{a}{b}\right)$, $b \neq 0$

(6) $\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$, $b \neq 0$

(7) $(a - b) + (a - c) = a - c$

(8) $c(b - a) = cb - ca$

(9) $(a - b)c = ac - bc$

(10) $(-a)(b - c) = -ab + ac$

1.2 จำนวนจริงบวก

สัจพจน์ 12 ถึง สัจพจน์ 14 จะเกี่ยวข้องกับสับเซต R^+ ของ R นิยมเรียกสัจพจน์ 3 ข้อนี้ว่า “สัจพจน์อันดับ” และเรียกระบบซึ่งประกอบด้วยเซตหนึ่งกับการดำเนินการทวิภาค 2 การดำเนินการที่มีสมบัติสอดคล้องกับสัจพจน์ 14 ข้อนี้ว่า “ฟิลด์อันดับ (order field)”

สัจพจน์ 12 สมบัติไตรวิภาค (Trichotomy law)

มีสับเซต R^+ ของ R ซึ่งสำหรับสมาชิก a ทุกตัวของ R คุณสมบัติต่อไปนี้จะเป็นจริงเพียงข้อเดียวเท่านั้น

1. a อยู่ใน R^+
2. a เท่ากับ 0
3. $-\mathrm{a}$ อยู่ใน R^+

สัจพจน์ 13 ถ้า a และ b อยู่ใน R^+ แล้ว $\mathrm{a}+\mathrm{b}$ อยู่ใน R^+

สัจพจน์ 14 ถ้า a และ b อยู่ใน R^+ แล้ว ab อยู่ใน R^+

บทนิยาม 1.2.1 ถ้า a อยู่ใน R^+ เรียกว่า a ว่าจำนวนจริงบวก
ถ้า $-\mathrm{a}$ อยู่ใน R^+ เรียกว่า a ว่าจำนวนจริงลบ

ข้อสังเกต 1) จำนวนจริงลบกับจำนวนจริงที่มีเครื่องหมายลบอยู่ข้างหน้าไม่เหมือนกันสามารถเขียนจำนวนจริงทุกตัวในรูปซึ่งมีเครื่องหมายลบอยู่ข้างหน้า เพราะถ้า a เป็นจำนวนจริงสามารถเขียน $\mathrm{a} = -\mathrm{b}$ โดยที่ b คือจำนวนจริง $-\mathrm{a}$ เช่น $1 = -(-1)$

2) เซตของจำนวนจริงบวก และเซตของจำนวนจริงลบไม่มีสมาชิกซ้ำกัน

3) 0 ไม่เป็นจำนวนจริงบวก และ 0 ไม่เป็นจำนวนจริงลบ

ทฤษฎีบท 1.2.1

(1) ถ้า a เป็นจำนวนจริง**ลบ** และ b เป็นจำนวนจริง**บวก** แล้ว ab เป็นจำนวนจริงลบ

(2) ถ้าทั้ง a และ b เป็นจำนวนจริง**ลบ** แล้ว ab เป็นจำนวนจริง**บวก**

พิสูจน์

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ทฤษฎีบท 1.2.2 ถ้า a เป็นจำนวนจริง ซึ่งไม่เท่ากับศูนย์แล้ว aa เป็นจำนวนจริงบวก
พิสูจน์ (1) ถ้า a เป็นจำนวนจริงบวก โดยสัจพจน์ 14 aa เป็นจำนวนจริงบวก
(2) ถ้า a เป็นจำนวนจริงลบ โดยทฤษฎี 1.2.1 aa เป็นจำนวนจริงบวก

หมายเหตุ ถ้าให้ a^2 หมายถึง aa สามารถเขียนทฤษฎีบท 1.2.2 ใหม่ดังนี้
" ถ้า a เป็นจำนวนจริงซึ่งไม่เท่ากับศูนย์ จะได้ว่า a^2 เป็นจำนวนจริงบวก "

ทฤษฎีบท 1.2.3 1 เป็นจำนวนจริงบวก
พิสูจน์ เนื่องจาก $1 = (1)(1)$ และ $(1)(1)$ เป็นจำนวนจริงบวก โดยทฤษฎีบท 1.2.2 ดังนั้น 1 เป็นจำนวนจริงบวก

ทฤษฎีบท 1.2.4 (1) ถ้า a เป็นจำนวนจริงบวกแล้ว a^{-1} เป็นจำนวนจริงบวก
(2) ถ้า a เป็นจำนวนจริงลบแล้ว a^{-1} เป็นจำนวนจริงลบ

....
....
....
....
....
....
....
....
....

บทนิยาม 1.2.1 สำหรับจำนวนจริง a และ b ทุกตัว

$a < b$ (หรือ $b > a$) ก็ต่อเมื่อ $b - a$ เป็นจำนวนจริงบวก

เนื่องจาก $-(b - a) = a - b$ สามารถสรุปจากสัจพจน์ 14 ว่าสมบัติต่อไปนี้จะเป็นจริงเพียงข้อเดียวเท่านั้น

(1) $b - a$ เป็นจำนวนจริงบวก
(2) $b - a = 0$
(3) $a - b$ เป็นจำนวนจริงบวก

เพราะฉะนั้น สมบัติต่อไปนี้จะเป็นจริงเพียงข้อเดียวเท่านั้น

(1) $a < b$
(2) $a = b$
(3) $a > b$

ข้อสังเกต เนื่องจาก $a - 0 = a$ ดังนั้น a เป็นจำนวนจริงบวก ก็ต่อเมื่อ $0 < a$

ทฤษฎีบท 1.2.5 สมบัติการถ่ายทอด

สำหรับจำนวนจริง a, b และ c ใดๆ ถ้า $a < b$ และ $b < c$ จะได้ว่า $a < c$

....

....

....

....

....

....

....

....

ทฤษฎีบท 1.2.6 สำหรับจำนวนจริง a, b และ c ใด ๆ

ถ้า $a < b$ จะได้ว่า $a + c < b + c$

....

....

....

....

....

....

....

ทฤษฎีบท 1.2.7 สำหรับจำนวนจริง a, b, c และ d ใด ๆ

ถ้า $a < b$ และ $c < d$ จะได้ว่า $a + c < b + d$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ทฤษฎีบท 1.2.8 สำหรับจำนวนจริง a และ b ใด ๆ

(1) ถ้า $a < b$ และ c เป็นจำนวนจริงบวก จะได้ว่า $ca < cb$

(2) ถ้า $a < b$ และ c เป็นจำนวนจริงลบ จะได้ว่า $ca > cb$

พิสูจน์ (1) เนื่องจาก $a < b$ และ c เป็นจำนวนจริงบวก จะได้ว่า $b - a$ และ c อยู่ใน R^+

ดังนั้น $c(b - a)$ อยู่ใน R^+ แต่ $c(b - a) = cb - ca$

เพราะฉะนั้น $cb - ca$ อยู่ใน R^+ นั่นคือ $ca < cb$

(2)

....

....

....

....

....

ทฤษฎีบท 1.2.9 สำหรับจำนวนจริง a, b, c และ d ใด ๆ

ถ้า $a < b$ และ $c < d$ แล้ว $a - d < b - c$

....

....

....

....

....

....

บทนิยาม 1.2.3 สำหรับจำนวนจริง a และ b ใด ๆ

$a \leq b$ (หรือ $b \geq a$) ก็ต่อเมื่อ $a < b$ หรือ $a = b$

ทฤษฎีบท 1.2.10 สมบัติการถ่ายทอด

สำหรับจำนวนจริง a, b และ c ใด ๆ ถ้า $a \leq b$ และ $a \leq c$ จะได้ว่า $a \leq c$

....

....

....

....

....

....

ทฤษฎีบท 1.2.11 สำหรับจำนวนจริง a , b และ c ใด ๆ
ถ้า $a \leq b$ จะได้ว่า $a+c \leq b+c$

....

....

....

....

....

....

ทฤษฎีบท 1.2.12 สำหรับจำนวนจริง a, b, c และ d ใด ๆ
ถ้า $a \leq b$ และ $c \leq d$ จะได้ว่า $a + c \leq b + d$

....

....

....

....

....

....

ทฤษฎีบท 1.2.13 สำหรับจำนวนจริง a และ b ใด ๆ

(1) ถ้า $a \leq b$ และ c เป็นจำนวนจริงบวก จะได้ว่า $ca \leq cb$

(2) ถ้า $a \leq b$ และ c เป็นจำนวนจริงลบ จะได้ว่า $ca \geq cb$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ทฤษฎีบท 1.2.14 สำหรับจำนวนจริง a, b, c และ d ใด ๆ
ถ้า $a \le b$ และ $c < d$ แล้ว $a - d \le b - c$

....

....

....

....

....

....

ทฤษฎีบท 1.2.15 สำหรับจำนวนจริง a, b, c และ d ทุกตัว
ถ้า $0 < a < b$ และ $0 < c < d$ แล้ว $ac < bd$

....

....

....

....

....

....

ทฤษฎีบท 1.2.16 สำหรับจำนวนจริง a และ b ใด ๆ

(1) ถ้า $0 < a < b$ จะได้ว่า $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$

(2) ถ้า $a < b < 0$ จะได้ว่า $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ทฤษฎีบท 1.2.17 สำหรับจำนวนจริง a, b, c และ d ใด ๆ

ถ้า $0 < a < b$ และ $0 < c < d$ แล้ว $\frac{a}{d} < \frac{b}{c}$

....

....

....

....

....

....

....

....

แบบฝึกหัด 1.2

1. ถ้าให้ $2 = 1 + 1$ และ $3 = 2 + 1$ จงพิสูจน์ว่า 3 เป็นจำนวนจริงบวก
2. ถ้า a เป็นจำนวนจริงบวก และ b เป็นจำนวนจริงลบ จงพิสูจน์ว่า $b < a$
3. ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริง จงพิสูจน์ว่า $a < b$ ก็ต่อเมื่อมีจำนวนจริงบวก c โดยที่ $a + c = b$
4. ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $a < b$ จงพิสูจน์ว่า $a < \frac{a+b}{2} < b$
5. ถ้า $a \in R$ และ $a = -a$ จงพิสูจน์ว่า $a = 0$
6. ให้ a , b, c และ d เป็นจำนวนจริงใด ๆ

   จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้ว่าถูกต้องหรือไม่ เพราะเหตุใด

   (1) ถ้า $a < b$ แล้ว $ca < cb$

   (2) ถ้า $a < b$ แล้ว $ca > cb$

   (3) ถ้า $a < b$ แล้ว $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

   (4) ถ้า $a < b$ แล้ว $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$

   (5) ถ้า $a < b$ และ $c < d$ แล้ว $a - c < b - d$

   (6) ถ้า $a < b$ และ $c < d$ แล้ว $ac < bd$

   (7) ถ้า $a < b, c < d, c \neq 0, d \neq 0$ แล้ว $\frac{a}{c} < \frac{b}{d}$

   (8) ถ้า $a < b, c < d, c \neq 0, d \neq 0$ แล้ว $\frac{a}{d} < \frac{b}{c}$

   (9) ถ้า $a < b$ แล้ว $a^2 < b^2$

   (10) ถ้า $a^2 < b^2$ แล้ว $a < b$

   (11) ถ้า $x + y > a + b$ แล้ว $x > a$ และ $y > b$

   (12) ถ้า $a > 0$ แล้ว $a^2 > a$

7. จงหาเซตคำตอบของสมการ $\dfrac{x}{x+2} - \dfrac{4}{x+1} = \dfrac{-2}{x+2}$

8. พิจารณาวิธีทำต่อไปนี้ว่าผิดตรงไหน

(1) กำหนดให้ x และ y เป็นจำนวนจริงใด ๆ ซึ่ง $x > y$ จะได้ว่ามีจำนวนจริงบวก z ซึ่ง $x = y + z$

ดังนั้น
$$\begin{aligned} x(x - y) &= (y + z)(x - y) \\ x^2 - xy &= yx - y^2 + xz - yz \\ x^2 - xy - xz &= yz - y^2 - yz \\ x(x - y - z) &= y(x - y - z) \\ \therefore\ x &= y \end{aligned}$$

ดังนั้น ถ้า $x > y$ แล้ว $x = y$

(2) กำหนดให้ p และ q เป็นจำนวนจริงบวก ซึ่ง $p > q$

จะได้ว่า
$$\begin{aligned} p &> q \\ p(q - p) &> q(q - p) \\ pq - p^2 &> q^2 - pq \\ 0 &> p^2 - 2pq + q^2 \\ 0 &> (p - q)^2 \end{aligned}$$

เนื่องจาก $p \neq q$ เพราะฉะนั้น $(p - q)^2$ เป็นจำนวนจริงบวก

ดังนั้น เราพิสูจน์ว่า จำนวนจริงบวกน้อยกว่าศูนย์

(3) กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนจริงบวก

จะได้ว่า $a > -b$

และ $b > -b$

ดังนั้น $ab > b^2$

เพราะนั้น $a > b$ ....(i)

เนื่องจาก a และ b เป็นจำนวนจริงบวก

ดังนั้น $b > -a$

และ $a > -a$

ดังนั้น $ab > a^2$

เพราะฉะนั้น $b > a$ ....(ii)

จาก (i) และ (ii) จะได้ว่า $ab > ab$