# บทที่ 2
# การพิสูจน์เบื้องต้น

ในเรื่องนี้จะพิจารณาสับเซตของ $\mathrm{R}$ ซึ่งใช้เป็นพื้นฐานในวิธีการพิสูจน์ ที่เรียกว่า "การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ (mathematical induction)"สับเซตนี้คือเซตของจำนวนเต็มบวกก่อนที่จะพิจารณาถึงสับเซตนี้ จะเริ่มด้วยบทนิยามของเซตเชิงอุปนัย (inductive set)

## 2.1 จำนวนเต็มบวก

**บทนิยาม 2.1.1** กำหนดให้ $\mathrm{S}$ เป็นสับเซตของ $\mathrm{R}$ $\mathrm{S}$ จะเป็นเซตเชิงอุปนัยก็ต่อเมื่อ $\mathrm{S}$ มีคุณสมบัติ 2 ประการดังต่อไปนี้

(1) $1 \in \mathrm{S}$

และ (2) ถ้า $\mathrm{n} \in \mathrm{S}$ จะได้ว่า $\mathrm{n} + 1 \in \mathrm{S}$

**ตัวอย่าง 2.1.1** จงพิสูจน์ว่า $\mathrm{R}$ เป็นเซตเชิงอุปนัย

**วิธีทำ** (1) $1 \in \mathrm{R}$ โดยสัจพจน์ 8

(2) จาก $\mathrm{n} \in \mathrm{R}$ เนื่องจาก $1 \in \mathrm{R}$ ดังนั้นโดยสมบัติปิดของการบวก $\mathrm{n} + 1 \in \mathrm{R}$ ดังนั้น $\mathrm{R}$ เป็นเซตเชิงอุปนัย

**ตัวอย่าง 2.1.2** จงพิสูจน์ว่า $\mathrm{R}^+$ เป็นเซตเชิงอุปนัย

**วิธีทำ** (1) $1 \in \mathrm{R}^+$ โดยทฤษฎีบท 1.2.3

(2) จาก $\mathrm{n} \in \mathrm{R}^+$ เนื่องจาก $1 \in \mathrm{R}^+$ ดังนั้นโดยสัจพจน์ 13 จะได้ว่า $\mathrm{n} + 1 \in \mathrm{R}^+$ เพราะฉะนั้น $\mathrm{R}^+$ เป็นเซตเชิงอุปนัย

**ทฤษฎีบท 2.1.1** วิธีพิสูจน์โดยการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

สำหรับจำนวนเต็มบวก $\mathrm{n}$ แต่ละตัว $\mathrm{P(n)}$ เป็นประพจน์

ถ้า (1) $\mathrm{P(1)}$ เป็นจริง

และ (2) สำหรับจำนวนเต็มบวก $\mathrm{k}$ ทุกตัว ถ้า $\mathrm{P(k)}$ เป็นจริง แล้ว $\mathrm{P(k+1)}$ เป็นจริง

จะสรุปได้ว่า $\mathrm{P(n)}$ เป็นจริงสำหรับจำนวนเต็มบวก $\mathrm{n}$ ทุกตัว

....................................................................................................................................

....................................................................................................................................

....................................................................................................................................

....................................................................................................................................

....................................................................................................................................

....................................................................................................................................

....................................................................................................................................

....................................................................................................................................

....................................................................................................................................

....................................................................................................................................

**ตัวอย่าง 2.1.3** สำหรับจำนวนเต็มบวก $n$ ทุกตัว จงพิสูจน์ว่า

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$$

.....................................................................................................

.....................................................................................................

.....................................................................................................

.....................................................................................................

.....................................................................................................

.....................................................................................................

.....................................................................................................

.....................................................................................................

.....................................................................................................

.....................................................................................................

.....................................................................................................

**ตัวอย่าง 2.1.4** สำหรับจำนวนเต็มบวก $n$ ทุกตัว จงพิสูจน์ว่า

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

.....................................................................................................

.....................................................................................................

.....................................................................................................

.....................................................................................................

.....................................................................................................

.....................................................................................................

.....................................................................................................

.....................................................................................................

.....................................................................................................

.....................................................................................................

.....................................................................................................

.....................................................................................................

.....................................................................................................

.....................................................................................................

.....................................................................................................

**ทฤษฎีบท 2.1.2** สำหรับจำนวนเต็มบวก $n$ แต่ละตัว $P(n)$ เป็นประพจน์ ให้ $k$ เป็นจำนวนเต็มบวกที่กำหนดให้

ถ้า (1) $P(k)$ เป็นจริง

และ (2) สำหรับจำนวนเต็มบวก $n$ ทุกตัวที่ $n \geq k$ ถ้า $P(n)$ เป็นจริงแล้ว $P(n+1)$ เป็นจริงด้วย

จะสรุปได้ว่า $P(n)$ เป็นจริงสำหรับจำนวนเต็มบวก $n$ ทุกตัว ซึ่ง $n \geq k$

**ตัวอย่าง 2.1.5** ให้ $n$ เป็นจำนวนจุดที่กำหนดให้บนระนาบ โดยที่ไม่มีจุด 3 จุดใดอยู่บนเส้นตรงเส้นเดียวกัน จงพิสูจน์ว่าสำหรับจำนวนเต็มบวก $n$ ที่ $n \geq 2$ จำนวนเส้นตรงที่เกิดจากจุดเหล่านี้เท่ากับ $\frac{n(n-1)}{2}$

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

**ตัวอย่าง 2.1.6** ให้ $a$ เป็นจำนวนจริงบวกจงพิสูจน์ว่า $a^n > 0$ สำหรับจำนวนเต็มบวก $n$ ทุกตัว

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

**ตัวอย่าง 2.1.7** ถ้า $x$ เป็นจำนวนจริงซึ่ง $x > -1$ สำหรับจำนวนเต็มบวก $x \neq 0$ จะได้ว่า $(1+x)^n > 1+nx$ สำหรับจำนวนเต็มบวก $n$ ทุกตัวที่ $n \geq 2$

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

**ตัวอย่าง 2.1.8** ให้ $n! = n(n-1)\ldots(2)(1)$ จงพิสูจน์ว่า $n^n > n!$ สำหรับจำนวนเต็มบวก $n$ ทุกตัวที่ $n \geq 2$

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

**แบบฝึกหัด 2.1**

1. จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้ว่าเป็นจริงสำหรับจำนวนเต็มบวก $n$ ทุกตัว

(1) $1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

(2) $2+4+6+\cdots+2n = n(n+1)$

(3) $(1)(2)+(2)(3)+(3)(4)+\ldots+n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

(4) $(3)(6)+(6)(9)+(9)(12)+\cdots+3n(3n+3) = 3n(n+1)(n+2)$

(5) $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$

(6) $1-2^2+3^2-4^2+\cdots+(-1)^{n-1}n^2 = (-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}$

(7) $1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$

(8) $1+x+x^2+\cdots+x^n = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$ , $x \neq 1$

(9) $(1)(2)(3)+(2)(3)(4)+\ldots n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

(10) $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{n^2} \leq 2-\frac{1}{n}$

(11) $\frac{1^2}{(1)(3)}+\frac{2^2}{(2)(5)}+\ldots+\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$

(12) $\frac{1}{(1)(4)}+\frac{1}{(4)(7)}+\frac{1}{(7)(10)}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{n}{3n+1}$

(13) $(1)(2)+(2)2^2+(3)2^3+\ldots+(n)2^n = (n-1)2^{n+1}+2$

2. จงพิสูจน์ว่า $n! > 2^n$ สำหรับจำนวนเต็มบวก $n$ ทุกตัวที่ $n \geq 4$

3. ให้ $a$ และ $b$ เป็นจำนวนจริงบวก และ $n$ เป็นจำนวนเต็มบวก

จงพิสูจน์ว่า (1) $a = b$ ก็ต่อเมื่อ $a^n = b^n$

(2) $a < b$ ก็ต่อเมื่อ $a^n < b^n$

4. ให้ $m$ เป็นจำนวนเต็มบวกซึ่ง $m \neq 1$ จงพิสูจน์ว่า $m^n > n$ สำหรับจำนวนเต็มบวก $n$ ทุกตัว

**ข้อเสนอแนะ** ให้ใช้ $m \neq 1$ จะได้ว่า $m \geq 2$

5. จงพิสูจน์สมมุติ “จำนวนเต็มบวกทุกจำนวนจะเท่ากับจำนวนเต็มบวกถัดไป” วิธีทำต่อไปนี้ผิดตรงไหน

**วิธีทำ** ให้ $P(n)$ แทนข้อความ “ถ้า $n$ เป็นจำนวนเต็มบวกแล้ว $n = n+1$”

สมมุติว่า $p(k)$ เป็นจริง

นั่นคือ $k = k+1$

จะพิสูจน์ $P(k+1)$ เป็นจริง

เนื่องจาก จากสมมุติฐาน $k = k+1$

บวก 1 เข้าทั้งสองข้าง $k+1 = (k+1)+1$

ดังนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

เพราะฉะนั้นโดยหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ $P(n)$ เป็นจริง นั่นคือ “จำนวนเต็มบวกทุกจำนวนจะเท่ากับจำนวนเต็มบวกถัดไป”

**2.2 จำนวนเต็ม**

**นิยาม 2.2.1** จำนวนจริง $x$ จะเป็นจำนวนเต็มก็ต่อเมื่อ

(1) $x \in Z^{+}$

หรือ (2) $x = 0$

หรือ (3) $-x \in Z^{+}$

เขียน $Z$ แทนเซตของจำนวนเต็ม และถ้า $-x \in Z^{+}$ เรียก $x$ ว่าจำนวนเต็มลบ

**ทฤษฎีบท 2.2.1** ถ้า $m \in Z$ และ $n \in Z$ จะได้ว่า $m+n \in Z$

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

**ทฤษฎีบท 2.2.2** ถ้า $m \in Z$ และ $n \in Z$ จะได้ว่า $mn \in Z$

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

**ตัวอย่าง 2.2.1** มีจำนวนเต็ม $m$ และจำนวนเต็มซึ่งไม่เท่ากับศูนย์ $n$ ซึ่ง $\frac{m}{n}$ ไม่ใช่จำนวนเต็ม

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

**บทนิยาม 2.2.2** จำนวนเต็ม $b$ ซึ่งไม่เท่ากับศูนย์ จะหารจำนวนเต็ม $a$ ลงตัวก็ต่อเมื่อมีจำนวนเต็ม $c$ ซึ่ง $a = bc$

ถ้า $b$ หาร $a$ ลงตัว เรียก $b$ ว่าตัวหาร (divisor) หรือตัวประกอบ (factor) ของ $a$ และเรียก $a$ ว่าพหุคูณ (multiple) ของ $b$

เขียน $b \mid a$ แทน $b$ หาร $a$ ลงตัว

**ตังอย่าง 2.2.2** $5 \mid 40$ เพราะ $40 = (5)(8)$

$-7 \mid 14$ เพราะ $14 = (-7)(-2)$

$-13 \mid -52$ เพราะ $-52 = (-13)(4)$

สำหรับจำนวนเต็ม $a$ ทุกตัว $1 \mid a$ และ $-1 \mid a$

สำหรับจำนวนเต็ม $b$ ทุกตัวที่ไม่เท่ากับศูนย์ $b \mid 0$ , $b \mid b$ และ $-b \mid b$

**ทฤษฎีบท 2.2.3** ถ้า $a$ , $b$ และ $c$ เป็นจำนวนเต็มซึ่ง $a \mid b$ และ $b \mid c$ จะได้ว่า $a \mid c$

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

**ทฤษฎีบท 2.2.4** ถ้า $a$ และ $b$ เป็นจำนวนเต็มบวกซึ่ง $a \mid b$ จะได้ว่า $b \leq a$

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

**ทฤษฎีบท 2.2.5** ถ้า $a$, $b$ และ $c$ เป็นจำนวนเต็มซึ่ง $a \mid b$ และ $a \mid c$ จะได้ว่า $a \mid (bm + cn)$ สำหรับจำนวนเต็ม $m$ และ $n$ ทุกตัว

....................................................................................................................................

....................................................................................................................................

....................................................................................................................................

....................................................................................................................................

....................................................................................................................................

....................................................................................................................................

....................................................................................................................................

....................................................................................................................................

**ตัวอย่าง 2.2.3** จงพิสูจน์ว่า $7$ หาร $2^{3n} - 1$ ลงตัว สำหรับจำนวนเต็มบวก $n$ ทุกตัว

....................................................................................................................................

....................................................................................................................................

....................................................................................................................................

....................................................................................................................................

....................................................................................................................................

....................................................................................................................................

....................................................................................................................................

....................................................................................................................................

**บทนิยาม 2.2.3** กำหนดให้ $a$ และ $b$ เป็นจำนวนเต็มซึ่งอย่างน้อยหนึ่งต้องไม่เท่ากับศูนย์ $d$ จะเป็นตัวหารร่วมมาก (greatest common divisor) ก็ต่อเมื่อ $d$ เป็นจำนวนเต็มบวกซึ่ง

(1) $d \mid a$ และ $d \mid b$

และ (2) ถ้า $c$ เป็นจำนวนเต็มบวกซึ่ง $c \mid a$ และ $c \mid b$ แล้ว $c \mid d$

เขียน $(a, b)$ แทนตัวหารร่วมมากของ $a$ และ $b$

**ข้อสังเกต** เราใช้สัญลักษณ์ $(a, b)$ แทนทั้งช่วงเปิดซึ่งหมายถึงจำนวนจริงทุกจำนวน ที่อยู่ระหว่าง $a$ และ $b$ ตัวหารร่วมมากของ $a$ และ $b$ โดยทั่วไปแล้ว จากข้อความที่เขียนจะทำให้เข้าใจแจ่มชัดว่าขณะนั้นสัญลักษณ์นี้แทนอะไร ในกรณีที่อาจมีปัญหาให้ระบุไว้ว่าเป็นช่วงเปิด $(a, b)$ หรือหารร่วมมาก $(a, b)$

**ตัวอย่าง 2.2.4**

$$5 = (10, -15)$$
$$14 = (28, 42)$$
$$1 = (7, 59)$$

**บทนิยาม 2.2.4** กำหนดให้ $a$ และ $b$ เป็นจำนวนเต็มซึ่งต่างก็ไม่เท่ากับศูนย์ $t$ จะเป็นตัวคูณร่วมน้อย (least common multiple) ของ $a$ และ $b$ ก็ต่อเมื่อ $t$ เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่ง

(1) $a \mid t$ และ $b \mid t$

และ (2) ถ้า $c$ เป็นจำนวนเต็มบวกซึ่ง $a \mid c$ และ $b \mid c$ แล้ว $t \mid c$

เขียน $[a, b]$ แทนตัวคูณร่วมน้อยของจำนวนเต็ม $a$ และ $b$

**ตัวอย่าง 2.2.5** $36 = [4, 18]$

**บทนิยาม 2.2.5** ถ้า $p$ เป็นจำนวนเต็มซึ่งไม่เท่ากับศูนย์ $p$ เป็นจำนวนเฉพาะก็ต่อเมื่อ $p \neq 1$, $p \neq -1$ และไม่เป็นจำนวนเต็มอื่นใดที่หาร $p$ ลงตัวนอกจาก $1, -1$, $p$ และ $-p$

**ตัวอย่าง 2.2.6** $2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11$ และ $-13$ ต่างก็เป็นจำนวนเฉพาะ

**ทฤษฎีบท 2.2.6** (Euclid : Book IX , Proposition 20) จำนวนเฉพาะที่เป็นบวกมีจำนวนไม่จำกัด

**พิสูจน์** สมมุติว่ามีจำนวนเฉพาะที่เป็นบวกเพียง $n$ ตัวคือ $p_1, p_2, \dots, p_n$

พิจารณาจำนวนเต็มบวก $P = (p_1\ p_2\ \dots\ p_n) + 1$

$P$ มีค่ามากกว่าจำนวนเฉพาะ $p_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ ทุกตัว และ $p_i$ แต่ละตัวหาร $P$ ไม่ลงตัว เพราะถ้า $p_i$ บางตัวหาร $P$ ลงตัว $p_i$ จะต้องหาร $1$ ลงตัวด้วย ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เพราะ $p_i \geq 2$

ดังนั้น $P$ เป็นจำนวนเฉพาะซึ่งมากกว่าจำนวนเฉพาะ $p_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ ทุกตัว ขัดกับสมมุติฐาน เพราะฉะนั้น จำนวนเฉพาะที่เป็นบวกมีจำนวนไม่จำกัด

**บทนิยาม 2.2.6** จำนวนคู่คือจำนวนเต็มที่สามารถเขียนอยู่ในรูป $2n$ โดยที่ $n$ เป็นจำนวนเต็ม
จำนวนคี่คือจำนวนเต็มที่สามารถเขียนอยู่ในรูป $2n + 1$ โดยที่ $n$ เป็นจำนวนเต็ม

**ตัวอย่าง 2.2.7** เนื่องจาก $0 = 2(0)$ โดยที่ $0$ เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้น $0$ จึงเป็นจำนวนคู่

**แบบฝึกหัด 2.2**

1. สำหรับจำนวนเต็มบวก $n$ ทุกตัว จงพิสูจน์ว่า
   (1) $3$ หาร $2^{2n}-1$ ลงตัว
   (2) $3$ หาร $n^3-n$ ลงตัว
   (3) $x-y$ หาร $x^n-y^n$ ลงตัว
2. จงพิสูจน์ว่า
   (1) จำนวนเต็มทุกตัวต้องเป็นจำนวนคู่หรือจำนวนคี่
   (2) ผลบวกของจำนวนคี่กับจำนวนคี่เป็นจำนวนคู่
   (3) ผลบวกของจำนวนคู่กับจำนวนคู่เป็นจำนวนคู่
   (4) ผลบวกของจำนวนคู่กับจำนวนคี่เป็นจำนวนคี่
   (5) จำนวนเต็มแต่ละตัวไม่สามารถเป็นทั้งจำนวนคู่และจำนวนคี่
   (6) ผลคูณของจำนวนคู่กับจำนวนคู่เป็นจำนวนคู่
   (7) ผลคูณของจำนวนคู่กับจำนวนคี่เป็นจำนวนคู่
   (8) ผลคูณของจำนวนคี่กับจำนวนคี่เป็นจำนวนคี่
   (9) ถ้า $a$ เป็นจำนวนคู่แล้ว $a^2$ เป็นจำนวนคู่ด้วย
3. จงหาตัวหารของ $105$
4. จงหาตัวหารร่วมมาก และ ตัวคูณร่วมน้อยของ
   (1) $18$ และ $24$
   (2) $28$ และ $42$
   (3) $26$ และ $-118$
   (4) $78$ และ $-42$
   (5) $5$ และ $6$
   (6) $9935$ และ $-796$
   (7) $918$ และ $0$
   (8) $1$ และ $-12$
   (9) $-10$ และ $-15$
5. จงหาจำนวนเฉพาะที่เป็นบวกทุกตัวที่น้อยกว่า $50$
6. คุณสมบัติของสัจพจน์ 1-14 ข้อใดบ้างที่ระบบจำนวนเต็มไม่มี
7. เมื่อเขียน $876$ เราหมายถึง $(8\times 10^2)+(7\times 10)+6$ ในกรณีทั่วไปเมื่อเขียน $a_n\,a_{n-1}\ldots a_1\,a_0$ เมื่อ $0\le a_i\le 9$ เราหมายถึง

$$(a_n\times 10^n)+(a_{n-1}\times 10^{n-1})+\cdots+(a_1\times 10)+a_0$$ จงพิสูจน์ว่า

   (1) $2$ จะหาร $a_n\,a_{n-1}\ldots a_1\,a_0$ ลงตัวก็ต่อเมื่อ $a_0$ เป็นจำนวนคู่
   (2) $3$ จะหาร $a_n\,a_{n-1}\ldots a_1\,a_0$ ลงตัวก็ต่อเมื่อ $3$ หาร $a_n+a_{n-1}+\ldots+a_1+a_0$ ลงตัว
   (3) $4$ จะหาร $a_n\,a_{n-1}\ldots a_1\,a_0$ ลงตัวก็ต่อเมื่อ $4$ หาร $a_1a_0$ ลงตัว
   (4) $5$ จะหาร $a_n\,a_{n-1}\ldots a_1\,a_0$ ลงตัวก็ต่อเมื่อ $a_0$ เท่ากับ $0$ หรือ $5$
   (5) $8$ จะหาร $a_n\,a_{n-1}\ldots a_1\,a_0$ ลงตัวก็ต่อเมื่อ $8$ หาร $a_2\,a_1\,a_0$ ลงตัว
   (6) $9$ จะหาร $a_n\,a_{n-1}\ldots a_1\,a_0$ ลงตัวก็ต่อเมื่อ $9$ หาร $a_n+a_{n-1}+\ldots+a_1+a_0$ ลงตัว

(7) 11 จะหาร $a_n\, a_{n-1} \dots a_1\, a_0$ ลงตัวก็ต่อเมื่อ 11 หาร $(-1)^n a_n +$
$(-1)^{n-1} a_{n-1} + \dots + a_2 - a_1 + a_0$ ลงตัว

(8) 12 จะหาร $a_n\, a_{n-1} \dots a_1\, a_0$ ลงตัวก็ต่อเมื่อ 4 หาร $a_1\, a_0$ ลงตัว และ 3 หาร $a_n + a_{n-1} \dots a_1 + a_0$ ลงตัว

8. จำนวนเต็มบวกจำนวนหนึ่งมี 3 ตำแหน่งหารด้วย 72 ลงตัว หลักพัน หลักร้อย และหลักสิบเป็น 6, 7 และ 9 ตามลำดับ หลักหมื่นและหลักหน่วยเป็นเท่าใด

9. จงเขียนตัวเลขในช่องว่าง $\square$ ซึ่งทำให้การคูณต่อไปนี้เป็นจริง

$$
\begin{array}{cccc}
 & \square & \square & \square \\
 & & & \times \\
 & & 2 & \square \\
\hline
2 & \square & \square & 8 \\
\square & 2 & 8 & \\
\hline
\square & 8 & 2 & 8
\end{array}
$$

10. กำหนดให้ x, y และ z เป็นจำนวนคี่ที่เรียงต่อกันโดยที่ $x < y < z$ ถ้าผลบวกของ x, y และ z น้อยกว่า 57 แล้วจงหาค่าของ x ที่มากที่สุด ซึ่งทำให้ผลบวกของจำนวนทั้งสามดังกล่าว มีค่ามากที่สุด

11. จำนวนเต็มบวกจำนวนหนึ่งมี 4 ตำแหน่ง หารด้วย 90 ลงตัว ถ้าหลักพันและหลักร้อยเป็น 2 และ 1 ตามลำดับ หลักสิบเท่ากับเท่าใด

12. จำนวนเต็มบวกจำนวนหนึ่งมี 4 ตำแหน่ง หารด้วย 55 ลงตัว ถ้าหลักหมื่นและหลักร้อยเป็น 3 และ 4 ตามลำดับ หลักพันเท่ากับเท่าใด

13. จำนวนเต็มบวกจำนวนหนึ่งมี 5 ตำแหน่ง หารด้วย 36 ลงตัว ให้หลักพัน หลักร้อย และ หลักสิบคือ 5, 3 และ 1 ตามลำดับ ถ้าหลักหมื่นน้อยกว่า 6 หลักหน่วยจะเป็นเท่าใด

14. จำนวนเต็มบวกจำนวนหนึ่งมี 5 ตำแหน่ง หารด้วย 24 ลงตัว ให้หลักพัน หลักร้อย และ หลักสิบคือ 8, 2 และ 1 ตามลำดับ ถ้าหลักหมื่นมากกว่า 4 หลักหน่วยจะเป็นเท่าใด

## 2.3 จำนวนตรรกยะและจำนวนอตรรกยะ

**บทนิยาม 2.3.1** จำนวนจริง $a$ จะเป็นจำนวนตรรกยะ ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม $m$ และ $n$, $n \neq 0$ โดยที่ $a = \frac{m}{n}$

เขียน $Q$ แทนเซตของจำนวนตรรกยะ

**ข้อสังเกต** เนื่องจากสำหรับจำนวนเต็ม $m$ ทุกตัว $m = \frac{m}{1}$ ดังนั้นจำนวนเต็มทุกตัวเป็นจำนวนตรรกยะ เพราะฉะนั้น $Q$ ไม่ใช่เซตว่าง

**ทฤษฎีบท 2.3.1** $Q$ กับการบวกและการคูณเป็นฟิลด์อันดับ

**พิสูจน์** (1) สำหรับจำนวนตรรกยะ $\frac{p}{q}$ และ $\frac{r}{S}$ ทุกตัว $p, q, r, S \in Z$ และ $q \neq 0, S \neq 0$

$$\frac{p}{q} + \frac{r}{S} = \frac{ps+rq}{qs}$$

เนื่องจาก $ps + rq$ เป็นจำนวนเต็ม และ $qs$ เป็นจำนวนเต็มซึ่งไม่เท่ากับศูนย์ ดังนั้น $\frac{ps+rq}{qs}$ เป็นจำนวนตรรกยะ เพราะฉะนั้น $Q$ มีสมบัติปิดของการบวก

(2) สมบัติการเปลี่ยนกลุ่มของการบวกเป็นจริงเพราะ $Q \subset R$

(3) $0 = \frac{0}{1}$ เป็นเอกลักษณ์ของการบวก

(4) ถ้า $\frac{m}{n}$ เป็นจำนวนตรรกยะ จะได้ว่า $-\frac{m}{n} = \frac{-m}{n}$ เป็นอินเวอร์สการบวกของ $\frac{m}{n}$

(5) สมบัติการสลับที่ของการบวกเป็นจริง เพราะ $Q \subset R$

(6) สำหรับจำนวนตรรกยะ $\frac{p}{q}$ และ $\frac{r}{S}$ ทุกตัว $p, q, r, S \in Z$ และ $q \neq 0, S \neq 0$ จะได้ว่า $\frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} = \frac{ps}{qs}$ โดยที่ $pr$ เป็นจำนวนเต็มและ $qs$ เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เท่ากับศูนย์ ดังนั้น $\frac{pr}{qs}$ เป็นจำนวนตรรกยะ เพราะฉะนั้น $Q$ มีสมบัติปิดการคูณ

(7) สมบัติการเปลี่ยนกลุ่มเป็นจริง เพราะ $Q \subset R$

(8) $1 = \frac{1}{1}$ เป็นเอกลักษณ์ของการคูณ

(9) ถ้า $\frac{m}{n}$ เป็นจำนวนตรรกยะซึ่งไม่เท่ากับ $0$ $m, n \in Z$ $m \neq 0, n \neq 0$ จะได้ว่า $(\frac{m}{n})^{-1} = \frac{n}{m}$ เป็นอินเวอร์สการคูณของ $\frac{m}{n}$

(10) สมบัติการสลับที่ของการคูณเป็นจริง เพราะ $Q \subset R$

(11) สมบัติการแจกแจงเป็นจริง เพราะ $Q \subset R$

(12) ให้ $Q^+ = Q \cap R^+$

สำหรับจำนวนตรรกยะ $a$ ทุกตัวจ ะได้ว่า สมบัติต่อไปนี้เป็นจริงเพียงข้อเดียวเท่านั้น

(i) $a \in R^+$

(ii) $a = 0$

(iii) $-a \in R^+$

ดังนั้นสมบัติในข้อนี้จะเป็นจริงเพียงข้อเดียวเท่านั้น

(i) $a \in Q^+$

(ii) $a = 0$

(iii) $-a \in Q^+$

(13) ถ้า $a \in Q^+$ และ $b \in Q^+$ จะได้ว่า $a\,Q, b \in Q$, $a \in R^+$ และ $b \in R^+$
เนื่องจากสมบัติปิดของการบวกเป็นจริงสำหรับ $Q$ และ $R^+$
ดังนั้น $a+b \in Q$ และ $a+b \in R^+$ เพราะฉะนั้น $a+b \in Q \cap R^+$
ดังนั้น $a+b \in Q^+$

(14) ถ้า $a \in Q^+$ และ $b \in Q^+$ สามารถพิสูจน์ในทำนองเดียวกันกับตอน (13) ว่า $ab \in Q^+$

**ข้อสังเกต** ถ้า $\frac{a}{b}$ เป็นจำนวนตรรกยะ $a, b \in Z$ , $b \neq 0$ และ $m$ เป็นจำนวนเต็มซึ่งไม่เท่ากับศูนย์ $\frac{ma}{mb} = \frac{a}{b}$ ดังนั้นเราสามารถเขียนจำนวนตรรกยะแต่ละตัวในรูปเศษส่วนได้หลายวิธี

**ทฤษฎีบท 2.3.2** มีจำนวนตรรกยะระหว่างจำนวนตรรกยะ 2 จำนวน

**พิสูจน์** ให้ $r$ และ $s$ เป็นจำนวนตรรกยะซึ่ง $r < S$

เนื่องจาก $r < \frac{r+S}{2} < S$ และ $\frac{r+S}{2}$ เป็นจำนวนตรรกยะ $\frac{r+S}{2}$ จึงเป็นจำนวนที่สอดคล้องกับที่ต้องการ

**บทนิยาม 2.3.2** เรียกจำนวนจริงที่ไม่ใช่จำนวนตรรกยะว่าจำนวนอตรรกยะ

**ทฤษฎีบท 2.3.3** กำหนดให้ $a$ เป็นจำนวนเต็ม ถ้า $a^2$ เป็นจำนวนคู่ จะได้ว่า $a$ เป็นจำนวนคู่

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

**ทฤษฎีบท 2.3.4** ถ้ามีจำนวนจริง $t$ ซึ่ง $t^2 = 2$ จะได้ว่า $t$ เป็นจำนวนอตรรกยะ

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

## แบบฝึกหัด 2.3

1. จงพิสูจน์ว่า
   (1) ผลบวกของจำนวนตรรกยะและจำนวนอตรรกยะเป็นจำนวนอตรรกยะ
   (2) ผลคูณของจำนวนอตรรกยะและจำนวนตรรกยะที่ไม่เท่ากับศูนย์เป็นจำนวนอตรรกยะ
2. ระบบจำนวนตรรกยะและระบบจำนวนเต็มมีสมบัติใดบ้างที่แตกต่างกัน
3. เซตของจำนวนอตรรกยะกับการบวกและการคูณมีสมบัติปิดหรือไม่ เพราะเหตุใด
4. ถ้ามีจำนวนจริง $t$ ซึ่ง $t^3 = 2$ จงพิสูจน์ว่า $t$ เป็นจำนวนอตรรกยะ