บทที่ 5
ระบบจำนวนเชิงซ้อน

นักคณิตศาสตร์ชาวกรีกชื่อ ดีโอฟานโตส (Diophantos) เริ่มเห็นว่าระบบจำนวนจริงนั้นไม่เพียงพอ ในราว พ.ศ. 818 เมื่อท่านต้องการแก้ปัญหาซึ่งดูเสมือนง่ายมากคือ หาด้านของสามเหลี่ยมมุมฉากซึ่งมีเส้นรอบรูปเท่ากับ 12 หน่วย และมีพื้นที่เท่ากับ 7 ตารางหน่วย ปัญหานี้ก่อให้เกิดสมการ $6x^2 - 43x + 84 = 0$ โดยที่ x เป็นความยาวของด้าน ๆ หนึ่งเนื่องจากสมการนี้ไม่สามารถแก้ได้ในระบบจำนวนจริง นักคณิตศาสตร์หลายท่านจึงได้สร้างจำนวนใหม่ขึ้น เรียกว่า จำนวนเชิงซ้อน (complex number)

5.1 สมบัติพื้นฐานของระบบจำนวนเชิงซ้อน

บทนิยาม 5.1.1 จำนวนเชิงซ้อนคือจำนวนซึ่งเขียนอยู่ในรูปคู่อันดับ (x, y) โดยที่ x และ y เป็นจำนวนจริงและมีสมบัติดังนี้

(1) $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ ก็ต่อเมื่อ $x_1 = x_2$ และ $y_1 = y_2$

(2) $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

(3) $(x_1, y_1) \times (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$

ตัวอย่าง 5.1.1 ให้ $z_1 = (4, 6)$ และ $z_1 = (-9, 5)$ จงหา $z_1 + z_2$ และ $z_1 z_2$

....

....

....

....

ให้ C แทนเซตของระบบจำนวนเชิงซ้อน

ทฤษฎีบท 5.1.1 $C, +, \times$ เป็นฟิลด์

พิสูจน์ ให้ $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$ และ $z_3 = (x_3, y_3)$ เป็นสมาชิกใด ๆ ใน C

1. สมบัติของการบวกเป็นจำนวนจริงโดยบทนิยาม

2.
$$\begin{aligned}(z_1 + z_2) + z_3 &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) + (x_3, y_3)\\ &= ((x_1 + x_2) + x_3, (y_1 + y_2) + y_3)\\ &= (x_1 + (x_2 + x_3), y_1 + (y_2 + y_3))\\ &= (x_1, y_1) + (x_2 + x_3, y_2 + y_3)\\ &= z_1 + (z_2 + z_3)\end{aligned}$$

3. จำนวนเชิงซ้อน (x, y) จะเป็นเอกลักลักษณ์ของการบวกของระบบจำนวนเชิงซ้อนก็ต่อเมื่อ

$$(x, y) + (x_1, y_1) = (x_1, y_1)$$

เนื่องจาก $(x, y) + (x_1, y_1) = (x + x_1, y + y_1)$

จากสมบัติการเท่ากันของจำนวนเชิงซ้อน $x + x_1 = x_1$ และ $y + y_1 = y_1$

เพราะฉะนั้น $x = 0$ และ $y = 0$

$$(0, 0) + (x_1, y_1) = (x_1, y_1)$$

ดังนั้น $(0, 0)$ เป็นเอกลักษณ์การบวก

4. การหาอินเวอร์สการบวกของจำนวนเชิงซ้อน (x_1, y_1) คือการหาจำนวนเชิงซ้อน (x, y) ซึ่ง

$$(x, y) + (x_1, y_1) = (0, 0)$$

เนื่องจาก $(x, y) + (x_1, y_1) = (x + x_1, y + y_1)$

จากสมบัติการเท่ากับของจำนวนเชิงซ้อน $x + x_1 = 0$ และ $y + y_1 = 0$

ดังนั้น $x = -x_1$ และ $y = -y_1$

$$(-x_1, -y_1) + (x_1, y_1) = (0, 0)$$

เพราะฉะนั้น $(-x_1, -y_1)$ เป็นอินเวอร์สการบวกของ (x_1, y_1)

5.
$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (x_1, y_1) + (x_2, y_2) \\ &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ &= (x_2 + x_1, y_2 + y_1) \\ &= (x_2, y_2) + (x_1, y_1) \\ &= z_2 + z_1 \end{aligned}$$

6. สมบัติของการคูณเป็นจริงโดยบทนิยาม

7.
$$\begin{aligned} (z_1 z_2) z_3 &= (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)(x_3, y_3) \\ &= ((x_1 x_2 - y_1 y_2) x_3 - (x_1 y_2 + x_2 y_1) y_3, \\ &\quad (x_1 x_2 - y_1 y_2) y_3 + x_3(x_1 y_2 + x_2 y_1)) \\ &= (x_1 x_2 x_3 - y_1 y_2 x_3 - x_1 y_2 y_3 - x_2 y_1 y_3), \\ &\quad (x_1 x_2 y_3 - y_1 y_2 y_3 + x_3 x_1 y_2 + x_3 x_2 y_1) \\ &= (x_1 x_2 x_3 - x_1 y_2 y_3 - x_2 y_1 y_3 - y_1 y_2 x_3), \\ &\quad (x_1 x_2 y_3 + x_3 x_1 y_2 + x_3 x_2 y_1 - y_1 y_2 y_3) \\ &= (x_1(x_2 x_3 - y_2 y_3) - y_1(x_2 y_3 - y_2 x_3), \\ &\quad (x_1(x_2 y_3 + x_3 y_2) + y_1(x_3 x_2 - y_2 y_3)) \\ &= (x_1, y_1)(x_2 x_3 - y_2 y_3, x_2 y_3 + x_3 y_2) \\ &= z_1(z_2 z_3) \end{aligned}$$

8. จำนวนเชิงซ้อน (x, y) จะเป็นเอกลักษณ์การคูณของระบบจำนวนเชิงซ้อน ก็ต่อเมื่อ $(x, y)(x_1, y_1) = (x_1, y_1)$ เนื่องจากถ้า $(x_1, y_1) = (0, 0)$ จะได้ว่า $(x, y) + (x_1, y_1) = (0, 0)$ ดังนั้น สำหรับกรณีนี้จำนวนเชิงซ้อนใดก็ใช้ได้ เพราะฉะนั้นจะพิจารณาเฉพาะกรณี $(x_1, y_1) \neq (0, 0)$

เนื่องจาก $(x, y)(x_1, y_1) = (x x_1 - y y_1, x y_1 + x_1 y)$

ดังนั้นจากสมบัติการเท่ากัน จะได้ว่า

$$x x_1 - y y_1 = x_1 \quad \text{-----------------------} (1)$$

$$x y_1 + x_1 y = y_1 \quad \text{-----------------------} (2)$$

(1) × x_1 $\quad x {x_1}^2 - x_1 y y_1 = {x_1}^2$ ----------------------- (3)

(2) × y_1 $\quad x {y_1}^2 + x_1 y y_1 = {y_1}^2$ ----------------------- (4)

(3) + (4) $\quad x {x_1}^2 + x {y_1}^2 = {x_1}^2 + {y_1}^2$

$$x(x_1^2+y_1^2) = x_1^2+y_1^2$$
$$x = \frac{x_1^2+y_1^2}{x_1^2+y_1^2}$$
$$x = 1$$

ถ้า $(x_1, y_1) \neq (0, 0)$ จะได้ว่า $x_1^2+y_1^2 \neq (0, 0)$ เพราะฉะนั้น $x = 1$
โดยวิธีการเดียวกันจะได้ว่า $y = 0$

$$(1, 0)(x_1, y_1) = (x_1, y_1)$$

ดังนั้น $(1,0)$ เป็นเอกลักษณ์การคูณ

9. การหาอินเวอร์สการคูณของจำนวนเชิงซ้อน (x_1, y_1) คือหาจำนวนเชิงซ้อน (x, y) ซึ่ง $(x, y)(x_1, y_1) = (1, 0)$ เนื่องจาก $(x, y)(x_1, y_1) = (xx_1 - yy_1, xy_1 + x_1y)$
จากสมบัติการเท่ากัน จะได้ว่า

$$xx_1 - yy_1 = 1 \quad \text{------------------------ (1)}$$
$$xy_1 + x_1y = 0 \quad \text{------------------------ (2)}$$

(1) × x_1 $\quad xx_1^2 - x_1yy_1 = x_1$ ------------------------ (3)

(2) × y_1 $\quad xy_1^2 + x_1yy_1 = 0$ ------------------------ (4)

(3) + (4) $\quad xx_1^2 + xy_1^2 = x_1$

$$x = \frac{x_1}{x_1^2+y_1^2}$$

โดยวิธีการเดียวกันจะได้ว่า $\quad y = -\frac{y_1}{x_1^2+y_1^2}$

เนื่องจาก $\quad (x, y)(x_1, y_1) = (1, 0)$ จะได้ว่า

$$\left(\frac{x_1}{x_1^2+y_1^2}, -\frac{y_1}{x_1^2+y_1^2}\right)(x_1, y_1) = (1, 0)$$

ดังนั้น ถ้า $(x_1, y_1) \neq (0, 0)$ แล้ว (x_1, y_1) จะมีอินเวอร์สการคูณคือ
$\left(\frac{x_1}{x_1^2+y_1^2}, -\frac{y_1}{x_1^2+y_1^2}\right)$

10.
$$\begin{aligned} z_1z_2 &= (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1) \\ &= (x_2x_1 - y_2y_1, x_2y_1 + x_1y_2) \\ &= z_2z_1 \end{aligned}$$

11.
$$\begin{aligned} z_1(z_2+z_3) &= (x_1, y_1)(x_2+x_3, y_2+y_3) \\ &= (x_1(x_2+x_3) - y_1(y_2+y_3), x_1(y_2+y_3) + x_2 + x_3)y_1 \\ &= (x_1x_2 + x_1x_3 - y_1y_2 - y_1y_3, x_1y_2 + x_1y_3 + x_2y_1 + x_3y_1) \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2 + x_1x_3 - y_1y_3, x_1y_2 + x_2y_1 + x_1y_3 + x_3y_1) \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1) + (x_1x_3 - y_1y_3, x_1y_3 + x_3y_1) \\ &= z_1z_2 + z_1z_3) \end{aligned}$$

เนื่องจากการลบคือการบวกด้วยอินเวิอร์สการบวกของตัวลบ ดังนี้

$$\begin{aligned} (x_1, y_1) - (x_2, y_2) &= (x_1, y_1) + (-x_2, -y_2) \\ &= (x_1 - x_2, y_1 - y_2) \end{aligned}$$

และการหารคือการคูณด้วยอินเวอร์สการคูณของตัวหาร ดังนั้น

$$\frac{(x_1,\ y_1)}{(x_2,\ y_2)} = (x_1,\ y_1)\left(\frac{x_1}{x_1{}^2+y_1{}^2}\ ,\ \frac{-y_1}{x_1{}^2+y_1{}^2}\right)$$
$$= \left(\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2{}^2+y_2{}^2}\ ,\ \frac{-x_1y_2+x_2y_1}{x_2{}^2+y_2{}^2}\right)$$

ตัวอย่าง 5.1.2 กำหนดจำนวนเชิงซ้อน $z_1 = (1, -3)$ และ $z_2 = (3, -1)$ จงหา $z_1{}^2 - z_2{}^2$

……

……

……

……

……

……

……

……

พิจารณาการจับคู่หนึ่งต่อหนึ่งระหว่างจำนวนเชิงซ้อน $(x\,,\ 0)$ และจำนวนจริง x

$$\begin{array}{ccccc} (x_1,\ 0) & + & (x_2,\ 0) & = & (x_1 + x_2,\ 0) \\ \Updownarrow & & \Updownarrow & & \Updownarrow \\ x_1 & + & x_2 & = & x_1 + x_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} (x_1,\ 0) & (x_2,\ 0) & = & (x_1\, x_2,\ 0) \\ \Updownarrow & \Updownarrow & & \Updownarrow \\ x_1 & x_2 & = & x_1\, x_2 \end{array}$$

จะเห็นว่า ถ้าบวกจำนวนเชิงซ้อนทั้งสองก่อน แล้วนำมาจับคู่กับจำนวนจริง จะเหมือนกับจับคู่กับจำนวนจริงก่อน แล้วจึงบวกกัน และสำหรับการคูณก็เช่นเดียวกัน ดังนั้นการจับคู่หนึ่งต่อหนึ่งนี้จึงเป็นไอโซมอร์ฟิซึม (isomorphism) ระหว่างสับเซตของ $\mathbb{C}$ ซึ่งประกอบด้วยจำนวนเชิงซ้อนในรูป $(x,\ 0)$ กับเซตของจำนวนจริง เพื่อความสะดวกจึงเขียนแทน $(x,\ 0)$ ด้วย x

เนื่องจาก $(0,\ 1)(0,\ 1) = (-1,\ 0)$ ถ้าแทน $(0,\ 1)$ ด้วย i และได้ตกลงกันแล้วว่าจะแทน $(-1,\ 0)$ ด้วย -1 ดังนั้น $i^2 = -1$

เนื่องจาก $yi = (y,\ 0)(0,\ 1) = (0,\ y)$ และสามารถแทน $(x,\ 0)$ ด้วย x

ดังนั้น $(x,\ y) = (x,\ 0) + (0,\ y)$

$\qquad\qquad = x + yi$

จึงอาจเขียนแทนจำนวนเชิงซ้อน $(x,\ y)$ ด้วย $x + yi$ และเรียก x ว่าส่วนจริง (real part) เรียก y ว่าส่วนจินตภาพ (imaginary part)

ถ้า $z = x + yi$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนใดๆ เขียนแทนส่วนจริงของ z ด้วย $R(z)$ และส่วนจินตภาพของ z ด้วย $I(z)$ ดังนั้น $R(z) = x$ และ $I(z) = y$ นิยมเรียกจำนวนเชิงซ้อนในรูป $(0, y) = yi$, $y \neq 0$ ว่าจำนวนจินตภาพ (imaginary number)

การเขียนจำนวนเชิงซ้อนในรูป $x + yi$ นี้เป็นที่นิยมกันเพราะสามารถนำสมบัติของการบวก ลบ คูณ หาร ในระบบจำนวนจริงมาใช้ในการบวก ลบ คูณ หาร จำนวนเชิงซ้อน

$$(x_1, y_1 i) + (x_2, y_2 i) = (x_1 + x_2) + (y_1, y_2) i$$
$$(x_1, y_1 i)(x_2, y_2 i) = x_1 x_2 + x_1 y_2 i + x_2 y_1 i + y_1 y_2 i^2$$
$$= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1) i$$

ตัวอย่าง 5.1.3 จงหาค่าของ $(x_1 + y_1 i)(x_1 - y_1 i)$

....

....

....

....

บทนิยาม 5.1.2 ถ้า $z = x + yi$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน คอนจุเกต (conjugate) ของ z คือจำนวนเชิงซ้อน $\bar{z} = x - yi$

ตัวอย่าง 5.1.4 คอนจุเกตของจำนวนเชิงซ้อน $4 + 7i$ คือ................................

คอนจุเกตของจำนวนเชิงซ้อน $4 - 7i$ คือ................................

คอนจุเกตของจำนวนเชิงซ้อน $-4 + 7i$ คือ................................

คอนจุเกตของจำนวนเชิงซ้อน $-4 - 7i$ คือ................................

คอนจุเกตของจำนวนเชิงซ้อน $2i$ คือ................................

คอนจุเกตของจำนวนเชิงซ้อน -6 คือ................................

ตัวอย่าง 5.1.5 จงเขียน $\dfrac{1}{a + bi}$ ให้อยู่ในรูป $x + yi$

....

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 5.1.6 จงเขียน $\dfrac{a+bi}{c+di}$ ให้อยู่ในรูป $x+yi$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 5.1.7 จงเขียน $\dfrac{5+2i}{5-2i}$ ในรูป $x+yi$

....

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 5.1.8 จงเขียน $\dfrac{2(3+2i)^2\ (1-3i)}{(3+i)^2\ \ (1+2i)} + \dfrac{1+i}{1-i}$ ในรูป $x+yi$

....

....

....

....

....

....

....

....

ทฤษฎีบท 5.1.2 กำหนดจำนวนเชิงซ้อน $z = x + yi$ จะได้ว่า

(1) $R(z) = \dfrac{z+\bar{z}}{2}$

(2) $I(z) = \dfrac{z-\bar{z}}{2i}$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ทฤษฎีบท 5.1.3 ถ้า z_1 และ z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน จะได้ว่า

(1) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

(2) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$

(3) $z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}\,z_2 = 2R(z_1\overline{z_2})$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

แบบฝึกหัด 5.1

1. ถ้า z_1 และ z_2 อยู่ใน C จงพิสูจน์ว่า

$$(-z_1)z_2 = z_1(-z_2) = -(z_1 z_2) = (-1,0)(z_1 z_2)$$

2. จงเขียนจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ในรูป $x + yi$

(1) $(2+7i)(9-3i)$

(2) $\dfrac{4+3i}{2+5i}$

(3) $6i$

(4) $\dfrac{6}{i}$

(5) $(5+6i)^2$

(6) 46

(7) i^5

(8) i^{32}

(9) i^{-2}

(10) i^{-21}

(11) i^{674}

(12) $i^3+i^4+i^5+i^6+i^7$

(13) $i^{55}+i^{55}$

(14) $i^{66}\,i^{10}$

(15) $(i^{10})^2$

(16) i^{10^2}

(17) $\dfrac{3-i^2}{i+3^2}$

(18) $(-i)^{101}$

(19) $(i)(3i)(5i)^2$

(20) $(i-1)(i+1)(i-3)(i+3)$

(21) $(a-b-bi)(a-b+bi)$

(22) $\dfrac{a^2+b^2}{a-bi}\cdot\dfrac{a+bi}{a-bi}$

(23) $\dfrac{i}{1+i+\dfrac{i}{i+\dfrac{i}{i+1}}}$

3. ให้ $z_1 = (1, a)$ และ $z_2 = (a, 1)$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน จงแสดงว่า

(1) $z_1 z_2 = (0, a2+1)$

(2) $z_1{}^2 - z_2{}^2 = 2(a2-1, 0)$

(3) $\dfrac{z_1+z_1}{z_2-z_1} = \dfrac{a+1}{a-1}(0,\ 0)$

4. จงหาค่าของ x และ y เมื่อ

(1) $x + yi = 5 + 12i$

(2) $x + 3yi = 24i$

(3) $4x + 6yi = 16$

(4) $x + 4yi = 1 + 8i^2$

(5) $i^2 x^2 = i(y^2 - 1)$

(6) $\frac{1}{i^3}(3x + 2y) = i^8 + i^9 + i^{10} + i^{11} + i^{12}$

5. ในระบบจำนวนเชิงซ้อน จงพิสูจน์ว่าสมการ $(a, b) = (x, y)(c, d)$ เมื่อ $(c, d) \neq (0, 0)$ มีรากเพียงรากเดียวคือ $(x, y) = \left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}, \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)$

6. ในระบบจำนวนเชิงซ้อน ถ้า $(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (0, 0)$ จงพิสูจน์ว่า $(x_1, y_1) = (0, 0)$ หรือ $(x_2, y_2) = (0, 0)$

7. จงพิสูจน์ว่า สับเซตของ C ซึ่งประกอบด้วยจำนวนเชิงซ้อนในรูป $(0, x)$ ไม่ไอโซมอร์ฟิกกับ R

8. จงหาคอนจุเกตของจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้

(1) $2 - 3i$

(2) $4 + i\sqrt{2}$

(3) -3

(4) $2i$

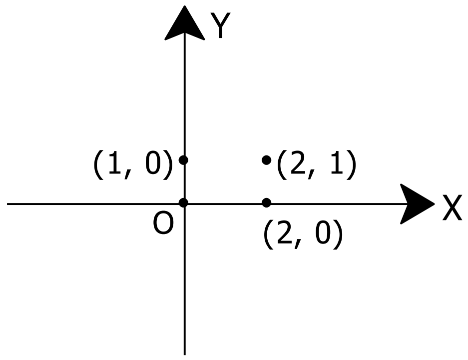
(5) $(9 - i)^2$

9. จงแสดงว่า $z = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$ สอดคล้องกับสมการ $\frac{3}{z+1} - \frac{1}{z} = 1$

10. จงแสดงว่า $\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^6 = 1$

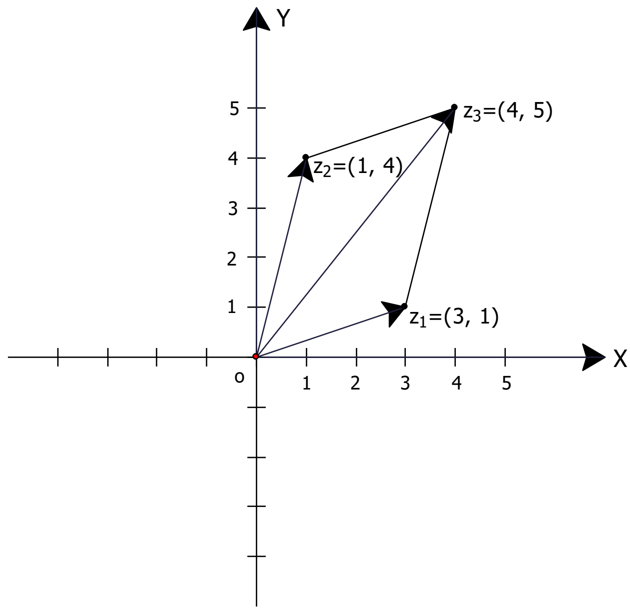
5.2 จำนวนเชิงซ้อนในทางเรขาคณิต

ในทำนองเดียวกันกับที่แทนจำนวนจริงด้วยจุดบนเส้นตรง จะแทนจำนวนเชิงซ้อนด้วยจุดในระนาบ โดยแทนจำนวนเชิงซ้อน $z = (x, y)$ ด้วยจุดซึ่งมีพิกัด (x, y) เช่น เขียนแทนจำนวนเชิงซ้อน $z_1 = (2, 1)$ ด้วยจุดห่างจากแกน Y ไปทางขวา 1 หน่วย และอยู่เหนือแกน X 2 หน่วย



ผู้ริเริ่มการแทนจำนวนเชิงซ้อนด้วยจุดในระนาบนี้ ได้แก่ เกาส์ (Gauss) และ อาร์กองด์ (Argand) ในบางครั้งจึงเรียกระนาบนี้ว่าระนาบของเกาส์ (Gaussian plane) หรือระนาบของอาร์กองด์ (Argand diagram) เนื่องจากจุดบนแกน X ใช้แทนจำนวนจริง และจุดบนแกน Y ใช้แทนจำนวนจินตภาพ จึงนิยมเรียกแกน X และแกน Y ในระนาบของจำนวนเชิงซ้อนว่า แกนจริง (Real Axis) และแกนจินตภาพ (Imaginary Axis) ตามลำดับ

กำหนดให้ จำนวนเชิงซ้อน $z_1 = (3, 1)$ และ $z_2 = (1, 4)$ ให้ $z_3 = z_1 + z_2$ จะได้ว่า $z_3 = (3, 1) + (1, 4) = (4, 5)$



จะเห็นได้ว่าการบวกจำนวนเชิงซ้อนในระนาบเหมือนกับบวกเวกเตอร์ บางครั้งจึงเขียนแทนจำนวนเชิงซ้อนด้วยเวกเตอร์ เช่น แทนจำนวนเชิงซ้อน $z_1 = (5, 6)$ ด้วยเวกเตอร์ที่มีจุด $(0, 0)$ เป็นจุดเริ่มต้นและจุด $(5, 6)$ เป็นจุดสิ้นสุด

ขนาดของเวกเตอร์ $z = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ เท่ากับ $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ ในกรณีทั่วไปขนาดของเวกเตอร์ $z = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ คือ $\sqrt{x^2 + y^2}$

บทนิยาม 5.2.1 ค่าสัมบูรณ์ (Absolute Value) หรือมอดุลัส (Modulus) ของจำนวนเชิงซ้อน $a + bi$ คือ $\sqrt{a^2 + b^2}$

ถ้าเขียนแทนค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน $x + yi$ ด้วย $|x + yi|$ จะได้ว่า $|x + yi| = \sqrt{x^2 + y^2}$ จงสังเกตว่าค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน $z = (x, y)$ คือขนาดของเวกเตอร์ที่แทนจำนวนเชิงซ้อน $z = (x, y)$

ทฤษฎีบท 5.2.1 ถ้า $z \in C$ จะได้ว่า $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = |\bar{z}|$

....

....

....

....

....

....

ทฤษฎีบท 5.2.2 ถ้า $z \in C$ จะได้ว่า $|R(z)| \leq |z|$ และ $|I(z)| \leq |z|$

....

....

....

....

....

....

....

ทฤษฎีบท 5.2.3 ถ้า z_1 และ z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน จะได้ว่า

(1) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

(2) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ ถ้า $z_2 \neq 0$

....

....

....

....

....

....

....

ทฤษฎีบท 5.2.4 ถ้า z_1 และ z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน จะได้ว่า

(1) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

(2) $\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 - z_2|$

ทฤษฎีบท 5.2.5 ถ้า z_1 และ z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน จะได้ว่า

(1) $R(z_1 + z_2) = R(z_1) + R(z_2)$

(2) $I(z_1 + z_2) = I(z_1) + I(z_2)$

(3) $R(z_1 z_2) = R(z_1)\, R(z2) - I(z_1)\, I(z_2)$

(4) $I(z_1 z_2) = R(z_1)\, I(z_2) + I(z_1)\, R(z_2)$

ตัวอย่าง 5.2.0 ให้ $z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ จงหา $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{1+z}\right)$

....

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 5.2.1 จงหาค่าสัมบูรณ์ของ $(1 + i)(1 + i\sqrt{3})(\sqrt{3} - i)$

....

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 5.2.2 กำหนดให้ $z^{-1} = (a + bi)^{-1} + (a + ci)^{-1}$

$z = x + yi$

$a, b, c, x, y \in R$ จงหา $x^2 + y^2$

....

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 5.2.3 ให้ z_1 และ z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน ถ้าทั้ง $z_1 + z_2$ และ $z_1 z_2$ เป็นจำนวนจริง จงพิสูจน์ว่าทั้ง z_1 และ z_2 เป็นจำนวนจริงหรือ $z_1 = \overline{z_1}$

วิธีทำ ให้ $z_1 + z_2 = r_1$ และ $z_1 z_2 = r_2$ โดยที่ r_1 และ r_2 เป็นจำนวนจริง

เป็นการเพียงพอที่ต้องพิสูจน์เฉพาะกรณีที่ต้องมี z_1 หรือ z_2 ตัวใดตัวหนึ่งไม่เท่ากับศูนย์

(1) ถ้า $z_2 \neq 0$ จะได้ว่า

$$z_1 = \frac{r_2}{z_2} = \frac{r_2\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}} = \frac{r_2\overline{z_2}}{|z_2|^2} = r_3\overline{z_2} \quad , \ r_3 \text{ เป็นจำนวนจริง}$$

ดังนั้น
$$\begin{aligned} r_3\overline{z_2} + z_2 &= r_1 \\ I(r_3\overline{z_2} + z_2) &= I(r_1) \\ r_3 I(\overline{z_2}) + I(z_2) &= 0 \\ -r_3 I(\overline{z_2}) + I(z_2) &= 0 \\ (1 - r_3) I(z_2) &= 0 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $r_3 = 1$ หรือ $I(z_2) = 0$

ถ้า $r_3 = 1$ จะได้ว่า $z_2 = \overline{z_2}$

ถ้า $I(z_2) = 0$

จะได้ว่า z_2 เป็นจำนวนจริง เพราะฉะนั้น z_1 จะเป็นจำนวนจริงด้วย

(2) ถ้า $z_1 \neq 0$ จะได้ว่า

$$z_2 = \frac{r_1}{z_1} = \frac{r_1\overline{z_1}}{z_1\overline{z_1}} = \frac{r_1\overline{z_1}}{|z_1|^2} = r_3\overline{z_1} \quad , \ r_3 \text{ เป็นจำนวนจริง}$$

ดังนั้น
$$\begin{aligned} r_3\overline{z_1} + z_1 &= r_2 \\ I(r_3\overline{z_1} + z_1) &= I(r_2) \\ r_3 I(\overline{z_1}) + I(z_1) &= 0 \\ -r_3 I(\overline{z_1}) + I(z_1) &= 0 \\ (1 - r_3) I(z_1) &= 0 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $r_3 = 1$ หรือ $I(z_1) = 0$

ถ้า $r_3 = 1$ จะได้ว่า $z_1 = \overline{z_1}$

ถ้า $I(z_1) = 0$

จะได้ว่า z_1 เป็นจำนวนจริง เพราะฉะนั้น z_2 จะเป็นจำนวนจริงด้วย

ตัวอย่าง 5.2.4 ถ้า z_0 เป็นจำนวนคงที่เชิงซ้อนคงที่ r เป็นจำนวนจริง และ z เป็นจำนวนเชิงซ้อนใดๆ ในเชิงเรขาคณิต

$|z - z_0| = r$ คือวงกลมรัศมี r จุดศูนย์กลางที่ z_0

$|z - z_0| < r$ คือเซตของจุดภายในวงกลมรัศมี r จุดศูนย์กลางที่ z_0

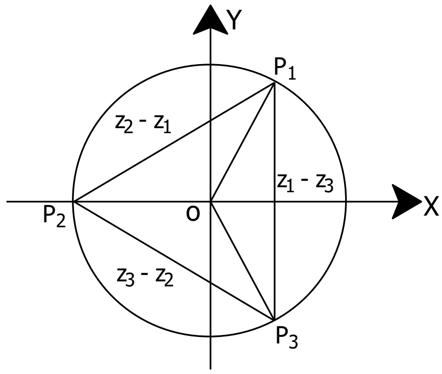
ถ้า $z_1 = (x_1, y_1)$ และ $z_2 = (x_2, y_2)$

ระยะทางระหว่าง z_1 และ z_2 คือ $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = |z_2 - z_1|$

ดังนั้น
$$\begin{aligned} |z_2 - z_1| &\geq |x_2 - x_1| \\ |z_2 - z_1| &\geq |y_2 - y_1| \end{aligned}$$

และ $|z_2 - z_1| \leq |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$

ตัวอย่าง 5.2.5 ถ้า z_1, z_2 และ z_3 เป็นจำนวนเชิงซ้อนซึ่ง $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ และ $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ จงพิสูจน์ว่า z_1, z_2 และ z_3 เป็นจุดยอดของสามเหลี่ยมด้านเท่าซึ่งอยู่บนวงกลมหนึ่งหน่วย



วิธีทำ ให้ $z_k = \overrightarrow{OP_k}$, $k = 1, 2, 3$

ในรูปสามเหลี่ยม P_1 P_2 P_3 จะได้ว่า

$$\overrightarrow{P_1 P_2} = z_2\, z_1$$

$$\overrightarrow{P_2 P_3} = z_3\, z_2$$

$$\overrightarrow{P_3 P_1} = z_1\, z_3$$

ต้องการพิสูจน์ว่า $|z_2 - z_1| = |z_3 - z_2| = |z_1 - z_3|$

ตอนแรกจะพิสูจน์ว่า $|z_2 - z_1| = |z_1 - z_3|$

เนื่องจาก $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ ดังนั้น $z_1 = -(z_2 + z_3)$

เพราะฉะนั้นข้อความ $|z_2 - z_1| = |z_1 - z_3|$

$$|2z_2 - z_3| = |2z_3 - z_2|$$

ข้อความนี้สมมูลกับ

$$(2z_2 + z_3)(\overline{2z_2 + z_3}) - (2z_3 + z_2)(\overline{2z_3 + z_2}) = 0$$

เมื่อกระจายข้อความหลังนี้จะเห็นได้ชัดว่าเป็นจริง โดยสมบัติ $z_2\overline{z_2} = z_3\overline{z_3} = 1$

ในทำนองเดียวกัน สามารถพิสูจน์ว่า $|z_2 - z_1| = |z_3 - z_2|$ ดังนั้นสามเหลี่ยม P_1 P_2 P_3 เป็นสามเหลี่ยมด้านเท่า แต่เนื่องจาก $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ เพราะฉะนั้นสามเหลี่ยม P_1 P_2 P_3 อยู่บนวงกลมหนึ่งหน่วย

แบบฝึกหัด 5.2

1. ถ้า z_1 และ z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน จงพิสูจน์ว่า
$$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2 = 2|z_1|^2+2|z_2|^2$$

2. ให้ $z_1 = 3+2i$ และ $z_2 = 4-i$ จงหา $|z_1|$, $|\overline{z_2}|$, $|z_1 z_2|$, $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|$ และ $|z_1\overline{z_2}|$

3. z เป็นจุดในระนาบเชิงซ้อน จงหาจุดซึ่งสมมาตรกับจุด z เมื่อเทียบกับ
   (1) จุด $(0,\ 0)$
   (2) แกนจริง
   (3) แกนจินตภาพ
   (4) เส้นตรงซึ่งทำมุม $\frac{\pi}{4}$ กับแกนจริง
   (5) เส้นตรงซึ่งทำมุม $\frac{3\pi}{4}$ กับแกนจริง
   (6) เส้นตรงซึ่งทำมุม $\frac{\pi}{3}$ กับแกนจริง
   (7) เส้นตรงซึ่งทำมุม $\frac{5\pi}{6}$ กับแกนจริง

4. จงบรรยายถึงเซตของจุดในระนาบของจำนวนเชิงซ้อนซึ่งมีสมบัติต่อไปนี้
   (1) $|z| = 1$
   (2) $z+\bar{z} = 1$
   (3) $z-\bar{z} = i$
   (4) $r_1 \le |z-z_1| \le r_2$, $z_1 \in C$, r_1 และ r_2 เป็นจำนวนจริงบวก
   (5) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = 1$
   (6) $z^2 = 2(z-1)$
   (7) $|z-1| \le 2|z+1|$
   (8) $|z+1| \le 4-|z-1|$

5. จงพิสูจน์ว่าสมการของวงกลมในระนาบเชิงซ้อนคือ $az\bar{z}+b\bar{z}+\bar{b}z+c = 0$ โดยที่ $a \neq 0$ b เป็นจำนวนเชิงซ้อนซึ่งมีค่าคงที่ และ c เป็นจำนวนจริงซึ่งมีค่าคงที่

6. จงพิสูจน์ว่า ถ้า $|z_1| = 1$ และ $z_1 \neq z_2$ แล้ว $\left|\frac{z_1-z_2}{1-\overline{z_2}\,z_1}\right| = 1$

7. จงพิสูจน์ว่า ถ้า z เป็นจำนวนเชิงซ้อนซึ่ง $|z| < 1$ จะได้ว่า $1+z$ อยู่ทางขวาของแกนจินตภาพ

8. จงพิสูจน์ว่า $\sqrt{2}\,|x+iy| \ge |x|+|y| \ge |x+iy|$

9. จงพิสูจน์ว่า จุด z_1 , z_2 และ z_3 ในระนาบเชิงซ้อนจะอยู่บนเส้นตรงเดียวกันก็ต่อเมื่อ $\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}$ เป็นจำนวนจริง

10. จงพิสูจน์ว่า จุด z_1 , z_2 และ z_3 ในระนาบเชิงซ้อนจะอยู่บนเส้นตรงเดียวกันก็ต่อเมื่อมีจำนวนจริง p, q และ r ซึ่งมีบางตัวไม่เท่ากับศูนย์

ซึ่ง $p + q + r = 0$ และ $pz_1 + qz_2 + rz_3 = 0$

11. จงพิสูจน์ว่า เวกเตอร์ z_1 และ z_2 ในระนาบเชิงซ้อนจะตั้งฉากกันก็ต่อเมื่อ $z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 = 0$

12. จงพิสูจน์ว่า จุด z_1 , z_2 และ z_3 ในระนาบเชิงซ้อน ไม่สามารถจะอยู่ข้างเดียวกันของแกนจริง ถ้า $z_1 + z_2 + z_3 = z_1 z_2 z_3$

13. ถ้า $z_2 \neq 0$

(1) จงพิสูจน์ว่า ถ้า $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$

หรือ $|z_1 - z_2| = \big||z_1| - |z_2|\big|$ แล้ว $z_1 = rz_2$ เมื่อ $r \geq 0$

(2) จงเขียนบทกลับของ (1) และพิสูจน์ว่าบทกลับเป็นจริง

5.3 จำนวนเชิงซ้อนในรูปพิกัดเชิงขั้ว

จำนวนเชิงซ้อน ในรูปพิกัดของระบบแกนมุมฉาก สามารถเขียนในรูปพิกัดของระบบแกนเชิงขั้ว

ถ้า (r, θ) เป็นพิกัดเชิงขั้วของจำนวนเชิงซ้อน $z = x + iy$

จะได้ว่า $x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

โดยที่ $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$

θ กำหนดได้ดังนี้

ถ้า $x \neq 0$ และ $y \neq 0$ จะได้ $\tan\theta = \frac{y}{x}$ โดยที่ $\frac{\pi}{2}$

(1) ถ้า $x > 0$ และ $y > 0$ $0 < \propto < \frac{\pi}{2}$, $\theta = \propto + 2n\pi$, $n \in z$

(2) ถ้า $x < 0$ และ $y > 0$ $\frac{\pi}{2} < \propto < \pi$, $\theta = \propto + 2n\pi$, $n \in z$

(3) ถ้า $x < 0$ และ $y < 0$ $\pi < \propto < \frac{3\pi}{2}$, $\theta = \propto + 2n\pi$, $n \in z$

(4) ถ้า $x > 0$ และ $y < 0$ $\frac{3\pi}{2} < \propto < 2\pi$, $\theta = \propto + 2n\pi$, $n \in z$

ถ้า $x \neq 0$ และ $y = 0$ จะได้

(1) ถ้า $x > 0$ $\theta = 0 + 2n\pi$, $n \in z$

(2) ถ้า $x < 0$ $\theta = \pi + 2n\pi$, $n \in z$

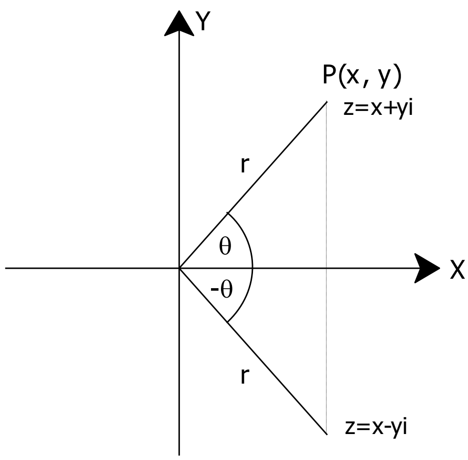
ถ้า $x = 0$ จะได้

(1) ถ้า $y > 0$ $\theta = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, $n \in z$

(2) ถ้า $y < 0$ $\theta = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi$, $n \in z$

(3) ถ้า $y = 0$ θ เป็นจำนวนจริงใดก็ได้

เรียก θ ว่าอาร์กิวเมนต์ (argument) หรือแอมพลิจูด (amplitude) ของ z เขียนแทนด้วย $\arg z$ ถ้า θ อยู่ในช่วง $(-\pi, \pi]$ เรียก θ ว่า อาร์กิวเมนต์หลัก (principal argument) และเขียนแทนด้วย $\mathrm{Arg}\, z$



$\bar{z} = x - iy = r(\cos\theta - i\sin\theta = r[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)]$

ดังนั้น $\bar{z}$ คือจุดซึ่งเกิดจากการสะท้อนภาพของจุด z โดยมีแกนจริงเป็นเส้นสะท้อน

นั่นคือ $|\bar{z}| = |z| = r$ และ $\arg\bar{z} = -\arg z = -\theta$

ตัวอย่าง 3.3.1 $z = 2\left[\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right]$ จงหา | z | และ Arg z

....

....

....

ตัวอย่าง 5.3.2 $z = 5\left[-\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right]$ จงหา | z | และ Arg z

....

....

....

....

ตัวอย่าง 5.3.3 $z = 7\left[\sin\frac{\pi}{3} + i\cos\frac{\pi}{3}\right]$ จงหา | z | และ Arg z

....

....

....

....

ตัวอย่าง 5.3.4 $z = -7\left[\sin\frac{\pi}{3} + i\cos\frac{\pi}{3}\right]$ จงหา | z | และ Arg z

....

....

....

....

ตัวอย่าง 5.3.5 $z = 4\left[-\sin\frac{\pi}{6} + i\cos\frac{\pi}{6}\right]$ จงหา | z | และ Arg z

....

....

....

....

ตัวอย่าง 5.3.6 $z = 3\left[\sin\frac{\pi}{5} - i\cos\frac{\pi}{5}\right]$ จงหา | z | และ Arg z

....

....

....

ในตัวอย่าง 5.3.1 – 5.3.6 ความรู้พื้นฐานทางตรีโกณมิติซึ่งต้องใช้ ได้แก่สูตรต่อไปนี้

ฟังก์ชัน / จำนวนจริง	sin	cos	tan
$-\theta$	$-\sin\theta$	$\cos\theta$	$-\tan\theta$
$\frac{\pi}{2}-\theta$	$\cos\theta$	$\sin\theta$	$\cot\theta$
$\frac{\pi}{2}+\theta$	$\cos\theta$	$-\sin\theta$	$-\cot\theta$
$\pi-\theta$	$\sin\theta$	$-\cos\theta$	$-\tan\theta$
$\pi+\theta$	$-\sin\theta$	$-\cos\theta$	$\tan\theta$
$\frac{3\pi}{2}-\theta$	$-\cos\theta$	$-\sin\theta$	$\cot\theta$
$\frac{3\pi}{2}+\theta$	$-\cos\theta$	$\sin\theta$	$-\cot\theta$
$2\pi-\theta$	$-\sin\theta$	$\cos\theta$	$-\tan\theta$

ทฤษฎีบท 5.3.1 ค่าสัมบูรณ์ของผลคูณของจำนวนเชิงซ้อนสองจำนวน คือผลคูณของค่าสัมบูรณ์ของจำนวนทั้งสอง อาร์กิวเมนต์ของผลคูณคือผลบวกของอาร์กิวเมนต์ของจำนวนทั้งสอง

ค่าสัมบูรณ์ของผลหารของจำนวนเชิงซ้อนสองจำนวนคือ ผลหารของค่าสัมบูรณ์ของจำนวนทั้งสอง อาร์กิวเมนต์ของผลหารคือผลลบของอาร์กิวเมนต์ของจำนวนทั้งสอง

....

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 5.3.7 ถ้า $z_1 = 6(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$ และ $z_2 = 3(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$ จงหา $z_1 z_2$ และ $\frac{z_1}{z_2}$

....

....

....

....

....

....

ทฤษฎีบท 5.3.2 ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า

$$[r(\cos\theta + i\sin\theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

นิยมเรียกทฤษฎีบท 5.3.2 ว่าทฤษฎีบทของเดอมัวฟ์ (De Moivre’s theorem)

ตัวอย่าง 5.3.8 จงหาค่าของ $(1+i)^6$

....

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 5.3.9 จงหาค่าของ $(\cos\theta + i\sin\theta)^3$

วิธีทำ โดยทฤษฎีบททวินาม (Binomial Theorem) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}(\cos\theta + i\sin\theta)^3 &= \cos^3\theta + 3i\cos^2\theta\sin\theta + 3i^2\cos\theta\sin^2\theta + i^3\sin^3\theta \\ &= \cos^3\theta + 3i\cos^2\theta\sin\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta - i\sin^3\theta \\ &= \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta + i\,(3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta)\end{aligned}$$

แต่โดยทฤษฎีบทของเดอมัวฟ์ (De Moivre's theorem) จะได้ว่า

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos 3\theta + i\sin 3\theta$$

ดังนั้น $\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta$

$\sin 3\theta = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta$

จะได้ว่า $(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta + i\,(3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta)$

ตัวอย่าง 5.3.10 จงหาค่าของ $\dfrac{1}{r(\cos\theta + i\sin\theta)}$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ทฤษฎีบท 5.3.3 ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า

$$[r(\cos\theta + i\sin\theta)]^{-n} = r^{-n}[\cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta)]$$

พิสูจน์ จะพิสูจน์โดยใช้หลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

(1) กรณี $n = 1$ เป็นจริงโดยตัวอย่าง 5.3.10

(2) สมมุติว่ากรณี $n = k$ เป็นจริง นั่นคือ

$$[r(\cos\theta + i\sin\theta)]^{-k} = r^{-k}[\cos(-k\theta) + i\sin(-k\theta)]$$

จะพิจารณากรณี $n = k + 1$

$$\begin{aligned}&[r(\cos\theta + i\sin\theta)]^{-(k+1)} \\ =\ &[r(\cos\theta + i\sin\theta)]^{-k}[r(\cos\theta + i\sin\theta)]^{-1} \\ =\ &r^{-k}[\cos(-k\theta) + i\sin(-k\theta)]\, r^{-1}[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)] \\ =\ &r^{-k-1}\big[\cos\big(-k\theta - \theta\big) + i\sin\big(-k\theta - \theta\big)\big] \\ =\ &r^{-(k+1)}\big[\cos\big(-(k+1)\theta\big) + i\sin\big(-(k+1)\theta\big)\big]\end{aligned}$$

นั่นคือเป็นจริงกรณี $n = k + 1$ ดังนั้นโดยหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ สรุปได้ว่าเป็นจริงสำหรับจำนวนเต็มบวก n ทุกตัว

ถ้า A เป็นจำนวนเชิงซ้อน และ n เป็นจำนวนเต็มบวก ต้องการหารากของสมการ $z^n = A$
ถ้าเขียน z และ A ในรูปพิกัดเชิงขั้ว โดยให้

$$z = p(\cos\theta + i\sin\theta)$$

และ $$A = r(\cos\beta + i\sin\beta)$$

สมการ $z^n = A$ จะกลายเป็น

$$p^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = r(\cos\beta + i\sin\beta)$$

ดังนั้น $p^n = r$ และ $n\theta = \beta + 2k\pi \quad , \quad k \in 1$

เพราะฉะนั้น $p = p^{\frac{1}{n}}$ และ $\theta = \frac{\beta}{n} + \frac{2k\pi}{n}$

จุด $z = (p, \theta)$ ในระนาบเชิงซ้อนแตกต่างกันเมื่อ $k = 0, 1, \ldots, n-1$ เพราะผลต่างของแต่ละคู่น้อยกว่า 2π

ถ้า m เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ $m = nq + k$, $0 \leq k \leq n$ ดังนั้นผลต่างของมุม $\frac{\beta}{n} + \frac{2m\pi}{n}$ และมุม $\frac{\beta}{n} + \frac{2k\pi}{n}$ จะเท่ากับผลคูณของ 2π เพราะฉะนั้นรากที่แตกต่างกันจะมี n ค่าดังนี้

$$p^{\frac{1}{n}}\left[\cos\left(\frac{\beta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\beta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right] \quad , \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

ตัวอย่าง 5.3.11 จงหารากของสมการ $z^2 = -2 - 2\sqrt{3}\,i$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 5.3.12 จงหารากที่ 3 ของ i

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

แบบฝึกหัด 5.3

1. ถ้า $z_1 = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

จงหา $\frac{1}{z_1}$, $\frac{{z_1}^2}{z_2}$ และ $\frac{{z_2}^3}{z_1}$

2. จงหาค่าสัมบูรณ์และอาร์กิวเมนต์หลักของจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้

(1) $3\left[\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right]$

(2) $5\left[-\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right]$

(3) $-7\left[\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right]$

(4) $9\left[\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right]$

(5) $-2[\cos\pi + i\sin\pi]$

(6) $4\left[\sin\frac{\pi}{6} + i\cos\frac{\pi}{6}\right]$

(7) $13\left[-\sin\frac{\pi}{3} + i\cos\frac{\pi}{3}\right]$

(8) $6\left[\sin\frac{\pi}{4} - i\cos\frac{\pi}{4}\right]$

(9) $-5\left[\sin\frac{\pi}{4} + i\cos\frac{\pi}{4}\right]$

(10) $2\left[-\sin\frac{3\pi}{2} + i\cos\frac{3\pi}{2}\right]$

(11) $3\left[\sin\frac{\pi}{5} - i\cos\frac{\pi}{5}\right]$

(12) $4\left[-\cos\frac{\pi}{8} - i\sin\frac{\pi}{8}\right]$

(13) $2 + 2i$

(14) $-1 + \sqrt{3}\,i$

(15) $-\frac{i}{2-2\sqrt{3}}$

(16) $\frac{1+i}{1-i}$

3. จงหารากของสมการ

(1) $x^2 + 25 = 0$

(2) $x^2 - 3x + 8 = 0$

(3) $x^2 - i\,x + 2 = 0$

(4) $x^2 + i\,x + 2 = 0$

(5) $x^2 - 5i\,x + 14 = 0$

4. m จะต้องมีค่าเป็นเช่นไร เพื่อที่จะให้สมการ $x^2 - mx + 4$ มีรากเป็นจำนวนเชิงซ้อน และไม่ใช่จำนวนจริง

5. ถ้า m เป็นจำนวนจริง สมการ $3x^2 + 5x + 1 - m^2$ จะมีรากเป็นจำนวนจริงหรือไม่

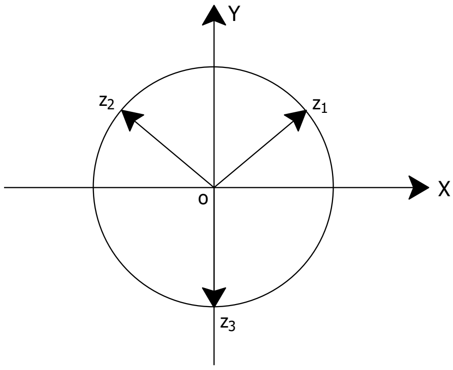
6. จงหาค่าของ
   (1) $(1 - i)^6$
   (2) $(1 - i\sqrt{3})^5$
   (3) $(\sqrt{2} - i\sqrt{2})^4$

7. จงหารากของสมการต่อไปนี้
   (1) $x^3 = 27i$
   (2) $x^3 = -27i$
   (3) $x^3 = 64$
   (4) $x^3 = -64$
   (5) $x^4 = -4$
   (6) $x^4 = -25i$
   (7) $x^2 = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$

8. จงหารากที่ 3 ของ i
9. จงหารากที่ 5 ของ 22
10. จงหารากที่ 4 ของ $-1 - i\sqrt{3}$
11. จงหารากที่ 4 ของ $2 + 2i$
12. จงหารากทั้งสามของสมการ $z^3 + z^2 + z + 1 = 0$
13. ถ้า $z = x + iy$
    นิยาม $g^z = g^x(\cos y + i \sin y)$
    ถ้า z_1 และ z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน จงพิสูจน์ว่า
    (1) ถ้า x เป็นจำนวนจริง
    $$\cos x = \frac{g^{ix} + g^{-ix}}{2}$$
    $$\sin x = \frac{g^{ix} - g^{-ix}}{2i}$$
    (2) $g^{z_1}g^{z_2} = g^{z_1+z_2}$
    (3) $g^z \neq 0$
    (4) ถ้า x เป็นจำนวนจริง $|g^{ix}| = 1$
    (5) $g^z = 1$ ก็ต่อเมื่อ $z = 2\pi ni$, n เป็นจำนวนเต็ม
    (6) $g^{z_1} = g^{z_1}$ ก็ต่อเมื่อ $z_1 - z_2 = 2\pi ni$, n เป็นจำนวนเต็ม

5.4 รากที่ n ของยุนิตี

จุดทั้งสามต่อไปนี้คือ จุดยอดของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าซึ่งล้อมรอบด้วยวงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางที่ (0, 0) และรัศมีเท่ากับ 1



เนื่องจาก $1 = \cos 0 + i\sin 0$ ดังนั้นรากที่ n ของ 1 คือ

$$\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} \quad , \quad k = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)$$

ถ้าเราให้ $w = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$ รากที่ n ของ 1 ได้แก่ $w, w^2, w^3, \ldots, w^n$ เรียกรากเหล่านี้ว่า รากที่ n ของยุนิตี (n^{th} root of unity)

ตัวอย่างที่ 5.4.1 จงหารากของสมการ $x^4 = 1$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

5.5 รากพริมิตีฟที่ n ของ 1

บทนิยาม 5.5.1 จำนวนเชิงซ้อน z จะเป็นรากพริมิตีฟที่ n ของ 1 (primitive n^{th} root of unity) ก็ต่อเมื่อ $z^n = 1$ และ $z^m \neq 1$ ถ้า $0 < m < n$, $m, n \in z^+$

ตัวอย่างที่ 5.5.1 รากที่ 4 ของ 1 คือ $i, -i$, 1 และ -1 รากพริมิตีฟที่ n ของ 1 คือ i และ $-i$

ในทฤษฎีต่อไปนี้ r หมายถึง $\cos\frac{2\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n}$

ทฤษฎีบท 5.5.1 ถ้า $(k, n) = d$ จะได้ r^k เป็นรากพริมิตีฟที่ $\frac{n}{d}$ ของ 1

พิสูจน์ ให้ $k = k_1 d$ และ $n = n_1 d$

จะได้ $(k_1, n_1) = 1$

$$r^k = \cos\frac{2k_1 d\pi}{n_1 d} + i\sin\frac{2k_1 d\pi}{n_1 d}$$

$$= \cos\frac{2k_1\pi}{n_1} + i\sin\frac{2k_1\pi}{n_1}$$

ดังนั้น r^k เป็นรากที่ $n_1 = \frac{n}{d}$ ของ 1 เพราะว่า

$$(r^k)^{n_1} = \cos 2k_1\pi + i\sin 2k_1\pi$$

$$= 1$$

r^k เป็นรากพริมิตรีฟที่ $\frac{n}{d}$ ของ 1 เพราะถ้า

$$\left(r^k\right)^m = 1$$

$$= \cos\frac{2mk_1\pi}{n_1} + i\sin\frac{2mk_1\pi}{n_1}$$

จะได้ $\frac{k_1 m}{n_1}$ เป็นจำนวนเต็ม

เนื่องจาก $(n_1, k_1) = 1$ ดั้งนั้น n_1 หาร m ลงตัว

เพราะฉะนั้น m เป็นผลคูณของ n_1

ดั้งนั้นค่าที่น้อยที่สุดของ m ซึ่ง $(r^k)^m = 1$ คือ n_1

ทฤษฎีบท 5.5.2 r^k เป็นรากพริมิตีฟที่ n ของ 1 ก็ต่อเมื่อ $(k, n) = 1$

พิสูจน์ (1) ถ้า $(k, n) = 1$ โดยทฤษฎีบท 5.5.1 r^k เป็นรากพริมิตีฟที่ $\frac{n}{1} = n$ ของ 1

(2) ถ้า r^k เป็นรากพริมิตีฟที่ n ของ 1 และ $(k, n) = d \neq 1$ โดยทฤษฎีบท 5.5.1 จะได้ว่า r^k เป็นรากพริมิตีฟที่ $\frac{n}{d}$ ของ 1 นั่นคือ $(r^k)^{\frac{n}{d}} = 1$ ซึ่งขัดกับสมมุติฐานว่า r^k เป็นรากพริมิตีฟที่ n ของ 1

เพราะฉะนั้น $(k, n) = 1$

ตัวอย่าง 5.5.2 เนื่องจาก $(1, 3) = 1$ และ $(2, 3) = 1$ ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 5.5.2 รากพริมิตีฟที่ 3 ของ 1 คือ

$$\begin{aligned} r &= \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} \\ &= \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ r^2 &= \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} \\ &= -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

ทฤษฎีบท 5.5.3 ถ้า S เป็นรากพริมิตีฟที่ n ของ 1 และ $(k, n) = d$ จะได้ว่า S^k เป็นรากพริมิตีฟที่ $\frac{n}{d}$ ของ 1

พิสูจน์ เนื่องจาก S เป็นรากที่ n ของ 1 ดังนั้น $S = r^t$, $t \in Z^+$

เนื่องจาก $S = r^t$ เป็นรากพริมิตีฟที่ n ของ 1 โดยทฤษฎีบท 5.5.2 จะได้ว่า $(t, n) = 1$

ดังนั้น $S^k = r^{th}$ และ $(tk, n) = d$

เพราะฉะนั้น $S^k = r^{th}$ เป็นรากพริมิตีฟที่ $\frac{n}{d}$ ของ 1 โดยทฤษฎีบท 5.5.1

ทฤษฎีบท 5.5.4 เซตของรากที่ m ของ 1 จะเป็นสับเซตของรากที่ n ของ 1 ก็ต่อเมื่อ m หาร n ลงตัว

พิสูจน์ (1) ถ้า m หาร n ลงตัว , $n = mk$ และ $(k, n) = k$, $k \in Z^+$

ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 5.5.1 r^k เป็นรากพริมิตีฟที่ $\frac{n}{k} = m$ ของ 1

เพราะฉะนั้น $r^k, r^{2k}, \ldots, r^{mk}$ ต่างก็เป็นรากที่ m ของ 1

เพราะว่า $(r^{jk})^m = (r^{km})^j = 1$, $j = 1, 2, \ldots, m$

ดังนั้น เซตของรากที่ m ของ 1 เป็นสับเซตของรากที่ n ของ 1

(2) สมมุติว่าเซตของรากที่ m ของ 1 เป็นสับเซตของเซตของรากที่ n ของ 1

จะได้ว่า รากพริมิตีฟที่ m ของ 1 คือ $\cos\frac{2\pi}{m} + i\sin\frac{2\pi}{m} = r^t$

ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 5.5.1 ถ้า $(t, n) = d$ r^t เป็นรากพริมิตีฟที่ $\frac{n}{d}$ ของ 1

เพราะฉะนั้น $\frac{n}{d} = m$ และ $n = md$

แบบฝึกหัด 5.4

1. จงหารากที่ 3 ของยุนิตี
2. จงหารากที่ 6 ของยุนิตี
3. จงหารากที่ 8 ของยุนิตี
4. จงแก้สมการ $z^2 + 1 = 0$
5. จงหารากพริมิตีฟที่ 4 ของ 1
6. จงหารากพริมิตีฟที่ 6 ของ 1
7. จงหารากพริมิตีฟที่ 8 ของ 1
8. จงหารากพริมิตีฟที่ 12 ของ 1
9. จงหารากพริมิตีฟที่ 5 ของ 1
10. จงหารากพริมิตีฟที่ 7 ของ 1