บทที่ 6
การหาผลเฉลยโดยใช้โปรแกรมสำเร็จรูปทางคณิตศาสตร์

ในการจัดการเรียนการสอนในรายวิชาระบบจำนวนนั้น เราจะสังเกตเห็นว่าในเนื้อหาบางส่วน เช่น ทฤษฎีบท หรือตัวอย่างที่ยาก ๆ เวลาที่เราพิสูจน์ หรือคำนวณนั้น เราอาจจะต้องใช้เวลามาก ๆ แสดงขั้นตอนการทำเยอะๆ ซึ่งจะทำให้เกิดความผิดพลาดได้ง่าย สำหรับในการแก้ปัญหานี้ เราจะใช้โปรแกรมสำเร็จรูปทางคณิตศาสตร์เข้ามาช่วย ซึ่งโปรแกรมสำเร็จรูปทางคณิตศาสตร์นั้น ก็มีมากมายหลายโปรแกรม แต่ในที่นี้ เราจะใช้โปรแกรม Maple ช่วยในการหาคำตอบ

โปรแกรม Maple

โปรแกรม Maple เป็นโปรแกรมทางคณิตศาสตร์ ที่มีความสามารถในการคำนวณสูง และนิยมใช้งานกันมากอีกโปรแกรมหนึ่งซึ่งสามารถคำนวณแบบเครื่องคิดเลขหรือใช้ในการเขียนโปรแกรมประยุกต์ใช้งานได้ ความสามารถที่เหมือนหรือที่แตกต่างระหว่าง Maple กับโปรแกรมอื่น ๆ สรุปได้ดังนี้

1. Maple แสดงผลทศนิยมได้หลายตำแหน่งตามความต้องการด้วยคำสั่ง Digit = n
2. คำสั่งการทำงานของ Maple ต้องพิมพ์ Prompt ที่มีสักษณะรุปแบบเป็น “ > ...”
3. การคำนวณบางอย่าง เช่น การทำงานด้าน Graphics ต้องมีการเรียก Package หรือโปรแกรมย่อยสำหรับการทำงานนั้นขึ้นมาก่อน เช่น ใช้คำสั่ง with (plots) เรียก Package ของการเขียนกราฟคำสั่ง with (linaly) เรียก Package ของการคำนวณเกี่ยวกับเวกเตอร์เมทริกซ์ อยากรู้ว่า Maple มี Package อะไรบ้างให้พิมพ์ ?Packages ทั้งหมดของ Maple
4. การปรับเปลี่ยนรูปแบบการแสดงผลของกราฟ ใช้คำสั่งหรือคลิกที่รูปกราฟก็จะมีเมนูบาร์ของการปรับเปลี่ยนรูปแบบขึ้นมาใช้ เราใช้ในการปรับเปลี่ยนรูปแบบของกราฟ
5. สามารถขอความช่วยเหลือจากโปรแกรมได้อย่างรวดเร็ว เช่น หากเราสงสัยความหมายขอคำสั่ง plot ก็ให้พิมพ์ ?plot แล้วกด Enter ก็จะได้คำอธิบายต่าง ๆ ของคำสั่ง plot
6. มีคำสั่งที่ผู้สอนระบบจำนวนต้องชอบ เช่น การหาตัวหารร่วมมาก ตัวคูณร่วมน้อย การแก้อสมการ มอดุโล และการหาอาร์กิวเมนต์ เป็นต้น
7. สามารถเขียนกราฟของจำนวนเชิงซ้อนในสองมิติ และสามมิติได้

ในการเขียน File extension ของ Maple กำหนดดังนี้

File extension	Description
.nws	Maple worksheet format
.tex	Latex document
.txt	plain ASCII text
.html , .htm	Hyper text
.rtf	Rich text format
.mpl	Maple input
.maplet	Maplet

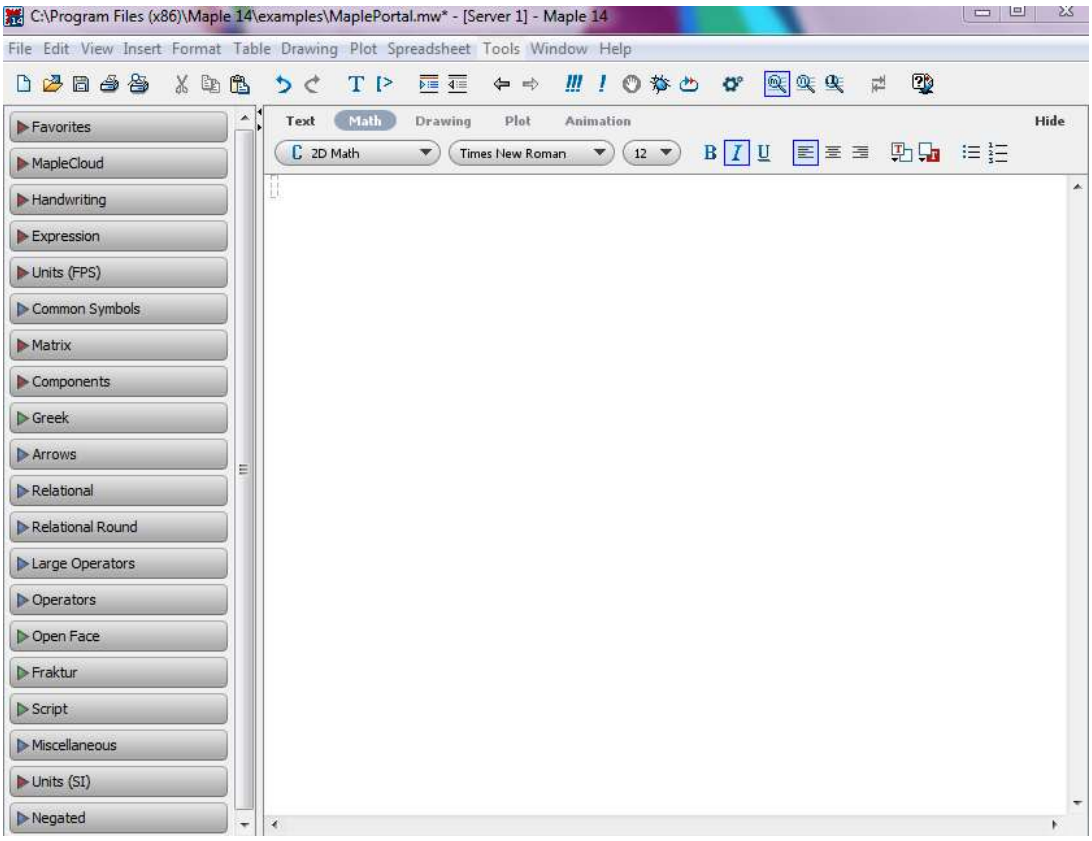
6.1 ส่วนประกอบของโปรแกรม Maple

เมื่อเราเรียกใช้งานโปรแกรม จะปรากฏหน้าต่างแสดงพื้นที่ โดยถูกแบ่งออกเป็น 3 ส่วน ซึ่งประกอบด้วย

1. กล่องเครื่องมือ (Tool Box) เป็นกล่องที่รวบรวมเครื่องมือที่ใช้ในการเขียนรูปของสมการ หรือสร้างสมการของฟังก์ชันต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์

2. แถบรายการ (Manu Bar) เป็นแถบที่รวบรวมรายการของเครื่องมือ หรือคำสั่งที่ใช้ในโปรแกรม Maple

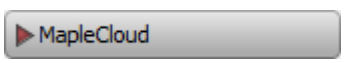
3. แผ่นการแสดงผล (Display) เป็นเนื้อที่ว่างที่ใช้สำหรับเขียนสมการ วาดรูป เป็นต้น แสดงดังรูปต่อไปนี้



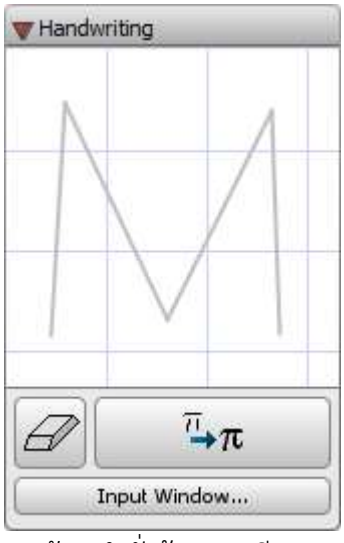
เนื่องจากส่วนประกอบทั้งหมดของโปรแกรม Maple นั้นมีมากมาย แต่ในที่นี้ ผู้เขียนจะขอกล่าวถึงเฉพาะส่วนประกอบสำหรับที่ต้องใช้ในบทเรียนนี้เท่านั้น ซึ่งประกอบด้วย

ส่วนที่ 1 กล่องเครื่องมือ (Tool Box)

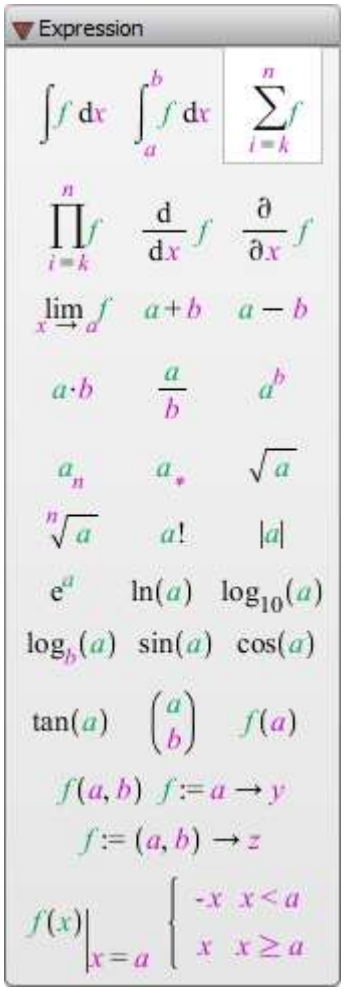
รายการที่ชื่นชอบ



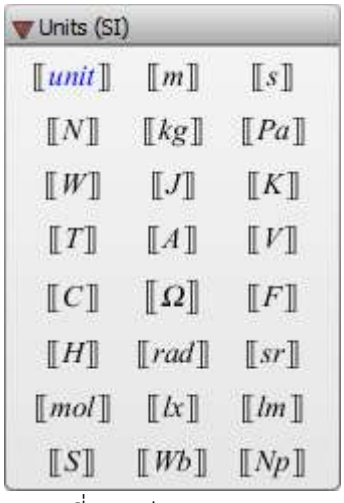
ระบบปฏิบัติการเหนือเมฆ (ประวัติการเรียกใช้งานของโปรแกรม Maple)



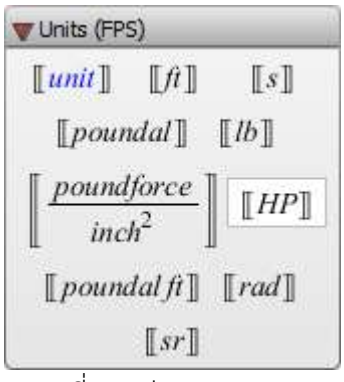
การป้อนคำสั่งด้วยการเขียน



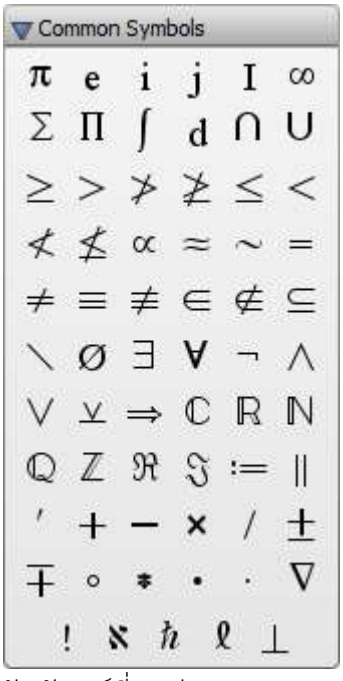
นิพจน์



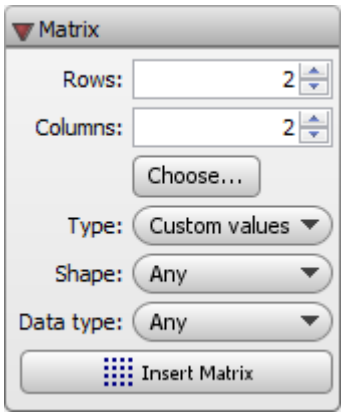
การเปลี่ยนหน่วย(SI)



การเปลี่ยนหน่วย(FPS)



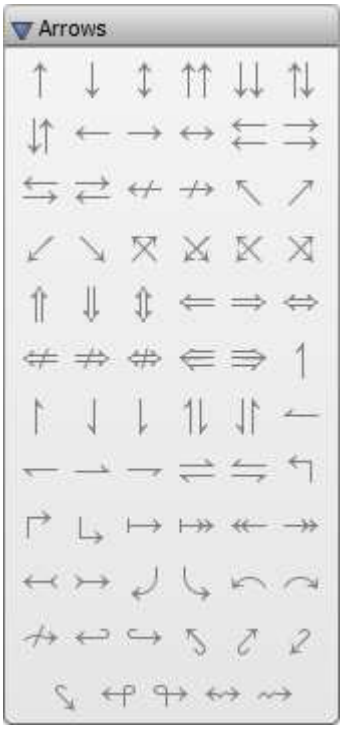
สัญลักษณ์ที่พบบ่อย



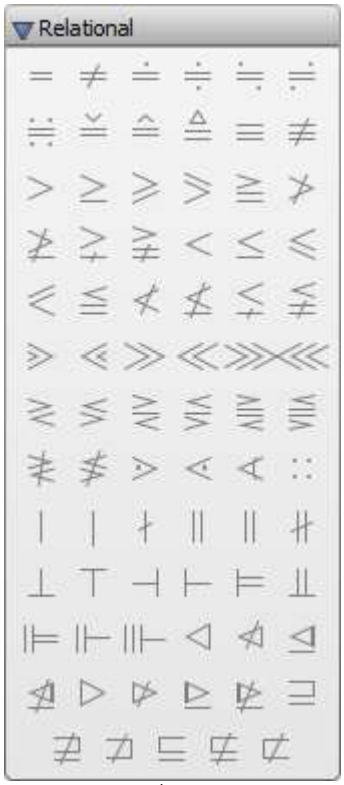
เมทริกซ์

รูปภาพเสริม

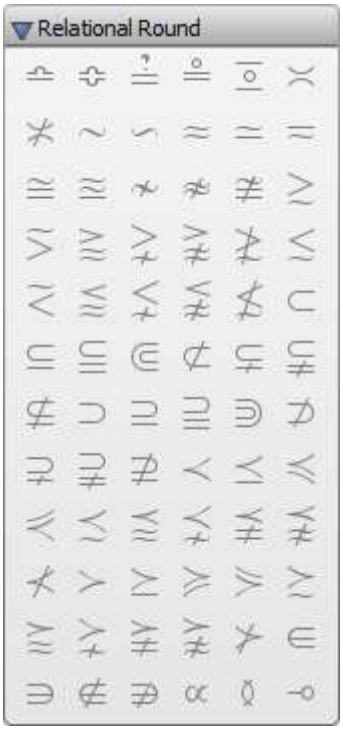
สัญลักษณ์กรีก



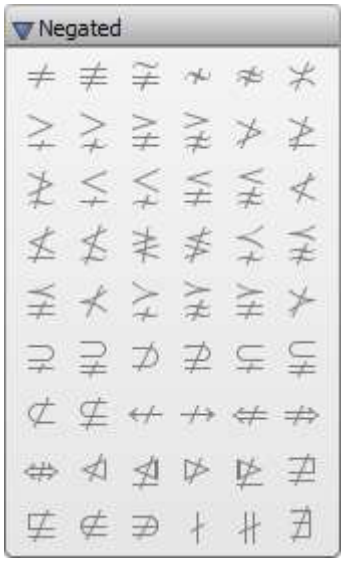
ลูกศร



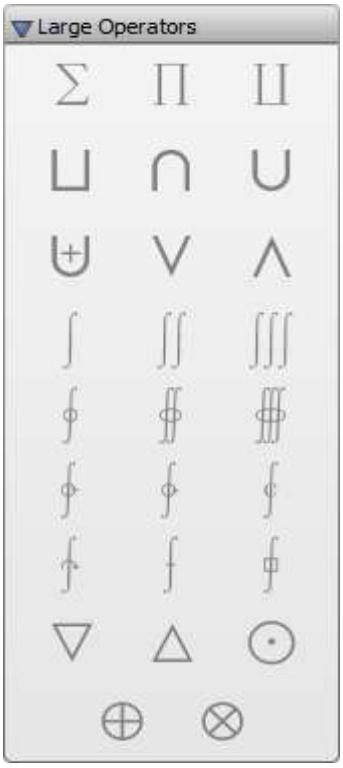
ความสัมพันธ์ทั่วไป



ความสัมพันธ์ในเชิงจำนวนเต็ม



ความสัมพันธ์ในเชิงปฏิเสธ



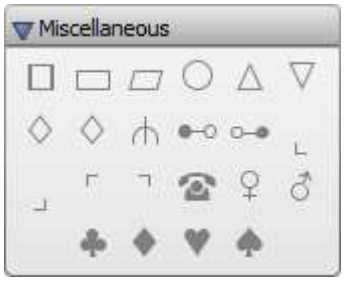
ตัวดำเนินการขนาดใหญ่

ตัวดำเนินการ

สัญลักษณ์หน้าเปิด

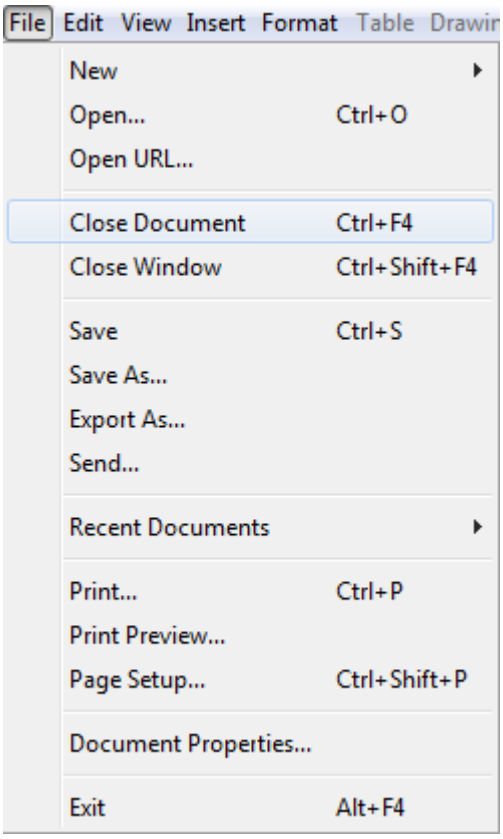
สัญลักษณ์ เฟรกเทอร์

สัญลักษณ์ สคริปต์

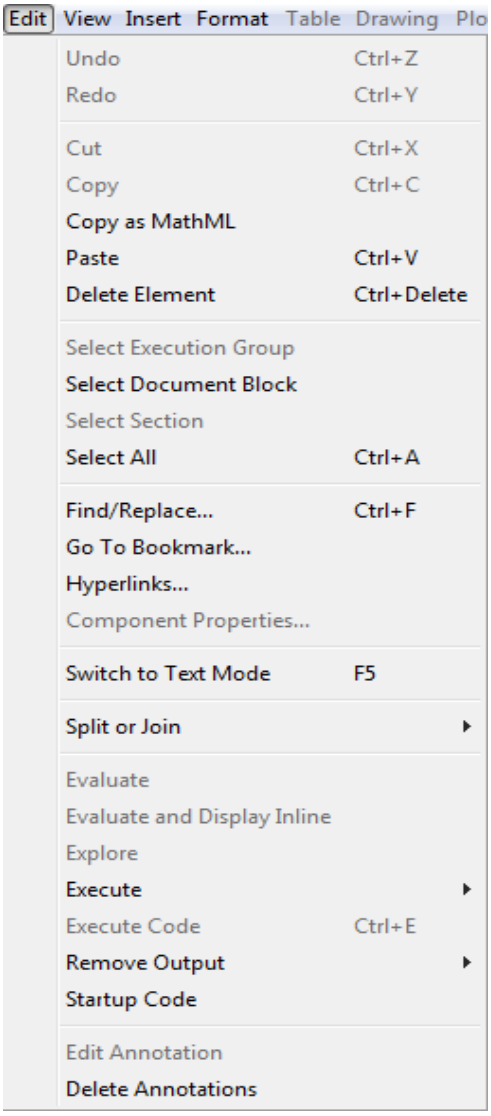


สัญลักษณ์ เบ็ดเตล็ด

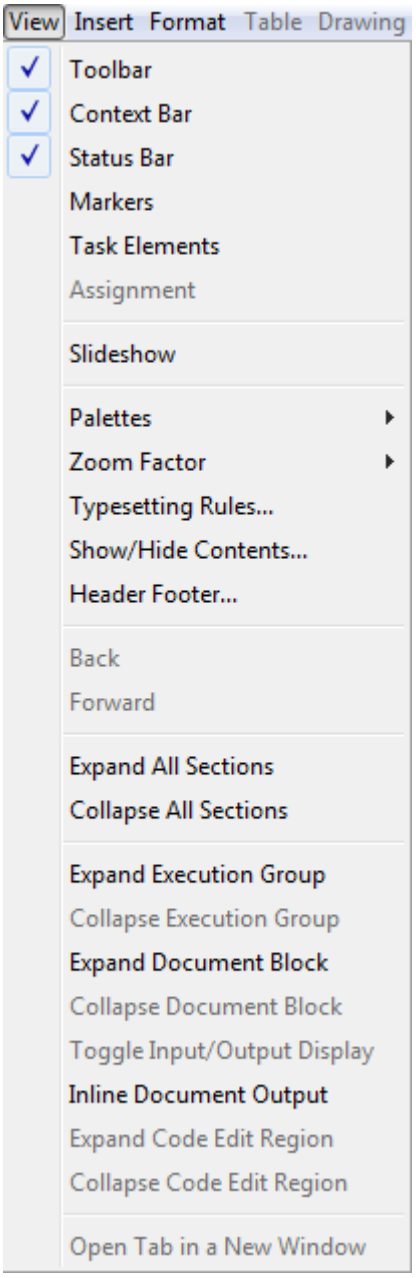
ส่วนที่ 2 แถบรายการ (Manu Bar)



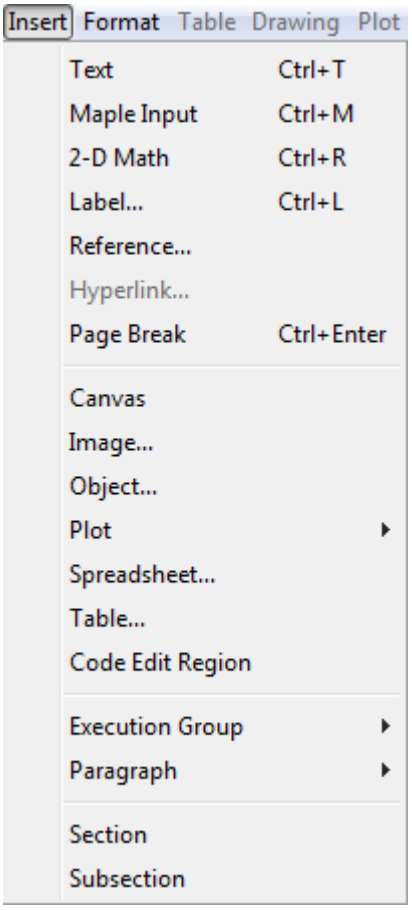
ไฟล์



แก้ไข

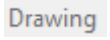


ซ่อน/แสดง



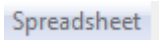
แทรก

ตาราง

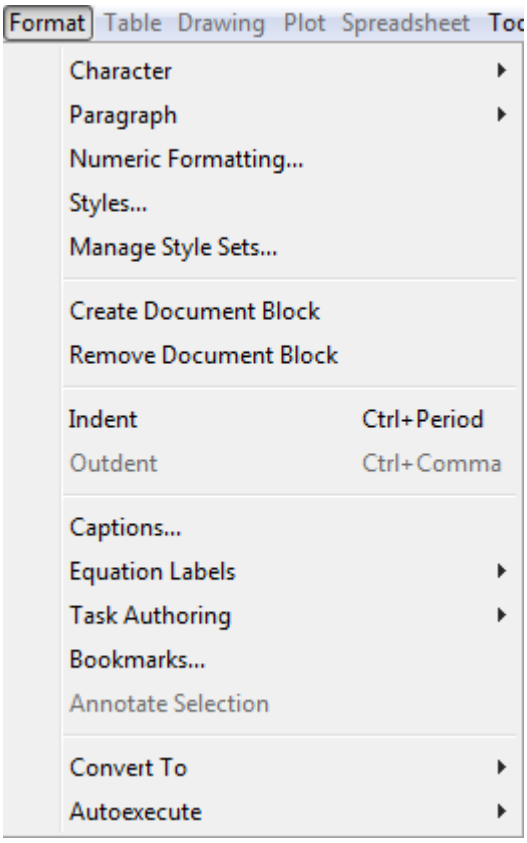


การวาดภาพ

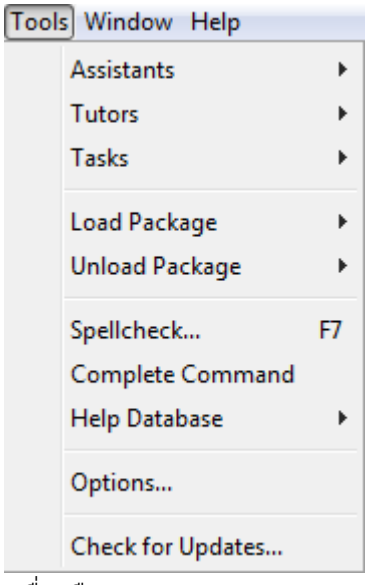
การลงจุด



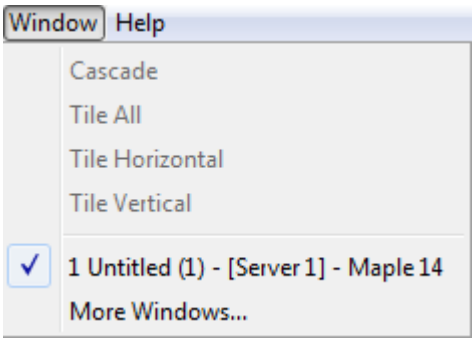
สเปรดชีท



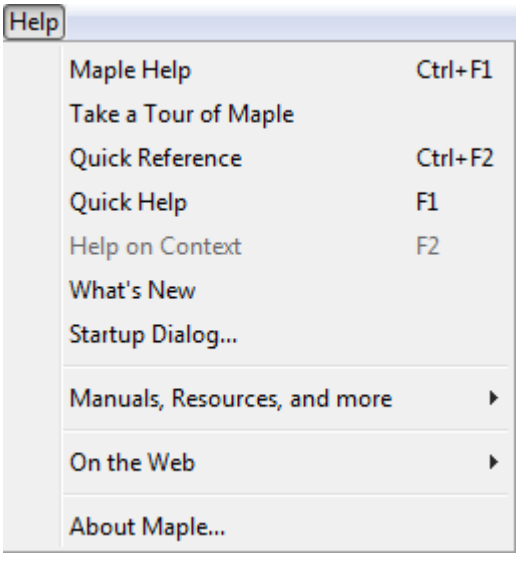
จัดรูปแบบ



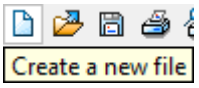
เครื่องมือ



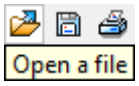
หน้าต่าง



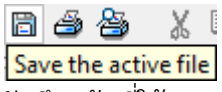
ช่วยเหลือ



สร้างไฟล์ใหม่

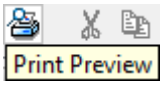


เปิดไฟล์

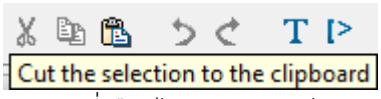


บันทึกแฟ้มที่ใช้งานอยู่

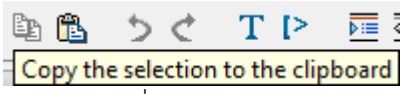
พิมพ์



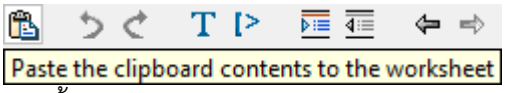
แสดงตัวอย่างก่อนพิมพ์



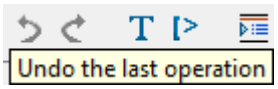
ตัดส่วนที่เลือกไปยังคลิปบอร์ด



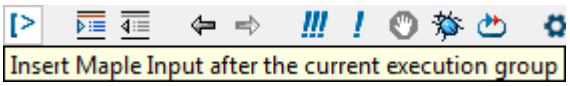
คัดลอกส่วนที่เลือกไปยังคลิปบอร์ด



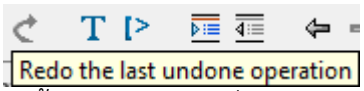
วางเนื้อหาของคลิปบอร์ดไปยังแผ่นงาน



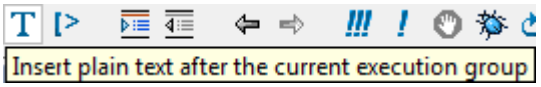
ยกเลิกการดำเนินการล่าสุด



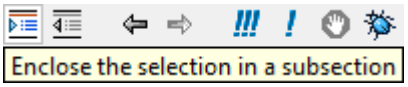
แทรกตัวดำเนินการของโปรแกรม



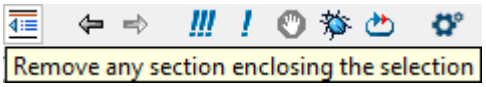
ทำซ้ำการดำเนินการที่ยกเลิกล่าสุด



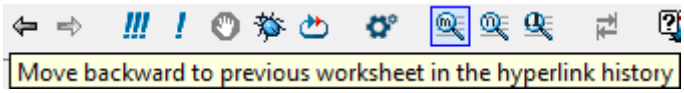
แทรกข้อความ



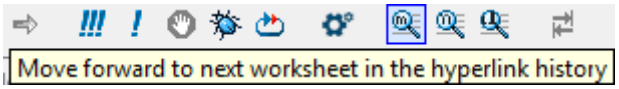
เลือกทำในส่วนย่อย



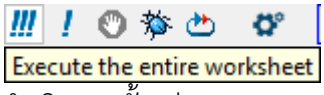
ลบการเลือกทำในส่วนย่อย



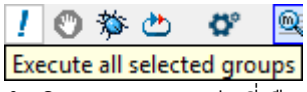
ย้อนกลับไปดูแผ่นงานใน Hyperlink History



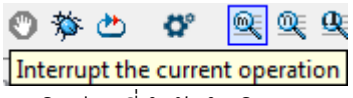
ดูแผ่นงานใน Hyperlink History อันถัดไป



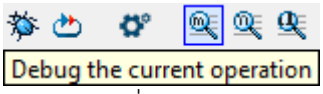
ดำเนินการทั้งแผ่นงาน



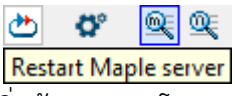
ดำเนินการเฉพาะกลุ่มที่เลือก



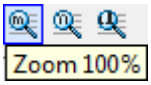
ยกเลิกส่วนที่กำลังดำเนินการ



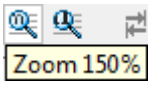
แก้ไขส่วนที่กำลังดำเนินการ



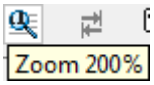
เริ่มต้น server โปรแกรม



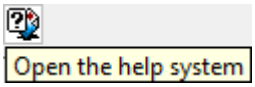
ซูม 100%



ซูม 150%

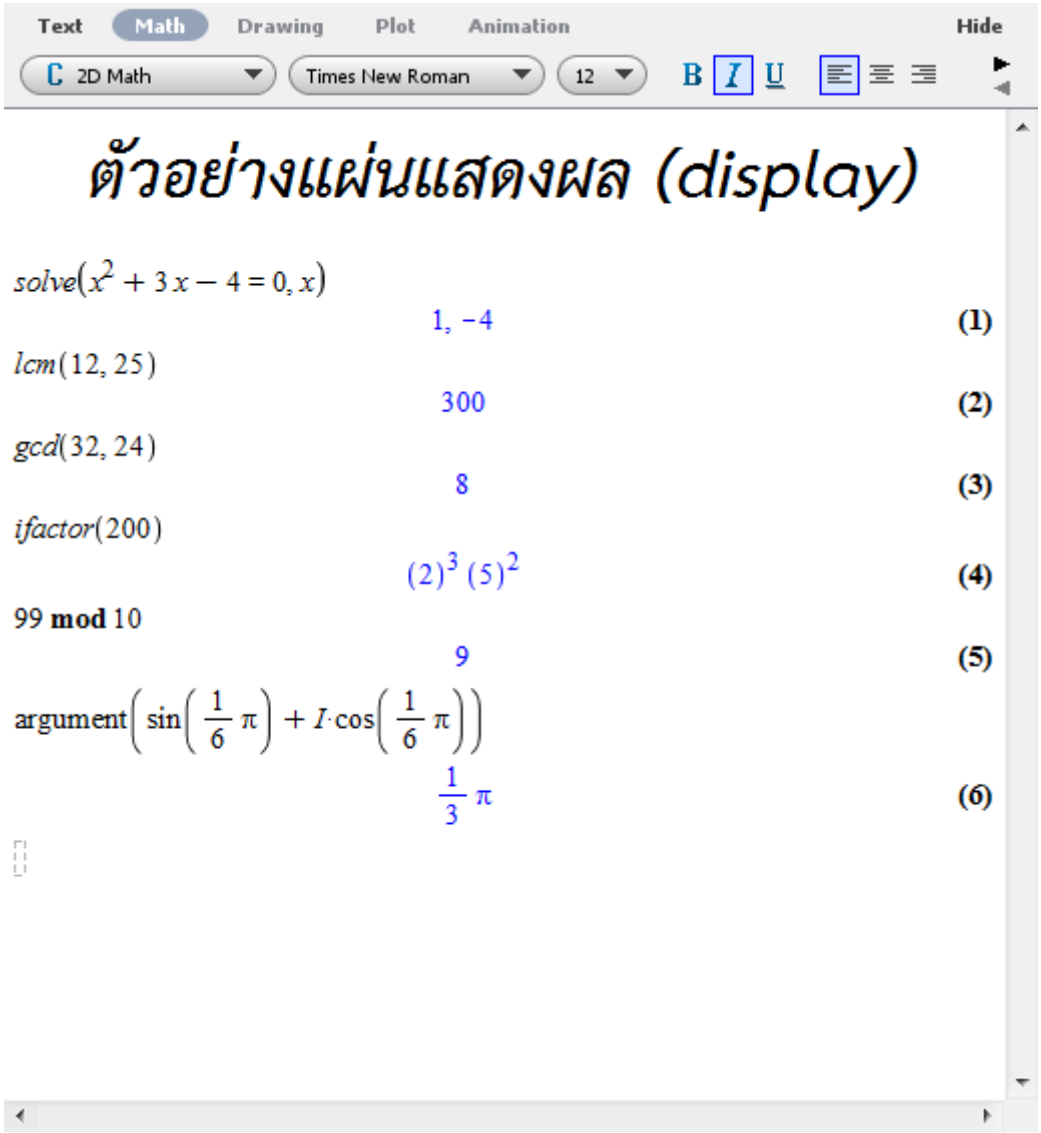


ซูม 200%



เปิดระบบช่วยเหลือ

ส่วนที่ 3 แผ่นการแสดงผล (Display)



คำสั่งที่สำคัญ ได้แก่

สัญลักษณ์	ความหมาย
+	บวก
-	ลบ
*	คูณ
/	หาร
^	ยกกำลัง
abs	ค่าสัมบูรณ์
sqrt(...)	สแคร์รูท
gcd	หารร่วมมาก
lcm	คูณร่วมน้อย
ifactor(...)	ผลคูณของจำนวนเฉพาะ
divisor(...)	ตัวประกอบ
solve(...)	การแก้สมการ , อสมการ
argument(..)	อาร์กิวเมนต์
Re(...)	ส่วนจริง
Im(...)	ส่วนจินตภาพ
...mod ...	มอดิโล
conjugate(..)	สังยุค

6.2 การหาผลเฉลยเบื้องต้น

6.2.1 การบวก ลบ คูณ และหารของจำนวนจริง

เป็นที่ทราบว่ากันดีว่า การบวก ลบ คูณและหารของจำนวนจริงนั้น เป็นการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ที่ดูเหมือนง่ายมาก แต่ถ้าเราเจอตัวเลขที่ยาก ๆ แล้วเราอาจเสียเวลาในการคำนวณหรือทำให้เกิดการคำนวณผิดพลาดได้ แต่ถ้าเราใช้โปรแกรม Maple เข้ามาช่วยในการคำนวณแล้ว จะสามารถทำให้เราคำนวณได้รวดเร็วและแม่นยำมากขึ้น เช่น

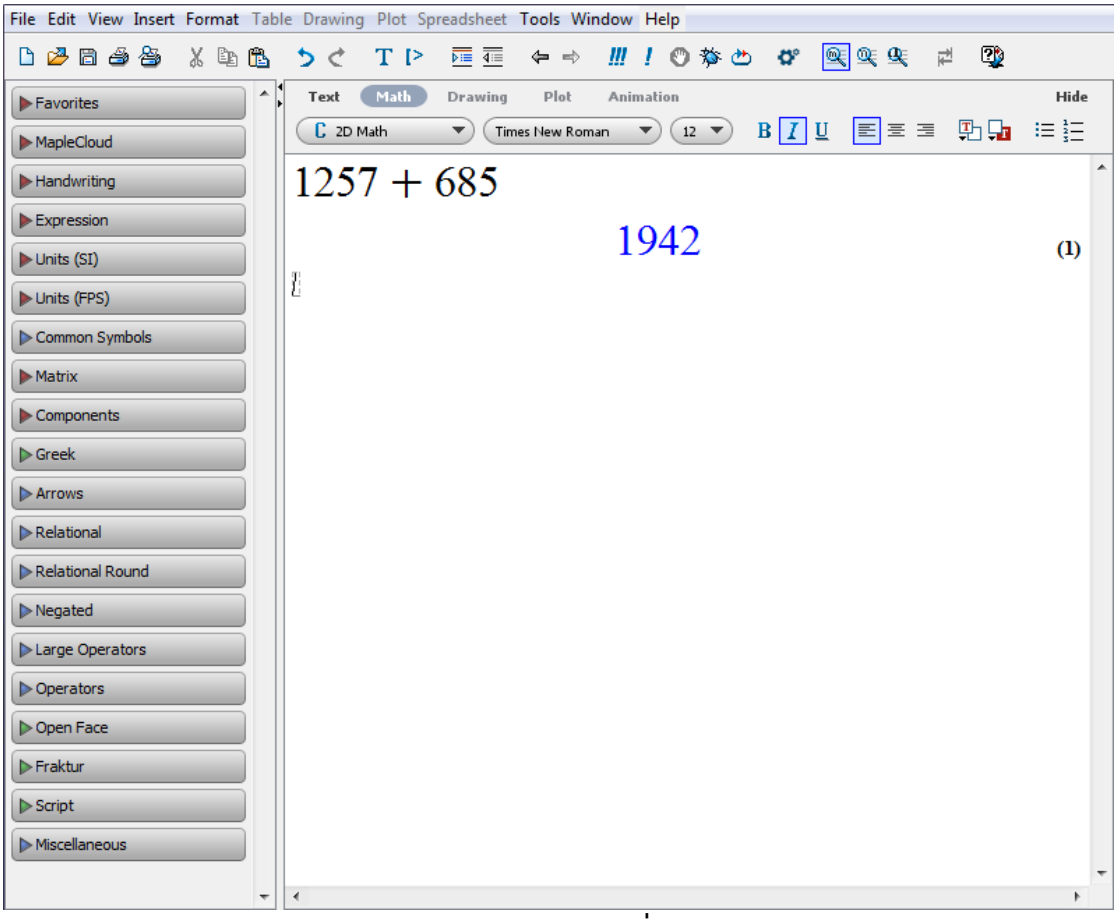
ตัวอย่างที่ 6.2.1.1 จงหาค่าของ $1257 + 685$

วิธีที่ 1

$$\begin{array}{r} 1257 \\ + \quad 685 \\ \hline 1942 \end{array}$$

วิธีที่ 2 ใช้โปรแกรม Maple จะได้ว่า

ให้เราพิมพ์ (code) $1257 + 685$ แล้วกด Enter จะได้คำตอบคือ 1942 (ดังรูปที่ 1.1)



รูปที่ 1.1

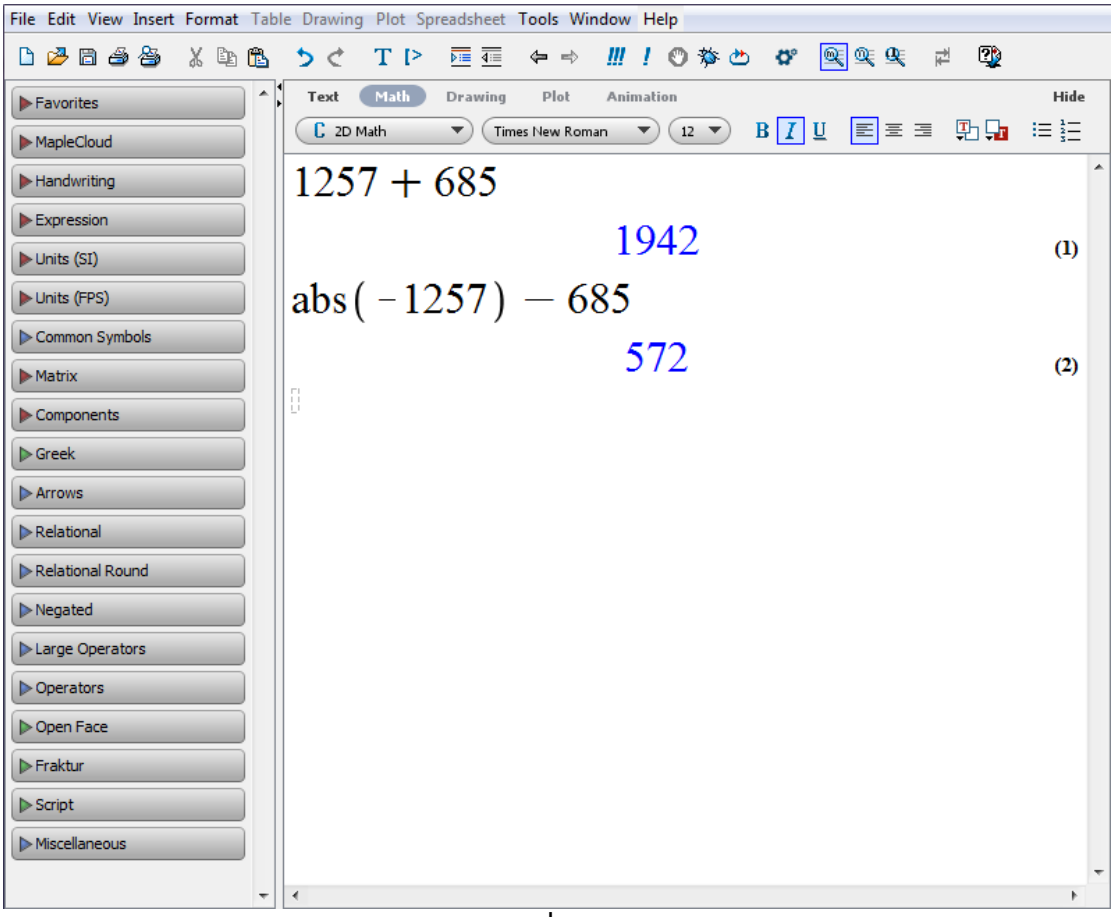
ตัวอย่างที่ 6.2.1.2 จงหาค่าของ $|-1257| - 685$

วิธีที่ 1 พิจารณา $|-1257| = 1257$ จะได้ว่า

$$\begin{array}{r} 1257 \\ -\ 685 \\ \hline 572 \end{array}$$

วิธีที่ 2 ใช้โปรแกรม Maple จะได้ว่า

ให้เราพิมพ์ (code) $\mathbf{abs(-1257) - 685}$ แล้วกด Enter จะได้คำตอบคือ $\mathbf{572}$ (ดังรูปที่ 1.2)



รูปที่ 1.2

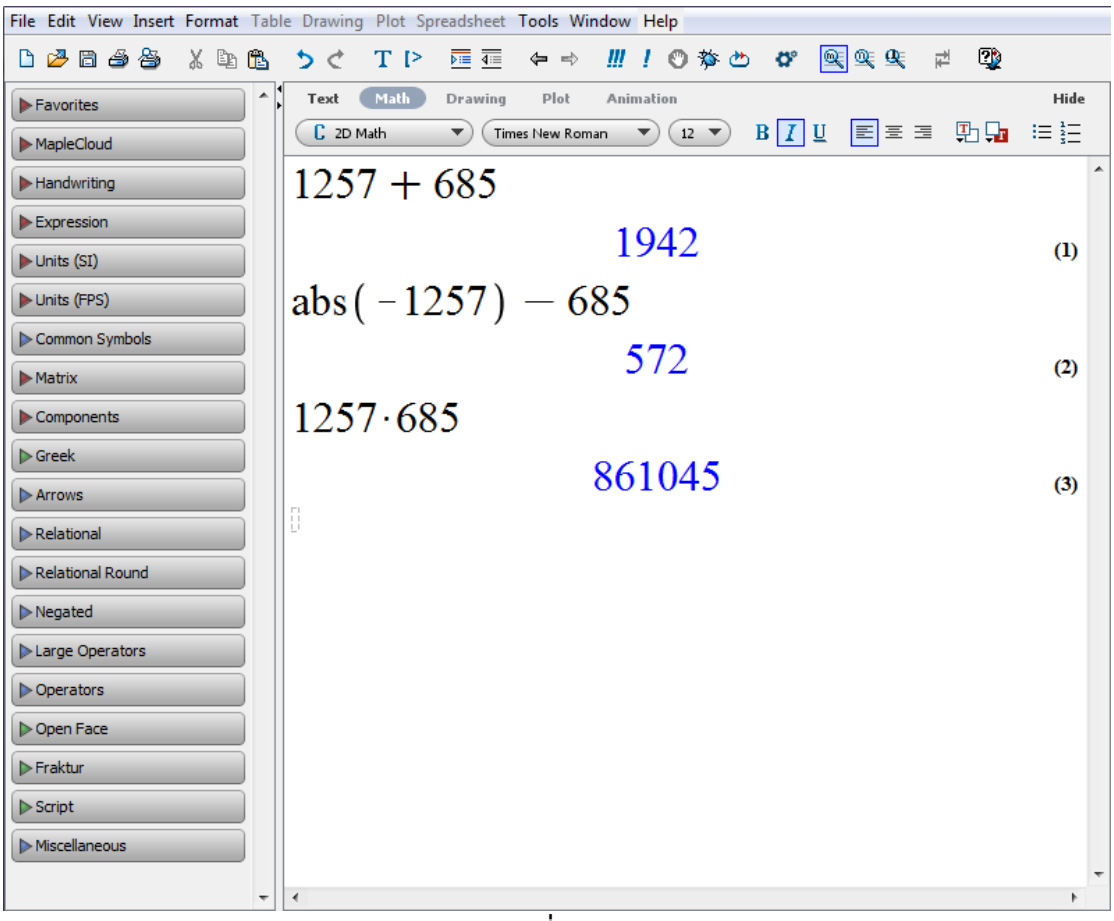
ตัวอย่างที่ 6.2.1.3 จงหาค่าของ 1257×685

วิธีที่ 1

$$\begin{array}{r} 1257 \\ \times\quad 685 \\ \hline 6285 \\ 10056\quad + \\ 7542\quad\ \\ \hline 861045 \\ \hline\hline \end{array}$$

วิธีที่ 2 ใช้โปรแกรม Maple จะได้ว่า

ให้เราพิมพ์ (code) $1257 * 685$ แล้วกด Enter จะได้คำตอบคือ 861045 (ดังรูปที่ 1.3)



รูปที่ 1.3

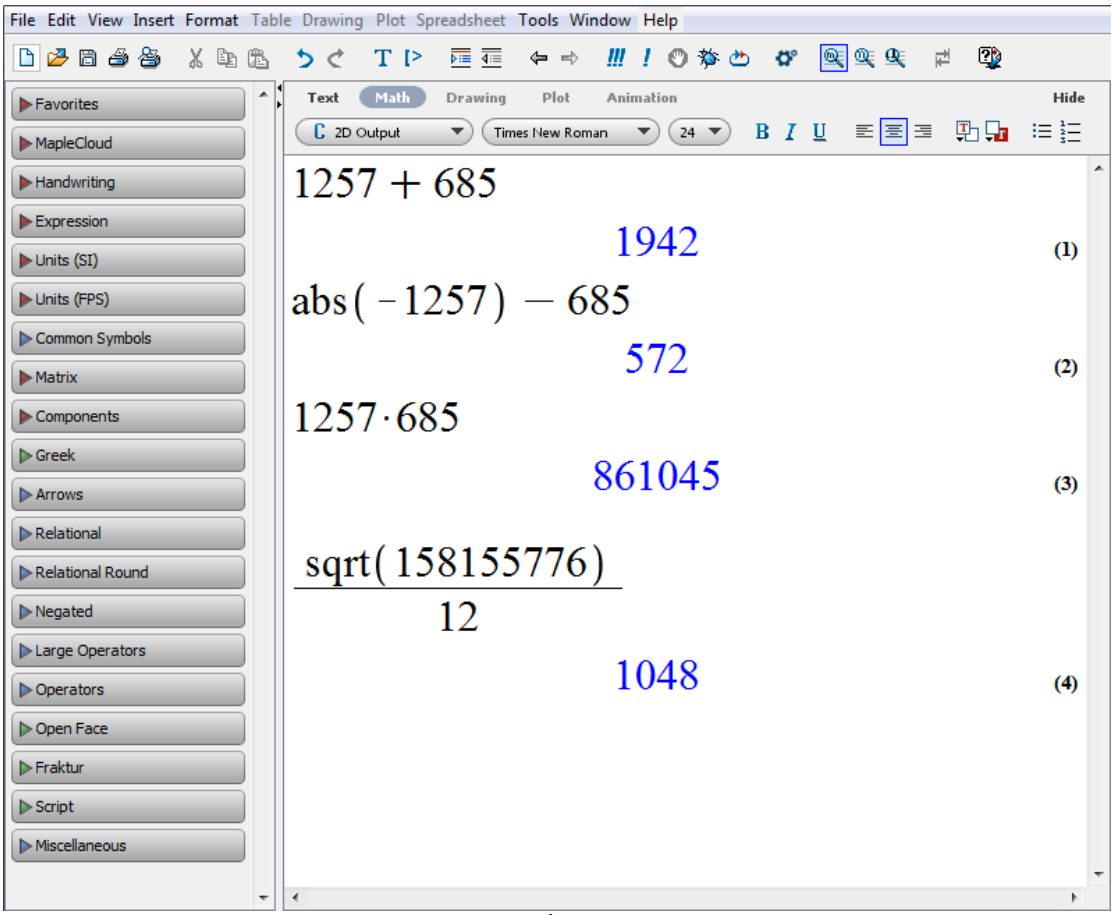
ตัวอย่างที่ 6.2.1.4 จงหาค่าของ $\sqrt{158,155,776} \div 12$

วิธีที่ 1 พิจารณา $\sqrt{158,155,776} = 12,576$ จะได้ว่า

$$
\begin{array}{r}
1048 \\
12\overline{)\,12576} \\
\underline{12} \\
057 \\
\underline{48} \\
96 \\
\underline{96} \\
0
\end{array}
$$

วิธีที่ 2 ใช้โปรแกรม Maple จะได้ว่า

ให้เราพิมพ์ (code) $\mathbf{sqrt(158155776)/12}$ แล้วกด Enter จะได้คำตอบคือ $\mathbf{1048}$ (ดังรูปที่ 1.4)



รูปที่ 1.4

6.2.2 หารร่วมมาก และคูณร่วมน้อย

ตัวหารร่วมมาก และตัวคูณร่วมน้อยในทางคณิตศาสตร์นั้น นับว่าเป็นพื้นฐานสำคัญอีกอย่างหนึ่ง และเราสามารถนำตัวหารร่วมมากและตัวคูณร่วมน้อยไปใช้ในการแก้ปัญหาเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ขั้นสูงได้เป็นอย่างมาก ตัวอย่างการหาตัวหารร่วมมาก และตัวคูณร่วมน้อย เช่น

ตัวอย่างที่ 6.2.2.1 จงหาตัวหารร่วมมากของ 125 และ 75

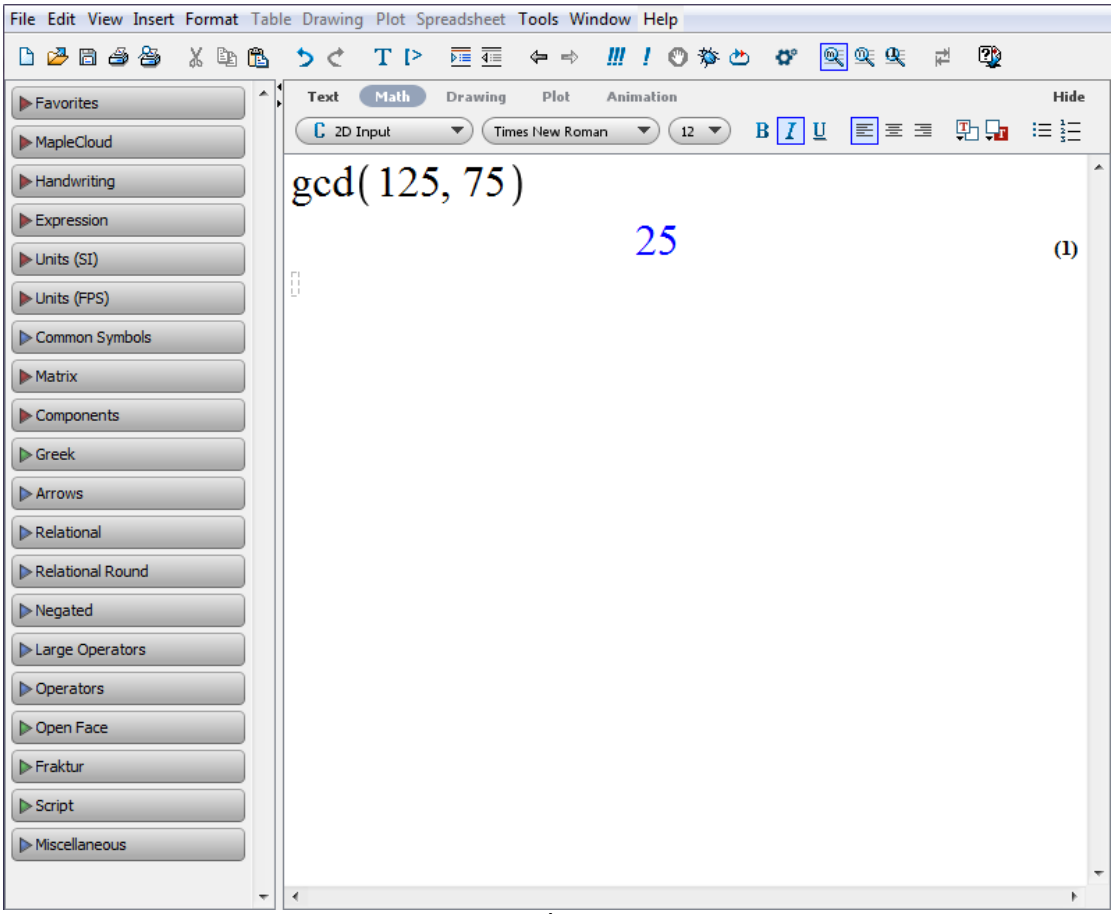
วิธีที่ 1

$$\begin{array}{r|rr} 5 & 125 & 75 \\ \hline 5 & 25 & 15 \\ \hline & 5 & 3 \end{array}$$

ดังนั้น ห.ร.ม. คือ 5×5 หรือ 25

วิธีที่ 2 ใช้โปรแกรม Maple จะได้ว่า

ให้เราพิมพ์ (code) gcd(125,75) แล้วกด Enter จะได้คำตอบคือ 25 (ดังรูปที่ 2.1)



รูปที่ 2.1

ตัวอย่างที่ 6.2.2.2 จงหาตัวคูณร่วมน้อยของ 124 , 120 , 96 และ 72

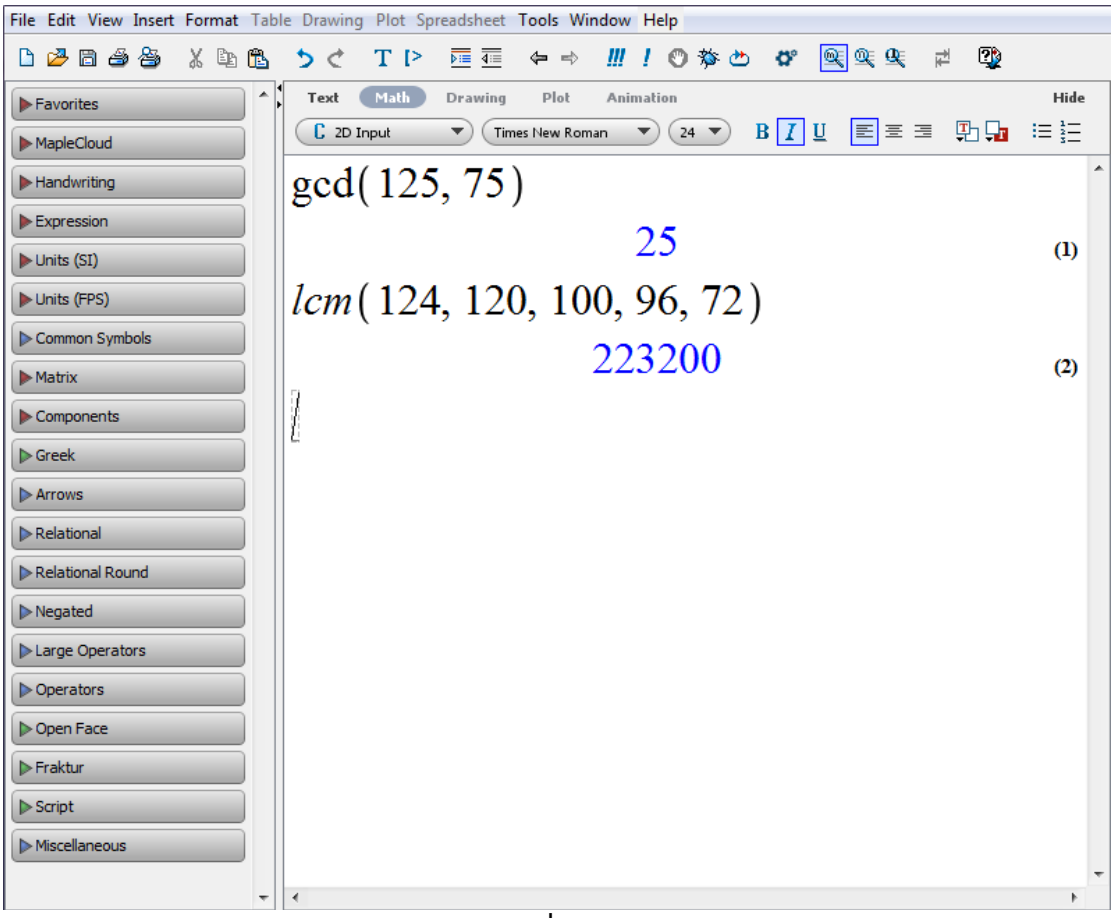
วิธีที่ 1

2)	124	120	100	96	72
2)	62	60	50	48	36
5)	31	30	25	24	18
2)	31	6	5	24	18
3)	31	3	5	12	9
	31	1	5	4	3

ดังนั้น ค.ร.น. คือ $1 \times 2^3 \times 3^2 \times 4 \times 5^2 \times 31$ หรือ $223,200$

วิธีที่ 2 ใช้โปรแกรม Maple จะได้ว่า

ให้เราพิมพ์ (code) $\mathbf{lcm(124,120,100,96,72)}$ แล้วกด Enter จะได้คำตอบ คือ 223200 (ดังรูปที่ 2.2)



รูปที่ 2.2

6.2.3 ผลคูณของจำนวนเฉพาะ

ในการเขียนตัวเลขของจำนวนจำนวนหนึ่งให้อยู่ในรูปของผลคูณของจำนวนเฉพาะนั้น นับว่าเป็นการจัดรูปแบบของจำนวนนั้นให้อยู่ในรูปอย่างง่าย และสะดวกต่อการพิสูจน์ในหลายๆ ทฤษฎีบท เช่น ทฤษฎีบทที่เกี่ยวกับการหารลงตัว เป็นต้น

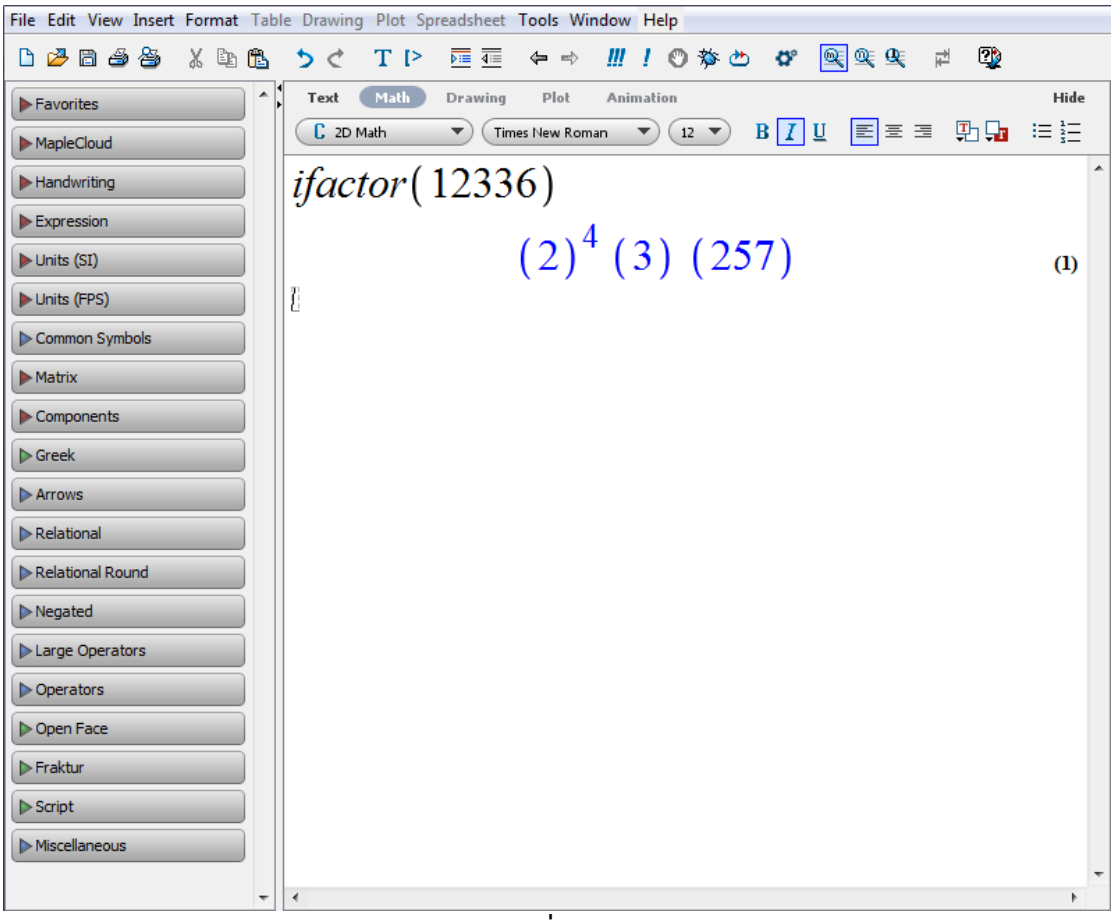
ตัวอย่างที่ 6.2.3.1 จงเขียน 12336 ให้อยู่ในรูปของผลคูณของจำนวนเฉพาะ

วิธีที่ 1 จาก $12336 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 257$

จะได้ว่า $= 2^4(3)(257)$

วิธีที่ 2 ใช้โปรแกรม Maple จะได้ว่า

ให้เราพิมพ์ (code) $\mathbf{ifactor(123336)}$ แล้วกด Enter จะได้คำตอบ คือ $2^4(3)(257)$ (ดังรูปที่ 3.1)



รูปที่ 3.1

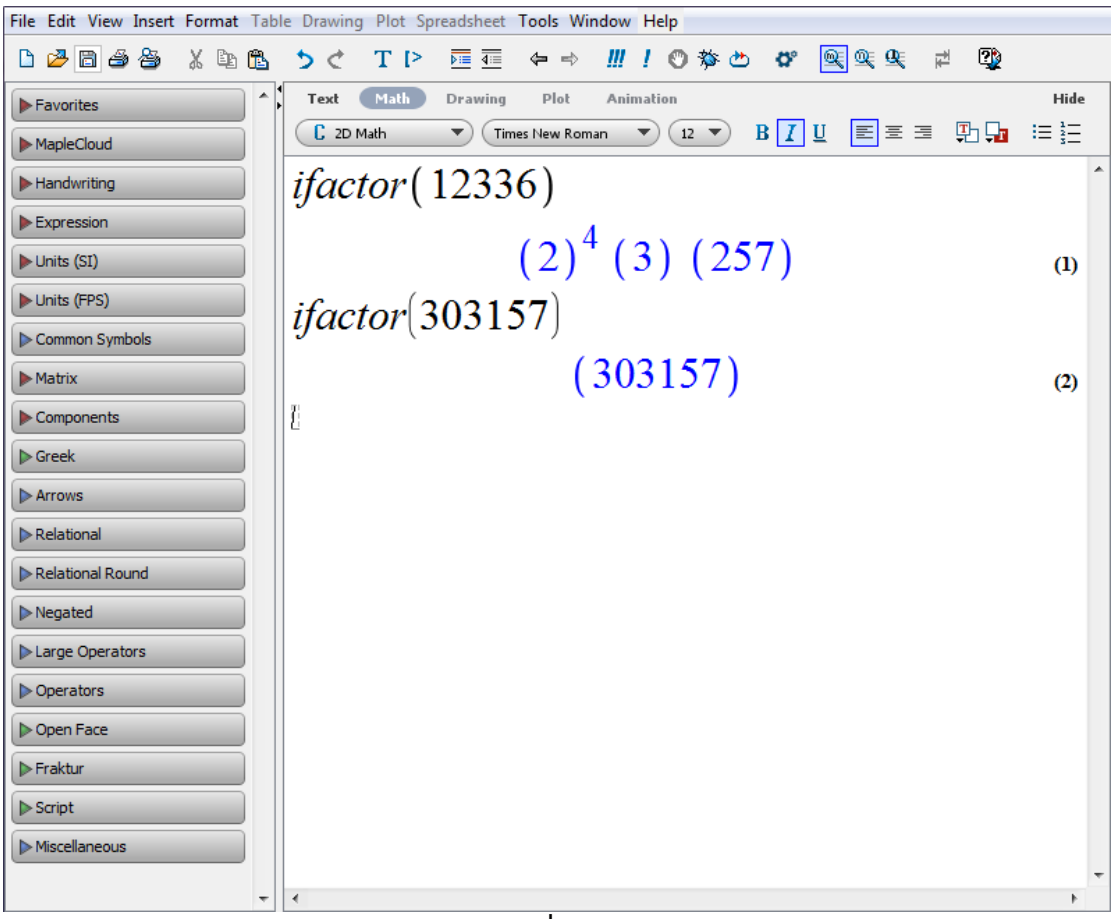
ตัวอย่างที่ 6.2.3.2 จงเขียน $303{,}157$ ให้อยู่ในรูปของผลคูณของจำนวนเฉพาะ

วิธีที่ 1 จาก $303{,}157 = 303{,}157$

จะได้ว่า $= 303{,}157$

วิธีที่ 2 ใช้โปรแกรม Maple จะได้ว่า

ให้เราพิมพ์ (code) **ifactor(303157)** แล้วกด Enter จะได้คำตอบ คือ 303157 (ดังรูปที่ 3.2)



รูปที่ 3.2

6.2.4 การแก้สมการ และการแก้อสมการ

การแก้สมการนับว่าเป็นหัวใจสำคัญของคณิตศาตร์เลยก็ว่าได้ เพราะเราจะสังเกตเห็นได้ว่าไม่ว่าเราจะเรียนวิชาอะไรที่เกี่ยวกับคณิตศาตร์ เราจะเจอปัญหาเกี่ยวกับการแก้สมการทุกครั้ง และในการแก้สมการที่มีตัวเลขมาก ๆ หรือเป็นสมการยาก ๆ เราอาจจะต้องเสียเวลา หรือทำให้เกิดการคำนวณผิดพลาดได้ง่าย สำหรับในการแก้ปัญหานี้ เราจะใช้โปรแกรม Maple ช่วยในการหาคำตอบเพื่อจะทำให้ประหยัดเวลา และเกิดความแม่นยำมากยิ่งขึ้น

ตัวอย่างที่ 6.2.4.1 จงหาคำตอบของสมการ $x^2 + 5x - 14 = 0$

วิธีที่ 1 เนื่องจาก $x^2 + 5x - 14 = (x - 2)(x + 7)$

จะได้ว่า $(x - 2)(x + 7) = 0$

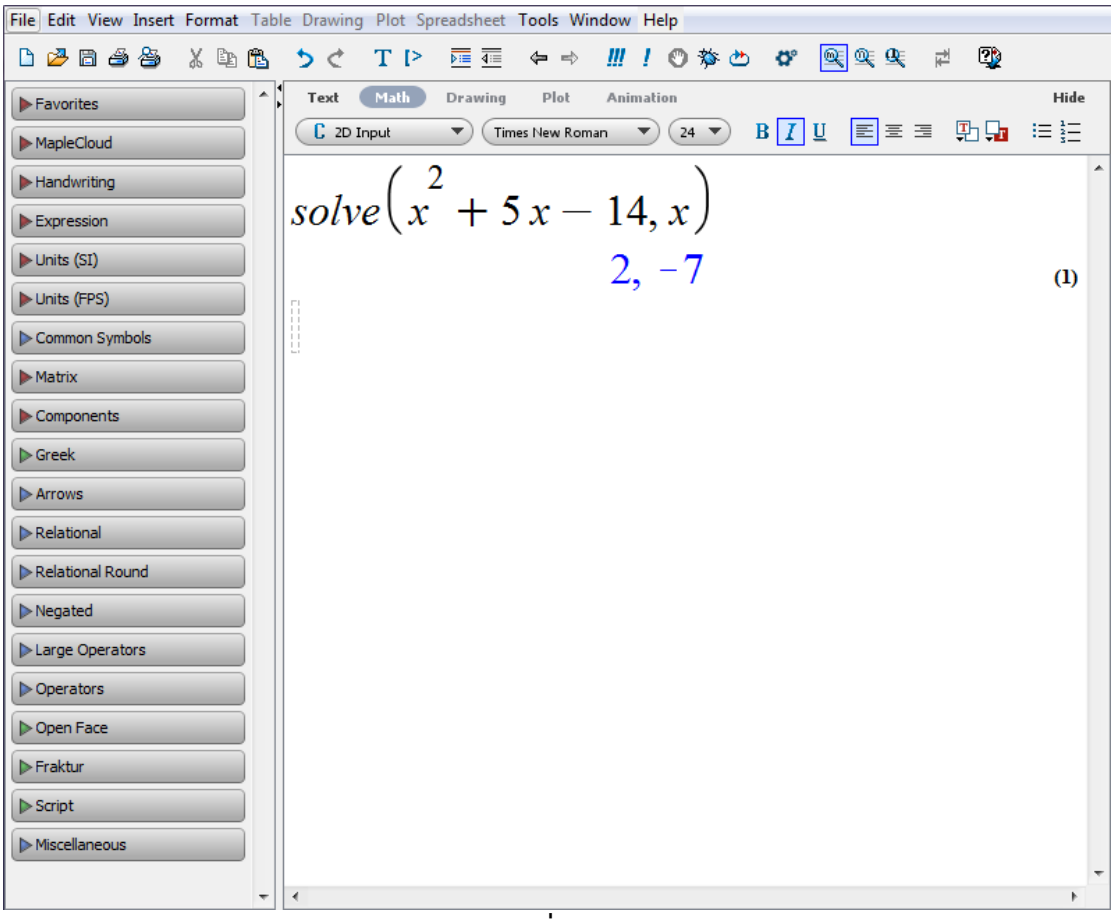
ดังนั้น $(x-2) = 0$ หรือ $(x+7) = 0$

$x = 2$ หรือ $x = -7$

เพราะฉะนั้น คำตอบของสมการ $x^2 + 5x - 14 = 0$ คือ $2, -7$

วิธีที่ 2 ใช้โปรแกรม Maple จะได้ว่า

ให้เราพิมพ์ (code) $\mathrm{solve}(x^2 + 5x - 14, x)$ แล้วกด Enter จะได้คำตอบ คือ $2, -7$ (ดังรูปที่ 4.1)



รูปที่ 4.1

ตัวอย่างที่ 6.2.4.2 จงหาคำตอบของสมการ $|x^2 - x - 6| = x + 2$

วิธีที่ 1 **กรณีแรก** $x^2 - x - 6 < 0$

จาก $|x^2 - x - 6| = x + 2$

จะได้ว่า $-(x^2 - x - 6) = x + 2$

$-x^2 + x + 6 = x + 2$

$-x^2 = -4$

$x^2 = 4$

$$x = 2 \quad \text{หรือ} \quad x = -2$$

เมื่อ $x = 2$ จะได้ว่า $x^2 - x - 6 = -2$

เมื่อ $x = -2$ จะได้ว่า $x^2 - x - 6 = 0$

ดังนั้น คำตอบในกรณีนี้คือ 4 เท่านั้น

กรณีที่สอง $x^2 - x - 6 \geq 0$

จาก $|x^2 - x - 6| = x + 2$

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$(x - 4)(x + 2) = 0$$

$$x = 4 \quad \text{หรือ} \quad x = -2$$

เมื่อ $x = 4$ จะได้ว่า $x^2 - x - 6 = 6$

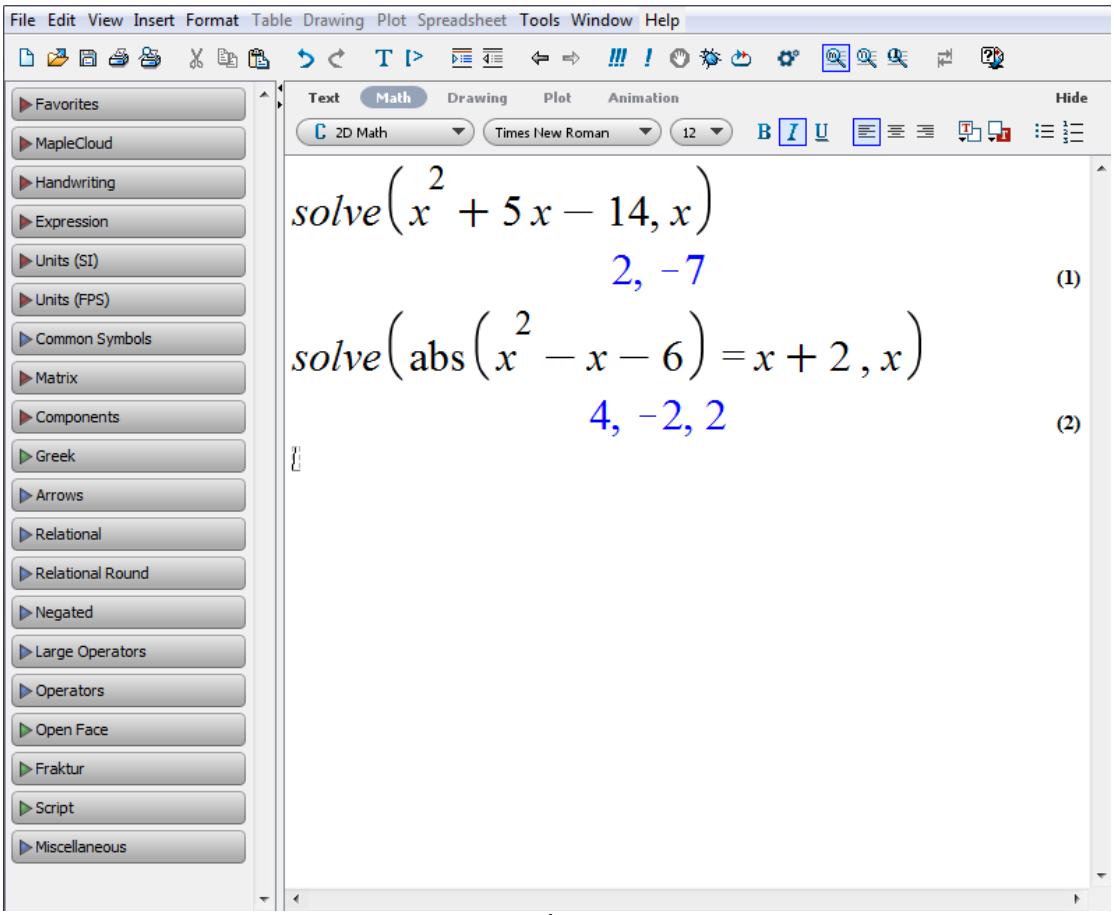
เมื่อ $x = -2$ จะได้ว่า $x^2 - x - 6 = 0$

ดังนั้นคำตอบในกรณีนี้คือ 4 และ -2

เพราะฉะนั้นคำตอบของสมการ $|x^2 - x - 6| = x + 2$ คือ $4, -2, 2$

วิธีที่ 2 ใช้โปรแกรม Maple จะได้ว่า

ให้เราพิมพ์ (code) $\mathbf{solve(abs(x^2 - x - 6) = x + 2, x)}$ แล้วกด Enter จะได้คำตอบ คือ $4, -2, 2$ (ดังรูปที่ 4.2)



รูปที่ 4.2

ตัวอย่าง 6.2.4.3 จงหาเซตคำตอบของอสมการ $|4x - 9| \leq |6x + 7|$

วิธีที่ 1

$$|4x - 9| \leq |6x + 7|$$

$$\Rightarrow \quad |4x - 9|^2 \leq |6x + 7|^2$$

$$\Rightarrow \quad (6x + 7)^2 - (4x - 9)^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad [(6x + 7) - (4x - 9)][(6x + 7) + (4x - 9)] \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad (2x + 16)(10x - 2) \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad 2(x + 8)\, 10(x - \tfrac{1}{5}) \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad 20(x + 8)(x - \tfrac{1}{5}) \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad (x + 8)(x - \tfrac{1}{5}) \geq 0$$

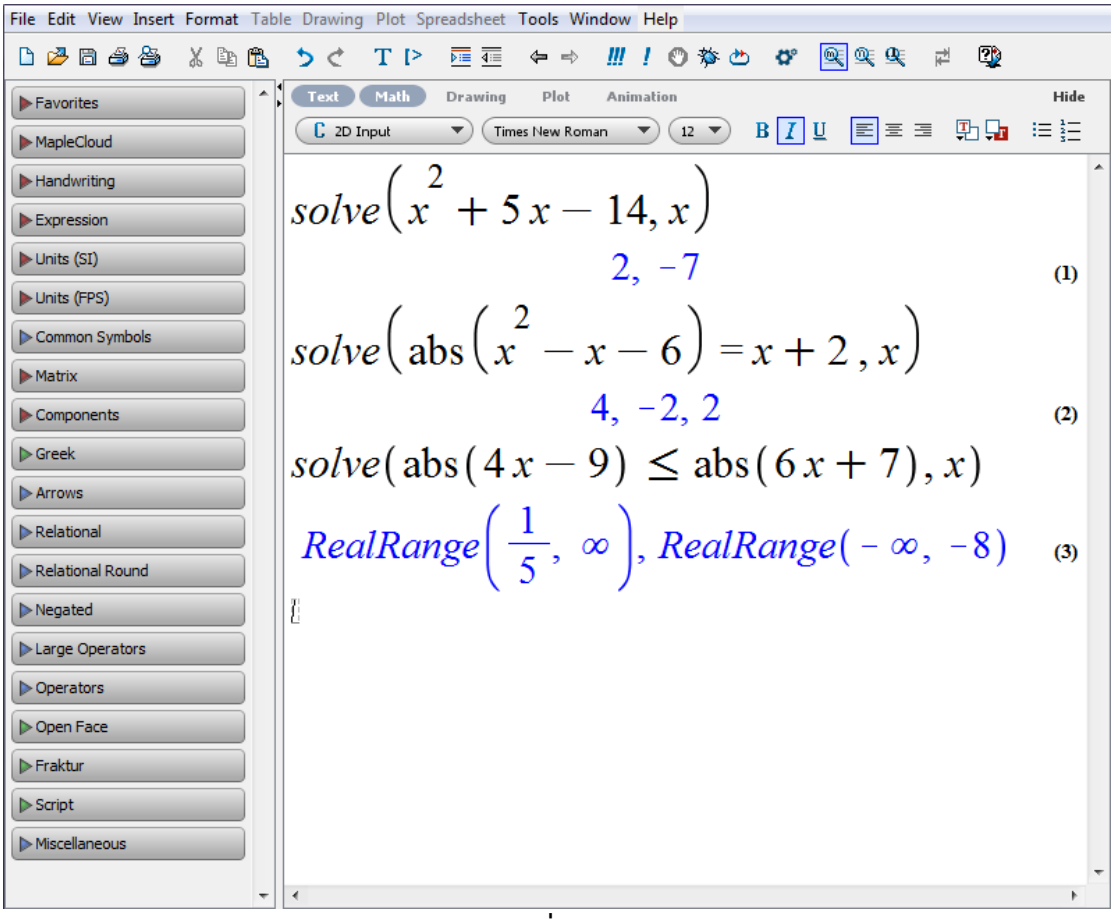
รากของสมการ $(x + 8)\left(x - \frac{1}{5}\right) = 0$ คือ -8 และ $\frac{1}{5}$

ดังนั้นเซตคำตอบของอสมการ $(x + 8)\left(x - \frac{1}{5}\right) \geq 0$ คือ $(-\infty, -8] \cup [\frac{1}{5}, \infty)$

นั่นคือเซตคำตอบของอสมการ $|4x - 9| \leq |6x + 7|$ คือ $(-\infty, -8] \cup [\frac{1}{5}, \infty)$

วิธีที่ 2 ใช้โปรแกรม Maple จะได้ว่า

ให้เราพิมพ์ (code) $\text{solve}(\text{abs}(4x - 9) \leq \text{abs}(6x + 7), x)$ แล้วกด Enter จะได้คำตอบ คือ $\text{RealRange}\left(\frac{1}{5}, \infty\right)$, $\text{RealRange}(-\infty, -8)$ (ดังรูปที่ 4.3)



รูปที่ 4.3

ตัวอย่าง 6.2.4.4 จงหาเซตคำตอบของอสมการ $\left|\frac{3x-2}{x-7}\right| < 4$

วิธีที่ 1 $\left|\frac{3x-2}{x-7}\right| < 4$

$\Rightarrow \quad -4 < \frac{3x-2}{x-7} < 4$

กรณีแรก $x-7 > 0$

จะได้ $-4(x-7) < 3x-2 < 4(x-7)$

จากอสมการข้างซ้ายจะได้ $-4(x-7) < 3x-2$

$-4x+28 < 3x-2$

$30 < 7x$

$\frac{30}{7} < x$

จากอสมการข้างขวาจะได้ $3x-2 < 4(x-7)$

$3x-2 < 4x-28$

$26 < x$

ดังนั้นกรณีแรกนี้ $x > 7$ และ $x > \frac{30}{7}$ และ $x > 26$

เพราะฉะนั้นเซตคำตอบของกรณีแรก คือ $(26, \infty)$

กรณีที่สอง $x-6 < 0$

จะได้ $-4(x-7) > 3x-2 > 4(x-7)$

จากอสมการข้างซ้ายจะได้ $-4(x-7) > 3x-2$

$-4x+28 > 3x-2$

$30 > 7x$

$\frac{30}{7} > x$

จากอสมการข้างขวาจะได้ $3x-2 > 4(x-7)$

$3x-2 > 4x-28$

$26 > x$

ดังนั้นกรณีแรกนี้ $x < 7$ และ $x < \frac{30}{7}$ และ $x < 26$

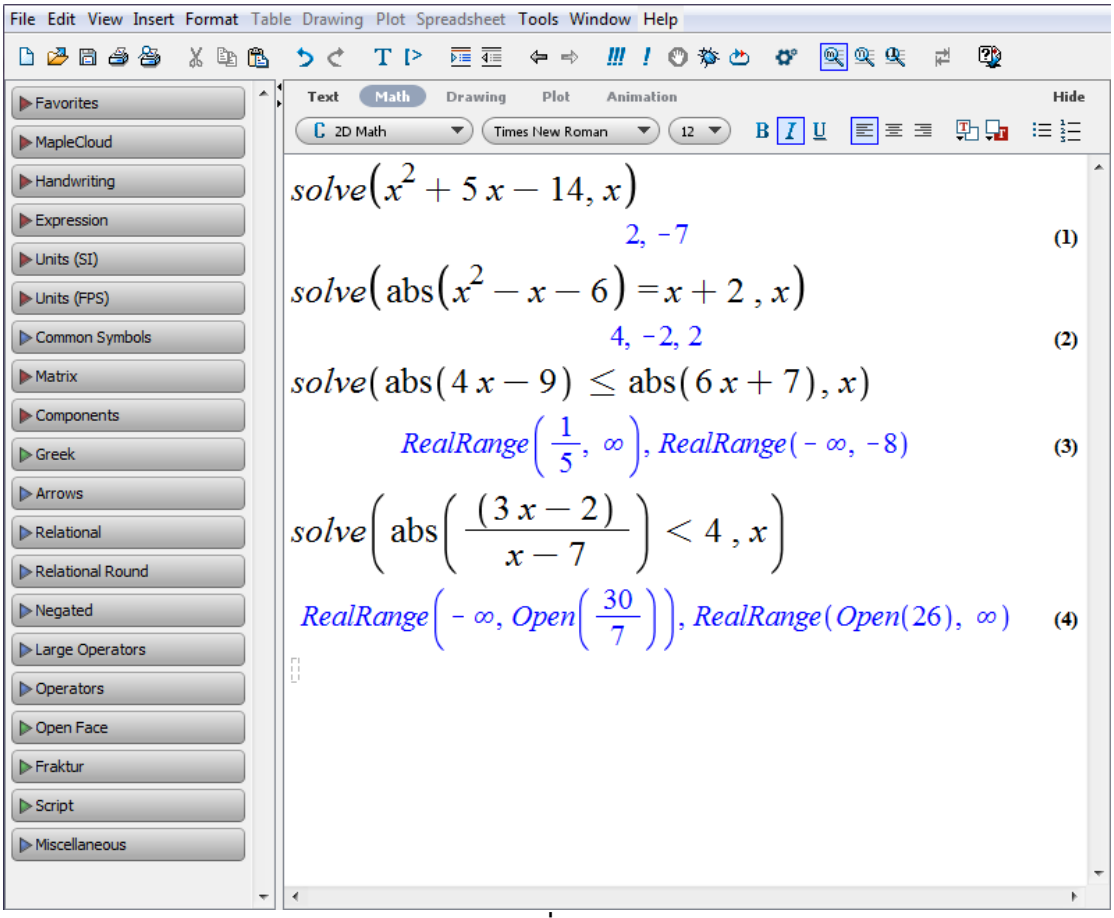
เพราะฉะนั้นเซตคำตอบของกรณีแรก คือ $(-\infty, \frac{30}{7})$

ดังนั้นเซตคำตอบของสมการคือ $\left|\frac{3x-2}{x-7}\right| < 4$ คือ $(-\infty, \frac{30}{7}) \cup (26, \infty)$

วิธีที่ 2 ใช้โปรแกรม Maple จะได้ว่า

ให้เราพิมพ์ (code) $\mathrm{solve}(\mathrm{abs}((3x-2)/(x-7) < 4, x)$ แล้วกด Enter จะได้คำตอบ คือ $\mathrm{RealRange}\left(-\infty, \mathrm{open}\left(\frac{30}{7}\right)\right), \mathrm{RealRange}(\mathrm{open}(26), \infty)$

(ดังรูปที่ 4.4)


File Edit View Insert Format Table Drawing Plot Spreadsheet Tools Window Help
Favorites
MapleCloud
Handwriting
Expression
Units (SI)
Units (FPS)
Common Symbols
Matrix
Components
Greek
Arrows
Relational
Relational Round
Negated
Large Operators
Operators
Open Face
Fraktur
Script
Miscellaneous
Text Math Drawing Plot Animation Hide
2D Math
Times New Roman
12
solve(x^2 + 5 x − 14, x)
2, −7 (1)
solve(abs(x^2 − x − 6) = x + 2, x)
4, −2, 2 (2)
solve(abs(4 x − 9) ≤ abs(6 x + 7), x)
RealRange(1/5, ∞), RealRange(−∞, −8) (3)
solve(abs((3 x − 2)/(x − 7)) < 4, x)
RealRange(−∞, Open(30/7)), RealRange(Open(26), ∞) (4)

รูปที่ 4.4

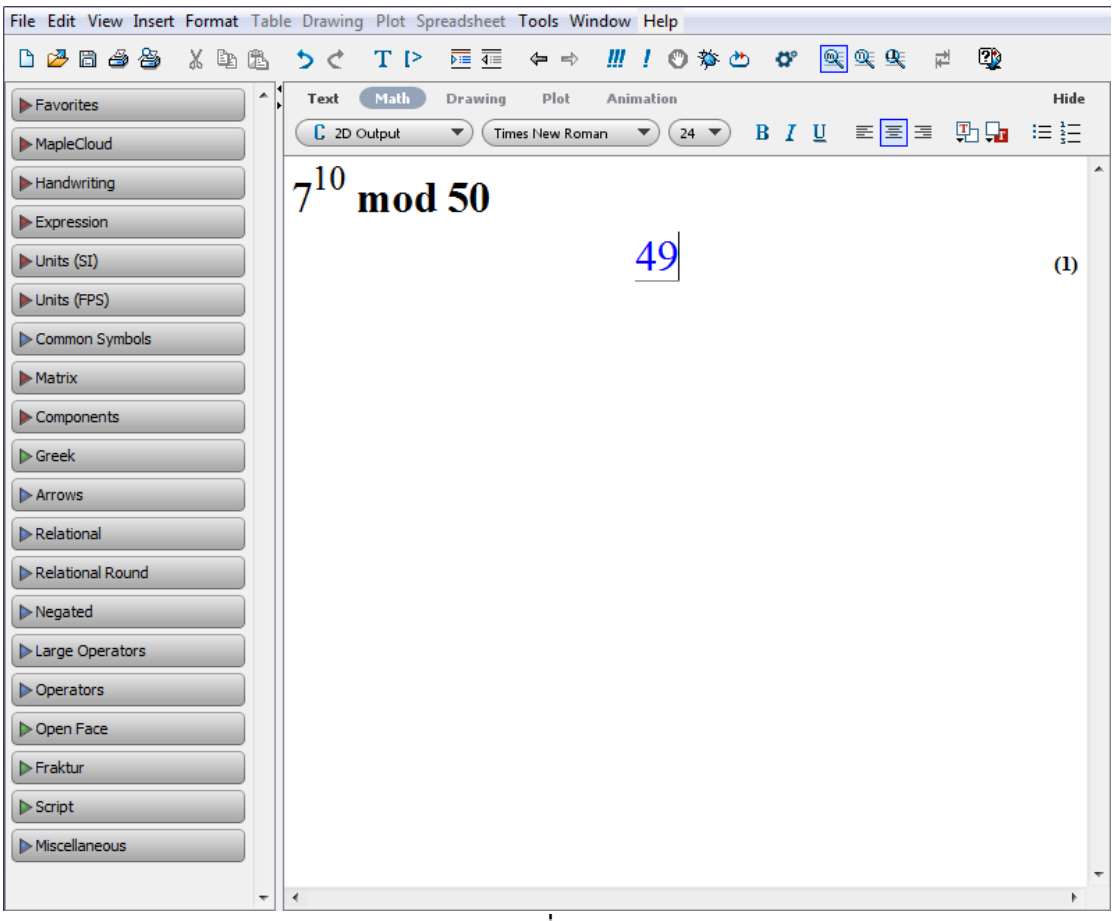
6.2.5 มอดุโล (modulo)

มอดุโล (modulo) เป็นกระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่ เป็นที่นิยมกันอย่างแพร่หลาย แต่ในที่นี้เราจะใช้ มอดุโล (modulo) ในการพิสูจน์ทฤษฎีบทที่เกี่ยวกับ ความสัมพันธ์ของคอนกรูเอินซ์ (congruence) เท่านั้น

ตัวอย่าง 6.2.5.2 50 หาร 7^{10} เหลือเศษเท่าใด

วิธีที่ 1 เนื่องจาก
$$7^2 \equiv -1 \pmod{50}$$
$$(7^2)^5 \equiv (-1)^5 \pmod{50}$$
$$7^{10} \equiv -1 \pmod{50}$$
แต่
$$-1 \equiv 49 \pmod{50}$$
เพราะฉะนั้น
$$7^{10} \equiv 49 \pmod{17}$$
นั่นคือ 50 หาร 7^{10} เหลือเศษ 49

วิธีที่ 2 ใช้โปรแกรม Maple จะได้ว่า
ให้เราพิมพ์ (code) $7^{10}\bmod 50$ แล้วกด Enter จะได้คำตอบ คือ 49
(ดังรูปที่ 5.1)

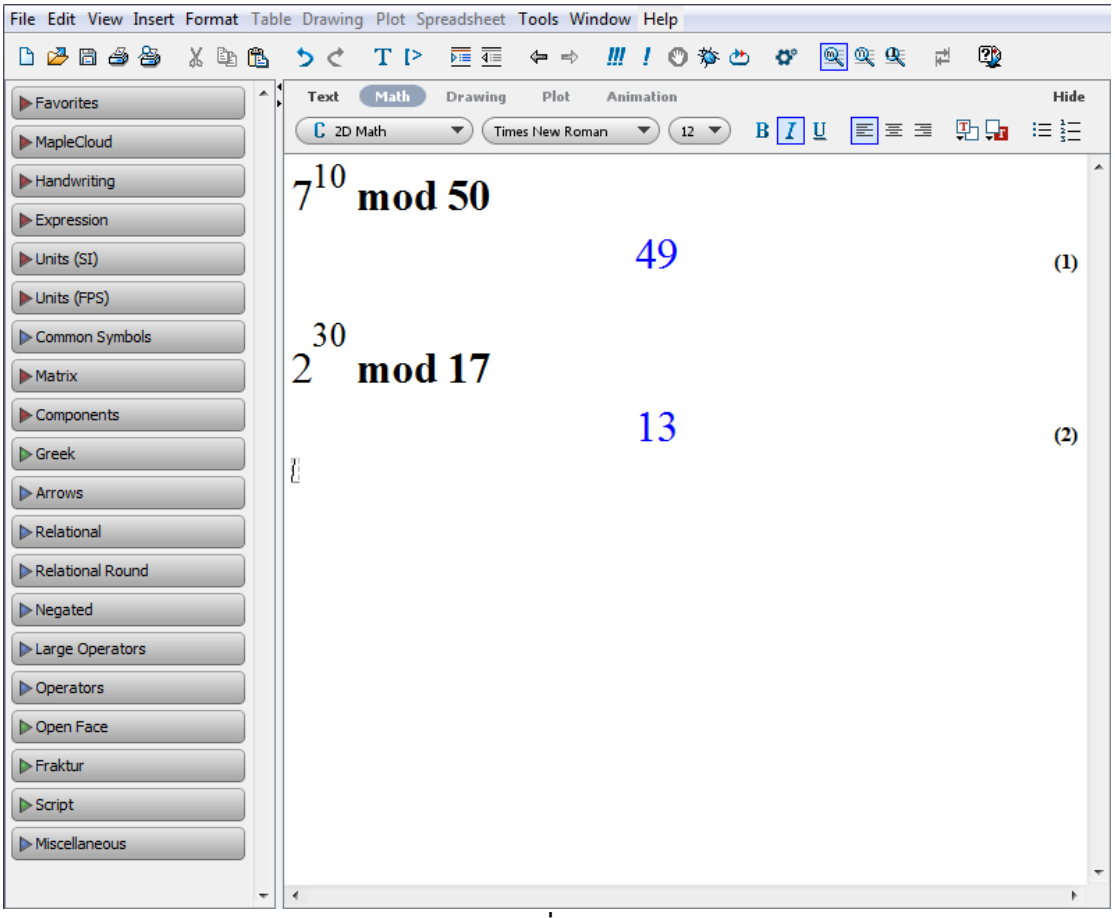


รูปที่ 5.1

ตัวอย่าง 6.2.5.2 17 หาร 2^{30} เหลือเศษเท่าใด

วิธีที่ 1 เนื่องจาก
$$2^4 \equiv -1 \pmod{17}$$
$$(2^4)^7 \equiv (-1)^7 \pmod{17}$$
$$2^{28} \equiv -1 \pmod{17}$$
$$2^{28}2^2 \equiv (-1)(2^2) \pmod{17}$$
$$2^{30} \equiv -4 \pmod{17}$$
แต่ $$-4 \equiv 13 \pmod{17}$$
เพราะฉะนั้น $$2^{30} \equiv 13 \pmod{17}$$
นั่นคือ 17 หาร 2^{30} เหลือเศษ 13

วิธีที่ 2 ใช้โปรแกรม Maple จะได้ว่า
ให้เราพิมพ์ (code) $2^{30} \bmod 17$ แล้วกด Enter จะได้คำตอบ คือ 13
(ดังรูปที่ 5.2)



รูปที่ 5.2

ตัวอย่าง 6.2.5.2 127 หาร 5^{65} เหลือเศษเท่าใด

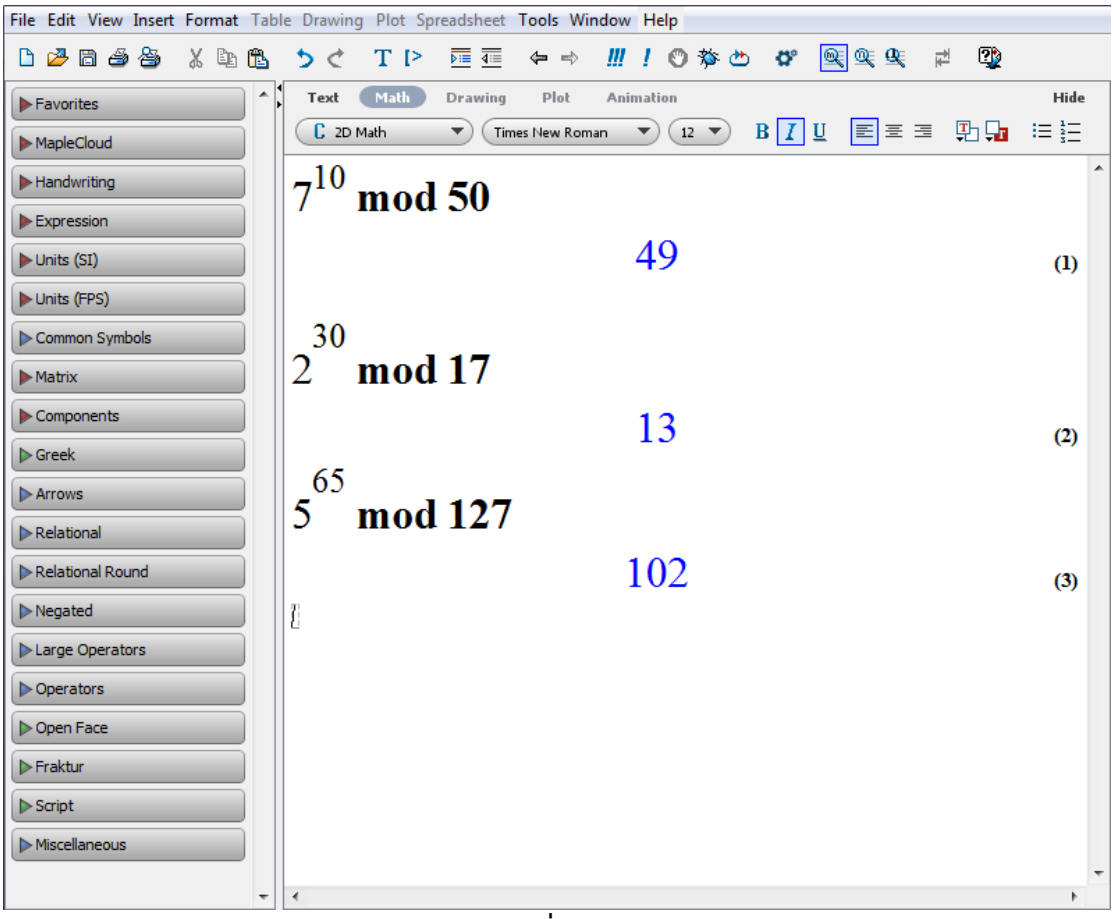
วิธีที่ 1 เนื่องจาก

$$\begin{aligned} 5^3 &\equiv -2 \pmod{127} \\ (5^3)^7 &\equiv (-2)^7 \pmod{127} \\ 5^{21} &\equiv -128 \pmod{127} \\ -128 &\equiv -1 \pmod{127} \\ 5^{21} &\equiv -1 \pmod{127} \\ (5^{21})^3 &\equiv (-1)^3 \pmod{127} \\ 5^{63} &\equiv -1 \pmod{127} \\ 5^{63}(5^2) &\equiv (-1)(5^2) \pmod{127} \\ 5^{65} &\equiv -25 \pmod{127} \\ -25 &\equiv 102 \pmod{127} \\ 5^{65} &\equiv 102 \pmod{127} \end{aligned}$$

นั่นคือ 127 หาร 5^{65} เหลือเศษ 102

วิธีที่ 2 ใช้โปรแกรม Maple จะได้ว่า

ให้เราพิมพ์ (code) $5^{65} \bmod 127$ แล้วกด Enter จะได้คำตอบ คือ 102 (ดังรูปที่ 5.3)



รูปที่ 5.3

6.2.6 การบวก ลบ คูณ และหารของจำนวนเชิงซ้อน

จำนวนเชิงซ้อน (complex number) ประกอบด้วย จำนวนจริง (real number) และจำนวนจิตภาพ (imaginary number) เราจะเห็นว่าสิ่งที่เราเรียกว่า “จำนวน” ทั้งหมดนี้อยู่ในเซตของจำนวนเชิงซ้อน (complex number)

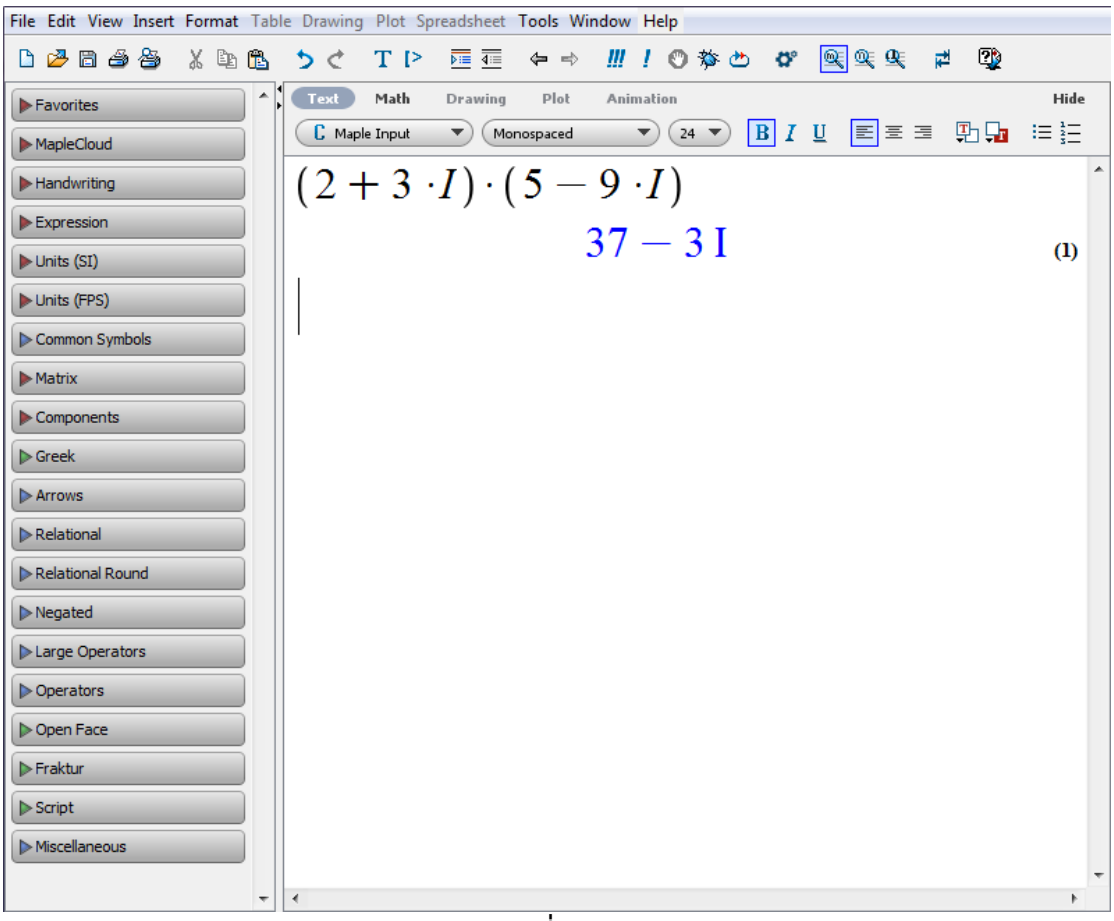
ตัวอย่างที่ 6.2.6.1 จงหาค่าของ $(2+3\mathrm{i})(5-9\mathrm{i}) = ?$

วิธีที่ 1

$$\begin{aligned}(2+3\mathrm{i})(5-9\mathrm{i}) &= 10-18\mathrm{i}+15\mathrm{i}-27\mathrm{i}^2\\ &= 10-3\mathrm{i}+27\\ &= 37-3\mathrm{i}\end{aligned}$$

วิธีที่ 2 ใช้โปรแกรม Maple จะได้ว่า

ให้เราพิมพ์ (code) $(2+3*\mathrm{I})*(5-9*\mathrm{I})$ แล้วกด Enter จะได้คำตอบ คือ $37-3\mathrm{I}$ (ดังรูปที่ 6.1)



รูปที่ 6.1

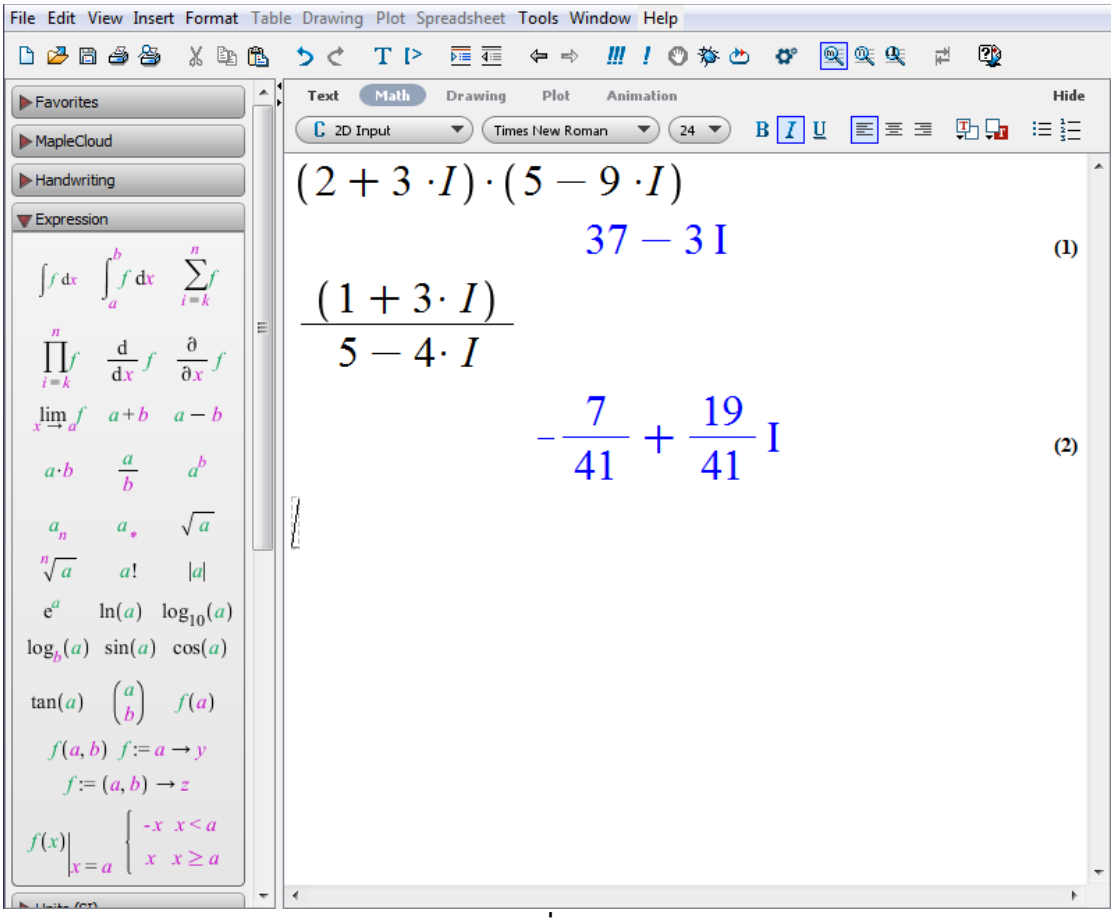
ตัวอย่างที่ 6.2.6.2 จงหาค่าของ $\dfrac{1+3\,i}{5-4i}$

วิธีที่ 1

$$\begin{aligned}\frac{1+3\,i}{5-4i} &= \frac{1+3\,i}{5-4i}\cdot\frac{5+4i}{5+4i}\\ &= \frac{5+4i+15i+12i^2}{25+20i-20i-16i^2}\\ &= \frac{5+19i-12}{25+16}\\ &= \frac{-7+19i}{41}\\ &= -\frac{7}{41}+\frac{19}{41}i\end{aligned}$$

วิธีที่ 2 ใช้โปรแกรม Maple จะได้ว่า

ให้เราพิมพ์ (code) $(1+3*I)/(5-4*I)$ แล้วกด Enter จะได้คำตอบ คือ $-\frac{7}{41}+\frac{19}{41}I$ (ดังรูปที่ 6.2)



รูปที่ 6.2

6.2.7 ส่วนจริง (real part) และส่วนจิตภาพ (imaginary part)

ในระบบจำนวนเชิงซ้อนจะประกอบด้วย 2 ส่วน คือ ส่วนจริง (real part) และส่วนจิตภาพ (imaginary part) ถ้าเราสามารถแยกได้ว่าส่วนไหนคือส่วนจริง และส่วนไหนคือส่วนจินตภาพ จะทำให้เราเข้าใจในระบบจำนวนเชิงซ้อนมากยิ่งขึ้น

ตัวอย่างที่ 6.2.7.1 จงหา Re ของ $(2+3i)(5-9i)$

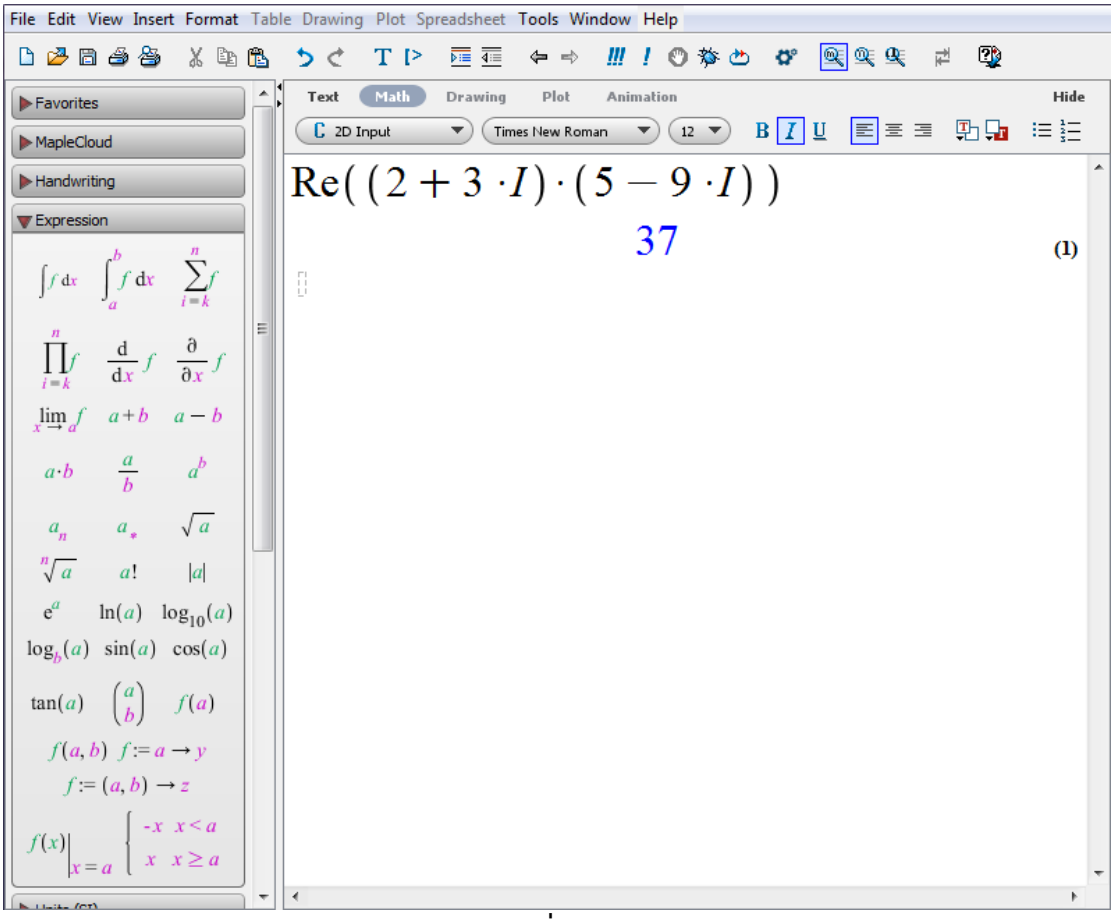
วิธีที่ 1

$$\begin{aligned}(2+3i)(5-9i) &= 10-18i+15i-27i^2\\ &= 10-3i+27\\ &= 37-3i\end{aligned}$$

ดังนั้น Re ของ $(2+3i)(5-9i)$ คือ 37

วิธีที่ 2 ใช้โปรแกรม Maple จะได้ว่า

ให้เราพิมพ์ (code) $\mathrm{Re}((2+3*I)*(5-9*I))$ แล้วกด Enter จะได้คำตอบ คือ 37 (ดังรูปที่ 7.1)



รูปที่ 7.1

ตัวอย่างที่ 6.2.7.2 จงหา Im ของ $\frac{1+3i}{5-4i}$

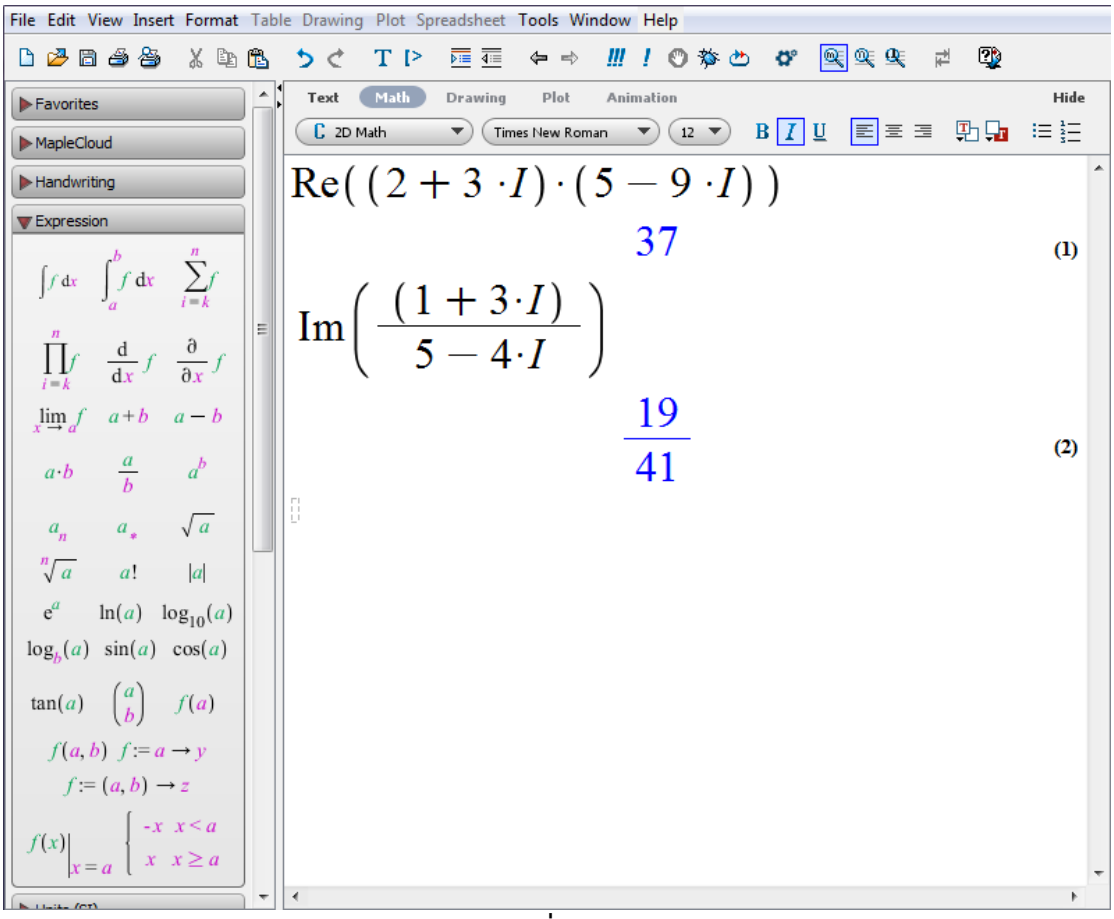
วิธีที่ 1

$$\frac{1+3i}{5-4i} = \frac{1+3i}{5-4i} \cdot \frac{5+4i}{5+4i}$$
$$= \frac{5+4i+15i+12i^2}{25+20i-20i-16i^2}$$
$$= \frac{5+19i-12}{25+16}$$
$$= \frac{-7+19i}{41}$$
$$= -\frac{7}{41} + \frac{19}{41}i$$

ดังนั้น Im ของ $\frac{1+3i}{5-4i}$ คือ $\frac{19}{41}$

วิธีที่ 2 ใช้โปรแกรม Maple จะได้ว่า

ให้เราพิมพ์ (code) $\mathrm{Im}((1+3*\mathrm{I})/(5-4*\mathrm{I}))$ แล้วกด Enter จะได้คำตอบ คือ $\frac{19}{41}$ (ดังรูปที่ 7.2)



รูปที่ 7.2

6.2.8 สังยุค หรือ คอนจุเกต (conjugate) ของจำนวนเชิงซ้อน

สังยุค หรือคอนจุเกต (conjugate) เป็นกระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์วิธีหนึ่ง ซึ่งเราสามารถนำพื้นฐานนี้ไปประยุกต์ใช้กับเนื้อหาที่เกี่ยวกับคณิตศาสตร์ในหลาย ๆ รายวิชา เช่น แคลคูลัส เรขาคณิตวิเคราะห์ สมการเชิงอนุพันธ์ ระบบจำนวน พีชคณิตเชิงเส้น ฯลฯ

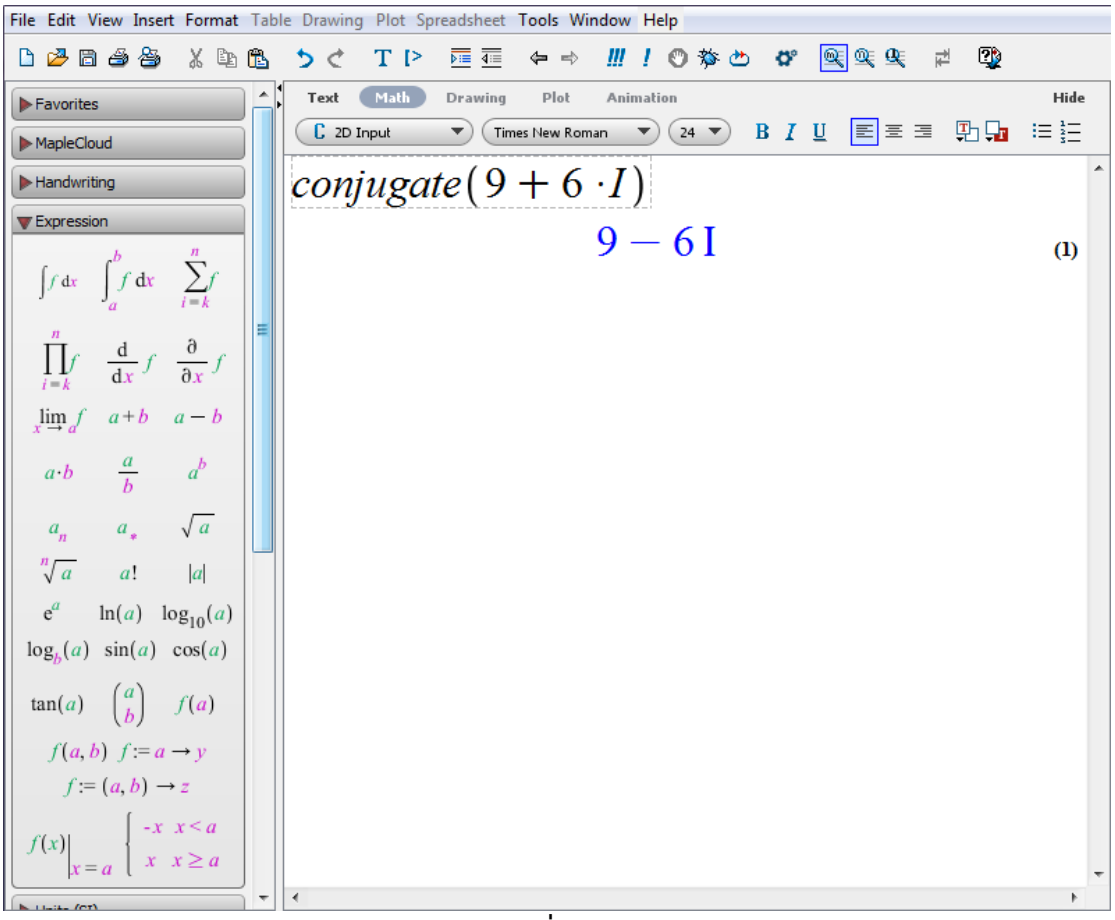
ตัวอย่างที่ 6.2.8.1 จงหา conjugate ของ $9 + 6i$

วิธีที่ 1 $9 + 6i = 9 - 6i$

ดังนั้น conjugate ของ $9 + 6i$ คือ $9 - 6i$

วิธีที่ 2 ใช้โปรแกรม Maple จะได้ว่า

ให้เราพิมพ์ (code) $\mathbf{conjugate}(9 + 6 * \mathrm{I})$ แล้วกด Enter จะได้คำตอบ คือ $9 - 6\mathrm{I}$ (ดังรูปที่ 8.1)



รูปที่ 8.1

ตัวอย่างที่ 6.2.8.2 จงหา conjugate ของ $(2+3i)(5-9i)$

วิธีที่ 1 $(2+3i)(5-9i) = 10-18i+15i-27i^2$

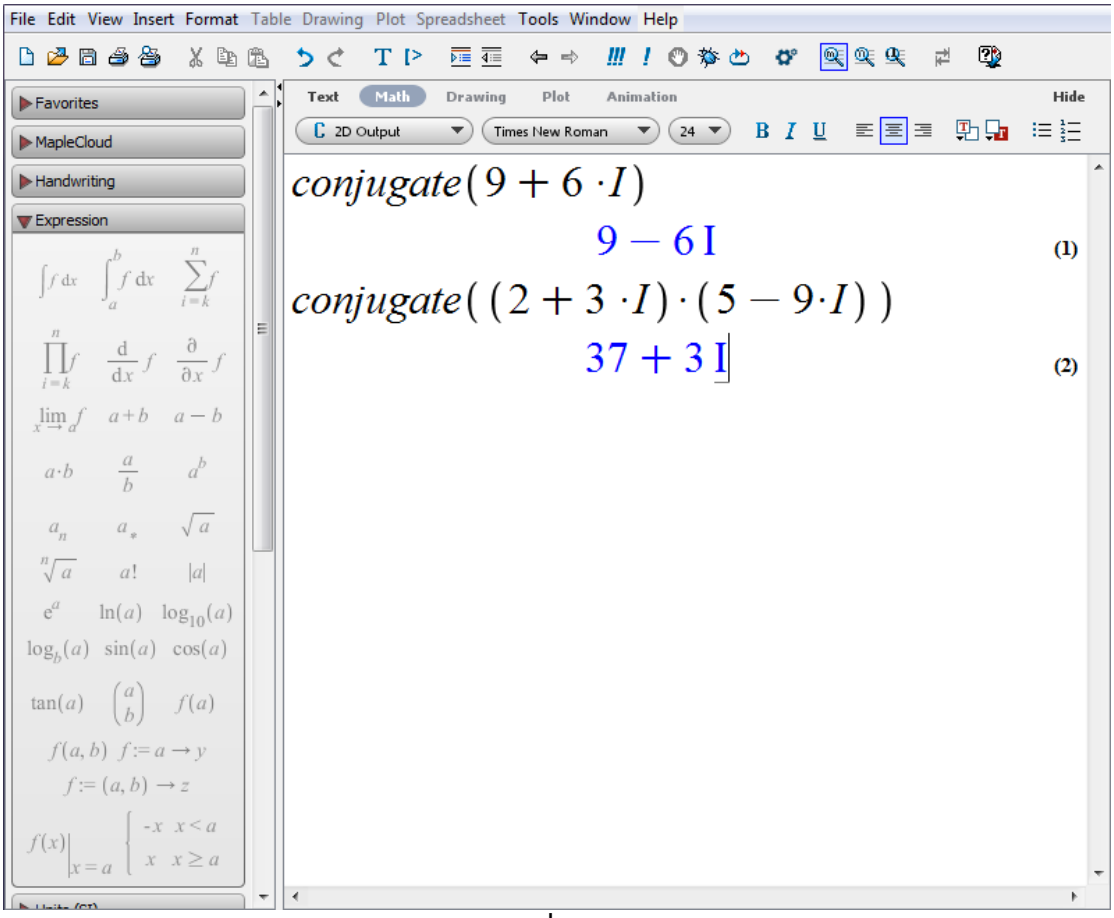
$= 10-3i+27$

$= 37-3i$

ดังนั้น conjugate ของ $(2+3i)(5-9i)$ คือ $37+3i$

วิธีที่ 2 ใช้โปรแกรม Maple จะได้ว่า

ให้เราพิมพ์ (code) $\mathbf{conjugate((2+3*I)*(5-9*I))}$ แล้วกด Enter จะได้คำตอบ คือ $37+3I$ (ดังรูปที่ 8.2)



รูปที่ 8.2

ตัวอย่างที่ 6.2.8.3 จงหา conjugate ของ $\frac{1+3\,i}{5-4i}$

วิธีที่ 1

$$\frac{1+3\,i}{5-4i} = \frac{1+3\,i}{5-4i}\cdot\frac{5+4i}{5+4i}$$

$$= \frac{5+4i+15i+12i^2}{25+20i-20i-16i^2}$$

$$= \frac{5+19i-12}{25+16}$$

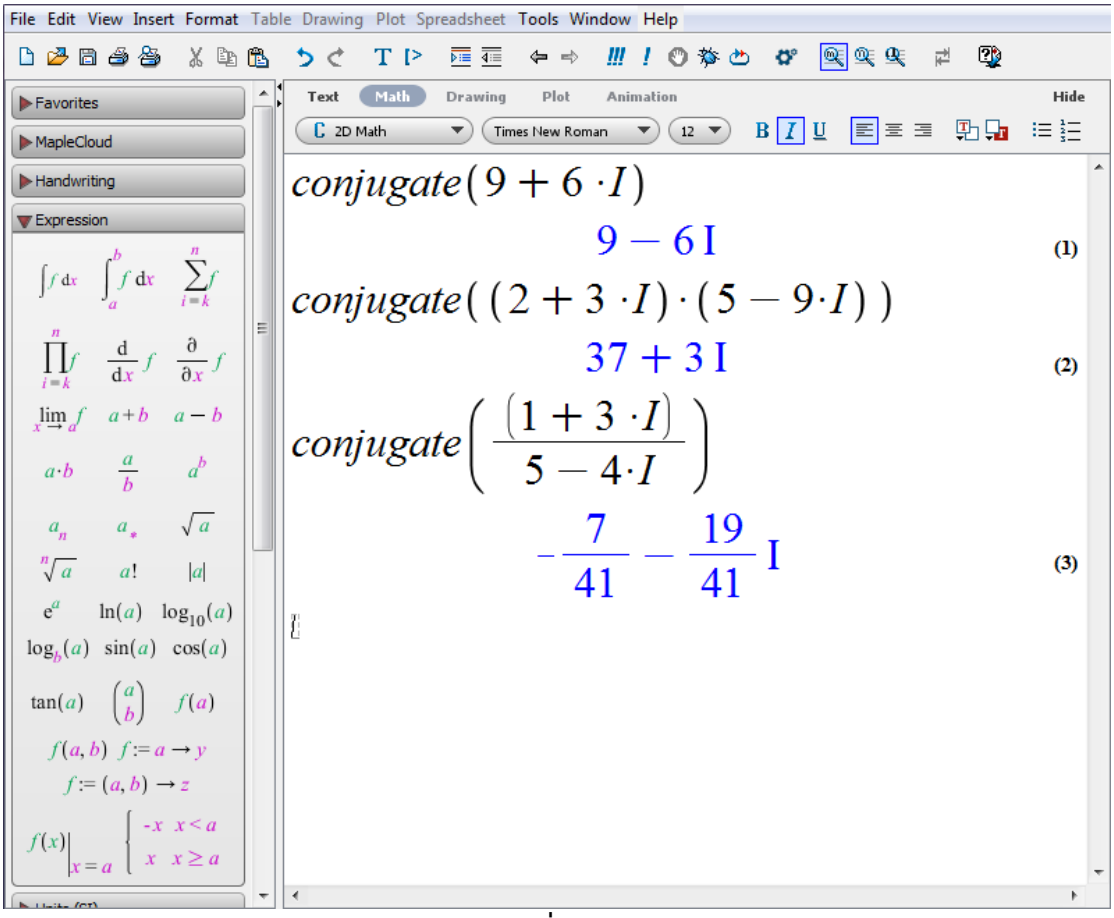
$$= \frac{-7+19i}{41}$$

$$= -\frac{7}{41}+\frac{19}{41}i$$

ดังนั้น conjugate ของ $\frac{1+3\,i}{5-4i}$ คือ $-\frac{7}{41}-\frac{19}{41}i$

วิธีที่ 2 ใช้โปรแกรม Maple จะได้ว่า

ให้เราพิมพ์ (code) $\mathbf{conjugate((1+3*I)/(5-4*I))}$ แล้วกด Enter จะได้คำตอบ คือ $-\frac{7}{41}-\frac{19}{41}I$ (ดังรูปที่ 8.3)



รูปที่ 8.3

6.2.9 ค่าสัมบูรณ์ (Absolute Value) ของจำนวนเชิงซ้อน

ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อนนับว่าเป็นพื้นฐานสำคัญ ในการแก้ปัญหาที่เกี่ยวกับระบบจำนวนเชิงซ้อน และสามารถขยายแนวคิดไปสู่ระบบจำนวนเชิงซ้อนที่ซับซ้อนยิ่งขึ้น

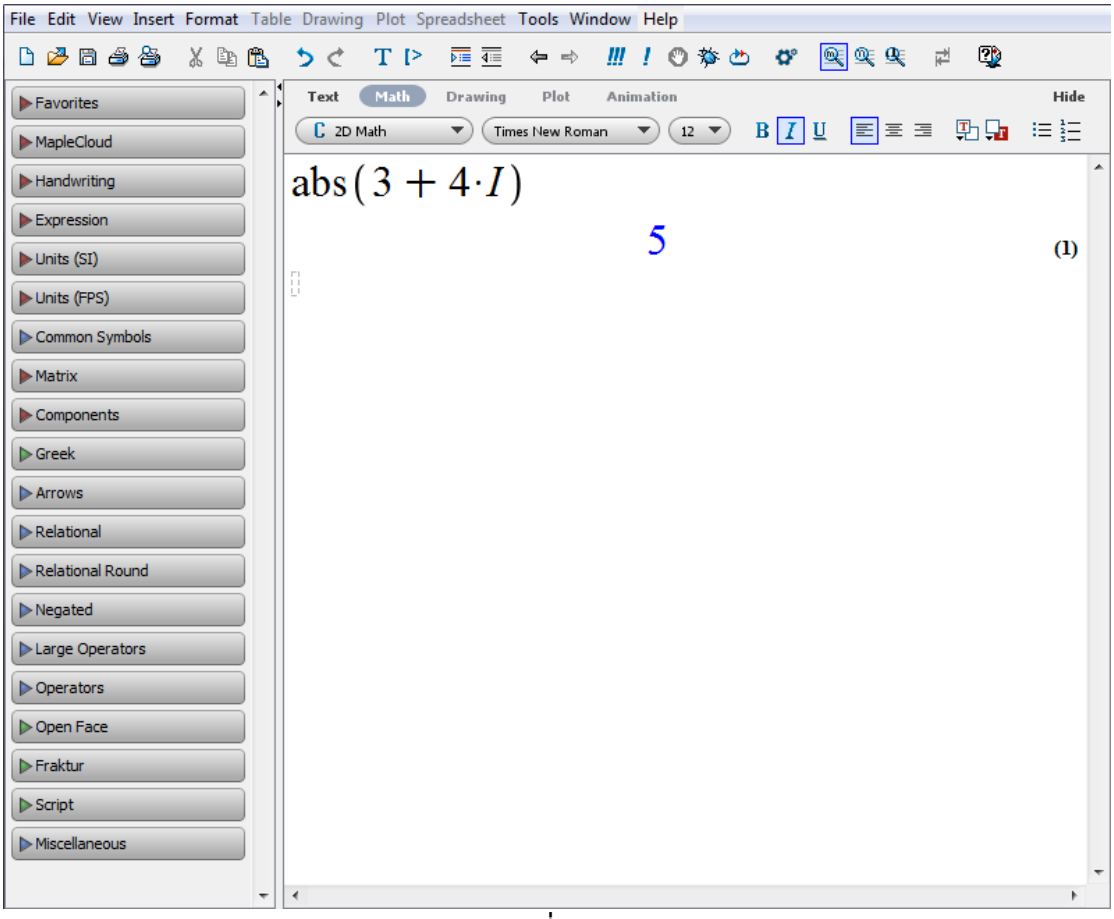
ตัวอย่างที่ 6.2.9.1 จงหาค่าสัมบูณ์ของ $3+4\mathrm{i}$

วิธีที่ 1
$$\begin{aligned} |3+4\mathrm{i}| &= \sqrt{3^2+4^2} \\ &= \sqrt{9+16} \\ &= \sqrt{25} \\ &= 5 \end{aligned}$$

ดังนั้น ค่าสัมบูณ์ของ $3+4\mathrm{i}$ คือ 5

วิธีที่ 2 ใช้โปรแกรม Maple จะได้ว่า

ให้เราพิมพ์ (code) $\mathrm{abs}(3+4*\mathrm{I})$ แล้วกด Enter จะได้คำตอบ คือ 5 (ดังรูปที่ 9.1)



รูปที่ 9.1

ตัวอย่าง 6.2.9.2 จงหาค่าสัมบูรณ์ของ $(1 + i)(1 + i\sqrt{3})(\sqrt{3} - i)$

วิธีที่ 1 จาก $(1 + i)(1 + i\sqrt{3})(\sqrt{3} - i)$

$$\begin{aligned} &= (1 + i)(\sqrt{3} - i + 3i - \sqrt{3}\, i^2) \\ &= (1 + i)(\sqrt{3} + 2i + \sqrt{3}) \\ &= (1 + i)(2\sqrt{3} + 2i) \\ &= (2\sqrt{3} + 2i + 2\sqrt{3}\, i - 2 \\ &= 2[(\sqrt{3} - 1) + (\sqrt{3} + 1)\, i] \end{aligned}$$

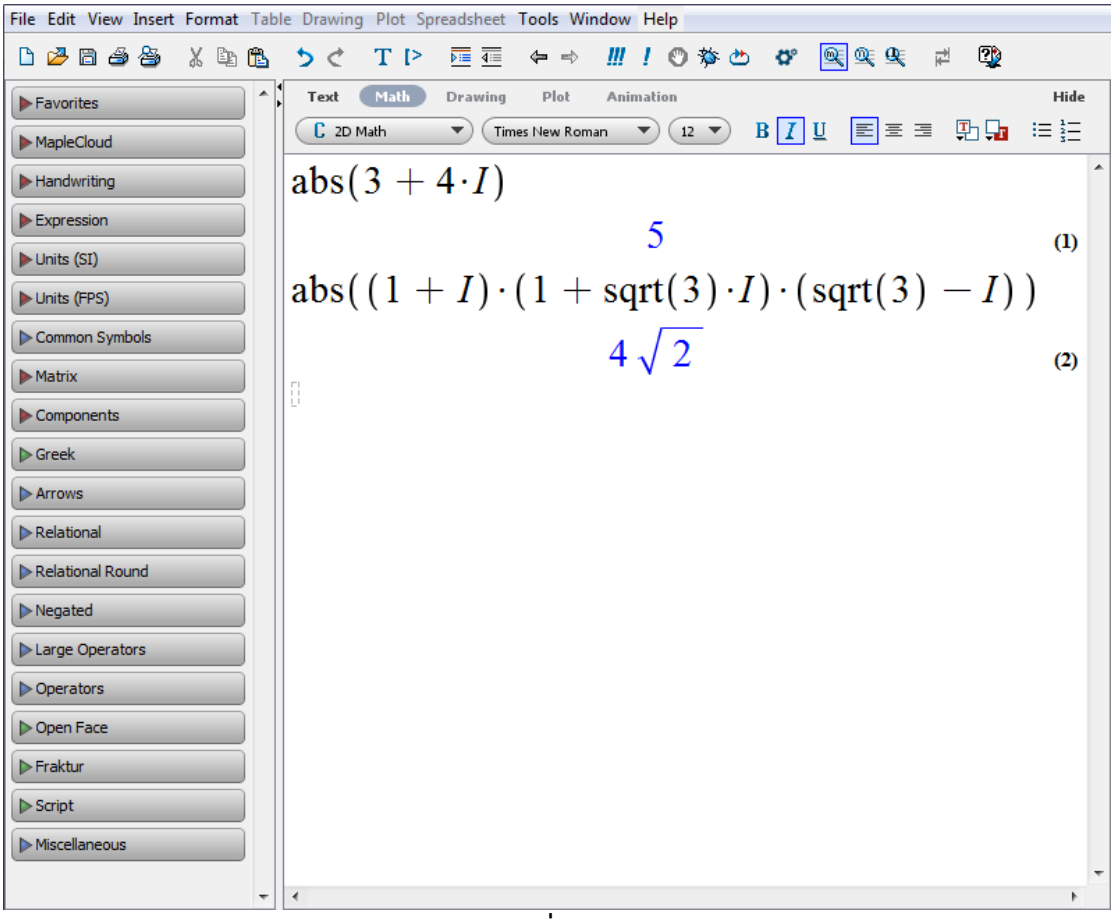
ดังนั้น $\left|(1 + i)(1 + i\sqrt{3})(\sqrt{3} - i)\right|^2$

$$\begin{aligned} &= \left(2\sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2 + (\sqrt{3} + 1)^2}\right)^2 \\ &= 4\left[(\sqrt{3} - 1)^2 + (\sqrt{3} + 1)^2\right] \\ &= 4[(3 - 2\sqrt{3} + 1) + (3 + 2\sqrt{3} + 1)] \\ &= 32 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $\left|(1 + i)(1 + i\sqrt{3})(\sqrt{3} - i)\right| = 4\sqrt{2}$

วิธีที่ 2 ใช้โปรแกรม Maple จะได้ว่า

ให้เราพิมพ์ (code) $\mathrm{abs}((1 + I) * (1 + \mathrm{sqrt}(3) * I) * (\mathrm{sqrt}(3) - I))$ แล้วกด Enter จะได้คำตอบ คือ $4\sqrt{2}$ (ดังรูปที่ 9.2)



รูปที่ 9.2

6.2.10 อาร์กิวเมนต์ (argument)

อาร์กิวเมนต์ (argument) นับว่าเป็นพื้นฐานในการแก้ปัญหาที่เกี่ยวกับระบบจำนวนเชิงซ้อน และสามารถขยายแนวคิดไปสู่ระบบจำนวนเชิงซ้อนที่ซับซ้อนยิ่งขึ้น

ตัวอย่าง 6.2.10.1 อาร์กิวเมนต์หลักของ $\left[\cos\frac{\pi}{6} - \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right]$

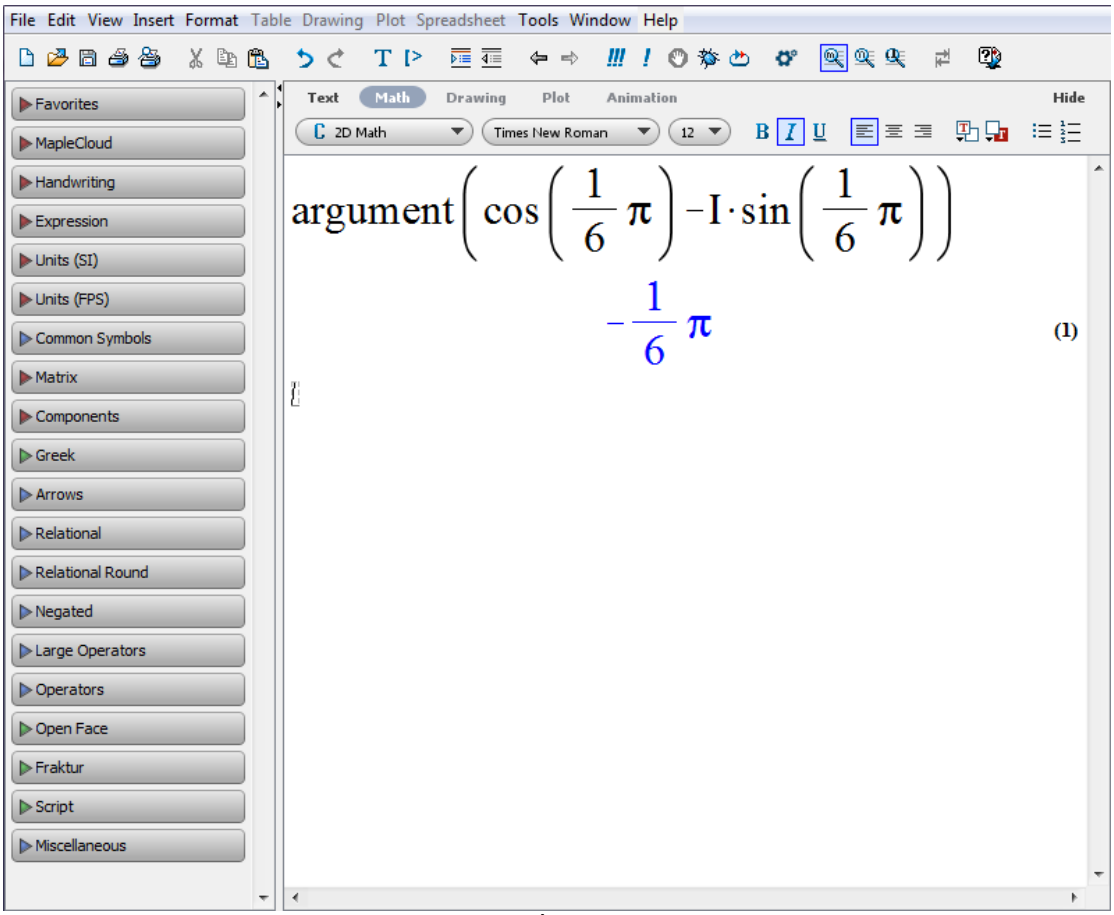
วิธีที่ 1 ให้ $z = \left[\cos\frac{\pi}{6} - \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right]$

$= \left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$

ดังนั้น $\mathrm{Arg}\, z = -\frac{\pi}{6}$

วิธีที่ 2 ใช้โปรแกรม Maple จะได้ว่า

ให้เราพิมพ์ (code) $\mathbf{argument}(\cos(\frac{1}{6}\mathrm{pi}) - \mathrm{I} * \sin(\frac{1}{6}\mathrm{pi}))$ แล้วกด Enter จะได้คำตอบ คือ $-\frac{\pi}{6}$ (ดังรูปที่ 10.1)



รูปที่ 10.1

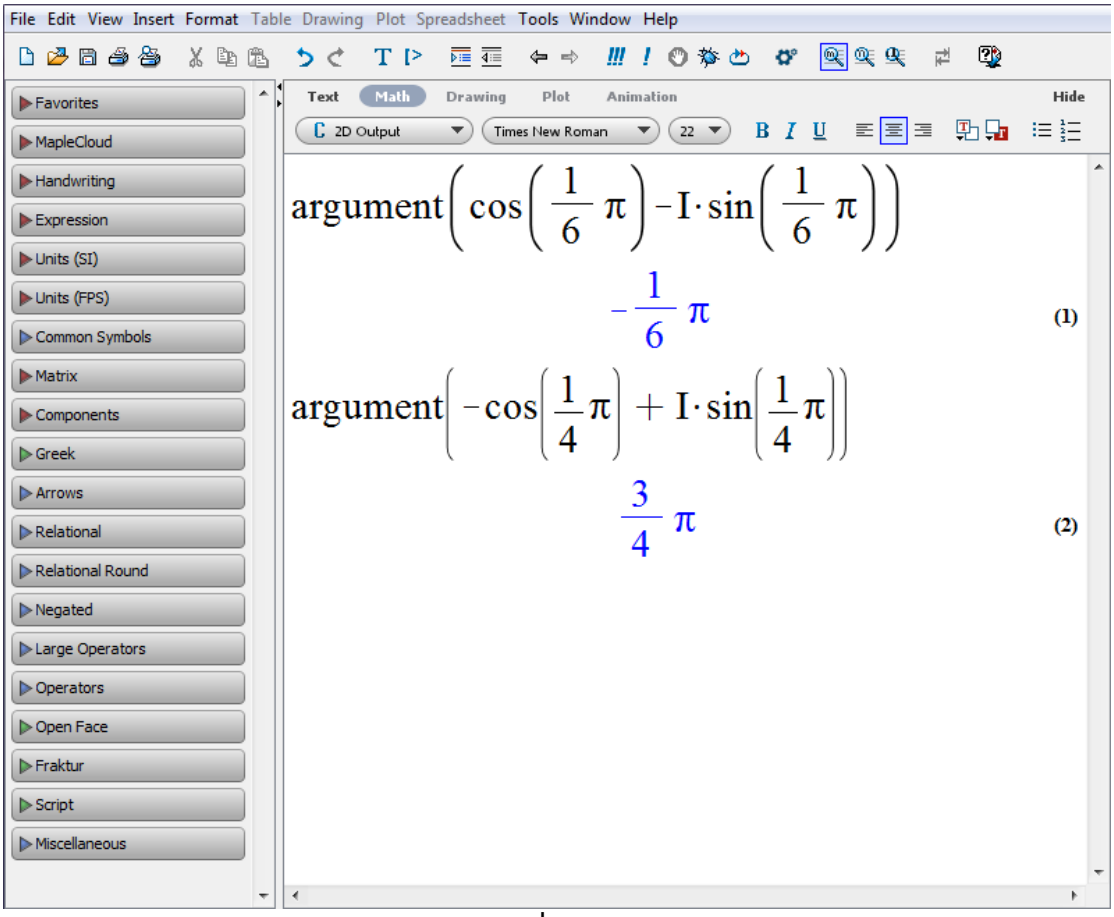
ตัวอย่าง 6.2.10.2 อาร์กิวเมนต์หลักของ $\left[-\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right]$

วิธีที่ 1 ให้ $$\begin{aligned} z &= \left[-\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right] \\ &= \left[\cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)\right] \\ &= \left[\cos\frac{3\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{4}\right] \end{aligned}$$

ดังนั้น $\operatorname{Arg} z = \frac{3\pi}{4}$

วิธีที่ 2 ใช้โปรแกรม Maple จะได้ว่า

ให้เราพิมพ์ (code) $\mathrm{argument}(-\cos\left(\frac{1}{4}\mathrm{pi}\right) + \mathrm{I} * \sin(\frac{1}{4}\mathrm{pi}))$ แล้วกด Enter จะได้คำตอบ คือ $\frac{3\pi}{4}$ (ดังรูปที่ 10.2)



รูปที่ 10.2

ตัวอย่าง 6.2.10.3 อาร์กิวเมนต์หลักของ $\left[-\sin\frac{\pi}{3} - \mathrm{i}\cos\frac{\pi}{3}\right]$

วิธีที่ 1 ให้ $z = \left[-\sin\frac{\pi}{3} - \mathrm{i}\cos\frac{\pi}{3}\right]$

$= \left[\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right)\right]$

$= \left[\cos\frac{7\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{6}\right]$

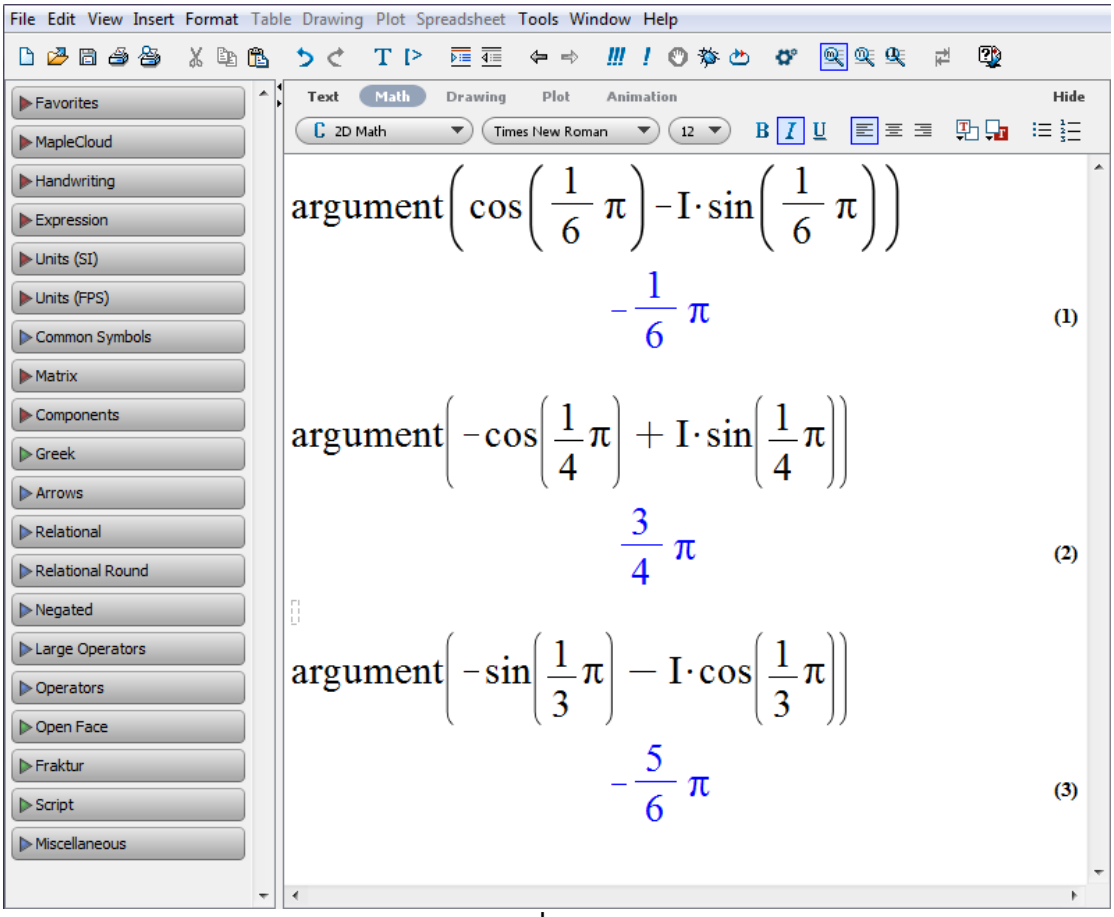
$= \left[\cos\left(-2\pi + \frac{7\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-2\pi + \frac{7\pi}{6}\right)\right]$

$= \left[\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right]$

ดังนั้น $\mathrm{Arg}\, z = -\frac{5\pi}{6}$

วิธีที่ 2 ใช้โปรแกรม Maple จะได้ว่า

ให้เราพิมพ์ (code) $\mathrm{argument}(-\sin\left(\frac{1}{3}\mathrm{pi}\right) - \mathrm{I} * \cos(\frac{1}{3}\mathrm{pi}))$ แล้วกด Enter จะได้คำตอบ คือ $-\frac{5\pi}{6}$ (ดังรูปที่ 10.3)



รูปที่ 10.3

แบบฝึกหัดบทที่ 6

จงใช้โปรแกรม Maple เขียนคำสั่ง (code) เพื่อแสดงการหาคำตอบของโจทย์แต่ละข้อต่อไปนี้

1. จงหาค่าของ $2(124+56)-89$
2. จงหาค่าของ $\dfrac{\sqrt{152{,}399{,}025}+|-91|}{-4}$
3. จงหาค่าของ $4(5)^{100}+\log_{10}100$
4. จงหาตัวหารร่วมมากของ $12{,}537{,}864$ และ $751{,}432{,}690{,}128$
5. จงหาตัวหารร่วมมากของ $-887{,}654{,}125$ และ $908{,}665{,}075$
6. จงหาตัวหารร่วมมากของ $-12{,}559{,}859^2$ และ $-123{,}9637{,}529$
7. จงหาตัวคูณร่วมน้อยของ $1{,}298{,}764$, $1{,}206{,}398$ และ $700{,}452$
8. จงหาตัวคูณร่วมน้อยของ 764 , $-6{,}376$ และ $-4{,}502$
9. จงเขียน $123{,}178{,}967{,}468$ ให้อยู่ในรูปของผลคูณของจำนวนเฉพาะ
10. จงเขียน $-900{,}235{,}678{,}543{,}212{,}336$ ให้อยู่ในรูปของผลคูณของจำนวนเฉพาะ
11. จงหาคำตอบของสมการ $3x^3+35x^2-76x-149=777$
12. จงหาเซตคำตอบของอสมการ $|48x-124|\leq|62x+137|+34$
13. จงหาเซตคำตอบของอสมการ $\left|\dfrac{32x-92}{56x-17}\right|<403x+56$
14. 58 หาร 17^{120} เหลือเศษเท่าใด
15. 150 หาร 75^{3001} เหลือเศษเท่าใด
16. $1{,}589$ หาร 997^{997} เหลือเศษเท่าใด
17. $1{,}268{,}790$ หาร $2^{222{,}222}$ เหลือเศษเท่าใด
18. จงหาค่าของ $\dfrac{267{,}854+3{,}678{,}334\,i}{5{,}124{,}567-128{,}745i}$
19. จงหา Re ของ $(|(245+150i)^4|)(125-623i)$
20. จงหา Im ของ $\dfrac{(11+323\,i)^3}{\sqrt{54-684i}}$
21. จงหาสังยุคของ $\left(97^{\sqrt{64}}+397i\right)\left(|-867|-(12+3^{55}i)\right)$
22. จงหาค่าสัมบูรณ์ของ $(1+2i)^2(2+i\sqrt{4})(-\sqrt{81}-8\,i)^3$
23. จงหาค่าสัมบูรณ์ของ $\dfrac{(13+7i)^5(6+i\sqrt{93})(\sqrt{15}-58\,i)}{102-67i}$
24. อาร์กิวเมนต์หลักของ $\left[\sin\dfrac{3\pi}{4}-i\cos\dfrac{3\pi}{4}\right]$
25. อาร์กิวเมนต์หลักของ $\left[-\cos\dfrac{5\pi}{3}-i\sin\dfrac{5\pi}{3}\right]$
26. อาร์กิวเมนต์หลักของ $\left[\tan\dfrac{\pi}{6}-i\cot\dfrac{\pi}{6}\right]$
27. อาร์กิวเมนต์หลักของ $\left[\sec\dfrac{\pi}{13}+i\cos\dfrac{\pi}{13}\right]$

สรุปบทที่ 6

โปรแกรม Maple เป็นโปรแกรมทางคณิตศาสตร์ ที่มีความสามารถในการคำนวณสูง และนิยมใช้งานกันมากอีกโปรแกรมหนึ่งซึ่งสามารถคำนวณแบบเครื่องคิดเลขหรือใช้ในการเขียนโปรแกรมประยุกต์ใช้งานได้ แต่ในที่นี้เราจะใช้โปรแกรม Maple ช่วยในการหาคำตอบที่มีเนื้อหาเกี่ยวกับวิชาระบบจำนวนเท่านั้น ซึ่งเนื้อหาประกอบด้วย

1. การบวก ลบ คูณ และหารของจำนวนจริง

เป็นที่ทราบว่ากันดีว่า การบวก ลบ คูณและหารของจำนวนจริงนั้น เป็นการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ที่ดูเหมือนง่ายมาก แต่ถ้าเราเจอตัวเลขที่ยาก ๆ แล้วเราอาจเสียเวลาในการคำนวณหรือทำให้เกิดการคำนวณผิดพลาดได้ แต่ถ้าเราใช้โปรแกรม Maple เข้ามาช่วยในการคำนวณแล้ว จะสามารถทำให้เราคำนวณได้รวดเร็วและแม่นยำมากขึ้น

2. หารร่วมมาก และคูณร่วมน้อย

ตัวหารร่วมมาก และตัวคูณร่วมน้อยในทางคณิตศาสตร์นั้น นับว่าเป็นพื้นฐานสำคัญอีกอย่างหนึ่ง และเราสามารถนำตัวหารร่วมมากและตัวคูณร่วมน้อยไปใช้ในการแก้ปัญหาเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ขั้นสูงได้เป็นอย่างมาก

3. ผลคูณของจำนวนเฉพาะ

ในการเขียนตัวเลขของจำนวนจำนวนหนึ่งให้อยู่ในรูปของผลคูณของจำนวนเฉพาะนั้น นับว่าเป็นการจัดรูปแบบของจำนวนนั้นให้อยู่ในรูปอย่างง่ายและสะดวกต่อการพิสูจน์ในหลาย ๆ ทฤษฎีบท เช่น ทฤษฎีบทที่เกี่ยวกับการหารลงตัว เป็นต้น

4. **การแก้สมการ และการแก้อสมการ**

การแก้สมการนับว่าเป็นหัวใจสำคัญของคณิตศาตร์เลยก็ว่าได้ เพราะเราจะสังเกตเห็นได้ว่าไม่ว่าเราจะเรียนวิชาอะไรที่เกี่ยวกับคณิตศาตร์ เราจะเจอปัญหาเกี่ยวกับการแก้สมการทุกครั้ง และในการแก้สมการที่มีตัวเลขมาก ๆ หรือเป็นสมการยาก ๆ เราอาจจะต้องเสียเวลา หรือทำให้เกิดการคำนวณผิดพลาดได้ง่าย สำหรับในการแก้ปัญหานี้ เราจะใช้โปรแกรม Maple ช่วยในการหาคำตอบเพื่อจะทำให้ประหยัดเวลา และเกิดความแม่นยำมากยิ่งขึ้น

5. มอดุโล (modulo)

มอดุโล (modulo) เป็นกระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่ เป็นที่นิยมกันอย่างแพร่หลาย แต่ในที่นี้เราจะใช้ มอดุโล (modulo) ในการพิสูจน์ทฤษฎีบทที่เกี่ยวกับ ความสัมพันธ์ของคอนกรูเอินซ์ (congruence) เท่านั้น

6. การบวก ลบ คูณ และหารของจำนวนเชิงซ้อน

จำนวนเชิงซ้อน (complex number) ประกอบด้วย จำนวนจริง (real number) และจำนวนจิตภาพ (imaginary number) เราจะเห็นว่าสิ่งที่เราเรียกว่า “จำนวน” ทั้งหมดนี้อยู่ในเซตของจำนวนเชิงซ้อน (complex number)

7. ส่วนจริง (real part) และส่วนจิตภาพ (imaginary part)

ในระบบจำนวนเชิงซ้อนจะปะกอบด้วย 2 ส่วน คือ ส่วนจริง (real part) และส่วนจิตภาพ (imaginary part) ถ้าเราสามารถแยกได้ว่าส่วนไหนคือส่วนจริง และส่วนไหนคือส่วนจินตภาพ จะทำให้เราเข้าใจในระบบจำนวนเชิงซ้อนมากยิ่งขึ้น

8. สังยุค หรือ คอนจุเกต (conjugate) ของจำนวนเชิงซ้อน

สังยุค หรือคอนจุเกต (conjugate) เป็นกระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์วิธีหนึ่ง ซึ่งเราสามารถนำพื้นฐานนี้ไปประยุกต์ใช้กับเนื้อหาที่เกี่ยวกับคณิตศาสตร์ในหลาย ๆ รายวิชา เช่น แคลคูลัส เรขาคณิตวิเคราะห์ สมการเชิงอนุพันธ์ ระบบจำนวน พีชคณิตเชิงเส้น ฯลฯ

9. ค่าสัมบูรณ์ (Absolute Value) ของจำนวนเชิงซ้อน

ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อนนับว่าเป็นพื้นฐานสำคัญ ในการแก้ปัญหาที่เกี่ยวกับระบบจำนวนเชิงซ้อน และสามารถขยายแนวคิดไปสู่ระบบจำนวนเชิงซ้อนที่ซับซ้อนยิ่งขึ้น

10. **อาร์กิวเมนต์ (argument)**

อาร์กิวเมนต์ (argument) นับว่าเป็นพื้นฐานในการแก้ปัญหาที่เกี่ยวกับระบบจำนวนเชิงซ้อน และสามารถขยายแนวคิดไปสู่ระบบจำนวนเชิงซ้อนที่ซับซ้อนยิ่งขึ้น

เฉลยแบบฝึกหัด

เฉลยแบบฝึกหัด 1.1

2. พิจารณาข้อความแต่ละข้อต่อไปนี้ว่าเป็นจริงหรือเท็จ เพราะเหตุใด
สำหรับจำนวนจริง a, b และ c ใด ๆ

(2) จริง

(4) จริง

(6) จริง

4. จงพิสูจน์

(2)

1^{-1}	กำหนดให้
$1^{-1}(1)$	สมบัติเอกลักษณ์การคูณ
0	สมบัติอินเวอร์สการคูณ

เฉลยแบบฝึกหัด 1.2

2. ถ้า a เป็นจำนวนจริงบวก และ b เป็นจำนวนจริงลบ จงพิสูจน์ว่า $b < a$

พิสูจน์ ให้ $a \in R^+$ และ $-b \in R^+$

จะได้ว่า $a + (-b) \in R^+$

$a - b \in R^+$

ดังนั้น $a > b$ หรือ $b < a$

4. ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $a < b$ จงพิสูจน์ว่า $a < \frac{a+b}{2} < b$

พิสูจน์ (1)

$$\begin{aligned} a &< b \\ a + a &< a + b \\ 1a + 1a &< a + b \\ a(1 + 1) &< a + b \\ a(2) &< a + b \\ 2a &< a + b \end{aligned}$$

เนื่องจาก 2 เป็นจำนวนจริงบวก ดังนั้น 2^{-1} เป็นจำนวนจริงบวก

$$\begin{aligned} 2^{-1}(2a) &< 2^{-1}(a + b) \\ (2^{-1}2)a &< 2^{-1}(a + b) \\ (1)a &< 2^{-1}(a + b) \\ a &< 2^{-1}(a + b) \\ a &< \frac{a+b}{2} \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} a &< b \\ a + b &< b + b \\ a + b &< 1b + 1b \\ a + b &< b(1 + 1) \end{aligned}$$

$$a + b < b(2)$$
$$a + b < 2b$$

เนื่องจาก 2 เป็นจำนวนจริงบวก ดังนั้น 2^{-1} เป็นจำนวนจริงบวก

$$2^{-1}(a + b) < 2^{-1}(2b)$$
$$2^{-1}(a + b) < (2^{-1}2)b)$$
$$2^{-1}(a + b) < (1)b$$
$$2^{-1}(a + b) < b$$
$$\frac{a+b}{2} < b$$

ดังนั้น จาก (1) และ (2) จะได้ว่า $a < \frac{a+b}{2} < b$

6. ให้ a, b, c และ d เป็นจำนวนจริงใด ๆ
จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้ว่าถูกต้องหรือไม่ เพราะเหตุใด

(2) ไม่ถูกต้อง

(4) ไม่ถูกต้อง

(6) ไม่ถูกต้อง

(8) ไม่ถูกต้อง

(10) ไม่ถูกต้อง

(12) ไม่ถูกต้อง

8. พิจารณาวิธีทำต่อไปนี้ว่าผิดตรงไหน

(2) กำหนดให้ p และ q เป็นจำนวนจริงบวก ซึ่ง $p > q$
จะได้ว่า

$$p > q$$
$$p(q - p) > q(q - p) \quad ✘$$
$$pq - p^2 > q^2 - pq$$
$$0 > p^2 - 2pq + q^2$$
$$0 > (p - q)^2$$

เนื่องจาก $p \neq q$ เพราะฉะนั้น $(p - q)^2$ เป็นจำนวนจริงบวก
ดังนั้น เราพิสูจน์ว่า จำนวนจริงบวกน้อยกว่าศูนย์

เฉลยแบบฝึกหัด 2.1

2. จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้ว่าเป็นจริงสำหรับจำนวนเต็มบวก n ทุกตัว

(1) $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

วิธีทำ สำหรับจำนวนเต็มบวก n แต่ละตัว ให้ $P(n)$ แทน

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

(1) เนื่องจาก $1 = \frac{1(1+1)}{2}$ ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง

(2) สมมุติว่า $P(k)$ เป็นจริง นั่นคือ

$$1 + 2 + 3 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

จะพิสูจน์ว่า $P(k+1)$ เป็นจริง

เนื่องจาก $1 + 2 + 3 + \ldots + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$

$$= \frac{k(k+1)}{2} + \frac{2}{2}(k+1)$$

$$= \frac{1}{2}(k+1)[k+2]$$

$$= \frac{1}{2}(k+1)(k+2)$$

$$= \frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}$$

เพราะฉะนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

ดังนั้น โดยการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ สรุปได้ว่า $P(n)$ เป็นจริงสำหรับจำนวนเต็มบวก $P(n)$ ทุกตัว

เฉลยแบบฝึกหัด 2.2

2. จงพิสูจน์ว่า

(2) ผลบวกของจำนวนคี่กับจำนวนคี่เป็นจำนวนคู่

พิสูจน์ ให้ $2n+1$ เป็นจำนวนคี่

จะได้ว่า $(2n+1) + (2n+1) = 4n + 2$

$$= 2(2n+1)$$

ดังนั้น สรุปได้ว่า ผลบวกของจำนวนคี่กับจำนวนคี่เป็นจำนวนคู่

(4) ผลบวกของจำนวนคู่กับจำนวนคี่เป็นจำนวนคี่

พิสูจน์ ให้ $2(n+1)$ เป็นจำนวนคู่ และ $2n+1$ เป็นจำนวนคี่

จะได้ว่า $\big(2(n+1)\big) + (2n+1) = 2n + 2 + 2n + 1$

$$= 4n + 2 + 1$$

$$= 2(2n+1) + 1$$

ดังนั้น สรุปได้ว่า ผลบวกของจำนวนคู่กับจำนวนคี่เป็นจำนวนคี่

(6) ผลคูณของจำนวนคู่กับจำนวนคู่เป็นจำนวนคู่

พิสูจน์ ให้ $2(n+1)$ เป็นจำนวนคู่ และ $2n$ เป็นจำนวนคู่

จะได้ว่า $\big(2(n+1)\big)(2n) = (2n+2)(2n)$

$$= 4n^2 + 4n$$

$$= 2(2n^2 + 2n)$$

ดังนั้น สรุปได้ว่า ผลคูณของจำนวนคู่กับจำนวนคู่เป็นจำนวนคู่

4. จงหาตัวหารร่วมมาก และตัวคูณร่วมน้อยของ

(2) ตัวหารร่วมมากคือ 6 และตัวคูณร่วมน้อยคือ 72

(4) ตัวหารร่วมมากคือ 6 และตัวคูณร่วมน้อยคือ 546

(6) ตัวหารร่วมมากคือ 1 และตัวคูณร่วมน้อยคือ $790{,}260$

(8) ตัวหารร่วมมากคือ 1 และตัวคูณร่วมน้อยคือ 12

เฉลยแบบฝึกหัด 3.1

2. จงหาเซตคำตอบของอสมการ

(2) $(-\infty,\ 1) \cup (5,\ \infty)$

(4) $(-\infty,\ -\frac{2}{3}) \cup (\frac{1}{3},\ \infty)$

(6) $(-\infty,\ \frac{1}{2}) \cup (4,\ \infty)$

(8) $(-\infty, -4) \cup (\frac{1}{4},\ 1)$

(10) $(-2,\ 3) \cup (3,\ 5)$

(12) $(-\infty, -1) \cup (4,\ 5) \cup (7,\ \infty)$

(14) $(-\infty, 1) \cup (1,\ 3] \cup [4,\ \infty)$

(16) $(-\infty, -2] \cup (0,\ 3) \cup (3,\ 8]$

(18) $(-\infty,\ 8) \cup (8,\ \infty)$

(20) 5

(22) $(-1,\ \infty)$

เฉลยแบบฝึกหัด 3.2

2. จงหาเซตคำตอบของอสมการ

(2) $(-\infty,\ -\frac{4}{5}) \cup (2,\ \infty)$

(4) $(0,\ \infty)$

(6) $(\frac{3}{2},\ \infty)$

(8) $\left[-\frac{1}{2},\ -\frac{3}{7}\right]$

(10) $(-\frac{9}{22},\ \frac{3}{22})$

(12) $\left(1,\ \frac{14}{13}\right) \cup (-\frac{14}{13}, -2)$

(14) $(-\infty,\ 4) \cup (4,\ \infty)$

(16) $(-\infty,\ -\frac{7}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}) \cup (-\frac{7}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2},\ \infty)$

(18) $(-\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{33}}{2},\ \infty)$

(20) $(-\infty,\ -\frac{1}{30}\sqrt[3]{3916 + 60\sqrt{3561}} - \frac{68}{15(\sqrt[3]{3916+60\sqrt{3561}})}) \cup (\frac{2}{5},\ \infty)$

(22) $\left(1,\ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{21}}{6}\right) \cup (\frac{1}{6} + \frac{\sqrt{13}}{6},\ 1)$

4. วิธีทำต่อไปนี้ผิดตรงไหน

กำหนดให้ $a + b = 2a$

จะได้ว่า $a - 2c = -b$

และ $a = -b + 2c$

ดังนั้น $a(a - 2c) = (-b + 2c)(-b)$

หรือ $a^2 - 2ac = b^2 - 2bc$

$a^2 - 2ac + c^2 = b^2 - 2bc + c^2$

ดังนั้น $(a - b)^2 = (b - c)^2$

เพราะฉะนั้น $a - b = b - c$ ✗

ดังนั้น $a = b$

เฉลยแบบฝึกหัด 3.3

2. จงหาขอบเขตบนค่าน้อยสุด และขอบเขตล่างค่ามากสุดของเซตต่อไปนี้

(2) ขอบเขตบนค่าน้อยสุดคือ 8 และขอบเขตล่างค่ามากสุด -15

(4) ไม่มี

(6) ขอบเขตบนค่าน้อยสุดไม่มี และขอบเขตล่างค่ามากสุด 1

(8) ขอบเขตบนค่าน้อยสุดคือ 3 และขอบเขตล่างค่ามากสุด -3

(10) ไม่มี

(12) ไม่มี

เฉลยแบบฝึกหัด 4.1

2. สำหรับจำนวน m และ n แต่ละคู่ที่กำหนดให้ จงหา q และ r โดยที่

$$n = mq + r \quad ,0 \leq r < |m|$$

(2) $q = 1$ และ $r = 16$

(4) $q = -4$ และ $r = 23$

(6) $q = 10$ และ $r = 47$

4. จงหาจำนวนเต็ม m และ n ซึ่ง

(2) $m = -4$ และ $n = -3$

(4) $m = -67$ และ $n = 27$

(6) $m = 4$ และ $n = -29$

6. ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวก a และ b เป็นจำนวนเต็มซึ่งมีอย่างน้อยหนึ่งตัว ต้องไม่เท่ากับศูนย์ จงพิสูจน์ว่า $(na, nb) = n(a, b)$

พิสูจน์ กำหนดให้ x และ y เป็นจำนวนเต็ม

เนื่องจาก $(a, b) = xa + yb$

จะได้ว่า $(na, nb) = xna + ynb$

$= n(xa + yb)$

$= n(a + b)$

8. จงให้บทนิยามของตัวหารร่วมมากของจำนวนเต็ม 3 จำนวน

บทนิยาม กำหนดให้ a, b และ c เป็นจำนวนเต็มซึ่งอย่างน้อยหนึ่งต้องไม่เท่ากับศูนย์ d จะเป็นตัวหารร่วมมาก (greatest common divisor) ก็ต่อเมื่อ d เป็นจำนวนเต็มบวกซึ่ง

(1) $d \mid a$, $d \mid b$ และ $d \mid c$

และ (2) ถ้า e เป็นจำนวนเต็มบวกซึ่ง $e \mid a$, $e \mid b$ และ $e \mid c$ แล้ว $e \mid d$

เขียน (a, b, c) แทนตัวหารร่วมมากของ a, b และ c

10. ถ้า $(a, b) = (a, c) = 1$ จงพิสูจน์ว่า $(a, bc) = 1$

พิสูจน์ ให้ $a = \{a_1{}^{r_1} \cdot a_2{}^{r_2} \cdot a_3{}^{r_3} \dots a_n{}^{r_n}\}$

$b = \{b_1{}^{r_1} \cdot b_2{}^{r_2} \cdot b_3{}^{r_3} \dots b_n{}^{r_n}\}$

$c = \{c_1{}^{r_1} \cdot c_2{}^{r_2} \cdot c_3{}^{r_3} \dots c_n{}^{r_n}\}$

จะเห็นว่า $(a, b) = 1$

และ $(a, c) = 1$

ดังนั้น จะได้ว่า $(a, bc) = 1$

เฉลยแบบฝึกหัด 4.2

2. จงตรวจดูแต่ละข้อว่าเป็นจริงหรือเท็จ เพราะเหตุใด

(1) เป็นจริง

(2) เป็นจริง

(3) เป็นเท็จ

(4) เป็นเท็จ

(5) เป็นเท็จ

(6) เป็นเท็จ

(7) เป็นเท็จ

(8) เป็นจริง

(9) เป็นเท็จ

(10) เป็นจริง

4. $(3)(7)(13)(515)(25)$ หารด้วย 23 แล้วเศษเหลือเท่าไร

ตอบ 15

6. จงคำนวณหา $n = 625^4 + 663$

ตอบ $152,587,891,288$

8. 7^{10} หารด้วย 50 เหลือเศษ 49
   3^{10} หารด้วย 51 เหลือเศษ 42
   4^{10} หารด้วย 51 เหลือเศษ 16
   10^{503} หารด้วย 7 เหลือเศษ 5
   5^{27} หารด้วย 127 เหลือเศษ 123
   5^{65} หารด้วย 127 เหลือเศษ 102

เฉลยแบบฝึกหัด 5.1

2. จงเขียนจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ในรูป $x + yi$
   (1) $39 + 57i$
   (2) $\frac{23}{29} - \frac{14}{29}\,i$
   (3) $6i$
   (4) $-6i$
   (5) $-11 + 60i$
   (6) 46
   (7) i
   (8) 1
   (9) -1
   (10) $-i$
   (11) -1
   (12) $-i$
   (13) $-2i$
   (14) 1
   (15) 1
   (16) 1
   (17) $\frac{18}{41} - \frac{2}{41}\,i$
   (18) $-i$
   (19) 75
   (20) 20
   (23) $\frac{3}{10} + \frac{2}{5}\,i$
4. จงหาค่าของ x และ y
   (1) $x = 5$ และ $y = 12$
   (2) $x = 0$ และ $y = 8$
   (3) $x = 4$ และ $y = 0$
   (4) $x = 1$ และ $y = 2$
   (5) $x = 0$ และ $y = \pm 1$

8. จงหาคอนจุเกตของจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้

(1) $2 + 3i$

(2) $4 - i\sqrt{2}$

(3) -3

(4) $-2i$

(5) $80 + 18i$

10. จงแสดงว่า $\left(\frac{1 - i\sqrt{3}}{2}\right)^6 = 1$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1 - i\sqrt{3}}{2}\right)^6 &= \left(\frac{\left(1 - i\sqrt{3}\right)^2}{4}\right)^3 \\
&= \left(\frac{-2 - 2i\sqrt{3}}{4}\right)^3 \\
&= \left(\frac{-1 - 1i\sqrt{3}}{2}\right)^3 \\
&= \left(\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\right)^2 \left(\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\right) \\
&= \left(\frac{\left(-1 - i\sqrt{3}\right)^2}{4}\right) \left(\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\right) \\
&= \left(\frac{-2 + 2i\sqrt{3}}{4}\right) \left(\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\right) \\
&= \left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right) \left(\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\right) \\
&= \left(\frac{1 + i\sqrt{3} - i\sqrt{3} + 3}{4}\right) \\
&= \frac{4}{4} \\
&= 1
\end{aligned}$$

เฉลยแบบฝึกหัด 5.2

2. ให้ $z_1 = 3 + 2i$ และ $z_2 = 4 - i$ จงหา $|z_1|$, $|\overline{z_2}|$, $|z_1 z_2|$, $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|$ และ $|z_1\overline{z_2}|$

$$\begin{aligned}
|z_1| &= \sqrt{13} \\
|\overline{z_2}| &= \sqrt{17} \\
|z_1 z_2| &= \sqrt{221} \\
\left|\frac{z_1}{z_2}\right| &= \frac{1}{17}\sqrt{221} \\
|z_1\overline{z_2}| &= \sqrt{221}
\end{aligned}$$

4. จงบรรยายถึงเซตของจุดในระนาบซึ่งมีสมบัติต่อไปนี้
   (1) เป็นกราฟวงกลม จุดศูนย์กลางที่จุด $(0,\ 0)$ รัศมียาว 1 หน่วย
   (2) เป็นกราฟเส้นตรงขนานแกน y และทุก ๆ จุด x จะมีค่าเท่ากับ $\frac{1}{2}$
   (3) เป็นกราฟเส้นตรงขนานแกน x และทุก ๆ จุด y จะมีค่าเท่ากับ 1
   (5) เป็นกราฟเส้นตรงขนานแกน y และทุก ๆ จุด x จะมีค่าเท่ากับ 0 (แกน y)

เฉลยแบบฝึกหัด 5.3

2. จงหาค่าสัมบูรณ์และอาร์กิวเมนต์หลักของจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้
   (1) ค่าสัมบูรณ์คือ 3 และ $\mathrm{Arg\,z} = \frac{\pi}{2}$
   (2) ค่าสัมบูรณ์คือ 5 และ $\mathrm{Arg\,z} = \frac{2\pi}{3}$
   (3) ค่าสัมบูรณ์คือ 7 และ $\mathrm{Arg\,z} = -\frac{3\pi}{4}$
   (4) ค่าสัมบูรณ์คือ 9 และ $\mathrm{Arg\,z} = -\frac{\pi}{6}$
   (5) ค่าสัมบูรณ์คือ 2 และ $\mathrm{Arg\,z} = 0$
   (6) ค่าสัมบูรณ์คือ 4 และ $\mathrm{Arg\,z} = \frac{\pi}{3}$
   (7) ค่าสัมบูรณ์คือ 13 และ $\mathrm{Arg\,z} = \frac{5\pi}{6}$
   (8) ค่าสัมบูรณ์คือ 6 และ $\mathrm{Arg\,z} = -\frac{\pi}{4}$
   (9) ค่าสัมบูรณ์คือ 5 และ $\mathrm{Arg\,z} = -\frac{3\pi}{4}$
   (10) ค่าสัมบูรณ์คือ 2 และ $\mathrm{Arg\,z} = 0$
   (11) ค่าสัมบูรณ์คือ 3 และ $\mathrm{Arg\,z} = \arctan\left(\frac{\cos(\frac{\pi}{5})}{\sin(\frac{\pi}{5})}\right) - \pi$
   (12) ค่าสัมบูรณ์คือ 4 และ $\mathrm{Arg\,z} = -\frac{7\pi}{8}$

6. จงหาค่าของ
   (1) $8\mathrm{i}$

8. จงหารากที่ 3 ของ i

$$\mathrm{z}_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{i}$$

$$\mathrm{z}_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{i}$$

$$\mathrm{z}_2 = -\mathrm{i}$$

เฉลยแบบฝึกหัด 5.4

2. จงหารากที่ 6 ของยุนิตี

$$w = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$w^2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$w^3 = -1$$
$$w^4 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$w^5 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$w^6 = 1$$

4. จงแก้สมการ $z^2 + 1 = 0$

ตอบ $i, -i$

6. จงหารากพริมิตีฟที่ 6 ของ 1

$$r = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$r^5 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

8. จงหารากพริมิตีฟที่ 12 ของ 1

$$r = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$$
$$r^5 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$$
$$r^7 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$$
$$r^{11} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$$

เฉลยแบบฝึกหัดบทที่ 6

จงใช้โปรแกรม Maple เขียนคำสั่ง (code) เพื่อแสดงการหาคำตอบของโจทย์แต่ละข้อต่อไปนี้

1. $2 * (124 + 56) - 89$
2. $(\text{sqrt}(152399025) + \text{abs}(-91))/(-4)$
3. $4 * 5\text{^}100 + \log(100)$
4. $\gcd(12537864, 751432690128)$
5. $\gcd(-887654125, 908665075)$
6. $\gcd(-12559859\text{^}2, -1239637529)$
7. $\text{lcm}(1298764\ , 1206398, 700452)$

8. lcm(764 , −6376, −4502)
9. ifactor(123178967468)
10. ifactor(−900235678543212336)
11. solve(3 ∗ x^3 + 35 ∗ x^2 − 76 ∗ x − 149 = 777, x)
12. solve(abs(48x − 124) ≤ abs(62x + 137) + 34, x)
13. solve(abs((32 ∗ x − 92)/(56 ∗ x − 17)) < 403 ∗ x + 56, x)
14. 17^120mod 58
15. 75^3001mod 150
16. 997^997mod 1589
17. 2^222222mod 1268790
18. (267854 + 3678334 ∗ I)/(5124567 − 128745)
19. Re(abs(254 + 150 ∗ I)^4) ∗ (125 − 623 ∗ I)
20. Im((11 + 323 ∗ I)^3)/sqrt(54 − 684 ∗ I)
21. conjugate(97^sqrt(64) + 397 ∗ I) ∗ (abs(−867) − (12 + 3^55 ∗ I))
22. abs((1 + 2 ∗ I)^2 ∗ (2 + I ∗ sqrt(4)) ∗ (−sqrt(81) − 8 ∗ I)^3)
23. abs((13 + 7 ∗ I)^5 ∗ (6 + I ∗ sqrt(93)) ∗ (sqrt(15) − 58 ∗ I)/(102 − 67 ∗ I))
24. argument $\left(\sin\left(\frac{3}{4}\text{pi}\right) - \text{I} * \cos\left(\frac{3}{4}\text{pi}\right)\right)$
25. argument $\left(-\cos\left(\frac{5}{3}\text{pi}\right) - \text{I} * \sin\left(\frac{5}{3}\text{pi}\right)\right)$
26. argument $\left(\tan\left(\frac{1}{6}\text{pi}\right) - \text{I} * \cot\left(\frac{1}{6}\text{pi}\right)\right)$
27. argument $\left(\sec\left(\frac{1}{13}\text{pi}\right) + \text{I} * \cos\left(\frac{1}{13}\text{pi}\right)\right)$

บรรณานุกรม

คลังนวัตกรรม สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน(ม.ป.ป.) **การใช้โปรแกรมสำเร็จรูปในการพัฒนาสื่อนวัฒกรรม เพื่อยกระดับคุณภาพการจัดการเรียนการสอน.** ค้นเมื่อ 19 มีนาคม 2555, http://www.eduinnovator.net/upload/downloads/pdf/GeoGebra.pdf

จรินทร์ทิพย์ เฮงคราวิทย์ (ม.ป.ป.) **เอกสารประกอบการสอนวิชา ค.213 แคลคูลัส 3 (Calculus3).** ค้นเมื่อ 12 มีนาค2555,http://mathstat.sci.tu.ac.th/~charinthip/main%20menu/MA213/MA213.html

ดำรงค์ ทิพย์โยธา(ม.ป.ป.) **บทที่ 2 พิกัดเชิงขั้ว.** ค้นเมื่อ 1 มีนาคม 2555, http://pioneer.netserv.chula.ac.th/~tdumrong/2301217/sheet_lecture_2551_2nd/v11_Cal_III_ch2_page_001_087_2551_2nd.pdf

ดำรงค์ ทิพย์โยธา, สุรชัย สมบัติบริบูรณ์ และ ณัฏฐนาถ ไตรภพ.(2548). **แคลคูลัส 2.** กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ศรีบุตร แววเจริญ,และ ชนศักดิ์ บ่ายเที่ยง.(2542). การวิเคราะห์เวกเตอร์และอนุกรมอนันต์ (Vector Analysis and Infinite Series). กรุงเทพฯ: บริษัท วงตะวัน จำกัด

ศรีบุตร แววเจริญ,และ ชนศักดิ์ บ่ายเที่ยง.(2544). เรขาคณิตวิเคราะห์และการเขียนกราฟ 2มิติ, 3มิติ (Analytic Geometry & Sketching Curves :2D,3D). กรุงเทพฯ: บริษัท วงตะวัน จำกัด

สุเทพ จันทร์สมศักดิ์.(2538). **ระบบจำนวน** กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

Ahlfors, Lars V.(1953). **Complex Analysis.** New York : McGraw – Hill

Anderson, Kenneth W.(1972). and Hall, Dick Wich, **Elementary Real Analysis.** New York : McGraw – Hill

Apostol, Tom M.(1967). **Calculus Vol. 1,** 2 ed. Watham, Mass. : Xerox College Publishing

Birkhoff, Garrett, and Maclane, Saunders.(1962). **A Survey of Modern Algebra,** revised. New York : MacMillan

Davenport, H.(1952). **The Higher Arithematic.** New York : Harper and Brother

Grifin, Harriat.(1954). **Elementary Theory of Numbers.** New York : McGraw – Hill

Hafstrom, John E.(1976). **Introduction to Analysis and Abstract Algebra.** Philadelphia : W.B. Saunders

Johnson, Ricdard E.(1960). **First Course in Abstract Algebra.** Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall

Leveque, William J.(1962). **Elementary Theory of Numbers.** Reading, Mass:Addison Wesley

Mitchell, Barry.(1969). **Calculus without Analylic Geometry.** Lexington, Mass:D.C. Heath

Olmsted, John M.H.(1962). **The Real Number System.** New York : Appleton –

Century – Crofts

Peters, Max add Schaaf, William L.(1965). **Algebra and Trigonometry.** Princeton, N.J. : Van Nostrand Co

Pennisi, Louis L.(1963). **Elements of Complex Variables.** New York : Holt, Rinehart and Winston