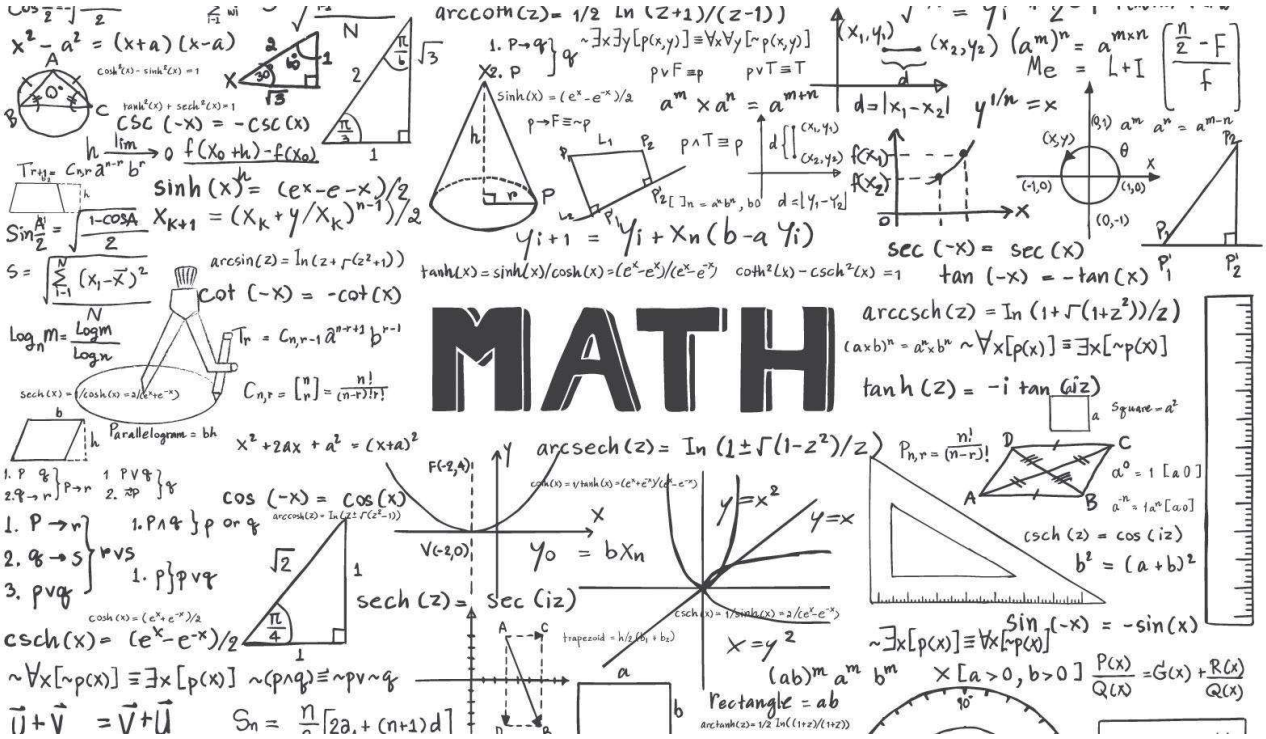
เอกสารประกอบการเรียน

รายวิชา 0002601
วิชาวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์พื้นฐานในชีวิตประจำวัน



เรื่องการแปลความหมายและการสื่อสารทางคณิตศาสตร์

สัปดาห์ที่สอน 1-4
คะแนนเก็บระหว่างภาค 10 คะแนน

สอนโดย
คณาจารย์สาขาวิชาคณิตศาสตร์
มหาวิทยาลัยราชภัฏบุรีรัมย์

บทที่ 1
ตรรกศาสตร์ (LOGIC)

ในบทนี้จะแนะนำเกี่ยวกับเรื่องตรรกศาสตร์เบื้องต้นซึ่งเป็นพื้นฐานสำคัญที่จะช่วยในการศึกษาวิชาคณิตศาสตร์ให้ได้ผลดียิ่งขึ้น

1. ประพจน์ (Propositions หรือ Statement)

ประพจน์ คือ ประโยคหรือข้อความที่เป็นจริงหรือเท็จอย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น ประพจน์หรือข้อความที่มีลักษณะดังกล่าวจะอยู่ในรูปบอกเล่าหรือปฏิเสธก็ได้

ตัวอย่าง 1.1 จงพิจารณาประโยคต่อไปนี้ว่าเป็นประพจน์หรือไม่ เพราะเหตุใด

1. เดือนกันยายนมี 31 วัน
2. ดาวพุธเป็นดาวเคราะห์
3. อย่าเดินลัดสนาม
4. จังหวัดบุรีรัมย์ไม่ได้อยู่ทางภาคใต้ของประเทศไทย
5. ช่วยด้วย
6. ออกไปให้พ้น
7. $\pi > 3$
8. อยากไปเที่ยวเหลือเกิน
9. ทำไมมาเรียนสาย
10. ขอให้เดินทางกลับโดยสวัสดิภาพ
11. ยินดีต้อนรับ
12. 2 เป็นจำนวนคู่
13. น้ำขึ้นให้รับตัก
14. โอ้แม่เจ้า
15. หนูมีปีก
16. $x + 3 = 9$
17. BNK48 มีสมาชิก 48 คน

2. การเชื่อมประพจน์

ในวิชาคณิตศาสตร์หรือในชีวิตประจำวัน จะพบประโยคที่ใช้จากการเชื่อมประโยคอื่น ๆ ด้วยคำว่า “และ” “หรือ” “ถ้า...แล้ว” “ก็ต่อเมื่อ” หรือพบประโยคซึ่งเปลี่ยนแปลงมาจากประโยคเดิมโดยเติมคำว่า “ไม่” คำเหล่านี้เรียกว่า *ตัวเชื่อม* (connectives) เช่น

4 **และ** 8 เป็นจำนวนคู่

ถ้า 3 เป็นจำนวนคี่ **แล้ว** 3^2 เป็นจำนวนคี่

รูปสามเหลี่ยม ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า**ก็ต่อเมื่อ**รูปสามเหลี่ยม ABC มีด้านยาวเท่ากันทุกด้าน

เพื่อความสะดวกในการศึกษาเรื่องการเชื่อมประพจน์จะใช้อักษรทางภาษาอังกฤษตัวพิมพ์เล็ก เช่น $p, q, r, s, \ldots$ แทนประพจน์ที่นำมาเชื่อมกัน ค่าความจริงของประพจน์ที่มีตัวเชื่อมย่อมขึ้นอยู่กับจำนวนประพจน์ที่นำมาเชื่อมกันซึ่งสามารถพิจารณาค่าความจริงที่เป็นไปได้ทั้งหมดโดยใช้

T **แทนจริง** และ

F **แทนเท็จ**

ถ้ามีประพจน์เดียวคือ p จะมีกรณีเกี่ยวกับค่าความจริงที่จะเกิดขึ้นได้ 2 กรณีคือ T หรือ F

ถ้ามี 2 ประพจน์คือ p และ q จะมีกรณีเกี่ยวกับค่าความจริงที่เกิดขึ้นได้ทั้งหมด 4 กรณีซึ่ง T และ F ของ p ต่างก็จับคู่กับกรณี T และ F ของ ของ q

ถ้ามี 3 ประพจน์คือ p, q และ r จะมีกรณีเกี่ยวกับค่าความจริงที่เกิดขึ้นได้ทั้งหมด ..... กรณี

2.1 การเชื่อมประพจน์ด้วยตัวเชื่อม "และ"

ถ้า p และ q เป็นประพจน์ ประพจน์ใหม่ที่ได้จากการเชื่อม p กับ q ด้วย "และ" คือ " p และ q " เขียนแทนด้วย $p \wedge q$ และตารางค่าความจริงของ $p \wedge q$ เขียนได้ดังนี้

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

2.2 การเชื่อมประพจน์ด้วยตัวเชื่อม "หรือ"

ถ้า p และ q เป็นประพจน์ ประพจน์ใหม่ที่ได้จากการเชื่อม p กับ q ด้วย "หรือ" คือ " p หรือ q " เขียนแทนด้วย $p \vee q$ และตารางค่าความจริงของ $p \vee q$ เขียนได้ดังนี้

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

2.3 การเชื่อมประพจน์ด้วยตัวเชื่อม "ถ้า...แล้ว..."

ถ้า p และ q เป็นประพจน์ ประพจน์ใหม่ที่ได้จากการเชื่อม p กับ q ด้วย "ถ้า...แล้ว..." คือ "ถ้า p แล้ว q " เขียนแทนด้วย $p \rightarrow q$ และตารางค่าความจริงของ $p \rightarrow q$ เขียนได้ดังนี้

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

2.4 การเชื่อมประพจน์ด้วยตัวเชื่อม “ก็ต่อเมื่อ”

ถ้า p และ q เป็นประพจน์ ประพจน์ใหม่ที่ได้จากการเชื่อม p กับ q ด้วย “ก็ต่อเมื่อ” คือ “ p ก็ต่อเมื่อ q ” เขียนแทนด้วย $p \leftrightarrow q$ และตารางค่าความจริงของ $p \leftrightarrow q$ เขียนได้ดังนี้

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

2.5 นิเสธของประพจน์

นิเสธของประพจน์ p เขียนแทนด้วย $\sim p$ และตารางค่าความจริงของ $\sim p$ เขียนได้ดังนี้

p	$\sim p$
T	F
F	T

ตารางสรุปการเชื่อมประพจน์

p	q	$p \wedge q$(และ)	$p \vee q$(หรือ)	$p \rightarrow q$(ถ้า...แล้ว)	$p \leftrightarrow q$(ก็ต่อเมื่อ)	$\sim p$
T	T	T	T	T	T	F
T	F	F	T	F	F	F
F	T	F	T	T	F	T
F	F	F	F	T	T	T

ตัวอย่าง 2.1 จงหาค่าความจริงของประพจน์ต่อไปนี้

1. 0 เป็นจำนวนนับ และ 7 เป็นจำนวนเต็ม
2. 9 ไม่เท่ากับ 8 หรือ 8 ไม่น้อยกว่า 9
3. งูเห่าและงูจงอางเป็นสัตว์มีพิษ
4. ปลาโลมาหรือคนเป็นสัตว์เลือดอุ่น
5. 5 เป็นจำนวนเฉพาะ ก็ต่อเมื่อ 5 มีตัวประกอบคือ 1 หรือ 5

ตัวอย่าง 2.2 จงหาค่าความจริงของประพจน์ เมื่อกำหนด

1. $(p \wedge q) \rightarrow r$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ แล้วจงหาค่าความจริงของ p, q, r
2. $p \rightarrow q$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ แล้วจงหาค่าความจริงของ $(\sim p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)$
3. ถ้า $\left[p \wedge (\sim q \rightarrow r)\right] \rightarrow (\sim s \vee r)$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ แล้วจงหาค่าความจริงของ p, q, r และ s

ตัวอย่าง 2.3 จงเขียนข้อความแทนสัญลักษณ์ต่อไปนี้

เมื่อกำหนดให้ p แทนประพจน์ “ฉันซื้อสลากกินแบ่งรัฐบาล”

และ q แทนประพจน์ “ฉันถูกรางวัลที่หนึ่ง”

1. $\sim p$
2. $p \leftrightarrow q$
3. $p \wedge q$
4. $p \rightarrow \sim q$
5. $\sim p \vee \sim q$
6. $\sim p \vee \left(p \rightarrow q\right)$

ตัวอย่าง 2.4 กำหนดให้ p, q, r, s และ t เป็นประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็น จริง เท็จ จริง เท็จ และเท็จ ตามลำดับ จงหาค่าความจริงของประพจน์ต่อไปนี้

1. $\left(p \vee q\right) \wedge r$

.....

.....

.....

2. $\left(p \vee \sim q\right) \rightarrow \left(r \vee t\right)$

.....

.....

.....

3. $\left(s \wedge \sim p\right) \leftrightarrow \left(q \rightarrow \sim r\right)$

.....

.....

.....

4. $\left[\left(p \rightarrow q\right) \wedge \left(t \rightarrow r\right)\right] \rightarrow s$

.....

.....

.....

5. $\left[\left(p \vee q\right) \wedge \left(t \vee s\right)\right] \vee \left[\left(q \rightarrow r\right) \rightarrow \sim s\right]$

.....

.....

.....

3. รูปแบบของประพจน์ที่สมมูลกัน

ในวิชาตรรกศาสตร์ ถ้ารูปแบบของประพจน์สองรูปแบบใดมีค่าความจริงตรงกันทุกกรณีต่อกรณี แล้วจะสามารถนำไปใช้แทนกันได้ เรียกสองรูปแบบของประพจน์ดังกล่าวว่าเป็น *รูปแบบของประพจน์ที่สมมูลกัน* สัญลักษณ์ที่ใช้แทนการสมมูลกันของประพจน์คือ $(\equiv)$

ตัวอย่างที่ 3.1 กำหนดให้ p และ q เป็นประพจน์ จงตรวจสอบว่า $p \to q$ กับ $\sim p \vee q$ สมมูลกันหรือไม่

.....

.....

.....

.....

.....

ตัวอย่างที่ 3.2 กำหนดให้ p และ q เป็นประพจน์ จงตรวจสอบว่า $p \to q$ กับ $\sim p \wedge q$ สมมูลกันหรือไม่

.....

.....

.....

.....

.....

ตัวอย่างที่ 3.3 กำหนดให้ p และ q เป็นประพจน์ จงตรวจสอบว่า $\sim (p \vee q)$ กับ $\sim p \wedge \sim q$ สมมูลกันหรือไม่

.....

.....

.....

.....

.....

ตัวอย่างที่ 3.4 กำหนดให้ p และ q เป็นประพจน์ จงตรวจสอบว่า $(p \to q) \wedge (q \to p)$ กับ $p \leftrightarrow q$ สมมูลกันหรือไม่

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3.1 รูปแบบของประพจน์ที่สมมูลกันที่น่าสนใจ มีดังนี้

1. $\sim (\sim p) \equiv p$
2. $p \wedge q \equiv q \wedge p$
3. $p \vee q \equiv q \vee p$
4. $\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$
5. $\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$
6. $p \to q \equiv \sim q \to \sim p$
7. $p \to q \equiv \sim p \vee q$
8. $\sim (p \to q) \equiv p \wedge \sim q$

9. $p \leftrightarrow q \equiv \sim p \leftrightarrow \sim q$
10. $p \leftrightarrow q \equiv \left(p \rightarrow q\right) \wedge \left(q \rightarrow p\right)$
11. $p \leftrightarrow q \equiv \left(\sim q \rightarrow \sim p\right) \wedge \left(\sim p \rightarrow \sim q\right)$
12. $\sim \left(p \leftrightarrow q\right) \equiv \left(p \wedge \sim q\right) \vee \left(q \wedge \sim p\right)$
13. $p \vee \left(q \wedge r\right) \equiv \left(p \vee q\right) \wedge \left(p \vee r\right)$
14. $p \wedge \left(q \vee r\right) \equiv \left(p \wedge q\right) \vee \left(p \wedge r\right)$
15. $p \rightarrow \left(q \wedge r\right) \equiv \left(p \rightarrow q\right) \wedge \left(p \rightarrow r\right)$
16. $p \rightarrow \left(q \vee r\right) \equiv \sim p \vee \left(q \vee r\right)$
17. $\left(p \wedge q\right) \rightarrow r \equiv \left(p \rightarrow r\right) \vee \left(q \rightarrow r\right)$
18. $p \vee \sim p \equiv T$
19. $p \wedge \sim p \equiv F$
20. $p \rightarrow \sim p \equiv \sim p$
21. $\sim p \rightarrow p \equiv p$
22. $p \leftrightarrow \sim p \equiv F$
23. $p \vee T \equiv T$
24. $p \vee F \equiv p$
25. $p \wedge T \equiv p$
26. $p \wedge F \equiv F$
27. $p \rightarrow T \equiv T$
28. $p \vee F \equiv \sim p$
29. $T \rightarrow p \equiv p$
30. $F \rightarrow p \equiv T$
31. $p \leftrightarrow T \equiv p$
32. $p \leftrightarrow F \equiv \sim p$

4. สัจนิรันดร์

รูปแบบของประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นจริงทุกกรณี เรียกว่า *สัจนิรันดร์ (Tautology)*

ตัวอย่างที่ 4.1 กำหนดให้ p และ q เป็นประพจน์ จงตรวจสอบว่ารูปแบบของประพจน์ $\left[\left(p \rightarrow q\right) \wedge p\right] \rightarrow q$ เป็นสัจนิรันดร์หรือไม่

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ตัวอย่างที่ 4.2 กำหนดให้ p และ q เป็นประพจน์ จงตรวจสอบว่ารูปแบบของประพจน์ $\left(p \wedge q\right) \rightarrow \left(q \vee p\right)$ เป็นสัจนิรันดร์หรือไม่

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ตัวอย่างที่ 4.3 กำหนดให้ p และ q เป็นประพจน์ จงตรวจสอบว่ารูปแบบของประพจน์ $\left(\sim q \to p\right) \to \left(q \to \sim p\right)$ เป็นสัจนิรันดร์หรือไม่

.....

.....

.....

.....

.....

.....

5. การอ้างเหตุผล

การอ้างเหตุผลคือ การอ้างว่า เมื่อมีข้อความ $P_1, P_2, P_3, ..., P_n$ ชุดหนึ่ง แล้วสามารถสรุปข้อความ C ข้อความหนึ่งได้ การอ้างเหตุผลประกอบด้วยส่วนสำคัญสองส่วนคือ *เหตุหรือสิ่งที่กำหนดให้* ได้แก่ ข้อความ $P_1, P_2, P_3, ..., P_n$ และ*ผลหรือข้อสรุป* ได้แก่ ข้อความ C การอ้างเหตุผลจะสมเหตุสมผลหรือไม่สมเหตุสมผลก็ได้ ซึ่งสามารถตรวจสอบสอบได้โดยใช้ตัวเชื่อม $\wedge$ เชื่อมเหตุเข้าด้วยกัน และใช้ตัวเชื่อม $\to$ เชื่อมส่วนที่เป็นเหตุกับผลดังนี้

$$\left(P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge ... \wedge P_n\right) \to C$$

ถ้ารูปแบบ $\left(P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge ... \wedge P_n\right) \to C$ เป็นสัจนิรันดร์ จะกล่าวว่า การอ้างเหตุผลนี้ *สมเหตุสมผล (Valid)* แต่ถ้ารูปแบบ $\left(P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge ... \wedge P_n\right) \to C$ ไม่เป็นสัจนิรันดร์ ก็กล่าวว่า การอ้างเหตุผลนี้ *ไม่สมเหตุสมผล (Invalid)* ดังนั้น ในการตรวจสอบความสมเหตุสมผล จึงใช้วิธีเดียวกับการตรวจสอบสัจนิรันดร์

ตัวอย่างที่ 5.1 กำหนดให้ p และ q เป็นประพจน์ จงพิจารณาว่าการอ้างเหตุผลนี้สมเหตุสมผลหรือไม่

เหตุ 1. $p \to q$

2. p

ผล q

.....

.....

.....

.....

.....

ตัวอย่างที่ 5.2 กำหนดให้ p และ q เป็นประพจน์ จงพิจารณาว่าการอ้างเหตุผลนี้สมเหตุสมผลหรือไม่

เหตุ 1. $p \to q$

2. $\sim p$

ผล $\sim q$

.....

.....

.....

.....

ตัวอย่างที่ 5.3 จงพิจารณาว่าการอ้างเหตุผลต่อไปนี้สมเหตุสมผลหรือไม่

เหตุ 1. ถ้าฝนตกแล้วหลังคาบ้านเปียก
2. หลังคาบ้านไม่เปียก

ผล ฝนไม่ตก

.....
.....
.....
.....

ตัวอย่างที่ 5.4 จงพิจารณาว่าการอ้างเหตุผลต่อไปนี้สมเหตุสมผลหรือไม่

เหตุ 1. ถ้าเสือได้กินเหยื่อ แล้วเสือจะมีความสุข
2. เสือมีความสุข

ผล เสือได้กินเหยื่อ

.....
.....
.....
.....
.....
.....

ตัวอย่างที่ 5.6 จงพิจารณาว่าการอ้างเหตุผลต่อไปนี้สมเหตุสมผลหรือไม่

เหตุ 1. ถ้านายเสือใหญ่ไปทำงาน แล้วนายเสือเล็กอยู่บ้าน
2. ถ้านายเสือเล็กไม่อยู่บ้าน แล้วนางสาวเป้เป็นคนดูแลบ้าน
3. นางสาวเป้ไม่ได้เป็นคนดูแลบ้าน

ผล นายเสือใหญ่ไม่ได้ไปทำงาน

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

แบบฝึกหัดที่ 1

1. กำหนดให้ p,q,r และ s เป็นประพจน์ จงสร้างตารางแสดงค่าความจริงของรูปแบบของประพจน์ต่อไปนี้

1.1 $p \vee \left(q \rightarrow p\right)$

1.2 $\left(p \vee q\right) \wedge \left(p \vee \sim q\right)$

1.3 $p \rightarrow \left(\sim p \rightarrow q\right)$

1.4 $\sim q \leftrightarrow \left[p \wedge \left(q \rightarrow \sim p\right)\right]$

1.5 $\left(q \vee \sim p\right) \leftrightarrow r$

1.6 $\left(q \wedge r\right) \rightarrow \left(r \vee p\right)$

1.7 $\left[\left(p \rightarrow q\right) \wedge \left(p \vee s\right)\right] \rightarrow \left(r \rightarrow s\right)$

2. จงพิจราณาว่ารูปแบบของประพจน์ต่อไปนี้สมมูลกับรูปแบบของประพจน์ในข้อใด

2.1 $\left(p \wedge q\right) \rightarrow r$

ก. $\left(p \rightarrow r\right) \vee \left(q \rightarrow r\right)$ ข. $\left(p \rightarrow r\right) \wedge \left(q \rightarrow r\right)$

2.2 $\left(p \rightarrow r\right) \wedge \left(q \rightarrow r\right)$

ก. $\sim \left(p \vee q\right) \rightarrow r$ ข. $\sim \left(p \vee q\right) \vee r$

2.3 $\sim \left[\left(p \wedge q\right) \rightarrow \left(\sim q \vee r\right)\right]$

ก. $\left(p \wedge q\right) \vee \left(q \wedge \sim r\right)$ ข. $p \wedge \sim \left(q \rightarrow r\right)$

2.4 $\sim p \rightarrow \left[q \rightarrow \left(r \vee p\right)\right]$

ก. $\left(p \wedge \sim q\right) \vee r$ ข. $\left(\sim p \vee q\right) \vee r$

2.5 $p \rightarrow \sim \left(q \rightarrow p\right)$

ก. $\sim p \vee \left(\sim p \vee q\right)$ ข. $\sim p \vee \left(p \vee q\right)$

2.6 $p \leftrightarrow q$

ก. $\left(p \rightarrow q\right) \wedge \left(q \wedge \sim p\right)$ ข. $\left(\sim q \rightarrow \sim p\right) \wedge \left(\sim q \vee p\right)$

3. จงตรวจสอบรูปแบบของประพจน์ที่กำหนดให้ว่าเป็นสัจนิรันดร์หรือไม่

3.1 $\left[\sim \left(p \rightarrow q\right)\right] \rightarrow \left(\sim p \leftrightarrow q\right)$

3.2 $\left(p \leftrightarrow q\right) \leftrightarrow \left[\left(p \wedge q\right) \vee \left(\sim p \wedge \sim q\right)\right]$

3.3 $\sim \left(p \wedge q\right) \rightarrow \sim \left(p \leftrightarrow q\right)$

3.4 $\left[\left(p \rightarrow q\right) \wedge \left(p \rightarrow r\right)\right] \leftrightarrow \left[p \rightarrow \left(q \wedge r\right)\right]$

3.5 $\left[\left(p \rightarrow r\right) \wedge \left(q \rightarrow r\right)\right] \leftrightarrow \left[\left(p \vee q\right) \rightarrow r\right]$

3.6 $\left[p \rightarrow \left(q \rightarrow r\right)\right] \rightarrow \left[\left(p \rightarrow q\right) \rightarrow r\right]$

3.7 $\Big[\big(p \to q\big) \to p\Big] \to p$

3.8 $\sim \Big[\big(p \vee \big(\sim p \wedge q\big)\big) \to \big(\sim p \wedge \sim q\big)\Big]$

3.9 $\sim \big(p \to q\big) \to \sim q$

3.10 $\Big[\sim p \wedge \big(p \vee q\big)\Big] \to q$

3.11 $\Big[\big(p \to q\big) \wedge \big(q \to r\big)\Big] \to \big(p \to r\big)$

3.12 $\Big[\big(p \vee q\big) \wedge \big(p \to r\big) \wedge \big(q \to r\big)\Big] \to r$

4. กำหนดให้ p, q, r, s และ t เป็นประพจน์ จงตรวจสอบว่าการอ้างเหตุผลต่อไปนี้สมเหตุสมผลหรือไม่

4.1 เหตุ 1. $p \wedge q$
2. $p \to \big(q \to r\big)$
ผล r

4.2 เหตุ 1. $\big(p \wedge q\big) \to \big(r \vee s\big)$
2. $\sim \big(r \vee s\big)$
ผล $\sim q$

4.3 เหตุ 1. $p \to \big(q \vee r\big)$
2. $\sim q \vee \sim r$
ผล $\sim p$

4.4 เหตุ 1. $p \vee q$
2. $\sim p \vee r$
3. $\sim r$
ผล p

4.5 เหตุ 1. $p \to q$
2. $p \to r$
3. $p \wedge s$
ผล $r \to s$

4.6 เหตุ 1. $p \to \sim q$
2. $r \vee p$
3. q
4. $r \to t$
ผล t

5. จงตรวจสอบว่าการอ้างเหตุผลในแต่ละข้อต่อไปนี้สมเหตุสมผลหรือไม่

5.1 เหตุ 1. 2 เป็นจำนวนเฉพาะ หรือ 4 เป็นจำนวนเฉพาะ
2. 2 ไม่เป็นจำนวนเฉพาะ
ผล 4 ไม่เป็นจำนวนเฉพาะ

5.2 เหตุ 1. ถ้านายหยกสร้างบ้านหลังใหม่เสร็จ แล้วครอบครัวของนายหยกจะย้ายมาอยู่ด้วย
2. ถ้าครอบครัวของนายหยกย้ายมาอยู่ด้วย แล้วนายหยกจะได้ดูแลพ่อแม่ที่ชราแล้ว
ผล ถ้านายหยกสร้างบ้านหลังใหม่เสร็จ แล้วนายหยกจะได้ดูแลพ่อแม่ที่ชราแล้ว

5.3 เหตุ 1. ถ้านายโอมทำยอดขายตามเป้าหมายที่ผู้จักการตั้งไว้ แล้วนายโอมจะได้รับโบนัส
2. นายโอมทำยอดขายตามเป้าหมายที่ผู้จักการตั้งไว้
ผล นายโอมได้รับโบนัส

5.4 เหตุ 1. ถ้านายอ๊อกมีกำลังใจ แล้วนายอ๊อกจะไปหาหมอ
2. นายอ๊อกไปหาหมอ
ผล นายอ๊อกมีกำลังใจ

5.5 เหตุ 1. นาย A ซื้อสินค้าโดยใช้บัตรเครดิต หรือนาย A ซื้อสินค้าโดยใช้เงินสด
2. นาย A ไม่ได้ซื้อสินค้าโดยใช้บัตรเครดิต
ผล นาย A ซื้อสินค้าโดยใช้เงินสด

5.6 เหตุ 1. ถ้าไฟฟ้าดับ แล้วโรงแรมต้องใช้เครื่องปั่นไฟ
2. ถ้าโรงแรมต้องใช้เครื่องปั่นไฟ แล้วลิฟต์จะทำงานไม่ได้
ผล ถ้าไฟฟ้าดับ แล้วลิฟต์จะทำงานไม่ได้

บทที่ 2
ระบบเลขฐาน (NUMBER BASES)

วิวัฒนาการของระบบตัวเลขจากสมัยโบราณ เป็นแบบตัวเลขไม่มีหลักใช้คำนวณไม่ได้ ต่อมาจึงสร้างตัวเลขที่มีหลักขึ้นและมีฐานของตัวเลขแตกต่างกัน แต่ใช้กันอย่างแพร่หลายคือตัวเลขฮินดูอารบิกที่รู้จักกันในระบบตัวเลขฐานสิบ ตัวเลขเหล่านี้มีค่าประจำหลักที่จะแสดงค่าร่วมกับตัวเลขที่ปรากฏอยู่ในตำแหน่งนั้น ระบบตัวเลขฐานสอง เป็นระบบที่สอดคล้องกับสภาวะของเครื่องมือทางอิเล็กทรอนิกส์ที่มีสภาพเปิดปิดจึงจะเหมาะสมกับเครื่องคอมพิวเตอร์มากที่สุดผู้ใช้งานป้อนข้อมูลเข้าเลขฐานสิบ คอมพิวเตอร์รับข้อมูลไปเปลี่ยนเป็นเลขฐานสอง เมื่อประมวนผลเสร็จให้ผลลัพธ์ออกมาเป็นเลขฐานสิบ

1. ระบบตัวเลขฐานสิบ

ระบบตัวเลขฮินดูอารบิกเป็นระบบตัวเลขฐานสิบ ได้ชื่อมาจากชนชาติฮินดูซึ่งเป็นผู้คิดระบบนี้ และชนชาติอาหรับซึ่งเดินทางติดต่อค้าขายระหว่างอินเดียและยุโรป ได้นำระบบตัวเลขนี้ไปเผยแร่ในยุโรป หลักฐานที่เก่าแก่ที่สุดซึ่งตัวเลขนี้ปรากฏอยู่คือ เสาหินในประเทศอินเดียซึ่งเชื่อว่าสร้างในสมัยพระเจ้าอโศกมหาราช ประมาณ 250 ปีก่อนคริสต์ศักราช ในสมัยต้น ๆ ยังไม่มีการใช้ตัวเลขศูนย์ อย่างไรก็ตามหลักฐานการใช้ตัวเลขศูนย์ปรากฏในหนังสือซึ่งเขียนเมื่อประมาณ ค.ศ. 800

สัญลักษณ์หรือเลขโดดที่ใช้ในระบบตัวเลขฐานสิบคือ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 และ 9 ตัวเลขเหล่านี้ใช้เขียนแทนจำนวนใดขึ้นอยู่กับหลักที่ปรากฏอยู่และค่าประจำหลักนั้น

ตารางแสดงหลักและค่าประจำหลักในระบบตัวเลขฐานสิบ

หลักที่	...	เจ็ด	หก	ห้า	สี่	สาม	สอง	หนึ่ง
ค่าประจำหลัก	...	10^6	10^5	10^4	10^3	10^2	10^1	10^0

การเขียนตัวเลขแทนจำนวนในระบบตัวเลขฐานสิบ เช่น $2,598,107$ มีความหมายดังนี้

$$2,598,107 = \left(2\times10^6\right)+\left(5\times10^5\right)+\left(9\times10^4\right)+\left(8\times10^3\right)+\left(1\times10^2\right)+\left(0\times10^1\right)+\left(7\times10^0\right)$$

เรียกประโยคข้างต้นว่าการเขียน $2,598,107$ ในรูปกระจาย ในที่นี้

7 อยู่ในหลักที่หนึ่ง 7 มีค่าเป็น 7×10^0

0 อยู่ในหลักที่สอง 0 มีค่าเป็น 0×10^1

1 อยู่ในหลักที่สาม 1 มีค่าเป็น 1×10^2

8 อยู่ในหลักที่สี่ 8 มีค่าเป็น 8×10^3

9 อยู่ในหลักที่ห้า 9 มีค่าเป็น 9×10^4

5 อยู่ในหลักที่หก 5 มีค่าเป็น 5×10^5

2 อยู่ในหลักที่เจ็ด 2 มีค่าเป็น 2×10^6

ตัวอย่างที่ 1.1 จงบอกว่า 7 ในแต่ละจำนวนต่อไปนี้มีค่าเท่าไร

1) 7 2) 78

3) 87 4) $17,349$

5) $430,701$ 6) $7,149,654$

ตัวอย่างที่ 1.2 จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ในรูปการกระจาย

1) 7
2) 78
3) 87
4) $17,349$

2. ระบบตัวเลขฐานสอง

การเขียนตัวเลขในระบบตัวเลขฐานสองมีหลักการเช่นเดียวกับการเขียนตัวเลขในระบบตัวเลขฐานสิบ ในระบบตัวเลขฐานสองใช้เลขโดดเพียงสองตัวคือ 0 และ 1 ค่าประจำหลักอยู่ในรูปเลขยกกำลังที่มีฐานเป็นสอง และค่าประจำหลักในระบบตัวเลขฐานสองแสดงดังตารางต่อไปนี้

ตารางแสดงหลักและค่าประจำหลักในระบบตัวเลขฐานสอง

หลักที่	...	เจ็ด	หก	ห้า	สี่	สาม	สอง	หนึ่ง
ค่าประจำหลัก	...	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0

การเขียนตัวเลขแทนจำนวนในระบบตัวเลขฐานสอง เช่น 110101_2 มีความหมายดังนี้

$$110101_2 = \left(1\times 2^5\right)+\left(1\times 2^4\right)+\left(0\times 2^3\right)+\left(1\times 2^2\right)+\left(0\times 2^1\right)+\left(1\times 2^0\right)$$

เรียกประโยคข้างต้นว่าการเขียน 110101_2 ในรูปกระจาย ในที่นี้

1 อยู่ในหลักที่หนึ่ง 1 มีค่าเป็น 1×2^0

0 อยู่ในหลักที่สอง 0 มีค่าเป็น 0×2^1

1 อยู่ในหลักที่สาม 1 มีค่าเป็น 1×2^2

0 อยู่ในหลักที่สี่ 0 มีค่าเป็น 0×2^3

1 อยู่ในหลักที่ห้า 1 มีค่าเป็น 1×2^4

1 อยู่ในหลักที่หก 1 มีค่าเป็น 1×2^5

ผลลัพธ์ที่หาได้จาก $\left(1\times 2^5\right)+\left(1\times 2^4\right)+\left(0\times 2^3\right)+\left(1\times 2^2\right)+\left(0\times 2^1\right)+\left(1\times 2^0\right)$ คือ 53 ซึ่งเป็นค่าของ 110101_2 ที่เขียนในระบบตัวเลขฐานสิบ นั่นคือ $110101_2 = 53$

ตัวอย่างที่ 2.1 จงเขียน 1011_2 ให้อยู่ในระบบตัวเลขฐานสิบ

.....

.....

.....

.....

ตัวอย่างที่ 2.2 จงเขียน 110010_2 ให้อยู่ในระบบตัวเลขฐานสิบ

.....

.....

.....

.....

ตัวอย่างที่ 2.3 จงเขียน 123_4 ให้อยู่ในระบบตัวเลขฐานสิบ

.....

.....

.....

.....

ตัวอย่างที่ 2.4 จงเขียน 223_5 ให้อยู่ในระบบตัวเลขฐานสิบ

.....

.....

.....

.....

3. การเปลี่ยนฐานต่าง ๆ ในระบบตัวเลข

ตัวอย่างที่ 3.1 จงเขียน 37 ให้อยู่ในระบบตัวเลขฐานสอง

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ตัวอย่างที่ 3.2 จงเขียน 139 ให้อยู่ในระบบตัวเลขฐานสอง

.....

.....

.....

.....

.....

ตัวอย่างที่ 3.3 จงเขียน 1021 ให้อยู่ในระบบตัวเลขฐานเจ็ด

.....

.....

.....

.....

.....

ตัวอย่างที่ 3.4 จงเขียน 376 ให้อยู่ในระบบตัวเลขฐานห้า

.....

.....

.....

.....

.....

.....

4. ระบบตัวเลขฐานที่มีฐานตั้งแต่สิบเอ็ดขึ้นไป

การเขียนตัวเลขในระบบตัวเลขที่มีฐานตั้งแต่สิบเอ็ดขึ้นไป มีหลักการเช่นเดียวกับการเขียนตัวเลขในระบบตัวเลขฐาน ต่าง ๆ ในระบบตัวเลขฐานที่มีฐานตั้งแต่สิบเอ็ดขึ้นไป มีสัญลักษณ์ที่ใช้เพิ่มเติมดังนี้

- สัญลักษณ์หรือเลขโดดที่ใช้ในระบบตัวเลขฐานสิบเอ็ดคือ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 และ A (ซึ่ง A มีค่าเท่ากับ 10)
- สัญลักษณ์หรือเลขโดดที่ใช้ในระบบตัวเลขฐานสิบสองคือ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A และ B (ซึ่ง B มีค่าเท่ากับ 11)
- สัญลักษณ์หรือเลขโดดที่ใช้ในระบบตัวเลขฐานสิบสามคือ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B และ C (ซึ่ง C มีค่าเท่ากับ 12)
- สัญลักษณ์หรือเลขโดดที่ใช้ในระบบตัวเลขฐานสิบสามคือ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C และ D (ซึ่ง D มีค่าเท่ากับ 13)
- สัญลักษณ์หรือเลขโดดที่ใช้ในระบบตัวเลขฐานสิบสามคือ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D และ E (ซึ่ง E มีค่าเท่ากับ 14)
- สัญลักษณ์หรือเลขโดดที่ใช้ในระบบตัวเลขฐานสิบสามคือ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E และ F (ซึ่ง F มีค่าเท่ากับ 15)

ตัวอย่างที่ 4.1 จงเขียน $2A0_{11}$ ให้อยู่ในระบบตัวเลขฐานสิบ

.....
.....
.....
.....
.....

ตัวอย่างที่ 4.2 จงเขียน $1D9B_{16}$ ให้อยู่ในระบบตัวเลขฐานสิบ

.....
.....
.....
.....
.....

ตัวอย่างที่ 4.3 จงเขียน 981 ให้อยู่ในระบบตัวเลขฐานสิบสอง

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

ตัวอย่างที่ 4.4 จงเขียน $3,275$ ให้อยู่ในระบบตัวเลขฐานสิบห้า

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

5. การเปลี่ยนฐานในระบบตัวเลขฐานที่มีทศนิยม

ถ้าต้องการเปลี่ยนฐานในระบบตัวเลขที่มีทศนิยม ให้แปลงจำนวนเต็มให้เป็นเลขฐานที่กำหนดให้ก่อน แล้วแปลงตัวเลขหลังจุดทศนิยม ในการแปลงตัวเลขหลังจุดทศนิยมทำได้โดย นำเลขฐานที่ต้องการแปลงไปคูณกับตัวเลขหลังจุดทศนิยม ผลลัพธ์ที่ได้จากการคูณจะต้องใส่ตัวเลขหน้าจุดทศนิยมทุกครั้ง (ถ้าไม่มีตัวทดจะต้องใส่เลขศูนย์) หลังจากนั้นนำเลขฐานไปคูณกับผลัพธ์ ทำเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ จนกว่าผลลัพธ์จะเป็นจำนวนเต็ม (ตัวเลขหลังจุดทศนิยมเป็นศูนย์ทุกตัว) หรือเป็นจำนวนที่เริ่มซ้ำกับที่เคยคูณไปแล้ว

ตัวอย่างที่ 5.1 จงเขียน 42.375 ให้อยู่ในระบบตัวเลขฐานสอง

.....

.....

.....

.....

.....

ตัวอย่างที่ 5.2 จงเขียน 324.024 ให้อยู่ในระบบตัวเลขฐานห้า

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ตัวอย่างที่ 5.3 จงเขียน 203.57 ให้อยู่ในระบบตัวเลขฐานสิบห้า

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

6. การบวก ลบ คูณ และหาร ของตัวเลขฐานต่าง ๆ

การบวก ลบ คูณ และหาร ของตัวเลขฐานต่าง ๆ ที่ไม่ใช่ฐานสิบ สามารถทำได้เช่นเดียวกับตัวเลขฐานสิบ คือมีการทดและยืมในฐาน x ถ้ายืมมา 1 จะมีค่าเท่ากับ x

ตัวอย่างที่ 6.1 จงหาค่าของ $3567_{8} + 2756_{8}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ตัวอย่างที่ 6.2 จงหาค่าของ $231_{4} + 232_{4}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ตัวอย่างที่ 6.3 จงหาค่าของ $234_{5} \times 341_{5}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ตัวอย่างที่ 6.4 จงหาค่าของ $162_{7} \times 25_{7}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ตัวอย่างที่ 6.5 จงหาค่าของ $8561_9 - 2738_9$

ตัวอย่างที่ 6.6 จงหาค่าของ $3221_4 - 302_4$

ตัวอย่างที่ 6.7 จงหาค่าของ $4035_6 \div 12_6$

ตัวอย่างที่ 6.8 จงหาค่าของ $110101_2 \div 11_2$