บทที่ 1
ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

4111702

การประยุกต์แคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ 1

อ.รัชนีกร ทบประดิษฐ์

บทนำ

ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชันนั้น นับเป็นความรู้พื้นฐานที่สำคัญของการศึกษาเกี่ยวกับอนุพันธ์ของฟังก์ชัน ปริพันธ์และการประยุกต์อื่น ๆ ซึ่งเราจะได้ศึกษาในเนื้อหาต่อ ๆ ไป เพราะฉะนั้นเราจึงต้องศึกษาแนวคิดเกี่ยวกับลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน ให้เข้าใจอย่างถ่องแท้ เพื่อให้สามารถนำไปประยุกต์ใช้ในเรื่องที่กล่าวมาข้างต้นได้อย่างถูกต้อง

นิยามของลิมิต ลิมิตทางซ้ายและลิมิตทางขวาของฟังก์ชัน (Definition of Limits, Left hand sided and Right hand sided limits)

ลิมิต หมายถึง **ขีดจำกัด** เมื่อใช้เป็นศัพท์เฉพาะในทางคณิตศาสตร์ แล้วมีความหมายลึกซึ้งและทำความเข้าใจยากพอสมควร ดังนั้นในตอนแรกนี้ จะได้ให้ตัวอย่างเพื่อเป็นแนวคิดกับผู้เรียนว่า เมื่อไรจะใช้คำว่า “ลิมิต” และจะหาค่าลิมิตนั้นโดยคร่าว ๆ ได้อย่างไร จากนั้นจึงจะนำเข้าสู่ความหมายที่แท้จริงของลิมิตต่อไป

ลิมิตของฟังก์ชัน

พิจารณาฟังก์ชัน $f(x) = \dfrac{x^2-16}{x-4}$ จากฟังก์ชันที่กำหนดให้ พบว่าค่าของ $f(x)$ จะขึ้นอยู่กับค่า x ในกรณีที่ $x = 4$ จะเห็นได้ว่าไม่สามารถหาค่า $f(x)$ ได้ ทั้งนี้เพราะ 4 ไม่อยู่ในโดเมนของ $f(x)$ เพราะ $f(4) = 0/0$ ไม่มีความหมาย

แต่สิ่งที่ทำได้ คือ พยายามหาค่าใกล้เคียงที่สุดจะหาค่าของ $f(x)$ เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 4 มากที่สุด $(x \neq 4)$

กรณีที่ 1 มีค่าเข้าใกล้ 4 ทางซ้าย $(x < 4)$

x	$f(x) = \dfrac{x^2-16}{x-4}$
3	7
3.5	7.5
3.7	7.7

กรณีที่ 2 มีค่าเข้าใกล้ 4 ทางขวา $(x > 4)$

x	$f(x) = \dfrac{x^2-16}{x-4}$
5	9
4.5	8.5
4.3	8.3

ลิมิตของฟังก์ชัน

x	$f(x) = \dfrac{x^2-16}{x-4}$
3.9	7.9
3.99	7.99
3.999	7.999
3.9999	7.9999

x	$f(x) = \dfrac{x^2-16}{x-4}$
4.1	8.1
4.01	8.01
4.001	8.001
4.0001	8.0001

จากตารางจะเห็นได้ว่า ไม่ว่า x จะเข้าใกล้ 4 ทางซ้ายหรือทางขวาก็ตาม $f(x)$ จะมีค่าเข้าใกล้ 8 เสมอ นั่นคือ ถ้า x มีค่า เข้าใกล้ 4 แล้ว $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ 8 หรือจะกล่าวอีกอย่างหนึ่งว่า ลิมิตของ $f(x)$ เท่ากับ 8 ขณะที่ $x \to 4$ เขียนแทนด้วย $\lim_{x\to 4} f(x) = 8$ นั่นคือ

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x-4} = 8$$

ลิมิตของฟังก์ชัน

สำหรับฟังก์ชัน $y = f(x)$ ใด ๆ ที่มีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของจำนวนจริง

1. ลิมิตทางซ้ายของ f ที่ a คือค่าของ $f(x)$ เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ a ทางซ้าย

 เขียนแทนด้วย $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$

2. ลิมิตทางขวาของ f ที่ a คือค่าของ $f(x)$ เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ a ทางขวา

 เขียนแทนด้วย $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$

ลิมิตของฟังก์ชัน $f(x)$ เมื่อ $x \to a$ จะหาค่าได้ก็ต่อเมื่อ

1. $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ หาค่าได้
2. $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ หาค่าได้
3. $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$

หรือกล่าวว่า $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L \leftrightarrow \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L = \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$

ลิมิตของฟังก์ชัน

บทนิยาม 1.1 ลิมิตของฟังก์ชัน $f(x)$ มีค่าเท่ากับจำนวนจริง L เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้จำนวนจริง a ซึ่งเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim_{x \to a} f(x) = L$ ก็ต่อเมื่อ ค่าของ $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ L เมื่อค่าของ x มีค่าเข้าใกล้ a (จากทั้งสองข้างของ a) แต่ $x \neq a$

ตัวอย่างที่ 1.1 กำหนด $f(x) = x^2 - x + 2$ จงหาค่าของ $\lim_{x \to 2} f(x)$

วิธีทำ แยกพิจารณาได้ 2 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 1 x มีค่าเข้าใกล้ 2 ทางซ้าย

กรณีที่ 2 x มีค่าเข้าใกล้ 2 ทางขวา

ลิมิตของฟังก์ชัน

กรณีที่ 1 x มีค่าเข้าใกล้ 2 ทางซ้าย

x	$f(x) = x^2 - x + 2$
1.5	2.75
1.8	3.44
1.9	3.71
1.99	3.9701
1.995	3.9850
1.999	3.9970

กรณีที่ 2 x มีค่าเข้าใกล้ 2 ทางขวา

x	$f(x) = x^2 - x + 2$
2.2	4.64
2.1	4.31
2.05	4.1525
2.01	4.0301
2.005	4.0150
2.001	4.0030

จากตารางจะเห็นได้ว่า เมื่อค่าของ x มีค่าเข้าใกล้ 2 (จากทางซ้ายและทางขวาของ 2) แล้วค่าของ $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ 4 หรือค่าของ $f(x)$ มีค่าที่ใกล้เคียงกับ 4 มาก ๆ เราจะกล่าวได้ว่า ลิมิตของฟังก์ชัน $f(x)$ มีค่าเท่ากับ 4 เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 2 เขียนแทนด้วย $\lim_{x \to 2} f(x) = 4$

ลิมิตของฟังก์ชัน

ตัวอย่างที่ 1.2 กำหนดให้ $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-1}$ จงหาค่าของ $\lim_{x\to 1} f(x)$

วิธีทำ จากฟังก์ชัน f ที่กำหนดให้เราจะเห็นได้ว่า f ไม่นิยามเมื่อ $x=1$ แต่การพิจารณาค่าของลิมิตนั้น เราจะไม่พิจารณาในกรณีที่ $x=1$ แต่เราจะพิจาณา ค่าของ x ที่ใกล้เคียงกับ 1 โดยพิจารณาได้จากตารางต่อไปนี้

กรณีที่ 1 x มีค่าเข้าใกล้ 1 ทางซ้าย

x	$f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-1}$
0.1	0.9090
0.5	0.6667
0.7	0.5882

กรณีที่ 2 x มีค่าเข้าใกล้ 1 ทางขวา

x	$f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-1}$
1.5	0.4000
1.3	0.4348
1.2	0.4545

ลิมิตของฟังก์ชัน

กรณีที่ 1 x มีค่าเข้าใกล้ 1 ทางซ้าย

x	$f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-1}$
0.9	0.5263
0.99	0.5025
0.999	0.50025
0.9999	0.500025

กรณีที่ 2 x มีค่าเข้าใกล้ 1 ทางขวา

x	$f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-1}$
1.1	0.4762
1.01	0.4975
1.001	0.49975
1.0001	0.499975

จากตารางจะเห็นได้ว่า เมื่อค่าของ x มีค่าเข้าใกล้ 1 (จากทางซ้ายและทางขวาของ 1) แล้วค่าของ $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ 0.5 หรือค่าของ $f(x)$ มีค่าที่ใกล้เคียงกับ 0.5 มาก ๆ เราจะกล่าวได้ว่า ลิมิตของฟังก์ชัน $f(x)$ มีค่าเท่ากับ 0.5 เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 1 เขียนแทนด้วย

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 0.5$$

ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตและการหาค่าลิมิต

ทฤษฎีบทที่ 1.1 กำหนดให้ $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ และ $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L$ เมื่อ L และ M เป็นจำนวนจริงใด ๆ จะได้ว่า

1. $\lim\limits_{x\to c} c = c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ
2. $\lim\limits_{x\to a} x = a$
3. $\lim\limits_{x\to a} cf(x) = cL$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ
4. $\lim\limits_{x\to a} f(x) \pm g(x) = L \pm M$
5. $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = LM$
6. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$ เมื่อ $M \neq 0$
7. $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ และ $f(x) \geq 0$

การหาค่าลิมิตของฟังก์ชัน

วิธีที่ 1 โดยการแทนค่า

ตัวอย่างที่ 1.3 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x \to -2} 2x^2 + 5x - 9$

วิธีทำ
$$\begin{aligned}
\lim_{x \to -2} 2x^2 + 5x - 9 &= \lim_{x \to -2} 2x^2 + \lim_{x \to -2} 5x - \lim_{x \to -2} 9 \\
&= 2\lim_{x \to -2} x^2 + 5\lim_{x \to -2} x - \lim_{x \to -2} 9 \\
&= 2(-2)^2 + 5(-2) - 9 \\
&= 8 - 10 - 9 \\
&= -11
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\lim\limits_{x \to -2} 2x^2 + 5x - 9 = -11$

การหาค่าลิมิตของฟังก์ชัน

ตัวอย่างที่ 1.4 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to 1} 3x^2 - 2x + 3 \quad x^2 + 3x$

วิธีทำ $\lim\limits_{x\to 1} 3x^2 - 2x + 3 \quad x^2 + 3x \quad = \quad \lim\limits_{x\to 1} 3x^2 - 2x + 3 \; \lim\limits_{x\to 1} x^2 + 3x$

$$= \quad \lim_{x\to 1} 3x^2 - \lim_{x\to 1} 2x + \lim_{x\to 1} 3 \quad \lim_{x\to 1} x^2 + \lim_{x\to 1} 3x$$

$$= \quad 3\lim_{x\to 1} x^2 - 2\lim_{x\to 1} x + \lim_{x\to 1} 3 \quad \lim_{x\to 1} x^2 + 3\lim_{x\to 1} x$$

$$= \quad 3(1)^2 - 2(1) + 3 \quad (1)^2 + 3(1)$$

$$= \quad 3 - 2 + 3 \quad 1 + 3$$

$$= \quad 4 \quad 4$$

$$= \quad 16$$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 1} 3x^2 - 2x + 3 \quad x^2 + 3x \quad = \quad 16$

การหาค่าลิมิตของฟังก์ชัน

ตัวอย่างที่ 1.5 จงหาค่าของ $\lim_{x \to -5} \sqrt{x^2+6}$

วิธีทำ $\lim_{x \to -5} \sqrt{x^2+6} = \sqrt{\lim_{x \to -5} x^2 + 6}$

$$= \sqrt{\lim_{x \to -5} x^2 + \lim_{x \to -5} 6}$$

$$= \sqrt{25+6}$$

$$= \sqrt{31}$$

ดังนั้น $\lim_{x \to -5} \sqrt{x^2+6} = \sqrt{31}$

การหาค่าลิมิตของฟังก์ชัน

ตัวอย่างที่ 1.6 จงหาค่าของ $\lim_{x\to 3} (x+2)^4$

วิธีทำ
$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 3} (x+2)^4 &= \left(\lim_{x\to 3} (x+2)\right)^4 \\
&= \left(\lim_{x\to 3} x + \lim_{x\to 3} 2\right)^4 \\
&= (3+2)^4 \\
&= 5^4 \\
&= 625
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\lim_{x\to 3} (x+2)^4 = 625$

การหาค่าลิมิตของฟังก์ชัน

ตัวอย่างที่ 1.7 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ เมื่อกำหนด $f(x) = \begin{cases} 3x^2 & , \; x < 3 \\ 4 + x & , \; x \geq 3 \end{cases}$

วิธีทำ การหาค่า $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ นั้นเราจะต้องแยกพิจารณาหา 2 กรณี คือ หาลิมิตซ้ายและลิมิตขวา

พิจารณา
$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1^-} f(x) &= \lim_{x \to 1^-} 3x^2 \\ &= 3\ 1^{2} \\ &= 3 \end{aligned}$$

จะได้ว่า $\lim\limits_{x \to 1^-} 3x^2 = 3$

พิจารณา
$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1^+} f(x) &= \lim_{x \to 1^+} 3x^2 \\ &= 3\ 1^{2} \\ &= 3 \end{aligned}$$

จะได้ว่า $\lim\limits_{x \to 1^+} 3x^2 = 3$

เนื่องจาก $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$

ดังนั้น $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 3$

การหาค่าลิมิตของฟังก์ชัน

ตัวอย่างที่ 1.8 จงหาค่าของ $\lim_{x\to 3}\dfrac{|x-3|\ \ x^2-4x+8}{x-3}$

วิธีทำ พิจารณา

$$|x-3| \;=\; \begin{cases} (x-3), & x \geq 3 \\ -(x-3), & x < 3 \end{cases}$$

การหาค่านั้นเราจะต้องแยกพิจารณาหา 2 กรณี คือ หาลิมิตซ้าย และลิมิตขวา

พิจารณา

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 3^-}\frac{|x-3|\ \ x^2-4x+8}{x-3} &= \lim_{x\to 3^-}\frac{-\ \ x-3\ \ \ x^2-4x+8}{x-3} \\ &= \lim_{x\to 3^-}-\ \ x^2-4x+8 \\ &= -\ \ 3^2-4(3)+8 \\ &= -5 \end{aligned}$$

การหาค่าลิมิตของฟังก์ชัน

จะได้ว่า $\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{|x-3|\ x^2 - 4x + 8}{x-3} \ = \ -5$

พิจารณา

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{|x-3|\ x^2 - 4x + 8}{x-3} = \lim_{x \to 3^+} \frac{x-3 \quad x^2 - 4x + 8}{x-3}$$

$$= \lim_{x \to 3^-} x^2 - 4x + 8$$

$$= 3^2 - 4(3) + 8$$

$$= 5$$

จะได้ว่า $\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{|x-3|\ x^2 - 4x + 8}{x-3} \ = \ 5$

เนื่องจาก

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{|x-3|\ x^2 - 4x + 8}{x-3} \neq \lim_{x \to 3^-} \frac{|x-3|\ x^2 - 4x + 8}{x-3}$$

ดังนั้น ไม่มีลิมิต

การหาค่าลิมิตของฟังก์ชัน

วิธีที่ 2 ถ้า $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ แล้วใช้การแยกตัวประกอบ

ตัวอย่างที่ 1.9 จงหาค่าของ $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}$

วิธีทำ
$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}$$
$$= \lim_{x\to 3}(x+3)$$
$$= 3+3 = 6$$

ดังนั้น
$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3} = 6$$

การหาค่าลิมิตของฟังก์ชัน

ตัวอย่างที่ 1.10 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^-} \dfrac{2x^2+5x-3}{6x^2-7x+2}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to \frac{1}{2}^-} \frac{2x^2+5x-3}{6x^2-7x+2} &= \lim_{x \to \frac{1}{2}^-} \frac{(2x-1)(x+3)}{(3x-2)(2x-1)} \\
&= \lim_{x \to \frac{1}{2}^-} \frac{(x+3)}{(3x-2)} \\
&= \frac{\frac{1}{2}+3}{3\left(\frac{1}{2}\right)-2} \\
&= \frac{\frac{7}{2}}{-\frac{1}{2}} = -7
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}^-} \frac{2x^2+5x-3}{6x^2-7x+2} = -7$$

การหาค่าลิมิตของฟังก์ชัน

วิธีที่ 3 ถ้า $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{0}{0}$ **แล้วใช้การการคูณด้วยสังยุค**

ตัวอย่างที่ 1.11 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x \to 9} \dfrac{x-9}{\sqrt{x}-3}$

วิธีทำ เมื่อ $x = 9$

เราจะได้ว่า $\sqrt{x}-3 = 0$ เพราะฉะนั้นเราพิจารณาค่าลิมิต ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 9} \frac{x-9}{\sqrt{x}-3} &= \lim_{x \to 9} \frac{x-9}{\sqrt{x}-3} \cdot \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3} \\
&= \lim_{x \to 9} \frac{(x-9)(\sqrt{x}+3)}{x-9} \\
&= \lim_{x \to 9} (\sqrt{x}+3) \\
&= (\sqrt{9}+3) \\
&= 3+3 = 6
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\lim_{x \to 9} \frac{x-9}{\sqrt{x}-3} = 6$$

ลิมิตที่เกี่ยวข้องกับอนันต์

นอกจากลิมิตของฟังก์ชันที่ $x \to a$ เมื่อ a คือ จำนวนจริงบนโดเมนของฟังก์ชันแล้ว ลิมิตของฟังก์ชันที่ $x \to \infty$ ก็มีความสำคัญและพบบ่อยเมื่อนำความรู้ทางแคลคูลัสไปประยุกต์ใช้ในวิทยาศาสตร์ ดังนั้น ในหัวข้อนี้เราจะศึกษาลิมิตที่เกี่ยวข้องกับอนันต์

อนันต์ (Infinity) เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ (∞) ใช้แทนจำนวนที่มีค่ามากกว่าทุกจำนวนจริงใด ๆ นั่นคือ สำหรับทุก ๆ จำนวนจริงบวก $a \in \mathbb{R}$, $a < \infty$

ในทางตรงกันข้ามลบอนนต์ ($-\infty$) ใช้แทนจำนวนที่มีค่าน้อยกว่าทุกจำนวนจริงใด ๆ นั่นคือ สำหรับทุก ๆ จำนวนจริงลบ $b \in \mathbb{R}$, $-\infty < b$

ลิมิตที่เกี่ยวข้องกับอนันต์

1. ลิมิต (ค่าจริง) ที่จุดอนันต์

ฟังก์ชัน f มีลิมิตที่ ∞ และค่าลิมิตเป็นจำนวนจริงมี 2 ลักษณะคือ

$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ และ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$ โดยที่ L เป็นจำนวนจริง

พิจารณา ฟังก์ชัน $y = f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$

x	∞	-10,000	-100	-1	1	100	10,000	...	$-\infty$
$f(x)$	0	-0.0001	-0.01	-1	1	0.01	0.0001	...	0

ลิมิตที่เกี่ยวข้องกับอนันต์

จากตารางจะเห็นว่าเมื่อ $x \to \infty$ แล้ว $\frac{1}{x} \to 0$ นั่นคือ $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$

ในทำนองเดียวกันเมื่อ $x \to -\infty$ แล้ว $\frac{1}{x} \to 0$

นั่นคือ $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$

ทฤษฎีบทที่ 1.2 กำหนดให้ $n \in \mathbb{Z}^+$ จะได้ว่า

1. $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^n} = 0$
2. $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

ลิมิตที่เกี่ยวข้องกับอนันต์

ตัวอย่างที่ 1.12 จงหาค่าของ $\lim_{x\to\infty} \frac{2}{x^3} + \frac{3}{x^4} + 5$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \frac{2}{x^3} + \frac{3}{x^4} + 5 &= \lim_{x\to\infty} \frac{2}{x^3} + \lim_{x\to\infty} \frac{3}{x^4} + \lim_{x\to\infty} 5 \\ &= 0 + 0 + 5 \\ &= 5\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2}{x^3} + \frac{3}{x^4} + 5 = 5$$

ลิมิตที่เกี่ยวข้องกับอนันต์

ตัวอย่างที่ 1.13 จงหาค่าของ $\lim_{x\to\infty}\frac{x+2}{x}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{x+2}{x} &= \lim_{x\to\infty}\frac{x}{x}+\frac{2}{x}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{x}{x}+\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}\\ &= \lim_{x\to\infty}1+\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}\\ &= 1+0\\ &= 1\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+2}{x} = 1$$

ลิมิตที่เกี่ยวข้องกับอนันต์

ตัวอย่างที่ 1.14 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{2x^2+4}}{x+2}$

วิธีทำ

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2x^2+4}}{x+2} = \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(2+\frac{4}{x^2}\right)}}{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{|x|\sqrt{\left(2+\frac{4}{x^2}\right)}}{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{\left(2+\frac{4}{x^2}\right)}}{\left(1+\frac{2}{x}\right)}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{\left(2+\frac{4}{x^2}\right)}}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{\lim\limits_{x\to\infty}2+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4}{x^2}}}{\lim\limits_{x\to\infty}1+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x}}$$

$$= \frac{\sqrt{2+0}}{1+0}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

ดังนั้น

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2x^2+4}}{x+2} = \sqrt{2}$$

ลิมิตที่เกี่ยวข้องกับอนันต์

2. ลิมิตค่าอนันต์ที่จุด $x = a$ (a เป็นจำนวนจริง)

ให้ a เป็นจำนวนจริงฟังก์ชัน f ไม่มีลิมิตที่จุด $x = a$ โดยที่ถ้า x เข้าใกล้ a แล้วค่า $f(x)$ เพิ่มขึ้นหรือลดลงอย่างไม่จำกัด (นั่นคือ $f(x) \to \infty$ หรือ $f(x) \to -\infty$)

มี 6 ลักษณะคือ

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty \quad , \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty \quad , \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \quad , \quad \lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

ลิมิตที่เกี่ยวข้องกับอนันต์

ทฤษฎีบทที่ 1.3 กำหนดให้ $n \in \mathbb{Z}^+$ และ $a \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า

1. $$\lim_{x \to a^+} \frac{1}{(x-a)^n} = \infty$$

2. $$\lim_{x \to a^-} \frac{1}{(x-a)^n} = \begin{cases} \infty & , \quad n = 2,4,6,\ldots \\ -\infty & , \quad n = 1,3,5,\ldots \end{cases}$$

ตัวอย่างที่ 1.15 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x}$

วิธีทำ

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{(x-0)^1} = \infty$$

ดังนั้น $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$

ลิมิตที่เกี่ยวข้องกับอนันต์

ตัวอย่างที่ 1.16 จงหาค่าของ $\lim_{x \to 3} \frac{1}{(x-3)^5}$

วิธีทำ

เนื่องจาก $\lim_{x \to 3^+} \frac{1}{(x-3)^5} = \infty$

และ $\lim_{x \to 3^-} \frac{1}{(x-3)^5} = -\infty$

ดังนั้น $\lim_{x \to 3} \frac{1}{(x-3)^5}$ ไม่มีลิมิต

ลิมิตที่เกี่ยวข้องกับอนันต์

ตัวอย่างที่ 1.17 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{(x-2)^4}$

วิธีทำ

เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{1}{(x-2)^4} = \infty$

และ $\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{1}{(x-2)^4} = \infty$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{(x-2)^4} = \infty$

ลิมิตที่เกี่ยวข้องกับอนันต์

ตัวอย่างที่ 1.18 กำหนดให้ $f(x) = x$ และ $g(x) = \dfrac{1}{x}$ จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\cdot g(x)$

วิธีทำ พิจารณา $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x = 0$

และ $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = \infty$

จะได้ว่า $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\cdot g(x)$ อยู่ในรูปแบบยังไม่กำหนด $0\cdot\infty$

แต่
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} f(x)\cdot g(x) &= \lim_{x\to 0^+} x\cdot\frac{1}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}\\ &= \lim_{x\to 0^+} 1\\ &= 1\end{aligned}$$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\cdot g(x) = 1$

ลิมิตที่เกี่ยวข้องกับอนันต์

ตัวอย่าง 1.19 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{1}{x^2-1}$

วิธีทำ

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1^-}\left[\frac{1}{x-1\quad x+1}\right]$$

$$= \lim_{x\to 1^-}\frac{1}{x-1}\cdot\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{x+1}$$

และ $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{1}{x-1} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{1}{x^2-1} = -\infty$

ลิมิตที่เกี่ยวข้องกับอนันต์

3. ลิมิตค่าอนันต์ที่จุดอนันต์

ฟังก์ชัน f ไม่มีลิมิตที่จุดอนันต์ โดยที่เมื่อ $x \to \infty$ หรือ $x \to -\infty$ แล้ว $f(x) \to \infty$ หรือ $f(x) \to -\infty$ มี 4 ลักษณะคือ

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \quad , \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty \quad , \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

ทฤษฎีบทที่ 1.4 กำหนดให้ $n \in \mathbb{Z}^+$ จะได้ว่า

1. $\lim_{x\to\infty} x^n = \infty$

2. $\lim_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} \infty & , \; n = 2,4,6,\ldots \\ -\infty & , \; n = 1,3,5,\ldots \end{cases}$

ลิมิตที่เกี่ยวข้องกับอนันต์

ตัวอย่างที่ 1.20 จงหาค่าของลิมิตต่อไปนี้

1. $\lim_{x \to \infty} x = \infty$

2. $\lim_{x \to -\infty} x^2 = \infty$

3. $\lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$

4. $\lim_{x \to -\infty} x^4 = \infty$

5. $\lim_{x \to \infty} x^5 = \infty$

ลิมิตที่เกี่ยวข้องกับอนันต์

ตัวอย่างที่ 1.21 จงหาค่าของ $\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{x^3}$

วิธีทำ

พิจารณา $\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{x^3} = \lim_{x\to-\infty}2\cdot\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^3}$

และ $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^3} = 0$, $\lim_{x\to\infty}2 = 2$

ดังนั้น $\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{x^3} = 0$

ลิมิตที่เกี่ยวข้องกับอนันต์

ตัวอย่างที่ 1.22 ¸ °ฆเ©ญูจ $\lim_{x\to\infty}(3x^2+x+1)$

วิธีทำ ½ฦ¶Ðญ

$$\lim_{x\to\infty}(3x^2+x+1) = \lim_{x\to\infty}3x^2 + \lim_{x\to\infty}x + \lim_{x\to\infty}1$$

ธาต $\lim_{x\to\infty}3x^2 = \infty \;,\; \lim_{x\to\infty}x = \infty \;,\; \lim_{x\to\infty}1 = 1$

ดังนั้น

$$\lim_{x\to\infty}(3x^2+x+1) = \infty$$

ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน (Continuity of Function)

บทนิยามที่ 1.2 กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของจำนวนจริง จะกล่าวว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x=a$ หรือกล่าวว่า f ต่อเนื่องที่ $x=a$ ก็ต่อเมื่อ

1. $f(a)$ [illegible]

2. $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ [illegible] $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$

3. $f(a) = \lim\limits_{x\to a} f(x)$

หมายเหตุ : [illegible] ทั้ง 3 ข้อ [illegible]

ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน (Continuity of Function)

ตัวอย่างที่ 1.23 กำหนดฟังก์ชัน $f(x) = \dfrac{x^2-9}{x^2-5x+6}$ จงพิจารณาว่า $f(x)$ ต่อเนื่องที่ $x = 0$ หรือไม่

วิธีทำ

1. $f(0) = \dfrac{0-9}{0-0+6} = -\dfrac{9}{6} = -\dfrac{3}{2}$ $\qquad f$ [illegible]

2. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2-9}{x^2-5x+6} = \frac{0-9}{0-0+6} = -\frac{9}{6} = -\frac{3}{2}$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2-9}{x^2-5x+6} = \frac{0-9}{0-0+6} = -\frac{9}{6} = -\frac{3}{2}$$

[illegible] $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = -\frac{3}{2}$

3. [illegible] $f(0) = \displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = -\frac{3}{2}$

ดังนั้น [illegible] $f(x)$ [illegible] 0 [illegible]

ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน (Continuity of Function)

ตัวอย่างที่ 1.24 กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} x^3 , & x \le 2 \\ 4-2x , & x > 2 \end{cases}$ $f(x)$

$x = 2$

วิธีทำ $f(2) = 2^3 = 8$

2. $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} 4-2x = 4-2(2) = 4-4 = 0$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} x^3 = 2^3 = 8$

$\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

3. $f(2) \neq \lim\limits_{x\to 2} f(x)$

ดังนั้น $f(x)$ $x = 2$

ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน (Continuity of Function)

ตัวอย่างที่ 1.25 จงพิจารณาว่า $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & , x \neq 2 \\ 2 & , x = 2 \end{cases}$ มีความต่อเนื่องของ $f(x)$ ที่จุด $x = 2$ หรือไม่

วิธีทำ 1. $f(2) = 2$

2. $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \dfrac{x^2-4}{x-2} = \dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} x+2 = 4$$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} x+2 = 4$$

3. $f(2) \neq \lim_{x\to 2} f(x)$

ดังนั้น $f(x)$ ไม่ต่อเนื่องที่ $x = 2$

ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน (Continuity of Function)

ตัวอย่างที่ 1.26 ถ้า $f(x) = \begin{cases} x^2 & , \; x \ge 3 \\ 2x+3 & , \; x < 3 \end{cases}$ จงพิจารณาว่า $f(x)$ ต่อเนื่องที่ $x = 3$ หรือไม่

วิธีทำ 1. $f(3) = x^2 = 3^2 = 9$ หาค่าได้

2. $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} x^2 = 3^2 = 9$

$\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} 2x+3 = 2(3)+3 = 9$

ดังนั้น $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 9$

3. จะได้ว่า $f(3) = \lim\limits_{x \to 3} f(x) = 9$

ดังนั้น $f(x)$ ต่อเนื่องที่ $x = 3$

แบบฝึกหัดบทที่ 1

1. จงหาค่าของลิมิตที่กำหนดให้ต่อไปนี้

1.1 $\lim\limits_{x \to 5} x^2 + 3x - 1$

1.2 $\lim\limits_{x \to -2} 3x^2 + 2x - 5$

1.3 $\lim\limits_{x \to -5} \sqrt{x^2 + 5}$

1.4 $\lim\limits_{x \to -4} \dfrac{x^2 - 16}{x + 4}$

1.5 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{|x-1|}{x-1}$

1.6 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{|x-1|\ x^2 - 2x + 3}{x^2 - 1}$

2. จงหาค่าลิมิตของ $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ ที่ซึ่ง

$$f(x) = \begin{cases} 4x + 2 & , \quad x < 1 \\ 3x^2 & , \quad 1 \leq x < 5 \\ 4 & , \quad x \geq 5 \end{cases}$$

แบบฝึกหัดบทที่ 1

3. จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้

3.1 $\lim_{x\to 2} f(x)$ ที่ซึ่ง $f(x) = \begin{cases} x^2 & , \quad -1 < x < 2 \\ 2x+1 & , \quad 2 \le x < 3 \end{cases}$

3.2 $\lim_{x\to -1} f(x)$ ที่ซึ่ง $f(x) = \begin{cases} x+2 & , \quad x < -1 \\ x^2 - 3 & , \quad x \ge -1 \end{cases}$

3.3 $\lim_{x\to 3} x^2 \dfrac{|x-3|}{x-3}$

3.4 $\lim_{x\to -5} f(x)$ และ $\lim_{x\to 5} f(x)$ ที่ซึ่ง $f(x) = \begin{cases} x-5 & , \quad |x| > 5 \\ 0 & , \quad |x| = 5 \\ \sqrt{25-x^2} & , \quad |x| < 5 \end{cases}$

แบบฝึกหัดบทที่ 1

4. จงหาค่าลิมิต [illegible]

4.1 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x+7}{3x+8}$

4.2 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{|x|}$

4.3 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{x+1}$

4.4 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-2x^3-2x+3}{3x^3+3x^2-5x}$

4.5 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{3x^5+2x+5}}{2x^3-6}$

4.6 $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{2}{x}$

4.7 $\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{1}{x+2}$

4.8 $\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{x^2+7}{x-2}$

4.9 $\lim\limits_{x\to-\infty}|x|$

4.10 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-6x}{4x-8}$

4.11 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+3}{x^3+5x+1}$

4.12 $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-2x-1}$

แบบฝึกหัดบทที่ 1

5. จงพิจารณาว่าฟังก์ชัน $f(x)$ ต่อไปนี้ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องหรือไม่

5.1 กำหนด¼l ¸ณี $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3} & , \quad x \neq 3 \\ 4 & , \quad x = 3 \end{cases}$ Ýฉัฬ ฟ้าฐ $x = 3$ ฆฬฒปỠ

5.2 กำหนด¼l ¸ณี $f(x)$ Ýฉัฬ ฟ้าฐ $x = 3$ ธาฆ $x = 5$ ฆฬฒปỠฬ

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & , \quad x < 3 \\ 3 & , \quad 3 \le x < 5 \\ x-2 & , \quad x \ge 5 \end{cases}$$

แบบฝึกหัดบทที่ 1

5.3 [illegible] $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & , \quad x < 2 \\ 5 & , \quad x = 2 \\ x + 2 & , \quad x > 2 \end{cases}$ [illegible] $x = 2$ [illegible]

5.4 [illegible] $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 2 & , \quad x < 4 \\ x & , \quad x = 4 \\ x + 5 & , \quad x > 4 \end{cases}$ [illegible] $x = 4$ [illegible]