เอกสารประกอบการสอน

แคลคูลัส 1

วชิรารักษ์ โอรสรัมย์

คณะวิทยาศาสตร์

มหาวิทยาลัยราชภัฏบุรีรัมย์

2563

เอกสารประกอบการสอน

แคลคูลัส 1

วชิรารักษ์ โอรสรัมย์

(วท.ม. คณิตศาสตร์ศึกษา)

คณะวิทยาศาสตร์

มหาวิทยาลัยราชภัฏบุรีรัมย์

2563

คำนำ

เอกสารประกอบการสอนวิชาแคลคูลัสผู้เขียนได้เรียบเรียงขึ้นเพื่อใช้ประกอบการสอนในรายวิชาแคลคูลัส 1 ซึ่งหัวข้อเรื่องได้ยึดหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต(วทบ.4ปี) ของสาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏบุรีรัมย์ (หลักสูตรปรับปรุง พ.ศ. 2558) เป็นหมวดวิชาแกนของคณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏบุรีรัมย์ ซึ่งเนื้อหาในเล่มนี้ประกอบไปด้วย ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน อนุพันธ์ของฟังก์ชัน การประยุกต์อนุพันธ์ ฟังก์ชั้นหลายตัวแปร และ อนุพันธ์ย่อย

ข้าพเจ้าขอขอบพระคุณท่านผู้เรียบเรียงหนังสือและเอกสารที่ปรากฏอยู่ในเอกสารอ้างอิงเป็นอย่างสูง ข้าพเจ้าหวังเป็นอย่างยิ่งว่าเอกสารประกอบการสอนวิชาแคลคูลัส 1 เล่มนี้ คงเป็นประโยชน์สำหรับนักศึกษา และผู้สนใจทั่วไป

วชิรารักษ์ โอรสรัมย์
มิถุนายน 2563

สารบัญ

สารบัญ(ต่อ)

สารบัญรูปภาพ

ภาพประกอบ **หน้า**

สารบัญตาราง

ตาราง **หน้า**

บทที่ 1
ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

เนื้อหาส่วนใหญ่ในรายวิชากล่าวได้ว่า แนวคิดหลักประการหนึ่งของแคลคูลัสได้แก่ การศึกษาวิเคราะห์เกี่ยวกับการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชัน เช่น อนุพันธ์ที่ผู้เรียนจะได้ศึกษาในบทที่ 3 ซึ่งคือ อัตราการเปลี่ยน แปลงของฟังก์ชันที่จุดใดจุดหนึ่งในขณะที่ตัวแปรต้นที่จุดนั้นเปลี่ยนไปน้อยมาก ๆ นั่นเอง นอกจากนี้ปริพันธ์จำกัดเขต ซึ่งผู้เรียนจะได้ศึกษาในบทที่ 5 จะเป็นผลรวมของค่าของฟังก์ชันในส่วนย่อย ๆ จำนวนมากมายนับไม่ถ้วน แล้วได้ผลลัพธ์เป็นผลรวมของฟังก์ชันในส่วนใหญ่ ส่วนหนึ่งจะเห็นได้ว่าทั้งอนุพันธ์และปริพันธ์จำกัดเขต ล้วนเป็นแนวคิดที่เกี่ยวข้องกับค่าของฟังก์ชันและปริมาณที่น้อยมาก ๆ หรือปริมาณที่ใหญ่มาก ๆ ดังนั้นเพื่อให้สามารถวิเคราะห์ค่าของฟังก์ชันที่เกี่ยวข้องกับปริมาณดังกล่าวได้อย่างถี่ถ้วนและชัดเจนนักคณิตศาสตร์จึงพัฒนาแนวคิดเกี่ยวกับลิมิตขึ้นมา อาจกล่าวได้ว่า หากปราศจากแนวคิดเรื่องลิมิตแล้ว วิชาแคลคูลัสคงไม่อาจเกิดขึ้นได้ดังนั้นเนื้อหาที่จะได้ศึกษาในบทนี้จะประกอบด้วยบทนิยามของลิมิตซึ่งจะแสดงให้รู้ว่าลิมิตนั้นคืออะไรพร้อมทั้งแสดงการเขียนลิมิต ลิมิตทางซ้ายและลิมิตทางขวา ตลอดจนทฤษฎีบทต่างๆ ที่เกี่ยวข้องกับลิมิต เพื่อจะได้หาค่าลิมิตได้อย่างรวดเร็วและถูกต้อง และบางครั้งการหาค่าลิมิตของฟังก์ชันนั้นก็ไม่จำเป็นต้องเป็นจำนวนจริงเสมอไปดังนั้นจึงจำเป็นที่ต้องศึกษาเรื่องลิมิตที่เกี่ยวข้องกับอนันต์ด้วย

1.1 บทนิยามของลิมิต

ลิมิต ถ้าแปรตามพจนานุกรมศัพท์คณิตศาสตร์ฉบับราชบัณฑิตยสถานศัพท์แปลว่า *ขีดจำกัด* เมื่อใช้ศัพท์เฉพาะ ในทางคณิตศาสตร์แล้วนั้นจะทำความเข้าใจยากมากพอสมควร ดังนั้นในตอนแรกนี้จะได้ให้ตัวอย่างเพื่อเป็นแนวคิดกับผู้เรียนว่า เมื่อไรจะใช้คำว่าลิมิต และจะหาค่าลิมิตนั้นโดยคร่าว ๆ ได้อย่างไร จากนั้นจึงจะนำเข้าสู่ความหมายที่แท้จริงของลิมิตต่อไป (ราชบัณฑิตยสถาน, 2553 : 351)

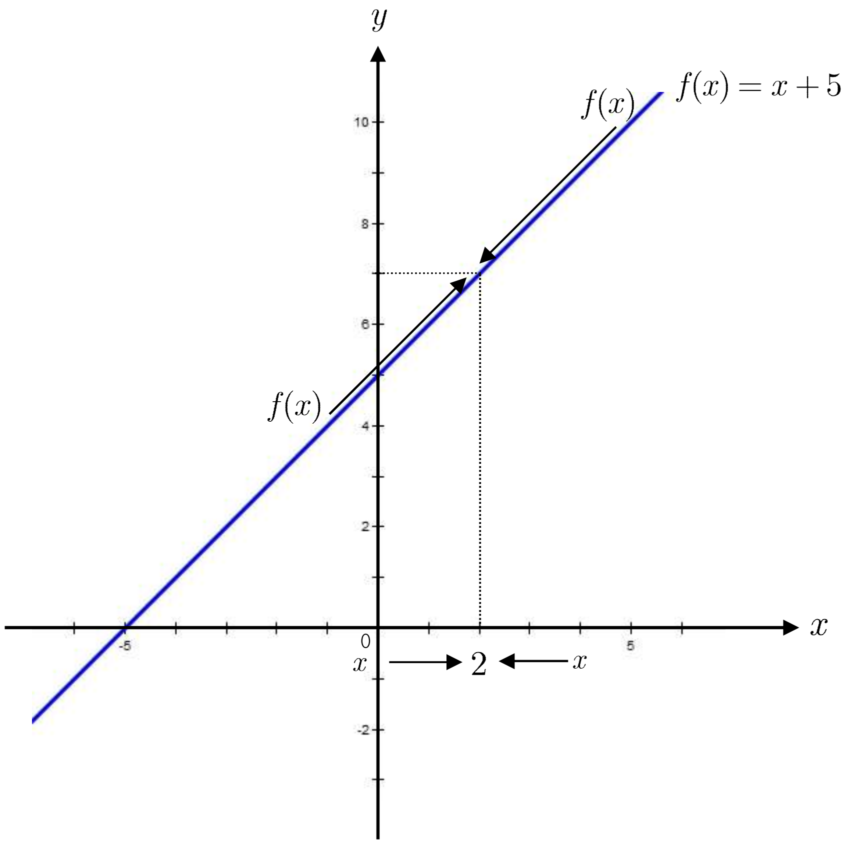
ตัวอย่างเช่น

รถยนต์คันหนึ่งวิ่งจากเมือง ก ไปยังเมือง ข ซึ่งห่างกัน 50 กิโลเมตร ใช้เวลา 30 นาที ถ้าให้ s แทนระยะทางที่รถคันนี้วิ่งได้ หลังจากเวลาผ่านไป t นาที จะเห็นว่าเมื่อเวลา t เข้าใกล้ 30 นาที (แต่ยังไม่ถึง 30 นาที) นั้นระยะทาง s ที่ได้จะเพิ่มขึ้นและมีค่าเข้าใกล้ 50 กิโลเมตร มากขึ้นลักษณะเช่นนี้

จะกล่าวได้ว่า “ลิมิตของระยะทาง (s) ” ที่รถยนต์วิ่งได้เมื่อเวลา (t) เข้าใกล้ 30 นาที เท่ากับ 50 กิโลเมตร และเขียนข้อความนี้ด้วย $\lim_{t \to 30} s = 50$

ในการศึกษาเกี่ยวกับลิมิตของฟังก์ชันมีข้อสังเกตว่าค่าลิมิตของฟังก์ชันนั้นแตกต่างกับค่าของฟังก์ชันเช่นกำหนดให้ $f(x) = x + 5$ ค่าของฟังก์ชันที่ $x = 2$ คือการแทนค่า $x = 2$ ลงในสมการที่กำหนดให้หรือค่าของ $f(2)$ นั่นเองนั่นคือ $f(2) = 2 + 5 = 7$

แต่สำหรับลิมิตของฟังก์ชันหมายถึงเมื่อ x เข้าใกล้ค่า ๆ หนึ่งแล้ว $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ค่าคงตัวค่าหนึ่งค่านั่นคือลิมิตของฟังก์ชัน $f(x)$ เช่นจาก $f(x) = x + 5$ เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 2 ค่าลิมิตของฟังก์ชันเขียนแทนด้วย $\lim_{x \to 2} f(x)$ หรือ $\lim_{x \to 2}(x + 5)$ ดังรูป



ภาพประกอบ 1.1 กราฟของฟังก์ชัน $f(x) = x + 5$

การพิจารณากรณีที่ x มีค่าเข้าใกล้ 2 จะพบว่ามีได้สองกรณีคือ กรณีที่ x เข้าใกล้ 2 ทางที่มากกว่า 2 (ทางขวามือ) และกรณีที่ x เข้าใกล้ 2 ทางน้อยกว่า 2 (ทางซ้ายมือ) ซึ่งจะแสดงลักษณะการเข้าใกล้ค่าคงตัวค่าหนึ่งของ $f(x)$ ดังตารางต่อไปนี้ (พัฒนา สีมากุล, 2539 : 3)

ตาราง 1.1 แสดงกรณี x มีค่าเข้าใกล้ 2 ทางซ้าย ($x < 2$ และ x เข้าใกล้ 2)

x	$f(x) = x + 5$
1.5	6.5
1.9	6.9
1.99	6.99
1.999	6.999
1.9999	6.9999
1.99999	6.99999

ตาราง 1.2 แสดงกรณี x มีค่าเข้าใกล้ 2 ทางขวา ($x > 2$ และ x เข้าใกล้ 2)

x	$f(x) = x + 5$
2.5	7.5
2.1	7.1
2.01	7.01
2.001	7.001
2.0001	7.0001
2.00001	7.00001

ตัวอย่าง 1.1 กำหนดให้ $f(x) = x + 1$ จงหาค่าของ $\lim_{x \to 3} f(x)$

วิธีทำ แยกพิจารณาเป็นสองกรณีดังต่อไปนี้

กรณีที่ 1 x มีค่าเข้าใกล้ 3 ทางซ้าย

x	$f(x) = x + 1$
2.5	3.5
2.9	3.9

กรณีที่ 2 x มีค่าเข้าใกล้ 3 ทางขวา

x	$f(x) = x + 1$
3.5	4.5
3.1	4.1

2.99	3.99
2.999	3.999
2.9999	3.9999
2.9999	3.99999

3.01	4.01
3.001	4.001
3.0001	4.0001
3.00001	4.00001

จากตารางจะได้ว่า

เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 3 ทางซ้ายแล้ว $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ 4

เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 3 ทางขวาแล้ว $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ 4

ดังนั้น $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 4$

ตัวอย่าง 1.2 กำหนดกำหนดให้ $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x - 1}$ จงหาค่าของ $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

วิธีทำ สังเกตว่า $f(x)$ ไม่นิยามเมื่อ $x = 1$ พิจารณา x มีค่าเข้าใกล้ 1

แยกพิจารณาเป็นสองกรณีดังต่อไปนี้

กรณีที่ 1 x มีค่าเข้าใกล้ 1 ทางซ้าย

x	$f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x - 1}$
0.9	2.9
0.99	2.99
0.999	2.999
0.9999	2.9999
0.99999	2.99999
0.999999	2.999999

กรณีที่ 2 x มีค่าเข้าใกล้ 1 ทางขวา

x	$f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x - 1}$
1.1	3.1
1.01	3.01
1.001	3.001
1.0001	3.0001
1.00001	3.00001
1.000001	3.000001

จากตารางจะได้ว่า

เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 1 ทางซ้ายแล้ว $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ 3

เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 1 ทางขวาแล้ว $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ 3

ดังนั้น $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 3$

การหาค่าของ $\lim_{x\to a} f(x)$ เป็นการดูพฤติกรรมของ $f(x)$ เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ a แต่ $x \neq a$ ในการหาลิมิตเมื่อ x เข้าใกล้ a นั้นไม่ว่าฟังก์ชัน $f(x)$ จะมีค่าที่ $x = a$ หรือไม่ก็ตามสิ่งที่สนใจก็คือค่าของฟังก์ชัน $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ a เป็นอย่างไรเท่านั้น (กมล เอกไทยเจริญ, 2544 : 16)

ตัวอย่าง 1.3 กำหนดให้ $f\left(x\right) = \dfrac{x}{\left|x\right|}$ จงหาค่าของ $\lim_{x\to 0} f\left(x\right)$

วิธีทำ แยกพิจารณาเป็นสองกรณีดังต่อไปนี้

กรณีที่ 1 x มีค่าเข้าใกล้ 0 ทางซ้าย

x	$f\left(x\right) = \dfrac{x}{\left\lvert x\right\rvert}$
-0.1	-1
-0.01	-1
-0.001	-1
-0.0001	-1
-0.00001	-1
-0.000001	-1

กรณีที่2 x มีค่าเข้าใกล้ 0 ทางขวา

x	$f\left(x\right) = \dfrac{x}{\left\lvert x\right\rvert}$
0.1	1
0.01	1
0.001	1
0.0001	1
0.00001	1
0.000001	1

จากตารางจะได้ว่า

เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 0 ทางซ้ายแล้ว $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ -1

เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 0 ทางขวาแล้ว $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ 1

จะเห็นว่าเมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 0 (โดยที่ $x \neq 0$) แล้ว $f(x)$ จะมีค่าเข้าใกล้ค่าคงตัวสองค่า คือ 1 และ -1 ในกรณีเช่นนี้กล่าวได้ว่าฟังก์ชัน f นี้ไม่มีลิมิตที่จุด $x = 0$ หรือ $\lim_{x\to 0} f(x)$ ไม่มี

ตัวอย่าง 1.4 กำหนดให้ $f(x)=\dfrac{1}{x}$ จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

วิธีทำ แยกพิจารณาเป็นสองกรณีดังต่อไปนี้

กรณีที่ 1 x มีค่าเข้าใกล้ 0 ทางซ้าย

x	$f(x)=\dfrac{1}{x}$
-0.1	-10
-0.01	-100
-0.001	-1000
-0.0001	-10000
-0.00001	-100000
-0.000001	-1000000

กรณีที่2 x มีค่าเข้าใกล้ 0 ทางขวา

x	$f(x)=\dfrac{1}{x}$
0.1	10
0.01	100
0.001	1000
0.0001	10000
0.00001	100000
0.000001	1000000

จาก

ตารางจะได้ว่า

เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 0 ทางซ้ายแล้ว $f(x)$ มีค่าลดลงอย่างไม่มีขอบเขต

เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 0 ทางขวาแล้ว $f(x)$ มีค่าเพิ่มขึ้นอย่างไม่มีขอบเขต

จะเห็นว่าเมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 0 (โดยที่ $x \neq 0$) แล้ว $f(x)$ ไม่เข้าใกล้ค่าคงตัวใด ๆ เลย ลักษณะนี้กล่าวว่า f นี้ไม่มีลิมิตที่จุด $x=0$ หรือ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}$ ไม่มี

จากตัวอย่างที่ได้กล่าวมาทั้งหมดนั้น จะเห็นว่าในการหาค่า $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ นั้นเราพิจารณาค่า $f(x)$ สำหรับ x ที่อยู่ใกล้ ๆ a ทั้งทางซ้าย$(x<a)$ และทางขวา$(x>a)$ ของ a แต่ถ้าพิจารณาค่า $f(x)$ เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ a ทั้งทางซ้ายและทางขวาเพียงทางเดียว แล้ว $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ค่าคงตัวเพียงค่าเดียวจะกล่าวว่าฟังก์ชัน f มีลิมิตทางซ้ายหรือทางขวาที่จุด $x=a$ ตามลำดับ กล่าวคือ

เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ a โดยที่ $x<a$ แล้ว $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ค่าคงตัว L โดยที่ L เป็นจำนวนจริงจะกล่าวได้ว่า ลิมิตของ $f(x)$ เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ a ทั้งทางซ้ายเท่ากับ L เขียนแทนด้วย $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=L$

ในทำนองเดียวกันเมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ a โดยที่ $x > a$ แล้ว $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ค่าคงตัว M โดยที่ M เป็นจำนวนจริงจะกล่าวได้ว่า ลิมิตของ $f(x)$ เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ a ทางขวาเท่ากับ M เมื่อเขียนแทนด้วย $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = R$ (อุษณีย์ ลีรวัฒน์, 2552 : 21).

ให้สังเกตว่า $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ ก็ต่อเมื่อ $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$

ในตัวอย่าง 1.1 จะเห็นว่า $\lim\limits_{x \to 3}(x+1) = 4$ และ $\lim\limits_{x \to 3^-}(x+1) = 4 = \lim\limits_{x \to 3^+}(x+1)$

ในตัวอย่าง 1.2 จะเห็นว่า $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + x - 2}{x - 1} = 3$ และ

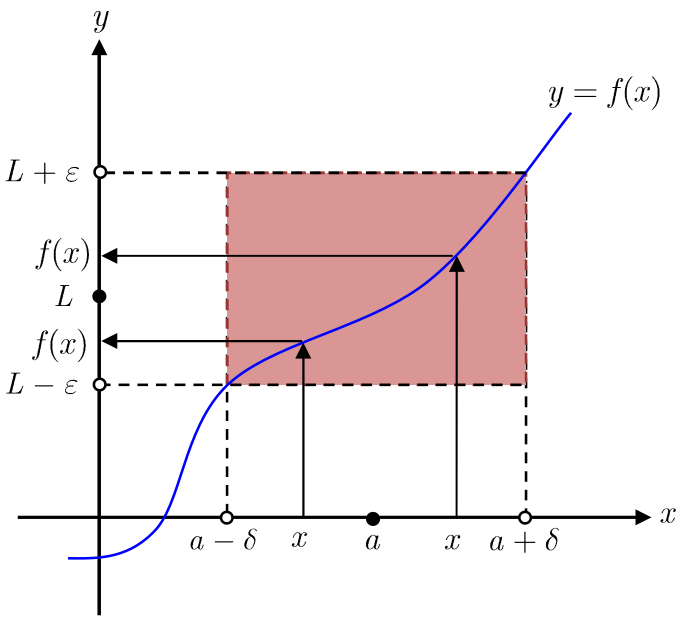
$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = 3 = \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}$$

ในตัวอย่าง 1.3 จะเห็นว่า $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{|x|}$ ไม่มี แต่ $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x}{|x|} = -1$ และ $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x}{|x|} = 1$

และในตัวอย่าง 1.4 จะเห็นว่า $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x}$ ไม่มี และ $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x}$ ไม่มี และ $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x}$ ไม่มี

จากที่กล่าวมาทั้งหมดผู้เรียนได้ทราบความหมายของ $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ โดยที่ a และ L เป็นจำนวนจริง อย่างคร่าว ๆ แล้วว่า สำหรับ $x \in D_f$ ซึ่ง $x \neq a$ ถ้า x เข้าใกล้ a แล้ว $f(x)$ จะเข้าใกล้ L แต่คำว่าเข้าใกล้นั้นยังไม่ชัดเจนว่าเข้าใกล้อย่างไรเพียงใด ดังนั้นต่อไปนี้จะได้กำหนดความหมายของลิมิตของฟังก์ชันให้ถูกต้องชัดเจนเพื่อใช้อ้างอิงหรือนำไปพิสูจน์ลิมิตของฟังก์ชันต่อไป

จากการสังเกตตัวอย่างที่ผ่านมานั้น ถ้า $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ แล้วจะต้องมีลักษณะที่สำคัญต่อไปนี้เสมอ คือ สำหรับแต่ละช่วงเปิดบนแกน y ที่มี L เป็นจุดกึ่งกลางรัศมี $\varepsilon > 0$ และเขียนแทนด้วย $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ ที่กำหนดให้ จะต้องมีช่วงเปิดบนแกน x ที่มี a เป็นจุดกึ่งกลางรัศมี $\delta > 0$ เขียนแทนด้วย $(a - \delta, a + \delta)$ อย่างน้อยหนึ่งช่วงเปิดซึ่งมีคุณสมบัติว่า ทุก ๆ ค่า $\varepsilon > 0$ (ไม่ว่าจะมากหรือน้อยเพียงใดก็ตาม) ที่กำหนดให้ จะต้องหาค่า $\delta > 0$ ได้เสมอซึ่งมีคุณสมบิตว่าถ้า $x \in D_f$ และ $0 < |x - a| < \delta$ แล้ว $|f(x) - L| < \varepsilon$ พิจารณารูปด้านล่างประกอบ (Anton, Howard, 1995 : 81-83)



ภาพประกอบ 1.2 แสดง $\varepsilon > 0$ และ $\delta > 0$

ที่มา : สมเกียรติ พาน้อย. 2543 : 8

เพื่อให้เห็นชัดยิ่งกว่านั้นให้ผู้เรียนพิจารณาตัวอย่าง 1.1 ประกอบดังนี้จากตัวอย่าง 1.1 ได้ว่า $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = \lim\limits_{x\to 3}(x+1) = 4$ ในที่นี้ $a = 3$ และ $L = 4$

โดยลองกำหนดให้ $\varepsilon = 1$ จะหาได้ว่ามี $\delta = 1$ (หรือ $0 < \delta < 1$ ก็ได้)
ซึ่งถ้า $0 < |x-3| < 1 = \delta$ แล้ว $|f(x) - L| = |(x+1) - 4| = |x-3| < 1 = \varepsilon$

ลองกำหนดให้ $\varepsilon = 0.1$ จะหาได้ว่ามี $\delta = 0.1$ (หรือ $0 < \delta < 0.1$ ก็ได้)
ซึ่งถ้า $0 < |x-3| < 0.1 = \delta$ แล้ว $|f(x) - L| = |(x+1) - 4| = |x-3| < 0.1 = \varepsilon$

ดังนั้นถ้าสำหรับทุก $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta = \varepsilon$ (หรือ $0 < \delta < \varepsilon$ ก็ได้)
ซึ่งถ้า $0 < |x-3| < \delta = \varepsilon$ แล้ว $|(x+1) - 4| < \delta = \varepsilon$

หรือพิจารณาจาก $\lim\limits_{x\to 2}(3x-1)=5$ ซึ่งมี $f(x)=2x-1, a=2, L=5$ จะเห็นว่า ให้ $\varepsilon=3$ จะหาได้ว่ามี $\delta=1$ ซึ่งถ้า $0<\left|x-2\right|<\delta=1$

แล้ว $\left|f(x)-L\right|=\left|(3x-1)-5\right|=\left|3x-6\right|=3\left|x-2\right|<3\delta=3(1)=3=\varepsilon$

ให้ $\varepsilon=\dfrac{1}{3}$ จะหาได้ว่ามี $\delta=1$ ซึ่งถ้า $0<\left|x-2\right|<\delta=\dfrac{1}{9}$

แล้ว $\left|f(x)-L\right|=\left|(3x-1)-5\right|=\left|3x-6\right|=3\left|x-2\right|<3\delta=3\left(\dfrac{1}{9}\right)=\dfrac{1}{3}=\varepsilon$

ให้ $\varepsilon=\dfrac{1}{100}$ จะหาได้ว่ามี $\delta=1$ ซึ่งถ้า $0<\left|x-2\right|<\delta=\dfrac{1}{300}$

แล้ว $\left|f(x)-L\right|=\left|(3x-1)-5\right|=\left|3x-6\right|=3\left|x-2\right|<3\delta=3\left(\dfrac{1}{300}\right)=\dfrac{1}{100}=\varepsilon$

ในกรณีทั่วไป ถ้าให้ $\varepsilon>0$ จะมี $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$ ซึ่งถ้า $0<\left|x-2\right|<\delta=\dfrac{\varepsilon}{3}$

แล้ว $\left|f(x)-L\right|=3\left|x-2\right|<3\delta=3\left(\dfrac{\varepsilon}{3}\right)=\varepsilon$

จากลักษณะดังกล่าวมาข้างต้นนั้นจึงกำหนดบทนิยามของลิมิตของฟังก์ชันไว้ดังนี้ (เฟื่องฟ้า ศรีจันทพงศ์ และคณะ, 2553 : 13)

บทนิยาม 1.1

กำหนดให้ $y=f(x)$ เป็นฟังก์ชันค่าจริงของตัวแปรจริง และให้ a และ L เป็นค่าคงตัวที่เป็นจำนวนจริง จะกล่าวว่า **ลิมิตของ** $f(x)$ **เมื่อ** x **มีค่าเข้าใกล้** a **เท่ากับ** L (เขียนแทนด้วย $\lim\limits_{x\to a}f(x)=L$) ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละ $\varepsilon>0$ ที่กำหนดให้จะต้องมี $\delta>0$ ซึ่งมีคุณสมบัติว่า ถ้า $x\in D_f$ และ $0<\left|x-a\right|<\delta$ แล้ว $\left|f(x)-L\right|<\varepsilon$ แล้วจะกล่าวว่า **ฟังก์ชัน** f **มีลิมิตที่จุด** $x=a$

ในทำนองเดียวกัน ถ้าพิจารณาเฉพาะเมื่อ $x<a$ หรือ $x>a$ อย่างใดอย่างหนึ่งจะได้นิยามของลิมิตทางซ้ายและลิมิตทางขวาดังนี้ (เลิศ สิทธิโกศล, 2541 : 28).

บทนิยาม 1.2

กำหนดให้ $y=f(x)$ เป็นฟังก์ชันค่าจริงของตัวแปรจริง และให้ a, M และ L เป็นค่าคงตัวที่เป็นจำนวนจริงจะกล่าวว่า

ลิมิตของ $f(x)$ เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ a ทางซ้ายเท่ากับ L (เขียนแทนด้วย $\lim_{x\to a^-} f(x)=L$) ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละ $\varepsilon>0$ ที่กำหนดให้ จะต้องมี $\delta>0$ ซึ่งมีคุณสมบัติว่า ถ้า $x\in D_f$ และ $a-\delta<x<a$ แล้ว $\left|f(x)-L\right|<\varepsilon$ ในกรณีที่มี $L\in R$ ซึ่ง $\lim_{x\to a^-} f(x)=L$ เราเรียก L ว่าเป็น**ลิมิตทางซ้ายของ f ที่** $x=a$

ลิมิตของ $f(x)$ เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ a ทางขวาเท่ากับ M (เขียนแทนด้วย $\lim_{x\to a^+} f(x)=M$) ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละ $\varepsilon>0$ ที่กำหนดให้ จะต้องมี $\delta>0$ ซึ่งมีคุณสมบัติว่า ถ้า $x\in D_f$ และ $a<x<a+\delta$ แล้ว $\left|f(x)-L\right|<\varepsilon$ ในกรณีที่มี $M\in R$ ซึ่ง $\lim_{x\to a^+} f(x)=M$ เราเรียก M ว่าเป็น**ลิมิตทางขวาของ f ที่** $x=a$

จากนิยามของลิมิต สามารถแสดงได้ว่า ทฤษฎีบท 1.1 เป็นจริง

ทฤษฎีบท 1.1

ให้ $y=f(x)$ เป็นฟังก์ชันค่าจริงของตัวแปรจริงและให้ a และ L เป็นจำนวนจริงจะได้ว่า $\lim_{x\to a} f\left(x\right)=L$ ก็ต่อเมื่อ $\lim_{x\to a^-} f\left(x\right)=\lim_{x\to a^+} f\left(x\right)=L$

เพื่อความเข้าใจในบทนิยามของลิมิตของฟังก์ชันให้มากยิ่งขึ้น ให้ผู้เรียนสังเกตวิธีการหา $\delta>0$ ที่สอดคล้องกับ $\varepsilon>0$ ตามนิยามของลิมิตในตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 1.5 กำหนดให้ $\lim_{x\to 3}\left(4x-7\right)=5$ และให้ $\varepsilon = 0.4$ จงหา $\delta > 0$ ซึ่งสอดคล้องกับนิยามของลิมิตนี้

วิธีทำ ให้ $\lim_{x\to 3}\left(4x-7\right)=5$ โดยนิยามของลิมิต

สำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$ ที่กำหนดให้ จะมี $\delta > 0$ ซึ่งถ้า $0<\left|x-3\right|<\delta$

แล้ว $\left|\left(4x-7\right)-5\right|<\varepsilon$

ในที่นี้ $\varepsilon = 0.4$ จะได้ว่ามี $\delta = 0.1$ ซึ่งมีคุณสมบัติว่า ถ้า $0<\left|x-3\right|<\delta$ แล้วทำให้

$$\begin{aligned}\left|\left(4x-7\right)-5\right| &= \left|4x-12\right| \\ &= 4\left|x-3\right| \\ &< 4(0.1) \\ &= 0.4 \\ &= \varepsilon\end{aligned}$$

ดังนั้น $\delta = 0.1$ เป็นค่าที่สอดคล้องกับนิยามของลิมิตนี้เมื่อ $\varepsilon = 0.4$

ข้อสังเกต 1.1

วิธีหาค่า $\delta = 0.1$ ในตัวอย่าง 1.5 ที่ผ่านมาอาจทำได้โดยการแยกตัวประกอบ $\left|x-3\right|$ ออกจาก $\left|4x-12\right|$ แล้วพิจารณาว่า $\left|x-3\right|$ ควรจะน้อยกว่าจำนวนจริงบวกค่าใดจึงจะทำให้ $\left|4x-12\right|$ น้อยกว่า $\varepsilon = 0.4$ ดังนี้ $\left|\left(4x-7\right)-5\right|=\left|4x-12\right|=4\left|x-3\right|$ เนื่องจากต้องการให้ $4\left|x-3\right|<0.4$ ดังนั้น $\left|x-3\right|<\dfrac{0.4}{4}=0.1$ เราจึงเลือกใช้ค่า $\delta = 0.1$

ตัวอย่าง 1.6 กำหนดให้ $\lim_{x\to 2}\left(3x+1\right)=7$ และ $\varepsilon > 0$ จงหา $\delta > 0$ ซึ่งสอดคล้องกับนิยามของลิมิตนี้

วิธีทำ ให้ $\lim_{x\to 2}\left(3x+1\right)=7$ โดยนิยามของลิมิต

สำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$ ที่กำหนดให้ จะมี $\delta > 0$ ซึ่งถ้า $0<\left|x-2\right|<\delta$

แล้ว $\left|\left(3x+1\right)-7\right|<\varepsilon$

กำหนดให้ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่งมีคุณสมบัติว่า ถ้า $0<\left|x-2\right|<\delta$ แล้วทำให้

$$\left|\left(3x+1\right)-7\right| = \left|3x-6\right|$$

$$\begin{aligned} &= 3\left|x-2\right| \\ &< 3\delta \\ &= 3\left(\frac{\varepsilon}{3}\right) \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

ดังนั้น $\delta = \dfrac{\varepsilon}{3}$ เป็นค่าที่สอดคล้องกับนิยามของลิมิตนี้เมื่อ $\varepsilon > 0$

ตัวอย่าง 1.7 จงพิสูจน์ว่า $\lim\limits_{x\to 1}\left(4x-7\right) = -3$

วิธีทำ โดยนิยามของลิมิตเราต้องการแสดงว่า ทุก ๆ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ สำหรับทุก ๆ ค่า x ถ้า $0 < \left|x-1\right| < \delta$ แล้ว $\left|\left(4x-7\right)-\left(-3\right)\right| < \varepsilon$

ให้ $\varepsilon > 0$ เป็นจำนวนจริงบวกใด ๆ

เลือก $\delta = \dfrac{\varepsilon}{4}$

ให้ $0 < \left|x-1\right| < \delta$

พิจารณา
$$\begin{aligned} \left|\left(4x-7\right)-\left(-3\right)\right| &= \left|4x-7+3\right| \\ &= \left|4x-4\right| \\ &= 4\left|x-1\right| \\ &< 4\delta \\ &= 4\frac{\varepsilon}{4} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

นั่นคือ $\left|\left(4x-7\right)-\left(-3\right)\right| < \varepsilon$

ดังนั้น โดยบทนิยามของลิมิต $\lim\limits_{x\to 1}\left(4x-7\right) = -3$ เป็นจริง

ตัวอย่าง 1.8 จงพิสูจน์ว่า $\lim\limits_{x\to 4}\left(2x+1\right) = 9$

วิธีทำ โดยนิยามของลิมิตเราต้องการแสดงว่า ทุก ๆ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ สำหรับทุก ๆ ค่า x ถ้า $0 < \left|x-4\right| < \delta$ แล้ว $\left|\left(2x+1\right)-9\right| < \varepsilon$

ให้ $\varepsilon > 0$ เป็นจำนวนจริงบวกใด ๆ

เลือก $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$

ให้ $0 < \left|x-4\right| < \delta$

พิจารณา $\left|\left(2x+1\right)-9\right| = \left|2x+1-9\right|$

$$= \left|2x-8\right|$$
$$= 2\left|x-4\right|$$
$$< 2\delta$$
$$= 2\frac{\varepsilon}{2}$$
$$= \varepsilon$$

นั่นคือ $\left|\left(2x+1\right)-9\right| < \varepsilon$

ดังนั้น โดยบทนิยามของลิมิต $\lim\limits_{x\to 4}\left(2x+1\right)=9$ เป็นจริง

ตัวอย่าง 1.9 จงพิสูจน์ว่า $\lim\limits_{x\to -2}\left(5x+3\right)=-7$

วิธีทำ โดยนิยามของลิมิตเราต้องการแสดงว่าทุก ๆ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ สำหรับทุก ๆ ค่า x

ถ้า $0 < \left|x-\left(-2\right)\right| < \delta$ แล้ว $\left|\left(5x+3\right)-\left(-7\right)\right| < \varepsilon$

ให้ $\varepsilon > 0$ เป็นจำนวนจริงบวกใด ๆ

เลือก $\delta = \dfrac{\varepsilon}{5}$

ให้ $0 < \left|x-\left(-2\right)\right| < \delta$

พิจารณา $\left|\left(5x+3\right)-\left(-7\right)\right| = \left|5x+3+7\right|$

$$= \left|5x+10\right|$$
$$= 5\left|x+2\right|$$
$$= 5\left|x-\left(-2\right)\right|$$
$$< 5\delta$$
$$= 5\frac{\varepsilon}{5}$$
$$= \varepsilon$$

นั่นคือ $\left|\left(5x+3\right)-\left(-7\right)\right| < \varepsilon$

ดังนั้น โดยบทนิยามของลิมิต $\lim\limits_{x\to -2}\left(5x+3\right)=-7$ เป็นจริง

ตัวอย่าง 1.10 จงพิสูจน์ว่า $\lim_{x\to 2} x^2 = 4$

วิธีทำ เราต้องการแสดงว่า ทุก ๆ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ สำหรับทุก ๆ ค่า x ถ้า $0 < \left|x-2\right| < \delta$ แล้ว $\left|x^2-4\right| < \varepsilon$)

ให้ $\varepsilon > 0$ เป็นจำนวนจริงบวกใด ๆ

เลือก $\delta = 1$

ให้ $0 < \left|x-2\right| < \delta$

จะได้
$$
\begin{aligned}
0 &< \left|x-2\right| < 1 \\
-1 &< x-2 < 1 \\
-1+4 &< x-2+4 < 1+4 \\
3 &< x+2 < 5
\end{aligned}
$$

และ $\left|x+2\right| < 5$

พิจารณา
$$
\begin{aligned}
\left|x^2-4\right| &= \left|(x-2)(x+2)\right| \\
&= \left|(x-2)\right|\left|(x+2)\right| \\
&< 5\delta
\end{aligned}
$$

กรณี $\varepsilon \geq 5$ จะมี $\delta = 1$ ซึ่ง $0 < \left|x-2\right| < \delta$ แล้ว $\left|x^2-4\right| < \varepsilon$

กรณี $\varepsilon < 5$ จะมี $\delta = \frac{\varepsilon}{5}$ ซึ่ง $0 < \left|x-2\right| < \delta$ แล้ว $\left|x^2-4\right| < 5\frac{\varepsilon}{5} = \varepsilon$

ดังนั้น โดยบทนิยามของลิมิต $\lim_{x\to 2} x^2 = 4$ เป็นจริง

ตัวอย่าง 1.11 จงพิสูจน์ว่า $\lim_{x\to 7} \frac{8}{x-3} = 2$

วิธีทำ เราต้องการแสดงว่า ทุก ๆ $\varepsilon > 0$ มี $\delta > 0$ สำหรับทุกค่า x ถ้า $0 < \left|x-7\right| < \delta$ แล้ว $\left|\frac{8}{x-3} - 2\right| < \varepsilon$

ให้ $\varepsilon > 0$ เป็นจำนวนจริงบวกใด ๆ

เลือก $\delta = 1$

ให้ $0 < \left|x-7\right| < \delta$

จะได้ $0 < \left|x-7\right| < 1$

$$-1 < x-7 < 1$$

$$-1+4 < x-7+4 < 1+4$$

$$3 < x-3 < 5$$

และ $\left|x-3\right| > 3$

พิจารณา $\left|\dfrac{8}{x-3}-2\right| = \left|\dfrac{8}{x-3}-2\dfrac{\left(x-3\right)}{\left(x-3\right)}\right|$

$$= \left|\frac{8-2\left(x-3\right)}{x-3}\right|$$

$$= \left|\frac{-2x+14}{x-3}\right|$$

$$= 2\left|\frac{x-7}{x-3}\right|$$

$$< \frac{2}{3}\delta$$

กรณี $\varepsilon \geq \dfrac{2}{3}$ จะมี $\delta = 1$ ซึ่ง $0 < \left|x-7\right| < \delta$ แล้ว $\left|\dfrac{8}{x-3}-2\right| < \varepsilon$

กรณี $\varepsilon < \dfrac{2}{3}$ จะมี $\delta = \dfrac{3}{2}\varepsilon$ ซึ่ง $0 < \left|x-7\right| < \delta$ แล้ว

$$\left|\frac{8}{x-3}-2\right| = 2\left|\frac{x-7}{x-3}\right|$$

$$< \left(\frac{2}{3}\right)\frac{3}{2}\varepsilon$$

$$= \varepsilon = 3\frac{\varepsilon}{3}$$

$$= \varepsilon$$

ดังนั้น โดยบทนิยามของลิมิต $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{8}{x-3} = 2$ เป็นจริง

1.2 ทฤษฎีบทของลิมิต

ในหัวข้อที่ผ่านมานั้นเรื่องความหมายและบทนิยามของลิมิตพร้อมทั้งได้มีการพิสูจน์ลิมิตโดยใช้บทนิยามไปแล้วนั้น สำหรับฟังก์ชันนั้นก็ไม่เหมาะที่จะหาลิมิต แบบในหัวข้อที่ผ่านมา เราจึงใช้ทฤษฎีบทของลิมิตช่วยในการหาค่าลิมิตนั้นจะทำให้การหาค่าลิมิตได้สะดวกรวดเร็วและง่ายขึ้นดังนั้นในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงทฤษฎีบทของลิมิต และการนำทฤษฎีไปใช้ในการหาค่าลิมิตต่อไป สำหรับในหัวข้อนี้นั้นฟังก์ชันที่กล่าวถึงต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันค่าจริงของตัวแปรจริง นอกจากจะระบุเป็นอย่างอื่น (คณาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยรามคำแหง, 2542 : 32-41)

ทฤษฎีบท 1.2

กำหนดให้ I เป็นช่วงเปิดที่บรรจุ a , L_1 และ L_2 เป็นจำนวนจริง f เป็นฟังก์ชันที่นิยามบน I แต่อาจไม่นิยามที่ a ถ้า $\lim_{x\to a} f(x) = L_1$ และ $\lim_{x\to a} f(x) = L_2$ แล้ว $L_1 = L_2$

ทฤษฎีบท 1.3

ถ้า a และ k เป็นจำนวนจริงใด ๆ $\lim_{x\to a} k = k$

ทฤษฎีบท 1.4

กำหนดให้ I เป็นช่วงเปิดที่บรรจุ a , L และ M เป็นจำนวนจริง f และ g เป็นฟังก์ชันที่นิยามบน I แต่อาจไม่นิยามที่ a ถ้า $\lim_{x\to a} f(x) = L$ และ $\lim_{x\to a} g(x) = M$ แล้ว $\lim_{x\to a}\left[f(x) + g(x)\right] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = L + M$

ทฤษฎีบท 1.5

กำหนดให้ I เป็นช่วงเปิดที่บรรจุ a , c และ L เป็นจำนวนจริง f เป็นฟังก์ชันที่นิยามบน I แต่อาจไม่นิยามที่ a ถ้า $\lim\limits_{x\to a} f\left(x\right) = L$ แล้ว $\lim\limits_{x\to a} cf\left(x\right) = cL$

เราสามารถใช้ทฤษฎีบท 1.2 – ทฤษฎีบท 1.5 สามารถหาลิมิตได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 1.12 จงหาค่า $\lim\limits_{x\to 1} 145$

วิธีทำ $\lim\limits_{x\to 1} 145 = 145$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 1} 145 = 145$

ตัวอย่าง 1.13 จงหาค่า $\lim\limits_{x\to 2}\left(5x+8\right)$

วิธีทำ
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\left(5x+8\right) &= \lim_{x\to 2} 5x + \lim_{x\to 2} 8\\ &= 10+8\\ &= 18\end{aligned}$$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 2}\left(5x+8\right) = 8$

ตัวอย่าง 1.14 จงหาค่า $\lim\limits_{x\to 2}\left(3x-5\right)$

วิธีทำ
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\left(3x-5\right) &= 3\lim_{x\to 2} x - \lim_{x\to 2} 5\\ &= 3\lim_{x\to 2} x - \lim_{x\to 2} 5\\ &= 6-5\\ &= 1\end{aligned}$$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 2}\left(3x-5\right) = 1$

ทฤษฎีบท 1.6

กำหนดให้ I เป็นช่วงเปิดที่บรรจุ a , L และ M เป็นจำนวนจริง f และ g เป็นฟังก์ชันที่นิยามบน I แต่อาจไม่นิยามที่ a ถ้า $\lim_{x\to a} f\left(x\right) = L$ และ $\lim_{x\to a} g\left(x\right) = M$ แล้ว $\lim_{x\to a}\left[f\left(x\right)g\left(x\right)\right] = \lim_{x\to a} f\left(x\right)\lim_{x\to a} g\left(x\right) = LM$

ตัวอย่าง 1.15 จงหาค่า $\lim_{x\to 1}\left(7x^2+5x-8\right)$

วิธีทำ $\lim_{x\to 1}\left(7x^2+5x-8\right) = 7(1)^2+5(1)-8$

$$= 7+5-8$$

$$= 4$$

ดังนั้น $\lim_{x\to 1}\left(7x^2+5x-8\right) = 4$

ตัวอย่าง 1.16 จงหาค่า $\lim_{x\to 0}\left(2x+5x^2+2\right)\left(x-1\right)$

วิธีทำ $\lim_{x\to 0}\left(2x+5x^2+2\right)\left(x-1\right) = \lim_{x\to 0}\left(2x+5x^2+2\right)\lim_{x\to 0}\left(x-1\right)$

$$= \left(\lim_{x\to 0} 2x + \lim_{x\to 0} 5x^2 + \lim_{x\to 0} 2\right)\left(\lim_{x\to 0} x - \lim_{x\to 0} 1\right)$$

$$= \left(2\lim_{x\to 0} x + 5\lim_{x\to 0} x^2 + \lim_{x\to 0} 2\right)\left(\lim_{x\to 0} x - \lim_{x\to 0} 1\right)$$

$$= (2)(-1)$$

$$= -2$$

ดังนั้น $\lim_{x\to 0}\left(2x+5x^2+2\right)\left(x-1\right) = -2$

ทฤษฎีบท 1.7

กำหนดให้ I เป็นช่วงเปิดที่บรรจุ a , M เป็นจำนวนจริงใด ๆ ที่ $M \neq 0$ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามบน I แต่อาจไม่นิยามที่ a ถ้า $\lim_{x\to a} f\left(x\right) = M$ แล้ว $\lim_{x\to a}\dfrac{1}{f\left(x\right)} = \dfrac{1}{M}$

ตัวอย่าง 1.17 จงหาค่า $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x-2}$

วิธีทำ $$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x-2}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\left(x-2\right)}=\frac{1}{-2}=-\frac{1}{2}$$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x-2}=-\dfrac{1}{2}$

ทฤษฎีบท 1.8

กำหนดให้ I เป็นช่วงเปิดที่บรรจุ a , L และ M เป็นจำนวนจริงที่ $M\neq 0$ f และ g เป็นฟังก์ชันที่นิยามบน I แต่อาจไม่นิยามที่ a ถ้า $\lim\limits_{x\to a}f\left(x\right)=L$ และ $\lim\limits_{x\to a}g\left(x\right)=M$ แล้ว $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a}f\left(x\right)}{\lim\limits_{x\to a}g\left(x\right)}=\dfrac{L}{M}$

ข้อสังเกต 1.2

กำหนดให้ I เป็นช่วงเปิดที่บรรจุ a , $L_1,L_2,L_3,\ldots,L_n$ และ $k_1,k_2,k_3,\ldots,k_n$ เป็นจำนวนจริงใด ๆ $f_1,f_2,f_3,\ldots,f_n$ เป็นฟังก์ชันที่นิยามบน I แต่อาจไม่นิยามที่ a

1).ผลของทฤษฎีบท 1.4 สามารถขยายใช้ได้กับฟังก์ชันจำนวนจำกัดนั่นคือ

ถ้า $\lim\limits_{x\to a}f_1\left(x\right)=L_1,\ \lim\limits_{x\to a}f_2\left(x\right)=L_2,\ \lim\limits_{x\to a}f_3\left(x\right)=L_3,\ \ldots,\ \lim\limits_{x\to a}f_n\left(x\right)=L_n$

แล้ว $\lim\limits_{x\to a}\left[k_1f_1\left(x\right)+k_2f_2\left(x\right)+\cdots+k_nf_n\left(x\right)\right]=k_1L_1+k_2L_2+\cdots+k_nL_n$

และ $\lim\limits_{x\to a}\left[f_1\left(x\right)\times f_2\left(x\right)\times\cdots\times f_n\left(x\right)\right]=L_1\times L_2\times\cdots\times L_n$

2). เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to a}x=a$ (ทฤษฎีบทบท 1.3)

ดังนั้นถ้า $P\left(x\right)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$ เป็นฟังก์ชันพหุนามใด ๆ แล้ว จากทฤษฎีบท 1.4 และ ทฤษฎีบท 1.3 จะได้ว่า $\lim\limits_{x\to a}P\left(x\right)=P\left(a\right)$

ตัวอย่าง 1.18 จงหาค่า $\lim_{x \to 0} \frac{2x + 5x^2 + 2}{x - 1}$

วิธีทำ $\lim_{x \to 0} \frac{2x + 5x^2 + 2}{x - 1} = \frac{\lim_{x \to 0}\left(2x + 5x^2 + 2\right)}{\lim_{x \to 0}\left(x - 1\right)}$

$= \frac{2}{-1}$

$= -2$

ดังนั้น $\lim_{x \to 0} \frac{2x + 5x^2 + 2}{x - 1} = -2$

> **บทแทรก 1.1**
>
> ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชัน ซึ่ง $f(x) = g(x)$ ทุก x ซึ่ง $0 < \left|x - a\right| < r$ บางค่า $r > 0$ และ $\lim_{x \to a} f(x) = L$ แล้วจะได้ว่า $\lim_{x \to a} g(x) = L$

และถ้าแทน $x \to a$ ด้วย $x \to a^+$ หรือ $x \to a^-$ แล้วบทแทรกนี้ยังคงเป็นจริง

ตัวอย่าง 1.19 จงหาค่า $\lim_{x \to 0} \frac{2x + 5x^2}{x}$

วิธีทำ เพราะว่า $\lim_{x \to 0} \frac{2x + 5x^2}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x\left(2 + 5x\right)}{x}$

$= \lim_{x \to 0}\left(2 + 5x\right)$

$= 2 + 5(0)$

$= 2$

ดังนั้น $\lim_{x \to 0} \frac{2x + 5x^2}{x} = 2$

ตัวอย่าง 1.20 จงหาค่า $\lim_{x \to 4} \frac{x^2 - 7x + 12}{x - 4}$

วิธีทำ เพราะว่า $\lim_{x \to 4} \frac{x^2 - 7x + 12}{x - 4} = \lim_{x \to 4} \frac{\left(x - 4\right)\left(x - 3\right)}{x - 4}$

$$= \lim_{x \to 4} \left(x - 3\right)$$

$$= 4 - 3$$

$$= 1$$

ดังนั้น $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^2 - 7x + 12}{x - 4} = 1$

ตัวอย่าง 1.21 จงหาค่า $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3 + 8}{x + 2}$

วิธีทำ เพราะว่า $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3 + 8}{x + 2} = \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3 + 2^3}{x + 2}$

$$= \lim_{x \to -2} \frac{\left(x + 2\right)\left(x^2 - 2x + 4\right)}{x + 2}$$

$$= \lim_{x \to -2} \left(x^2 - 2x + 4\right)$$

$$= (-2)^2 - 2(-2) + 4$$

$$= 12$$

ดังนั้น $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3 + 8}{x + 2} = 12$

ตัวอย่าง 1.22 จงหาค่า $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x^3 - 8}$

วิธีทำ พิจารณา $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x^3 - 8} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 2^2}{x^3 - 2^3}$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(x + 2)}{(x^2 + 2x + 4)}$$

$$= \frac{2 + 2}{2^2 + 2(2) + 4}$$

$$= \frac{1}{3}$$

ดังนั้น $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x^3 - 8} = \dfrac{1}{3}$

ตัวอย่าง 1.23 จงหาค่า $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ เมื่อกำหนด $f(x)=\begin{cases}2x^2, & x<2\\ 3-x, & x\geq 2\end{cases}$

วิธีทำ หาค่า $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ ต้องแยกพิจารณาหาลิมิตซ้าย และลิมิตขวา

พิจารณา $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} 2x^2$

$= 2(2)^2$

$= 8$

ได้ $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 8$

พิจารณา $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} (3-x)$

$= 3-2$

$= 1$

ได้ $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 1$

เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ ไม่มีลิมิต

ตัวอย่าง 1.24 จงหาค่า $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ เมื่อกำหนด $f(x)=\begin{cases}2x^2, & x<2\\ 3-x, & x\geq 2\end{cases}$

วิธีทำ หาค่า $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ แยกพิจารณาหาลิมิตซ้าย และลิมิตขวา

พิจารณา $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} 2x^2$

$= 2(1)^2$

$= 2$

ได้ $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 2$

พิจารณา $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} 2x^2$

$= 2(1)^2$

$= 2$

ได้ $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 2$

เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 1} f\left(x\right) = 2$

ตัวอย่าง 1.25 จงหาค่า $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|\left(x^3+5\right)}{x}$

วิธีทำ พิจารณา $|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

ดังนั้น การหาค่าลิมิตต้องแยกพิจารณาหาลิมิตซ้าย และลิมิตขวา

พิจารณา $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{|x|\left(x^3+5\right)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-x\left(x^3+5\right)}{x}$

$$= \lim_{x\to 0^-} -\left(x^3+5\right)$$

$$= -(0^3+5)$$

$$= -5$$

ได้ $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{|x|\left(x^3+5\right)}{x} = -5$

พิจารณา $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{|x|\left(x^3+5\right)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x\left(x^3+5\right)}{x}$

$$= \lim_{x\to 0^-}\left(x^3+5\right)$$

$$= \left(0^3+5\right)$$

$$= 5$$

ได้ $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{|x|\left(x^3+5\right)}{x} = 5$

เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{|x|\left(x^3+5\right)}{x} \neq \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{|x|\left(x^3+5\right)}{x}$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|\left(x^3+5\right)}{x}$ ไม่มีลิมิต

ตัวอย่าง 1.26 จงหาค่า $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{|x-2|\left(x^2-3x+4\right)}{x-2}$

วิธีทำ พิจารณา $|x-2| = \begin{cases} (x-2), & x \ge 2 \\ -(x-2), & x < 2 \end{cases}$

การหาค่าลิมิตต้องแยกพิจารณาหาลิมิตซ้ายและลิมิตขาว

พิจารณา $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{|x-2|\left(x^2-3x+4\right)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{-\left(x-2\right)\left(x^2-3x+4\right)}{x-2}$

$$= \lim_{x\to 2^-} -\left(x^2-3x+4\right)$$

$$= -\left(-2^2-3(2)+4\right)$$

$$= -2$$

ได้ $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{|x-2|\left(x^2-3x+4\right)}{x-2} = -2$

พิจารณา $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{|x-2|\left(x^2-3x+4\right)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\left(x-2\right)\left(x^2-3x+4\right)}{x-2}$

$$= \lim_{x\to 2^+} \left(x^2-3x+4\right)$$

$$= \left(-2^2-3(2)+4\right)$$

$$= 2$$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{|x-2|\left(x^2-3x+4\right)}{x-2} = 2$

เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{|x-2|\left(x^2-3x+4\right)}{x-2} \ne \lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{|x-2|\left(x^2-3x+4\right)}{x-2}$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{|x-2|\left(x^2-3x+4\right)}{x-2}$ ไม่มีลิมิต

ตัวอย่าง 1.27 จงหาค่า $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|x-1|(x^2-3x+4)}{x^2-3x+2}$

วิธีทำ พิจารณา $|x-1| = \begin{cases} (x-1), & x \ge 1 \\ -(x-1), & x < 1 \end{cases}$

ดังนั้นการหาค่าลิมิตต้องแยกพิจารณาหาลิมิตซ้ายและลิมิตขวา

พิจารณา
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1^-}\frac{|x-1|(x^2-3x+4)}{x^2-3x+2} &= \lim_{x\to 1^-}\frac{-(x-1)(x^2-3x+4)}{x^2-3x+2} \\ &= \lim_{x\to 1^-}\frac{-(x-1)(x^2-3x+4)}{(x-2)(x-1)} \\ &= \lim_{x\to 1^-}\frac{-(x^2-3x+4)}{x-2} \\ &= 2\end{aligned}$$

ได้ $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{|x-1|(x^2-3x+4)}{x^2-3x+2} = 2$

พิจารณา
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1^+}\frac{|x-1|(x^2-3x+4)}{x^2-3x+2} &= \lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(x^2-3x+4)}{x^2-3x+2} \\ &= \lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(x^2-3x+4)}{(x-2)(x-1)} \\ &= \lim_{x\to 1^+}\frac{(x^2-3x+4)}{x-2} \\ &= -2\end{aligned}$$

ได้ $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{|x-1|(x^2-3x+4)}{x^2-3x+2} = -2$

เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{|x-1|(x^2-3x+4)}{x^2-3x+2} \ne \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{|x-1|(x^2-3x+4)}{x^2-3x+2}$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|x-1|(x^2-3x+4)}{x^2-3x+2}$ ไม่มีลิมิต

ตัวอย่าง 1.28 จงหาค่า $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left|\left(x-1\right)\left(2x\right)\right|}{x^2-3x+2}$

วิธีทำ พิจารณา $\left|x-1\right| = \begin{cases} x-1, & x\geq 1 \\ -\left(x-1\right), & x<1 \end{cases}$

และ $\left|2x\right| = \begin{cases} 2x, & x\geq 0 \\ -2x, & x<0 \end{cases}$

การหาค่าลิมิตต้องแยกพิจารณาหาลิมิตซ้ายและลิมิตขวา

พิจารณา
$$\lim_{x\to 1^-}\frac{\left|\left(x-1\right)\left(2x\right)\right|}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to 1^-}\frac{\left|x-1\right|\left|2x\right|}{x^2-3x+2}$$
$$= \lim_{x\to 1^-}\frac{-\left(x-1\right)(2x)}{(x-2)(x-1)}$$
$$= \lim_{x\to 1^-}\frac{-(2x)}{x-2}$$
$$= 2$$

ได้ $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\left|\left(x-1\right)\left(2x\right)\right|}{x^2-3x+2} = 2$

พิจารณา
$$\lim_{x\to 1^+}\frac{\left|\left(x-1\right)\left(2x\right)\right|}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to 1^+}\frac{\left|x-1\right|\left|2x\right|}{x^2-3x+2}$$
$$= \lim_{x\to 1^+}\frac{-\left(x-1\right)(2x)}{(x-2)(x-1)}$$
$$= \lim_{x\to 1^+}\frac{-2x}{x-2}$$
$$= 2$$

ได้ $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\left|\left(x-1\right)\left(2x\right)\right|}{x^2-3x+2} = -2$

เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\left|\left(x-1\right)\left(2x\right)\right|}{x^2-3x+2} \neq \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\left|\left(x-1\right)\left(2x\right)\right|}{x^2-3x+2}$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left|\left(x-1\right)\left(2x\right)\right|}{x^2-3x+2}$ ไม่มีลิมิต

1.3 ลิมิตที่เกี่ยวข้องกับอนันต์

ก่อนที่จะศึกษาลิมิตที่เกี่ยวข้องกับอนันต์นั้นก่อนอื่นต้องรู้จักความหมายของคำว่า **อนันต์** เสียก่อน อนันต์ แทนด้วยสัญลักษณ์ ∞ ไม่ใช่จำนวนจริง แต่ใช้แทนจำนวนที่มีค่ามากกว่าทุกจำนวนจริง กล่าวคือสำหรับทุก ๆ $r \in R$

$$\left|r\right| < \infty$$

และในทางตรงกันข้าม **ลบอนันต์** แทนด้วยสัญลักษณ์ $-\infty$ ก็จะใช้แทนจำนวนที่น้อยกว่าทุก ๆ จำนวนจริง กล่าวคือทุก ๆ $r \in R$

$$-\infty < r$$

ดังบทนิยามต่อไปนี้ (สุรวิทย์ ตันแต่งผล และอนุสรณ์ ชนวีรยุทธ, 2537 : 20-21).

บทนิยาม 1.3

จะกล่าวว่าจำนวนจริง x **เข้าสู่อนันต์** (เขียนแทนด้วย $x \to \infty$) ถ้า $x > M$ ทุก ๆ จำนวนจริง $M > 0$ (กล่าวคือ x มีค่าเพิ่มขึ้นอย่างไม่มีขอบเขต)

จะกล่าวว่าจำนวนจริง x **เข้าสู่ลบอนันต์** (เขียนแทนด้วย $x \to -\infty$) ถ้า $x < M$ ทุก ๆ จำนวนจริง $M < 0$ (กล่าวคือ x มีค่าลดลงอย่างไม่มีขอบเขต)

ในที่นี้จะแบ่งการกล่าวถึงลิมิตที่เกี่ยวข้องกับอนันต์เป็น 3 ประเภทดังต่อไปนี้

1. ลิมิต (ค่าจริง) ที่จุดอนันต์

   ฟังก์ชัน f มีลิมิตที่ ∞ และค่าลิมิตเป็นจำนวนจริงมี 2 ลักษณะคือ

   $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$ และ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$ โดยที่ L เป็นจำนวนจริง

2. ลิมิตค่าอนันต์ที่จุด $x = a$ (a เป็นจำนวนจริง)

   ให้ a เป็นจำนวนจริงฟังก์ชัน f ไม่มีลิมิตที่จุด $x = a$ โดยที่ถ้า x เข้าใกล้ a แล้วค่า $f(x)$ เพิ่มขึ้นหรือลดลงอย่างไม่จำกัด (นั่นคือ $f(x) \to \infty$ หรือ $f(x) \to -\infty$) มี 6 ลักษณะคือ

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty, \qquad \lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \infty, \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty, \qquad \lim_{x\to a} f(x) = -\infty$$

3. ลิมิตค่าอนันต์ที่จุดอนันต์

ฟังก์ชัน f ไม่มีลิมิตที่จุดอนันต์โดยที่เมื่อ $x \to \infty$ หรือ $x \to -\infty$ แล้ว $f(x) \to \infty$ หรือ $f(x) \to -\infty$) มี 4 ลักษณะคือ

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

ก่อนที่จะศึกษาลิมิตที่เกี่ยวข้องกับอนันต์ทั้ง 3 ประเภทอย่างละเอียดนั้นจะขอกล่าวถึงนิยามที่สำคัญและจำเป็นต้องทราบก่อนดังนี้ (ทัศนีย์ อารยะตระกูลลิขิต และคณะ, 2539 : 25)

บทนิยาม 1.4

ฟังก์ชัน $f(x)$ เป็นฟังก์ชันซึ่งเมื่อ x เข้าใกล้ a แล้ว $f(x)$ อยู่ในรูปแบบใดรูปแบบหนึ่งดังต่อไปนี้ คือ $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0\cdot\infty, \infty-\infty, 0^0, \infty^0$ หรือ 1^∞ แล้วจะได้ว่า $\lim_{x\to a} f(x)$ มี **รูปแบบที่ไม่กำหนด** ที่ $x = a$

1.3.1 ลิมิต (ค่าจริง) ที่จุดอนันต์

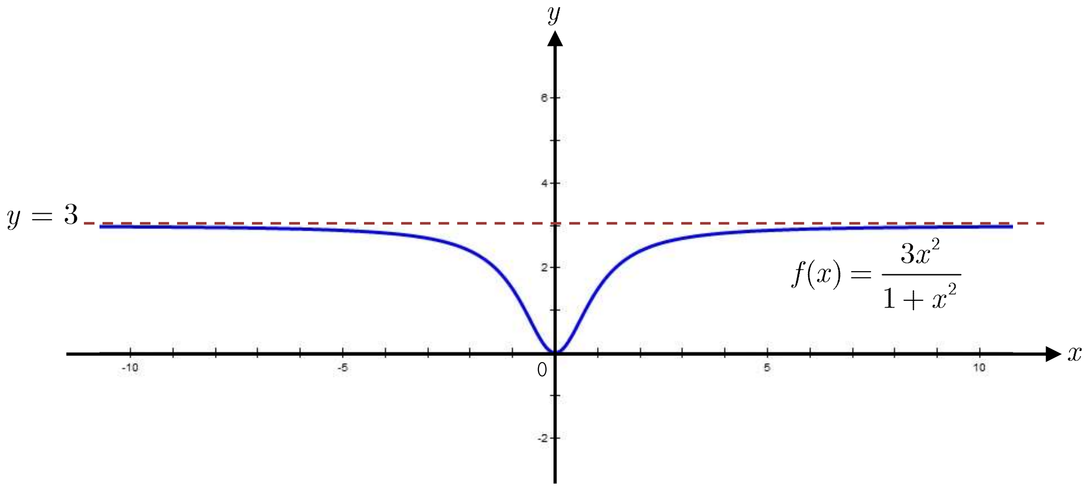
พิจารณาฟังก์ชัน $f(x) = \dfrac{3x^2}{1+x^2}$ ได้ตารางดังต่อไปนี้

ตาราง 1.3 ค่าของ $f(x) = \dfrac{3x^2}{1+x^2}$ เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ ∞ และ $-\infty$

x	$f(x) = \dfrac{3x^2}{1+x^2}$
1	$\dfrac{3}{2}$
10	$\dfrac{300}{101}$
100	$\dfrac{30000}{10001}$
1000	$\dfrac{3000000}{1000001}$
...	...

x	$f(x) = \dfrac{3x^2}{1+x^2}$
-1	$\dfrac{3}{2}$
-10	$\dfrac{300}{101}$
-100	$\dfrac{30000}{10001}$
-1000	$\dfrac{3000000}{1000001}$
...	...

พิจารณากราฟฟังก์ชัน $f(x)=\dfrac{3x^2}{1+x^2}$ ดังต่อไปนี้



ภาพประกอบ 1.3 กราฟของฟังก์ชัน $f(x)=\dfrac{3x^2}{1+x^2}$

จากตารางหรือจากกราฟของฟังก์ชัน $f(x)=\dfrac{3x^2}{1+x^2}$ จะเห็นว่า เมื่อ $x\to\infty$ แล้ว ค่าของฟังก์ชัน $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ 3 นั่นคือ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2}{1+x^2}=3$ และในทำนองเดียวกัน เมื่อ $x\to-\infty$ แล้ว ค่าของฟังก์ชัน $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ 3 จะได้ $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^2}{1+x^2}=3$

ในกรณีทั่วไป $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=L$ หมายความว่า เมื่อ x มีค่าเพิ่มขึ้นอย่างไม่จำกัดแล้วค่า $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้จำนวนจริง L และในทำนองเดียวกัน $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=L$ หมายความว่า เมื่อ x มีค่าลดลงอย่างไม่จำกัดแล้วค่า $f(x)$ เข้าใกล้จำนวนจริง L เขียนเป็นบทนิยามได้ดังนี้ (เฟื่องฟ้า ศรีจันทพงศ์ และคณะ, 2553 : 26-27)

บทนิยาม 1.5

ให้ f เป็นฟังก์ชันค่าจริงที่นิยามบนบางช่วงเปิด (a,∞) กำหนดให้ L เป็นจำนวนจริง $\lim\limits_{x\to\infty}f\left(x\right)=L$ (อ่านว่า ลิมิตของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าสู่ ∞ เท่ากับ L) ก็ต่อเมื่อ ทุก ๆ จำนวนจริง $\varepsilon>0$ จะมีจำนวนจริง $M>0$ ซึ่ง $\left|f\left(x\right)-L\right|<\varepsilon$

บทนิยาม 1.5 (ต่อ)

ทุก ๆ $x > M$ ให้ f เป็นฟังก์ชันค่าจริงที่นิยามบนบางช่วงเปิด $(-\infty, b)$

$\lim_{x\to-\infty} f\left(x\right) = L$ (อ่านว่า ลิมิตของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าสู่ $-\infty$ เท่ากับ L)

ก็ต่อเมื่อ ทุก ๆ จำนวนจริง $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนจริง $M < 0$ ซึ่ง $\left|f\left(x\right) - L\right| < \varepsilon$

ทุก ๆ $x < M$

ทฤษฎีบทต่าง ๆ เกี่ยวกับการมีค่าเดียวของลิมิต ลิมิตของฟังก์ชันคงตัว ลิมิต ผลบวก ผลคูณ และผลหาร ของฟังก์ชันยังคงเป็นจริงในกรณีที่ x มีค่าเข้าใกล้อนันต์ด้วย นอกจากนี้ยังพบความจริงที่ว่าถ้าให้ c เป็นจำนวนจริง แล้ว $\lim_{x\to\infty}\frac{c}{x} = 0$ และ $\lim_{x\to-\infty}\frac{c}{x} = 0$ จากบทนิยามดังกล่าวสามารถหาค่าลิมิตที่อนันต์ได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 1.29 จงหาค่า $\lim_{x\to\infty}\frac{3x-2}{5x-4}$

วิธีทำ $$\lim_{x\to\infty}\frac{3x-2}{5x-4} = \lim_{x\to\infty}\frac{x\left(3-\frac{2}{x}\right)}{x\left(5-\frac{4}{x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\left(3-\frac{2}{x}\right)}{\left(5-\frac{4}{x}\right)}$$

$$= \frac{\lim_{x\to\infty}\left(3-\frac{2}{x}\right)}{\lim_{x\to\infty}\left(5-\frac{4}{x}\right)}$$

$$= \frac{\lim_{x\to\infty}3 - \lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}}{\lim_{x\to\infty}5 - \lim_{x\to\infty}\frac{4}{x}}$$

$$= \frac{3-0}{5-0}$$

$$= \frac{3}{5}$$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x-2}{5x-4} = \dfrac{3}{5}$

ตัวอย่าง 1.30 จงหาค่า $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^2+7x+5}{5x^3+2x-1}$

วิธีทำ $$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2+7x+5}{5x^3+2x-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3\left(\dfrac{2}{x}+\dfrac{7}{x^2}+\dfrac{5}{x^3}\right)}{x^3\left(5+\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}\right)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3\left(\dfrac{2}{x}+\dfrac{7}{x^2}+\dfrac{5}{x^3}\right)}{x^3\left(5+\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}\right)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\dfrac{2}{x}+\dfrac{7}{x^2}+\dfrac{5}{x^3}}{5+\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{x}+\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{7}{x^2}+\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5}{x^3}}{\lim\limits_{x\to-\infty}5+\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{x^2}-\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^3}}$$

$$= \frac{0+0+0}{5+0-1}$$

$$= \frac{0}{5}$$

$$= 0$$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^2+7x+5}{5x^3+2x-1} = 0$

สำหรับตัวอย่าง 1.30 นั้นสามารถทำได้หลายวิธี ดังต่อไปนี้

วิธีทำ $$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2+7x+5}{5x^3+2x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(2+\frac{7}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}{x^3\left(5+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(2+\frac{7}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}{x\left(5+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}\right)\left[\frac{\left(2+\frac{7}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}{\left(5+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)}\right]$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(2+\frac{7}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}{\left(5+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)}$$

เนื่องจาก $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0$ และ $\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(2+\frac{7}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}{\left(5+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)}=\frac{2}{5}$

ดังนั้น $\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2+7x+5}{5x^3+2x-1}=0$

ตัวอย่าง 1.31 จงหาค่า $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{3x^6+6x^2-1}}{2x^3+x}$

วิธีทำ $$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{3x^6+6x^2-1}}{2x^3+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^6\left(3+\frac{6}{x^4}-\frac{1}{x^6}\right)}}{x^3\left(2+\frac{1}{x^2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left|x^3\right|\sqrt{\left(3+\frac{6}{x^4}-\frac{1}{x^6}\right)}}{x^3\left(2+\frac{1}{x^2}\right)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^3\sqrt{\left(3+\frac{6}{x^4}-\frac{1}{x^6}\right)}}{x^3\left(2+\frac{1}{x^2}\right)}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{\left(3+\frac{6}{x^4}-\frac{1}{x^6}\right)}}{\lim\limits_{x\to\infty} 2+\frac{1}{x^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{\lim\limits_{x\to\infty} 3+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6}{x^4}-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^6}}}{\lim\limits_{x\to\infty} 2+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{3+0-0}}{2+0}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{3x^4+6x^2-1}}{2x^2+x} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ตัวอย่าง 1.32 จงหาค่า $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{3x^6+6x^2-1}}{2x^3+x}$

วิธีทำ $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{3x^6+6x^2-1}}{2x^3+x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^6\left(3+\frac{6}{x^4}-\frac{1}{x^6}\right)}}{x^3\left(2+\frac{1}{x^2}\right)}$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{\left|x^3\right|\sqrt{\left(3+\frac{6}{x^4}-\frac{1}{x^6}\right)}}{x^3\left(2+\frac{1}{x^2}\right)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{-x^3\sqrt{\left(3+\frac{6}{x^4}-\frac{1}{x^6}\right)}}{x^3\left(2+\frac{1}{x^2}\right)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-\sqrt{\left(3+\frac{6}{x^4}-\frac{1}{x^6}\right)}}{2+\frac{1}{x^2}}$$

$$= \frac{-\sqrt{\lim_{x\to-\infty} 3 + \lim_{x\to-\infty} \frac{6}{x^4} - \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^6}}}{\lim_{x\to-\infty} 2 + \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2}}$$

$$= \frac{-\sqrt{3+0-0}}{2+0}$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ดังนั้น $\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{3x^4+6x^2-1}}{2x^2+x} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

ตัวอย่าง 1.33 จงหาค่า $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{5x^5+2x^3+7}}{2x^3-1}$

วิธีทำ $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{5x^5+2x^3+7}}{2x^3-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^6\left(\frac{5}{x}+\frac{2}{x^3}+\frac{7}{x^6}\right)}}{x^3\left(2-\frac{1}{x^3}\right)}$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^6\left(\frac{5}{x}+\frac{2}{x^3}+\frac{7}{x^6}\right)}}{x^3\left(2-\frac{1}{x^3}\right)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\left|x^3\right|\sqrt{\left(\frac{5}{x}+\frac{2}{x^3}+\frac{7}{x^6}\right)}}{x^3\left(2-\frac{1}{x^3}\right)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{\left(\frac{5}{x} + \frac{2}{x^3} + \frac{7}{x^6}\right)}}{2 - \frac{1}{x^3}}$$

$$= \frac{\sqrt{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{5}{x} + \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2}{x^3} + \lim\limits_{x\to\infty} \frac{7}{x^6}}}{\lim\limits_{x\to\infty} 2 - \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^3}}$$

$$= \frac{\sqrt{0+0+0}}{2-0}$$

$$= \frac{0}{2}$$

$$= 0$$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{5x^5 + 2x^3 + 7}}{2x^3 - 1} = 0$

ข้อสังเกต 1.3

จากตัวอย่างที่ผ่านมาจะสังเกตได้ว่าถ้า $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ และ $Q(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m$ เป็นฟังก์ชันพหุนามโดยที่ $a_n \neq 0$ และ $b_m \neq 0$ แล้ว

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} \dfrac{a_n}{b_m}, & n = m \\ 0, & n < m \end{cases} \quad \text{และ} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} \dfrac{a_n}{b_m}, & n = m \\ 0, & n < m \end{cases}$$

1.3.2 ลิมิตค่าอนันต์ที่จุด $x = a$

พิจารณาฟังก์ชัน $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ ได้ตารางดังต่อไปนี้

ตาราง 1.4 ค่าของ $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 1

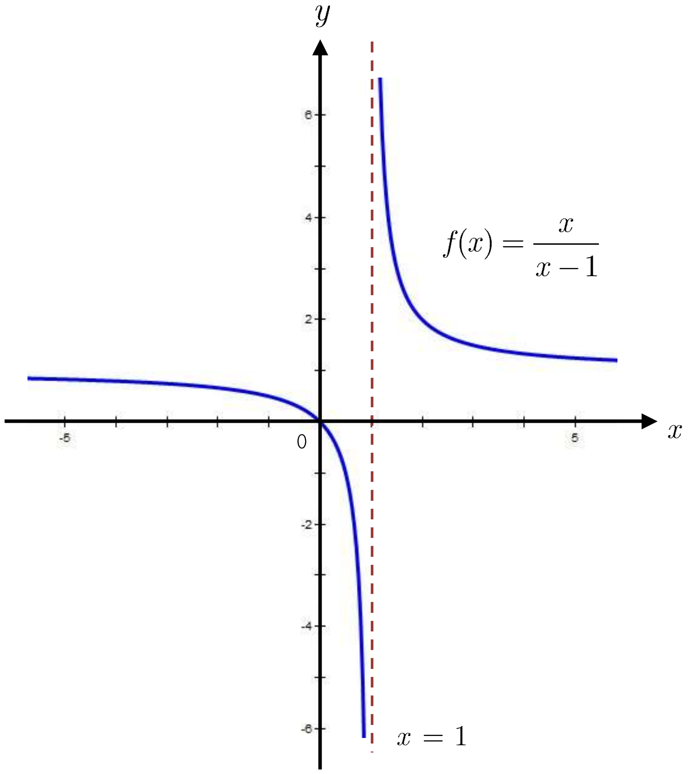
x	$f(x) = \dfrac{x}{x-1}$
0.5	-1

x	$f(x) = \dfrac{x}{x-1}$
1.5	3

0.9	-9
0.99	-99
0.999	-999
0.9999	-9999
...	...

1.1	11
1.01	101
1.001	1001
1.0001	10001
...	...

พิจารณากราฟฟังก์ชัน $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ ดังต่อไปนี้



ภาพประกอบ 1.4 กราฟของฟังก์ชัน $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$

จากตารางหรือจากกราฟของฟังก์ชัน $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ จะเห็นว่า เมื่อ x เข้าใกล้ 1 ทางขวา $(x>1)$ นั้น ค่าของ $f(x)$ เข้าสู่ อนันต์(∞) และเมื่อ x เข้าใกล้ 1 ทางซ้าย$(x<1)$ นั้นค่าของ $f(x)$ เข้าสู่ ลบอนันต์$(-\infty)$ ในกรณีเช่นนี้เราได้ว่า

$$\lim_{x\to1^+}\frac{x}{x-1}=\infty \qquad \text{และ} \qquad \lim_{x\to1^-}\frac{x}{x-1}=-\infty$$

ในทำนองเดียวกันจะได้ว่า

$$\lim_{x\to1^+}\left(-\frac{x}{x-1}\right)=-\infty \ \text{และ} \qquad \lim_{x\to1^-}\left(-\frac{x}{x-1}\right)=\infty$$

และ

$$\lim_{x\to1^+}\left(\frac{x}{x-1}\right)^2=\infty \qquad \text{และ} \qquad \lim_{x\to1^-}\left(\frac{x}{x-1}\right)^2=\infty$$

ในกรณีทั่ว ๆ ไปถ้า $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\infty$ (หรือ $-\infty$) และ $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=\infty$ (หรือ $-\infty$) มีความหมายดังบทนิยามต่อไปนี้ (สมเกียรติ พาน้อย และคณะ, 2543 : 31-33)

บทนิยาม 1.6

$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\infty$ (อ่านว่าลิมิตของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ a ทางขวาเท่ากับ ∞) ก็ต่อเมื่อ ทุก ๆ จำนวน $M>0$ จะมี $\delta>0$ ซึ่งถ้า $a<x<a+\delta$ แล้ว $f(x)>M$

$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=-\infty$ (อ่านว่าลิมิตของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ a ทางขวาเท่ากับ $-\infty$) ก็ต่อเมื่อ ทุก ๆ จำนวน $M<0$ จะมี $\delta>0$ ซึ่งถ้า $a<x<a+\delta$ แล้ว $f(x)<M$

$\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=\infty$ (อ่านว่าลิมิตของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ a ทางซ้ายเท่ากับ ∞) ก็ต่อเมื่อ ทุก ๆ จำนวน $M>0$ จะมี $\delta>0$ ซึ่งถ้า $a-\delta<x<a$ แล้ว $f(x)>M$

$\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=-\infty$ (อ่านว่าลิมิตของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ a ทางซ้ายเท่ากับ $-\infty$) ก็ต่อเมื่อ ทุก ๆ จำนวน $M<0$ จะมี $\delta>0$ ซึ่งถ้า $a-\delta<x<a$ แล้ว $f(x)<M$

$\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$ ก็ต่อเมื่อ $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=\infty$ หรือ ทุก ๆ จำนวน $M>0$ จะมี $\delta>0$ ซึ่งถ้า $0<|x-a|<\delta$ แล้ว $f(x)>M$

$\lim\limits_{x\to a}f(x)=-\infty$ ก็ต่อเมื่อ $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=-\infty$ หรือ ทุก ๆ จำนวน $M<0$ จะมี $\delta>0$ ซึ่งถ้า $0<|x-a|<\delta$ แล้ว $f(x)<M$

ทฤษฎีบท 1.9

1. $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{1}{(x-a)^n}=\infty$

2. $\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{1}{(x-a)^n}=\begin{cases}\infty, & n \text{ เป็นเลขคู่} \\ -\infty, & n \text{ เป็นเลขคี่}\end{cases}$

ตัวอย่าง 1.34 จงหาค่า $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{(x-3)^2}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{1}{(x-3)^2}=\infty$

และ $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{1}{(x-3)^2}=\infty$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{(x-3)^2}=\infty$

ตัวอย่าง 1.35 จงหาค่า $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{(x-2)^3}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{1}{(x-2)^3}=-\infty$

และ $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{1}{(x-2)^3}=\infty$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{(x-2)^3}$ ไม่มีลิมิต

ตัวอย่าง 1.36 จงหาค่า $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty$

และ $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=\infty$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}$ ไม่มีลิมิต

ทฤษฎีบท 1.10

ให้ $\lim_{x \to a} f(x) = L$ และ $\lim_{x \to a} g(x) = I$ เมื่อ $L \in R$ และ $I = \infty$ หรือ $-\infty$ จะได้ว่า

1. $\lim_{x \to a}\left[g(x) \pm f(x)\right] = I$

2. $\lim_{x \to a}\left[f(x) \times g(x)\right] = \begin{cases} I, & L > 0 \\ \infty, & L < 0 \text{ และ } I = -\infty \\ -\infty, & L < 0 \text{ และ } I = \infty \end{cases}$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \quad \text{เมื่อ } L \neq 0$$

3. $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

4. $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{g(x)} = \begin{cases} I, & n \text{ เป็นเลขคี่} \\ \infty, & n \text{ เป็นเลขคู่ และ } I = \infty \end{cases}$

5. $\lim_{x \to a} g^n(x) = \begin{cases} I, & n \text{ เป็นเลขคี่} \\ \infty, & n \text{ เป็นเลขคู่} \end{cases}$

ข้อสังเกต 1.4

1. ทฤษฎีบท 1.10 ยังคงเป็นจริงสำหรับกรณีลิมิตทางซ้าย และลิมิตทางขวาของ f และ g

2. ถ้า $L = 0$ แล้ว $\lim_{x \to a} f(x) \cdot g(x)$ อยู่ในรูปแบบไม่กำหนด แล้วลิมิตนี้อาจจะหาค่าได้หรือหาค่าไม่ได้ ตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 1.37 จงหาค่า $\lim_{x \to 0^+} f(x) \cdot g(x)$ เมื่อกำหนด $f(x) = \frac{1}{x^2}$ และ $g(x) = x$

วิธีทำ พิจารณา $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2} = \infty$

และ $\lim_{x \to 0^+} g(x) = \lim_{x \to 0^+} x = 0$

จะได้ว่า $\lim_{x \to 0^+} f(x) \cdot g(x)$ อยู่ในรูปแบบไม่กำหนด ($\infty \cdot 0$)

แต่ $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)\cdot g(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{x}{x^2}$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x}$

$= \infty$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\cdot g(x) = \infty$

ตัวอย่าง 1.38 จงหาค่า $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\cdot g(x)$ เมื่อกำหนด $f(x) = \dfrac{1}{x}$ และ $g(x) = x$

วิธีทำ พิจารณา $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = \infty$

และ $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x = 0$

จะได้ว่า $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\cdot g(x)$ อยู่ในรูปแบบไม่กำหนด ($\infty\cdot 0$)

แต่ $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)\cdot g(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{x}{x}$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} 1$

$= 1$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\cdot g(x) = 1$

ตัวอย่าง 1.39 จงหาค่า $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)\cdot g(x)$ เมื่อกำหนด $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$ และ $g(x) = (x-3)^2$

วิธีทำ พิจารณา $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{1}{x-3} - \infty$

และ $\lim\limits_{x\to 3^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} (x-3)^2 = 0$

จะได้ว่า $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)\cdot g(x)$ อยู่ในรูปแบบไม่กำหนด ($-\infty\cdot 0$)

แต่ $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)\cdot g(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{(x-3)^2}{x-3}$

$= \lim\limits_{x\to 3^-} (x-3)$

$= 0$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)\cdot g(x) = 0$

ดังนั้นการหาค่าลิมิตนั้นไม่มีหลักเกณฑ์ตายตัวทั้งนี้ต้องอาศัย นิยาม ทฤษฎีบทต่าง ๆ รวมทั้งข้อสังเกตุเพื่อจะตรวจสอบว่าลิมิตนั้นหาค่าได้หรือหาค่าไม่ได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้ (Ross, F.L. Maurice,.W.D. and Frank, G.R., 2001 : 46)

ตัวอย่าง 1.40 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to 2^+}\left[\dfrac{1}{(x-2)^3}+5\right]$

วิธีทำ จาก $\lim\limits_{x\to 2^+}\left[\dfrac{1}{(x-2)^3}+5\right]$

และ $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{1}{(x-2)^3}=\infty\,, \qquad \lim\limits_{x\to 2^+}5=5$

โดยทฤษฎีบท 1.10 ข้อ 1

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 2^+}\left[\dfrac{1}{(x-2)^3}+5\right]=\infty$

ตัวอย่าง 1.41 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{x^2-1}$

วิธีทำ จาก $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{(x-1)(x+1)}$

$$=\lim_{x\to 1^-}\left[\frac{1}{(x-1)}\times\frac{1}{(x+1)}\right]$$

และ $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{(x-1)}=-\infty\,, \qquad \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{(x+1)}=\dfrac{1}{2}$

โดยทฤษฎีบท 1.10 ข้อ 2

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{x^2-1}=-\infty$

ตัวอย่าง 1.42 จงหาค่าของ $\lim_{x\to 3^+}\frac{5}{x^2-3x}$

วิธีทำ จาก $\lim_{x\to 3^+}\frac{5}{x^2-3x} = \lim_{x\to 3^+}\frac{5}{x(x-3)}$

$$= \lim_{x\to 3^+}\left[\frac{5}{x}\times\frac{1}{x-3}\right]$$

และ $\lim_{x\to 3^+}\frac{5}{x} = \frac{5}{3}$, $\quad \lim_{x\to 3^+}\frac{1}{x-3} = \infty$

โดยทฤษฎีบท 1.10 ข้อ 2

ดังนั้น $\lim_{x\to 3^+}\frac{5}{x^2-3x} = \infty$

ตัวอย่าง 1.43 จงหาค่าของ $\lim_{x\to -2} 5(x+2)^2$

วิธีทำ จาก $\lim_{x\to -2} 5(x+2)^2 = \lim_{x\to -2}\frac{5}{\left[\frac{1}{(x+2)^2}\right]}$

$$= \lim_{x\to -2}\left[\frac{5}{\frac{1}{(x+2)^2}}\right]$$

และ $\lim_{x\to -2} 5 = 5$, $\quad \lim_{x\to -2}\frac{1}{(x+2)^2} = \infty$

โดยทฤษฎีบท 1.10 ข้อ 3

ดังนั้น $\lim_{x\to -2} 5(x+2)^2 = 0$

ตัวอย่าง 1.44 จงหาค่า $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{1}{x^2-7x+12}$

วิธีทำ จาก $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{1}{x^2-7x+12} = \lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{1}{(x-3)(x-4)}$

$$= \lim_{x\to 3^-}\left[\frac{1}{(x-3)} \times \frac{1}{(x-4)}\right]$$

และ $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{1}{(x-3)} = -\infty\,, \qquad \lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{1}{(x-4)} = -1$

โดยทฤษฎีบท 1.10 ข้อ 2

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{1}{x^2-7x+12} = \infty$

ตัวอย่าง 1.45 จงหาค่า $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x+1}{x-2}$

วิธีทำ พิจารณา $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x+1}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^-} \left[\dfrac{\frac{1}{x-2}}{\frac{1}{x+1}}\right]$

และ $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{1}{x-2} = -\infty, \qquad \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{1}{3}$

โดยทฤษฎีบท 1.10 ข้อ 2

ได้ $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x+1}{x-2} = -\infty$

พิจารณา $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x+1}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^+} \left[\dfrac{\frac{1}{x-2}}{\frac{1}{x+1}}\right]$

และ $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{1}{x-2} = \infty\,,\ \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{1}{3}$

โดยทฤษฎีบท 1.10 ข้อ 2

ได้ $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x+1}{x-2} = \infty$

เนื่องจาก $\lim_{x \to 2^-} \frac{x+1}{x-2} \neq \lim_{x \to 2^+} \frac{x+1}{x-2}$

ดังนั้น $\lim_{x \to 2} \frac{x+1}{x-2}$ ไม่มีลิมิต

1.3.3 ลิมิตค่าอนันต์ที่จุดอนันต์

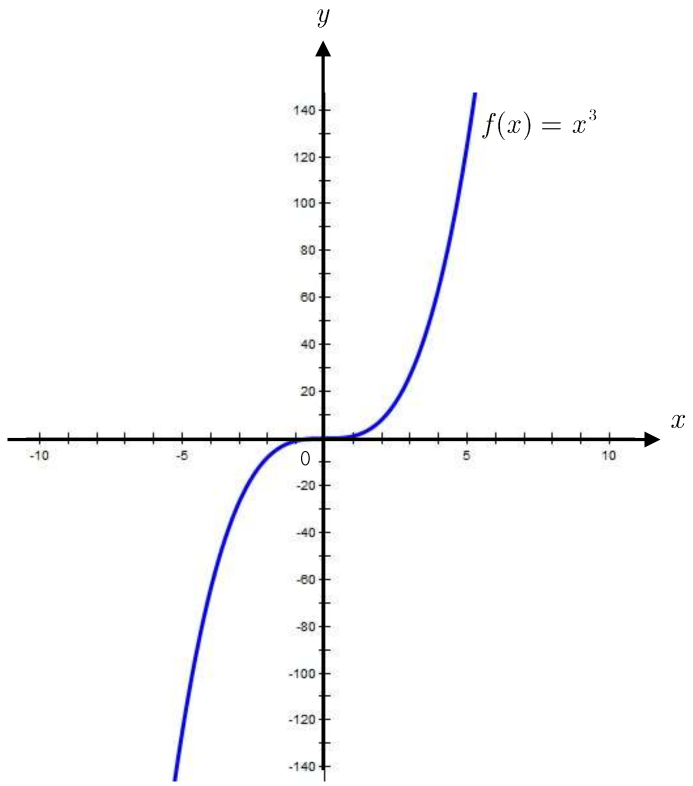
พิจารณาฟังก์ชัน $f(x) = x^3$ ได้ตารางดังต่อไปนี้

ตาราง 1.5 ค่าของ $f(x) = x^3$

x	$f(x) = x^3$
1	1
2	8
3	27
4	64
10	1000
...	...

x	$f(x) = x^3$
-1	-1
-2	-8
-3	-27
-4	-64
-10	-1000
...	...

พิจารณากราฟฟังก์ชัน $f(x) = x^3$ ดังต่อไปนี้



ภาพประกอบ 1.5 กราฟของฟังก์ชัน $f(x) = x^3$

จากตารางและรูปภาพจะเห็นว่าเมื่อ $x \to \infty$ จะทำให้ $f(x) = x^3 \to \infty$ นั้นหมายความว่า $\lim_{x\to\infty} x^3 = \infty$ ในทำนองเดียวกัน $x \to -\infty$ จะทำให้ $f(x) = x^3 \to -\infty$ ก็หมายความว่า $\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ ในกรณีทั่ว ๆ ไป ลิมิตค่าอนันต์ที่จุดอนันต์ นั้นมีความหมายดังบทนิยามต่อไปนี้ (เฟื่องฟ้า ศรีจันทพงศ์ และคณะ, 2553 : 35-40)

บทนิยาม 1.7

1. $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ ก็ต่อเมื่อ ทุก ๆ ค่า $M > 0$ จะมีค่า $N > 0$

ซึ่งถ้า $x > N$ แล้ว $f(x) > M$

2. $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ ก็ต่อเมื่อ ทุก ๆ ค่า $M < 0$ จะมีค่า $N > 0$

ซึ่งถ้า $x > N$ แล้ว $f(x) < M$

บทนิยาม 1.7(ต่อ)

3. $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty$ ก็ต่อเมื่อ ทุก ๆ ค่า $M>0$ จะมีค่า $N<0$ ซึ่งถ้า $x<N$ แล้ว $f(x)>M$

4. $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ ก็ต่อเมื่อ ทุก ๆ ค่า $M<0$ จะมีค่า $N<0$ ซึ่งถ้า $x<N$ แล้ว $f(x)<M$

ทฤษฎีบท 1.11

ให้ $n\in N$ จะได้ว่า

1. $\lim_{x\to\infty} x^n=\infty$

2. $\lim_{x\to-\infty} x^n=\begin{cases}-\infty, & n \text{ เป็นเลขคี่}\\ \infty, & n \text{ เป็นเลขคู่}\end{cases}$

ตัวอย่าง 1.46

$\lim_{x\to-\infty} x=-\infty$

$\lim_{x\to\infty} x=\infty$

$\lim_{x\to-\infty} x^2=\infty$

$\lim_{x\to\infty} x^5=\infty$

$\lim_{x\to\infty} x^4=\infty$

ทฤษฎีบท 1.12

ให้ $\lim_{x\to\infty} f(x)=L$ และ $\lim_{x\to\infty} g(x)=I$ โดยที่ $L\in R$ และ $I=\infty$(หรือ $-\infty$)

1. $\lim_{x\to\infty}\left[g(x)\pm f(x)\right]=I$

ทฤษฎีบท 1.12(ต่อ)

2. ถ้า $L \neq 0$ แล้ว

2.1 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)\times g(x)\right] = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{g(x)}{f(x)} = \begin{cases} I, & L>0 \\ -I, & L<0 \end{cases}$

2.2 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{g(x)} = \begin{cases} I, & n \text{ เป็นเลขคี่} \\ \infty, & n \text{ เป็นเลขคู่ และ } I=\infty \end{cases}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty} g^{n}(x) = \begin{cases} I, & n \text{ เป็นเลขคี่} \\ \infty, & n \text{ เป็นเลขคู่} \end{cases}$

ทฤษฎีบท 1.13

ให้ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = I$ และ $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = J$ โดยที่ $I=\infty$ (หรือ $-\infty$) และ $J=\infty$ (หรือ $-\infty$) จะได้ว่า

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)+g(x)\right] = \begin{cases} \infty, & I=J=\infty \\ -\infty, & I=J=-\infty \end{cases}$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)\times g(x)\right] = \begin{cases} \infty, & I \text{ และ } J \text{ มีเครื่องหมายเหมือนกัน} \\ -\infty, & I \text{ และ } J \text{ มีเครื่องหมายต่างกัน} \end{cases}$

ทฤษฎีบท 1.14

ให้ $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ และ $Q(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m$ เป็นฟังก์ชันพหุนามระดับขั้น n และ m ตามลำดับ ถ้า $n > m$ แล้วจะได้ว่า

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{a_n}{b_m}\right]x^{n-m}$$

หมายเหตุ

1. เมื่อเราแทน $x \to \infty$ ด้วย $x \to -\infty$ ในทฤษฎีบท 1.12, 1.13 และ 1.14 จะได้ว่าทฤษฎียังคงเป็นจริง

2. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ (x\to-\infty)}} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ จะเรียกว่าอยู่ในรูปแบบไม่กำหนด $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$ และ $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ (x\to-\infty)}} \left[f(x)+g(x)\right]$ ซึ่งถ้า $I \neq J$ ก็อยู่ในรูปแบบไม่กำหนด $\infty-\infty, -\infty+\infty$ และในทฤษฎีบท 1.12 เมื่อ $L=0$ $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ (x\to-\infty)}} \left[f(x)\times g(x)\right]$ อยู่ในรูปแบบไม่กำหนด $0\times\infty, 0\times(-\infty)$

เมื่อเราทราบทฤษฎีบทต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับลิมิตที่จุดอนันต์ที่กล่าวมาแล้วเราสามารถหาค่าลิมิตได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 1.47 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to\infty}(x^3+2)$

วิธีทำ จาก $\lim\limits_{x\to\infty}(x^3+2)$

และ $\lim\limits_{x\to\infty} x^3 = \infty$, $\quad \lim\limits_{x\to\infty} 2 = 2$

โดยทฤษฎีบท 1.12 ข้อ 1

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to\infty}(x^3+2) = \infty$

ตัวอย่าง 1.48 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3-5)$

วิธีทำ จาก $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3-5)$

และ $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} 5 = 5$

โดยทฤษฎีบท 1.12 ข้อ 1

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3-5) = -\infty$

ตัวอย่าง 1.49 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to-\infty}(3-4x^2)$

วิธีทำ จาก $\lim\limits_{x\to-\infty}(3-4x^2)$

จากทฤษฎีบท 1.12 ข้อ 1.1 ได้

$\lim\limits_{x\to-\infty}(-4x^2)=-\infty$

เพราะ $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=\infty$ และ $\lim\limits_{x\to-\infty}-4=-4$

และ $\lim\limits_{x\to-\infty}3=3$,

โดยทฤษฎีบท 1.12 ข้อ 1

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to-\infty}(3-4x^2)=-\infty$

ตัวอย่าง 1.50 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{x^3}$

วิธีทำ จาก $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{x^3}$

และ $\lim\limits_{x\to-\infty}2=2$, $\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty$

โดยทฤษฎีบท 1.12 ข้อ 1.2

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{x^3}=0$

ตัวอย่าง 1.51 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to\infty}(3x^2+x+1)$

วิธีทำ จาก $\lim\limits_{x\to\infty}(3x^2+x+1)$

และ $\lim\limits_{x\to\infty}3x^2=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}x=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}1=1$

โดยทฤษฎีบท 1.13 ข้อ 1 และ 1.12 ข้อ 1

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to\infty}(3x^2+x+1)=\infty$

ตัวอย่าง 1.52 จงหาค่าของ $\lim_{x\to-\infty}(x^3+x)$

วิธีทำ จาก $\lim_{x\to-\infty}(x^3+x)$

และ $\lim_{x\to-\infty} x^3=-\infty$, $\lim_{x\to-\infty} x=-\infty$

โดยทฤษฎีบท 1.13 ข้อ 1

ดังนั้น $\lim_{x\to-\infty}(x^3+x)=-\infty$

ตัวอย่าง 1.53 จงหาค่าของ $\lim_{x\to\infty}(x^2-x)$

วิธีทำ เนื่องจาก $\lim_{x\to\infty}(x^2-x)$ อยู่ในรูปแบบไม่กำหนด ทำได้ดังต่อไปนี้

$\lim_{x\to\infty}(x^2-x)=\lim_{x\to\infty} x(x-1)$

และ $\lim_{x\to\infty} x=\infty$, $\lim_{x\to\infty}(x+1)=\infty$

โดยทฤษฎีบท 1.13 ข้อ 2

ดังนั้น $\lim_{x\to\infty}(x^2-x)=\infty$

ตัวอย่าง 1.54 จงหาค่าของ $\lim_{x\to-\infty} x^3(1+x^2)$

วิธีทำ จาก $\lim_{x\to-\infty} x^3(1+x^2)$

และ $\lim_{x\to-\infty} x^3=-\infty$, $\lim_{x\to-\infty}(1+x^2)=\infty$

โดยทฤษฎีบท 2.13 ข้อ 2

ดังนั้น $\lim_{x\to-\infty} x^3(1+x^2)=-\infty$

ตัวอย่าง 1.55 จงหาค่าของ $\lim_{x\to\infty}\frac{-3x^2+x+1}{2x+1}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\lim_{x\to\infty}\frac{-3x^2+x+1}{2x+1}$ อยู่ในรูปแบบไม่กำหนด ทำได้ดังต่อไปนี้

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-3x^2+x+1}{2x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(-3+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)}{x\left(2+\dfrac{1}{x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(-3+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)}{2+\dfrac{1}{x}}$$

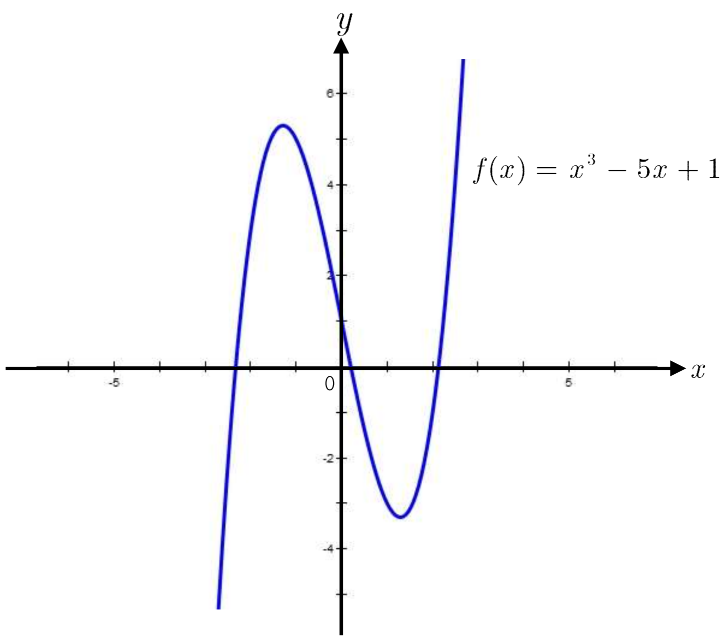
$$=\lim_{x\to\infty}x\times\lim_{x\to\infty}\frac{-3+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{2+\dfrac{1}{x}}$$

และ $\lim_{x\to\infty}x=\infty$, $\lim_{x\to\infty}\dfrac{-3+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{2+\dfrac{1}{x}}=-\dfrac{3}{2}$ โดยทฤษฎีบท 1.12 ข้อ 2

ดังนั้น $\lim_{x\to\infty}\dfrac{-3x^2+x+1}{2x+1}=-\infty$

1.4 ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

พิจารณากราฟฟังก์ชัน $f(x)=x^3-5x+1$



ภาพประกอบ 1.6 กราฟของฟังก์ชัน $f(x)=x^3-5x+1$

จากภาพประกอบ 1.6 กราฟของฟังก์ชัน $f(x) = x^3 - 5x + 1$ นั้นไม่มีการขาดตอน แต่ถ้าหากเราพิจารณาที่จุดหนึ่ง ๆ เช่นพิจารณากรณีที่ $x = 2$ ก็จะเห็นว่า กราฟของฟังก์ชันนั้นก็ไม่ขาดตอนที่จุดดังกล่าว ดังนั้นจึงกล่าวได้ว่าฟังก์ชัน $f(x)$ ต่อเนื่องที่จุด $x = 2$ นั่นเอง แต่ถ้าหากเราต้องการตรวจสอบว่า $f(x)$ นั้นต่อเนื่องที่จุด $x = 100$ หรือไม่ ก็เป็นการยากที่เราจะสามารถเขียนกราฟของฟังก์ชันเพื่อที่จะตรวจสอบจุดที่ต้องการได้ทุกจุด ดังนั้นการจะตรวจสอบว่าฟังก์ชันต่อเนื่องหรือไม่ต่อเนื่องตรวจสอบเพื่อความง่ายสะดวกและรวดเร็วจะใช้นิยามต่อไปนี้ในการตรวจสอบ (ชัยสงคราม เครือหงส์, 2544 : 41-42)

บทนิยาม 1.8

กำหนดให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันค่าจริงของตัวแปรจริง และ $a \in R$
จะกล่าวว่า f ต่อเนื่องที่จุด $x = a$ ก็ต่อเมื่อ

1. $f(a)$ หาค่าได้
2. $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ หาค่าได้
3. $f(a) = \lim\limits_{x \to a} f(x)$

ถ้า f ไม่สอดคล้องกับเงื่อนไขข้อใดข้อหนึ่งข้างบนนี้ ก็แสดงว่า f ไม่ต่อเนื่องที่จุด $x = a$

จากบทนิยาม 1.8 นั้นเราสามารถตรวจสอบฟังก์ชันว่าต่อเนื่องหรือไม่ต่อเนื่องนั้นเป็นการง่ายโดยเราไม่ต้องวาดกราฟของฟังก์ชันให้เสียเวลา ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 1.56 จงพิจารณาว่าฟังก์ชัน $f(x) = x^3 - 5x + 1$ ต่อเนื่องที่ $x = 2$ หรือไม่

วิธีทำ เนื่องจาก $f(2) = 2^3 - 5(2) + 1 = -1$ หาค่าได้

และ $\lim\limits_{x \to 2} (x^3 - 5x + 1) = -1$

ได้ $\lim\limits_{x \to 2} (x^3 - 5x + 1) = f(2)$

ดังนั้น ฟังก์ชัน $f(2) = x^3 - 5x + 1$ ต่อเนื่องที่ $x = 2$

ตัวอย่าง 1.57 กำหนดให้

$$f(x)=\begin{cases} x^2+4, & x<2 \\ x^3, & x\geq 2 \end{cases}$$

จงตรวจสอบว่า $f(x)$ ต่อเนื่องที่ $x=2$ หรือไม่

วิธีทำ 1. $f(2)=2^3=8$ หาค่าได้

2. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=8$ เพราะว่า

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-} x^3+4=8$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+} x^3=8$$

3. เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)$

ดังนั้น ฟังก์ชัน $f(x)$ ต่อเนื่องที่ $x=2$

ตัวอย่าง 1.58 กำหนดให้

$$f(x)=\begin{cases} x^2+4, & x<2 \\ 5, & x=2 \\ x^3, & x>2 \end{cases}$$

จงตรวจสอบว่า $f(x)$ ต่อเนื่องที่ $x=2$ หรือไม่

วิธีทำ 1. $f(2)=5$ หาค่าได้

2. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=8$ เพราะว่า

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-} x^2+4=8$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+} x^3=8$$

3. เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)$

ดังนั้น ฟังก์ชัน $f(x)$ ต่อเนื่องที่ $x=2$

ตัวอย่าง 1.59 กำหนดให้

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 20}{x + 5}$$

จงตรวจสอบว่า $f(x)$ ต่อเนื่องที่ $x = -5$ หรือไม่

วิธีทำ เนื่องจาก $f\left(-5\right) = \dfrac{(-5)^2 + (-5) - 20}{(-5+5)} = \dfrac{0}{0}$ หาค่าไม่ได้

จึงไม่ต้องพิจารณาข้อที่ 2 และ 3 ต่อ

ดังนั้น ฟังก์ชัน $f(x)$ ไม่ต่อเนื่องที่ $x = -5$

ตัวอย่าง 1.60 กำหนดให้

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3, & x \geq 3 \\ 2x - 1, & x < 3 \end{cases}$$

จงตรวจสอบว่า $f(x)$ ต่อเนื่องที่ $x = 3$ หรือไม่

วิธีทำ 1. $f(3) = 3^2 + 3 = 12$

2. $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ ไม่มีลิมิตเพราะว่า

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} 2x - 1 = 2(3) - 1 = 5$$

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} x^2 + 3 = (3)^2 + 3 = 12$$

ไม่ต้องพิจารณาข้อ 3 ต่อ

ดังนั้น ฟังก์ชัน $f(x)$ ไม่ต่อเนื่องที่ $x = 3$

1.5 สรุปท้ายบทที่ 1

ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชันนั้นเป็นพื้นฐานที่สำคัญอย่างยิ่งในการศึกษาเนื้อหาต่าง ๆ ในบทถัดไป จากการที่ได้ศึกษาเรื่องลิมิตนั้นทำให้เห็นถึงความหมายของลิมิตได้อย่างชัดเจนมากยิ่งขึ้น ดังนั้นเมื่อเราได้รู้ความหมายของลิมิตแล้วนั้นเราก็จะสามารถพิสูจน์ลิมิตโดยใช้บทนิยามของลิมิตได้ ซึ่งจะแสดงให้เห็นได้อย่างชัดเจนว่าลิมิตนั้นคืออะไร และทำให้สามารถแสดงการเขียนลิมิต พร้อมทั้งตรวจสอบว่าแต่ละฟังก์ชันนั้นมีหรือไม่มีลิมิตก็ได้โดยใช้ทฤษฎีต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้อง โดยหลักที่สำคัญต้องพิจารณาการหาค่าลิมิตนั้นก็คือต้องพิจารณาลิมิตทางซ้ายและลิมิตทางขวาก่อนเสมอ ยกเว้นกรณีลิมิต (ค่าจริง) ที่จุดอนันต์ และลิมิตค่าอนันต์ที่จุดอนันต์ ส่วนการพิจารณาว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้นั้นต่อเนื่องหรือไม่ต่อเนื่อง ณ จุดใด $x = a$ หรือไม่นั้น ก็ตรวจสอบแค่ว่า $f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$ หรือไม่ถ้าเป็นจริงแสดงว่าฟังก์ชัน $f(x)$ ต่อเนื่องที่จุด $x = a$

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 1

1. จงหาค่าลิมิตที่กำหนดให้ต่อไปนี้ (ถ้าลิมิตหาค่าได้)

1.1 $\lim\limits_{x\to 2}\left(x+3\right)$ 1.2 $\lim\limits_{x\to 5}\left(x^2-5\right)$

1.3 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 1.4 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\left(x-2\right)x}{\left|x-2\right|}$

1.5 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(x-2\right)\left|x\right|}{x}$

2. จงใช้บทนิยามพิสูจน์ลิมิตที่กำหนดให้ต่อไปนี้

2.1 $\lim\limits_{x\to 2}\left(x+1\right)=3$ 2.2 $\lim\limits_{x\to 3}\left(x-8\right)=-5$

2.3 $\lim\limits_{x\to 3}x^2=9$ 2.4 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{1}{3}$

3. จงหาค่าลิมิตที่กำหนดให้ต่อไปนี้ (ถ้าลิมิตหาค่าได้)

3.1 $\lim\limits_{x\to 2^-}\left(x+3\right)$ 3.2 $\lim\limits_{x\to 2^+}\left(x+3\right)$

3.3 $\lim\limits_{x\to 5^-}\left(x^2-5\right)$ 3.4 $\lim\limits_{x\to 5^+}\left(x^2-5\right)$

3.5 $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{2}{x+1}$ 3.6 $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2}{x+1}$

3.7 $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x\left(x-2\right)}{x^2}$ 3.8 $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x\left(x-2\right)}{x^2}$

3.9 $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\left(x^2-2x\right)}{x}$ 3.10 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\left(x^2-2x\right)}{x}$

4. จงหาค่าลิมิตที่กำหนดให้ต่อไปนี้ (ถ้าลิมิตหาค่าได้)

4.1 $\lim\limits_{x\to 5}\left(x+6\right)$ 4.2 $\lim\limits_{x\to 3}\left(x^2+3\right)$

4.3 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x\left(x-2\right)}{x^2}$ 4.4 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x\left(x-2\right)}{x}$

4.5 $\lim_{x\to 1}\frac{x\sqrt{x-2}}{x}$

4.6 $\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2-2x+3)}{x^2-1}$

4.7 $\lim_{x\to 3}\sqrt{x-3}$

4.8 $\lim_{x\to 7}\frac{x\sqrt{x-3}}{x-1}$

4.9 $\lim_{x\to 1}\frac{|x-1|(x^2-2x+3)}{x^2-1}$

4.10 $\lim_{x\to 2}\frac{|x-2|}{x+2}$

4.11 $\lim_{x\to -2}\frac{|x+2||x+5|}{x+2}$

4.12 $\lim_{x\to 1}\frac{|x+2|(x^2-1)}{|x-1|}$

4.13 $\lim_{x\to -1}\frac{x^2+3x+2}{|x+1|}$

4.14 $\lim_{x\to -1}\frac{|x^2+3x+2|}{|x+1|}$

5. กำหนดให้ $f(x)=\begin{cases}-2, & x>0\\ 3, & x=0\\ 1, & x<0\end{cases}$ จงหาค่าลิมิตที่กำหนดให้ต่อไปนี้ (ถ้าลิมิตหาค่าได้)

1. $\lim_{x\to -1}f(x)$
2. $\lim_{x\to 0}f(x)$
3. $\lim_{x\to 3}f(x)$

6. กำหนดให้ $f(x)=\begin{cases}x^2-3, & x>4\\ 3x+1, & x\le 4\end{cases}$ จงหาค่าลิมิตที่กำหนดให้ต่อไปนี้ (ถ้าลิมิตหาค่าได้)

1 $\lim_{x\to 3}f(x)$

2 $\lim_{x\to 4}f(x)$

3 $\lim_{x\to 5}f(x)$

7. กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} 2x-3, & x>3 \\ x^2+1, & x=3 \\ 3x+2, & x<3 \end{cases}$ จงหาค่าลิมิตที่กำหนดให้ต่อไปนี้ (ถ้าลิมิตหาค่าได้)

1 $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

2 $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$

3 $\lim\limits_{x \to 5} f(x)$

8. จงหาค่าลิมิตที่กำหนดให้ต่อไปนี้ (ถ้าลิมิตหาค่าได้)

8.1 $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{1}{x-3}$

8.2 $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x}{\left(x-2\right)^2}$

8.3 $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{1}{\left(x-3\right)^2}$

8.4 $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x}{x^2-3x}$

8.5 $\lim\limits_{x \to 7} \dfrac{1}{x^2-5x-14}$

8.6 $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x}{x^2-5x-14}$

8.7 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2+6x-7}{\left(x-1\right)^2}$

8.8 $\lim\limits_{x \to -7} \dfrac{x^2+6x-7}{x+7}$

9. จงหาค่า $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ เมื่อกำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-x}, & x>1 \\ \dfrac{2}{(x-1)^2}, & x>1 \end{cases}$ (ถ้าลิมิตหาค่าได้)

10. จงหาค่า $\lim\limits_{x \to 7} f(x)$ เมื่อกำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2-5x-14}, & x>7 \\ \dfrac{x+2}{x^2-5x-14}, & x \le 7 \end{cases}$ (ถ้าลิมิตหาค่าได้)

11. จงหาค่าลิมิตที่กำหนดให้ต่อไปนี้ (ถ้าลิมิตหาค่าได้)

11.1 $\lim_{x\to\infty} \frac{3}{x^5}$

11.2 $\lim_{x\to-\infty} \frac{7x-3}{x+2}$

11.3 $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^4+3x^2-3}{x^4+2x-1}$

11.4 $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+2x^2-8}{3x^4-x+5}$

11.5 $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^4+2x^2-7}{3x^5-x+5}$

11.6 $\lim_{x\to\infty} \frac{2x-8}{\sqrt{x^2+x+3}}$

11.7 $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x-1}{\sqrt{x^2+x+3}}$

11.8 $\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2-1}{\sqrt{x^4+x^2+3}}$

11.9 $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2-1}{\sqrt{x^4+x^2+3}}$

11.10 $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^4+x^2+3}$

12. จงพิจารณาว่าฟังก์ชันแต่ละข้อต่อไปนี้ต่อเนื่องที่จุดที่กำหนดหรือไม่

12.1 $f(x) = x+3$ ที่ $x=1$

12.2 $f(x) = \begin{cases} x^2-3, & x>4 \\ 3x+1, & x\le 4 \end{cases}$ ที่ $x=4$

12.3 $f(x) = \begin{cases} -2, & x>0 \\ 3, & x=0 \\ 1, & x<0 \end{cases}$ ที่ $x=0$

12.4 $f(x) = \begin{cases} 2x-3, & x>3 \\ x^2+1, & x=3 \\ 3x+2, & x<3 \end{cases}$ ที่ $x=3$

12.5 $f(x) = \begin{cases} x^2-4, & x<2 \\ 5, & x=2 \\ x+2, & x>2 \end{cases}$ ที่ $x=2$

12.6 $f(x)=\begin{cases} x^2-4, & x<-3 \\ 5, & x=-3 \\ x+2, & x>-3 \end{cases}$ ที่ $x=-3$

12.7 $f(x)=\begin{cases} 2x^2-2, & x<4 \\ x, & x=4 \\ x+5, & x>4 \end{cases}$ ที่ $x=4$

13. กำหนด $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x\leq 1 \\ 2x-1, & 1<x\leq 3 \\ x+2, & x>3 \end{cases}$

จงพิจารณาว่าฟังก์ชัน $f\left(x\right)$ ต่อเนื่องที่จุดที่กำหนดให้หรือไม่

1 $x=0$

2 $x=1$

3 $x=2$

4 $x=3$

5 $x=4$

บทที่ 2
อนุพันธ์ของฟังก์ชัน

คณิตศาสตร์สำหรับวิทยาศาสตร์ 1 นั้นเป็นส่วนหนึ่งของวิชาที่เรียกว่า แคลคูลัส ซึ่งแคลคูลัสนั้นเป็นคณิตศาสตร์แขนงหนึ่งที่มี ไอแซก นิวตัน นักคณิตศาสตร์ชาวอังกฤษ และ กอตต์ฟรีด วิลเฮล์ม ไลบ์นิตซ์ นักคณิตศาสตร์ชาวเยอรมัน เป็นผู้ให้กำเนิด ซึ่งมีประโยชน์ต่อวิทยาการในสาขาต่าง ๆ มากมาย เช่น ฟิสิกส์ เคมี ชีววิทยา วิศวกรรมศาสตร์ ดาราศาสตร์ เศรษฐศาสตร์ สังคมวิทยา และพฤติกรรมทางจิตวิทยา ตลอดจนเป็นพื้นฐานของการศึกษาคณิตศาสตร์สาขาอื่น ๆ แทบทุกสาขา ดังนั้นสำหรับเรื่องอนุพันธ์ของฟังก์ชัน ก็เป็นส่วนหนึ่งของรายวิชาคณิตศาสตร์สำหรับวิทยาศาสตร์ 1 เช่นกัน โดยกล่าวถึงอัตราการแปรค่า อัตราการแปรค่าชั่วขณะ ส่วนเปลี่ยนแปลงและอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ย ซึ่งมีประโยชน์อย่างกว้างขวางในการแก้ปัญหาต่าง ๆ ซึ่งจะกล่าวในบทที่ 4 เรื่องการประยุกต์อนุพันธ์ และจากบทที่ 2 เรื่องลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชันที่ผู้เรียนได้ศึกษาผ่านมานั้นเป็นการหาเฉพาะลิมิตของฟังก์ชันพีชคณิตเท่านั้น ส่วนในบทนี้จะแบ่งการหาอนุพันธ์ออกเป็น 2 ประเภท คืออนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิต และอนุพันธ์ของฟังก์ชันอดิศัย ก่อนที่จะศึกษาอนุพันธ์ของฟังก์ชันนั้น เราจะศึกษาส่วนเปลี่ยนแปลงและอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของฟังก์ชันเพื่อนให้ผู้เรียนได้ศึกษาเรื่องอนุพันธ์ได้เข้าใจดียิ่งขึ้นน

2.1 ส่วนเปลี่ยนแปลงและอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ย

โดยทั่ว ๆ ไปสำหรับ $y = f(x)$ จะได้ว่าเมื่อ x มีค่าเปลี่ยนไปค่าของฟังก์ชัน $f(x)$ ก็เปลี่ยนไปด้วยคือเมื่อ x เปลี่ยนจาก x ไปเป็น $x + \Delta x$ ค่าของฟังก์ชันจะเปลี่ยนจาก $f(x)$ ไปเป็น $f(x+\Delta x)$ ดังนั้น**ปริมาณการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชัน**นี้คือ $f(x+\Delta x) - f(x)$ ในขณะที่ปริมาณเปลี่ยนแปลงของ x คือ Δx และเรียกอัตราส่วน $\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ ว่า **อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ย** (เฟื่องฟ้า ศรีจันทพงศ์ และคณะ, 2553 : 53)

พิจารณา $f(x) = x^2 + 1$ ถ้า x เปลี่ยนจาก 2 ไปเป็น 5 ค่า $\Delta x = 3$ จะได้อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยเท่ากับ 21 ถ้า x เปลี่ยนจาก 2 ไปเป็น 3 ค่า $\Delta x = 1$ อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยมีค่าเท่ากับ 5 ถ้า x เปลี่ยนจาก 2 ไปเป็น 2.1 ค่า $\Delta x = 0.1$ อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยมี

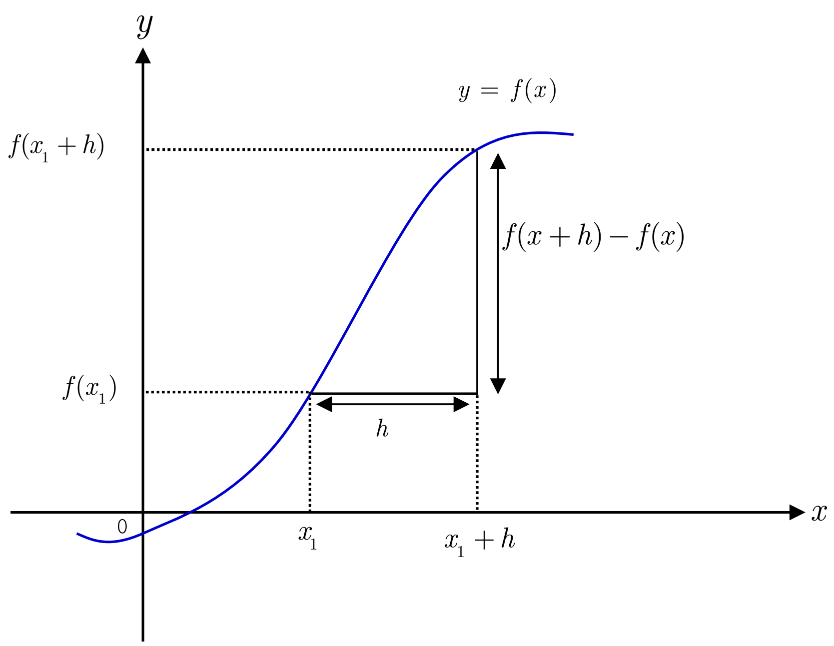
ค่าเท่ากับ 4.1 และถ้า x เปลี่ยนจาก 2 ไปเป็น 2.01 ค่า $\Delta x = 0.01$ จะได้อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยเท่ากับ 4.01 ต่อไปเรื่อย ๆ

จะเห็นได้ว่าอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ $y = f(x)$ ขึ้นอยู่กับ Δx ถ้าให้ Δx มีค่าเข้าใกล้ 6 แล้วอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยมีค่าเข้าใกล้ค่าคงตัวค่าหนึ่ง เราเรียกอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยเมื่อ Δx เข้าใกล้ศูนย์นี้ว่า**อัตราการเปลี่ยนแปลงชั่วขณะ** ของ $y = f(x)$ ในทางคณิตศาสตร์เราเรียกอัตราการเปลี่ยนแปลงของ $y = f(x)$ ที่ x ใด ๆ ว่า **อนุพันธ์** ของ $y = f(x)$

2.2 อนุพันธ์ของฟังก์ชัน

เลิศ สิทธิโกศล (2541 : 32-33) ได้ให้รายระเอียดไว้ดังต่อไปนี้

กำหนดให้ $y = f(x)$ ซึ่งหมายถึง y เป็นฟังก์ชันที่ขึ้นอยู่กับตัวแปร x



ภาพประกอบ 2.1. กราฟแสดงอัตราการเปลี่ยนแปลงความชันของฟังก์ชัน $f(x)$

ที่มา : เลิศ สิทธิโกศล. 2541 : 32

ถ้า $f(x)$ มีความต่อเนื่องทุก ๆ ค่าของ x อัตราการเปลี่ยนแปลงของ $f(x)$ ในช่วง x_1 ถึง $f(x_1+h)$ คือ $\dfrac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h}$ อัตราการเปลี่ยนแปลงนี้เรียกว่าความชัน กรณีที่กราฟเป็นเส้นตรงหรือ $f(x)$ มีการเปลี่ยนแปลงเป็นเชิงเส้นกับค่า x ความชันจะคงที่ แต่ถ้า $f(x)$ ไม่เป็นเชิงเส้นกับ x หรือกราฟเป็นเส้นโค้งดังรูปอัตราการเปลี่ยนแปลงของ y หรือ $f(x)$ ในช่วง x_1 ถึง x_1+h เป็นอัตราการเปลี่ยนแปลงโดยเฉลี่ย

แต่ถ้าให้ช่วงจาก x_1 ถึง x_1+h แคบเข้านั่นคือให้ h เข้าใกล้ 0 อัตราการเปลี่ยนแปลงดังกล่าวก็จะเข้าใกล้อัตราการเปลี่ยนแปลง ณ ตำแหน่ง $x=x_1$ นั่นคือ $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h}$ อัตราการเปลี่ยนแปลงของ y หรือ $f(x)$ ณ $x=x_1$ กรณีทั่วไป $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ คือ อัตราการเปลี่ยนแปลงของ y หรือ $f(x)$ ณ ค่า x ใด ๆ ซึ่งหมายถึงความชันของกราฟหรือความชันของฟังก์ชันที่จุด x ใด ๆ นั่นเอง

บทนิยาม 2.1

กำหนดให้ $y=f(x)$ เป็น**ฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่** $x=a$

ถ้า $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(a+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ หาค่าได้ และเขียนแทนค่าที่ได้นี้ว่า $f'(a)$ และเรียกว่า อนุพันธ์ของ f ที่ a นั่นคือ

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \text{ เมื่อกำหนด } \Delta x=h$$

หมายเหตุ 2.1

1. ถ้า $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ หาค่าไม่ได้เราจะกล่าวว่าฟังก์ชัน f **ไม่สามารถหาอนุพันธ์ได้ที่** $x=a$

2. สัญลักษณ์ที่ใช้แทนอนุพันธ์ของ f ที่ x ใด ๆ คือ $f'(x)$ ซึ่งจะเท่ากับ $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ และจะเขียนเทนด้วย $\dfrac{dy}{dx},\dfrac{d}{dx}f(x)$ หรือ y'

จากบทนิยาม 2.1

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ หาค่าได้ก็ต่อเมื่อ $\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ และจากบทที่ผ่านมานั้นเราเรียก $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ ว่าเป็นลิมิตทางขวาของฟังก์ชัน $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ และในทำนองเดียวกันก็เรียก $\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ ว่าเป็นลิมิตทางซ้ายของฟังก์ชัน $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ ต่อไปนี้เราจะนิยาม $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ และ $\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ ในรูปของอนุพันธ์ดังต่อไปนี้

บทนิยาม 2.2

ฟังก์ชัน $y=f(x)$ **เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ด้านขวาได้ที่** $x=a$ ถ้า $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ หาค่าได้ และจะเรียกลิมิตนี้ว่า **อนุพันธ์ด้านขวา** ของ f ที่ a เขียนแทนด้วย $f'(a^+)$

บทนิยาม 2.3

ฟังก์ชัน $y=f(x)$ **เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ด้านซ้ายได้ที่** $x=a$ ถ้า $\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ หาค่าได้ และจะเรียกลิมิตนี้ว่า **อนุพันธ์ด้านซ้าย** ของ f ที่ a เขียนแทนด้วย $f'(a^-)$

หมายเหตุ 2.2

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

$$\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

ตัวอย่าง 2.1 จงหาอนุพันธ์ของ $f(x)=x^2-2x$

1) ที่จุด x ใด ๆ
2) ที่จุด $x=1$
3) ที่จุด $x=-2$

วิธีทำ 1) อนุพันธ์ของ $f(x)=x^2-2x$ ที่จุด x ใด ๆ คือ

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\left[(x+h)^2-2(x+h)\right]-\left[x^2-2x\right]}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\left[x^2+2xh+h^2-2x-2h\right]-\left[x^2-2x\right]}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{x^2+2xh+h^2-2x-2h-x^2+2x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2-2h}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(2x+h-2)h}{h}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{h\to 0}(2x+h-2) \\
&= 2x+0-2 \\
&= 2x-2
\end{aligned}$$

ดังนั้น อนุพันธ์ของ $f(x)=x^2-2x$ ที่จุด x ใด ๆ คือ $2x-2$

วิธีทำ 2) อนุพันธ์ของ $f(x)=x^2-2x$ ที่จุด $x=1$

จาก $f'(x)=2x-2$

จะได้ว่า $f'(1)=2(1)-2=0$

ดังนั้น อนุพันธ์ของ $f(x)=x^2-2x$ ที่จุด $x=1$ คือ 0

วิธีทำ 3) อนุพันธ์ของ $f(x)=x^2-2x$ ที่จุด $x=-2$

จาก $f'(x)=2x-2$

จะได้ว่า $f'(-2)=2(-2)-2=-6$

ดังนั้น อนุพันธ์ของ $f(x)=x^2-2x$ ที่จุด $x=-2$ คือ -6

ตัวอย่าง 2.2 จงหาอนุพันธ์ของ $f(x)=x^3-2x$ ที่จุด x ใด ๆ

วิธีทำ อนุพันธ์ของ $f(x)=x^3-2x$ ที่จุด x ใด ๆ

$$
\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\left[(x+h)^3-2(x+h)\right]-\left[x^3-2x\right]}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\left[(x^3+3x^2h+3xh^2+h^3)-(2x+2h)\right]-\left[x^3-2x\right]}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\left[x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-2x-2h\right]-\left[x^3-2x\right]}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-2x-2h-x^3+2x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{3x^2h+3xh^2+h^3-2h}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(3x^2+3xh+h^2-2)h}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}(3x^2+3xh+h^2-2) \\
&= 3x^2-2
\end{aligned}
$$

ดังนั้น อนุพันธ์ของ $f(x)=x^3-2x$ ที่จุด x ใด ๆ คือ $3x^2-2$

ตัวอย่าง 2.3 กำหนด $f(x)=\left|x\right|$ จงหาค่าต่อไปนี้ ถ้าหาค่าได้

1) อนุพันธ์ด้านซ้ายของ f ที่ 0 2) อนุพันธ์ด้านขวาของ f ที่ 0

3) อนุพันธ์ของ f ที่ 0

วิธีทำ 1) อนุพันธ์ด้านซ้ายของ f ที่ 0 คือ

$$
\begin{aligned}
f'(0^-) &= \lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \\
&= \lim_{x\to 0^-}\frac{\left|x\right|-\left|0\right|}{x} \\
&= \lim_{x\to 0^-}\frac{\left|x\right|}{x} \\
&= \lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x} \\
&= -1
\end{aligned}
$$

วิธีทำ 2) อนุพันธ์ด้านขวาของ f ที่ 0 คือ

$$\begin{aligned}
f'(0^+) &= \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\\
&= \lim_{x\to 0^+}\frac{\left|x\right|-\left|0\right|}{x}\\
&= \lim_{x\to 0^+}\frac{\left|x\right|}{x}\\
&= \lim_{x\to 0^-}\frac{x}{x}\\
&= 1
\end{aligned}$$

เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} \neq \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ จะได้ว่า $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ หาค่าไม่ได้

ดังนั้น อนุพันธ์ของ f ที่ 0 หาค่าไม่ได้

ตัวอย่าง 2.4 กำหนด $f(x)=\begin{cases}3x-1, & x\le 1\\ x^3+1, & x>1\end{cases}$ จงหาค่า $f'(x)$

วิธีทำ เราจะแยกพิจารณาเป็น 3 กรณีดังต่อไปนี้

กรณีที่ 1 $x<1$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\left[3(x+h)-1\right]-\left[3x-1\right]}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\left[3x+3h-1\right]-\left[3x-1\right]}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{3x+3h-1-3x+1}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{3h}{h}\\
&= \lim_{h\to 0} 3\\
&= 3
\end{aligned}$$

กรณีที่ 2 $x > 1$

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\left[(x+h)^3+1\right]-\left[x^3+1\right]}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\left[x^3+3x^2h+3xh^2+h^3+1\right]-\left[x^3+1\right]}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3+1-x^3-1}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(3x^2+3xh+h^2)h}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}3x^2+3xh+h^2 \\
&= 3x^2
\end{aligned}
$$

กรณีที่ 3 $x = 1$ เนื่องจาก $x = 1$ ค่าทางซ้ายและทางขวาของฟังก์ชันต่างกันดังนั้นเราจึงต้องพิจารณาอนุพันธ์ด้านซ้ายและอนุพันธ์ด้านขวาดังต่อไปนี้

$$
\begin{aligned}
f'(1^+) &= \lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} \\
&= \lim_{x\to 1^+}\frac{\left[x^3+1\right]-\left[3(1)-1\right]}{x-1} \\
&= \lim_{x\to 1^+}\frac{x^3+1-2}{x-1} \\
&= \lim_{x\to 1^+}\frac{x^3-1}{x-1} \\
&= \lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} \\
&= \lim_{x\to 1^+}(x^2+x+1) \\
&= 3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f'(1^-) &= \lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \\
&= \lim_{x\to 1^+} \frac{\left[3x-1\right]-\left[3(1)-1\right]}{x-1} \\
&= \lim_{x\to 1^+} \frac{3x-1-2}{x-1} \\
&= \lim_{x\to 1^+} \frac{3x-3}{x-1} \\
&= \lim_{x\to 1^+} \frac{3(x-1)}{x-1} \\
&= \lim_{x\to 1^+} 3 \\
&= 3
\end{aligned}
$$

ดังนั้น จากทั้งสามกรณีสรุปได้ว่า $f'(x) = \begin{cases} 3, & x \le 1 \\ 3x^2, & x > 1 \end{cases}$

2.3 การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิต

จะเห็นว่าการใช้นิยามเพื่อหาค่าอนุพันธ์นั้น จะมีความยุ่งยากและสับสนเพราะต้องอาศัยเรื่องลิมิตในการหาค่าซึ่งเสียเวลามากในการคำนวณ โดยการหาอนุพันธ์นั้นจะสะดวกและรวดเร็วยิ่งขึ้นนั้นจึงมีการสร้างสูตรสำหรับการหาอนุพันธ์ขึ้นมาโดยจะได้กล่าวเป็นทฤษฎีบทต่อ ๆ ไปนี้ (สุรวิทย์ ตันแต่งผล และอนุสรณ์ ชนวีรยุทธ, 2557 : 41)

หมายเหตุ 2.3

การเขียนอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $y = f(x)$ สามารถแทนด้วย $f'(x)$, y' , $\dfrac{dy}{dx}$ หรือ $\dfrac{d}{dx}f(x)$

ทฤษฎีบท 2.1

ถ้า $y = f(x) = c$ เมื่อ c คือค่าคงตัว แล้ว $\dfrac{d}{dx}f(x) = 0$

ตัวอย่าง 2.5 กำหนด $y = 3$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

วิธีทำ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}(3)$

$= 0$

ดังนั้น $\dfrac{dy}{dx} = 0$

> **ทฤษฎีบท 2.2**
>
> ถ้า $y = f(x) = x^n$ แล้ว $\dfrac{d}{dx}f(x) = \dfrac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$
>
> เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก

ตัวอย่าง 2.6 กำหนด $y = x^3$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

วิธีทำ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}\left(x^3\right)$

$= 3x^2$

ดังนั้น $\dfrac{dy}{dx} = 3x^2$

ตัวอย่าง 2.7 กำหนด $f(x) = x^{100}$ จงหา $\dfrac{d}{dx}f'(x)$

วิธีทำ $\dfrac{d}{dx}f(x) = \dfrac{d}{dx}\left(x^{100}\right)$

$= 100x^{99}$

ดังนั้น $\dfrac{dy}{dx} = 100x^{99}$

> **ทฤษฎีบท 2.3**
>
> กำหนดให้ c เป็นค่าคงตัวถ้า $y = f(x) = cu(x)$ เมื่อ $u(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ที่ x แล้ว $\dfrac{d}{dx}f(x) = \dfrac{d}{dx}c\,u(x) = c\dfrac{d}{dx}u(x)$

ทฤษฎีบท 2.4

ถ้า $u(x)$, $v(x)$ เป็นฟังก์ชันของตัวแปร x และ $u(x)$, $v(x)$ มีอนุพันธ์ที่ x แล้ว $\frac{d}{dx}\left[u(x)+v(x)\right]=\frac{d}{dx}u(x)+\frac{d}{dx}v(x)$

สำหรับทฤษฎีบท 3.1 – 3.4 กล่าวถึงการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพหุนามโดยใช้สูตรอย่างง่าย $\frac{d}{dx}cx^n = cnx^{n-1}$ และสูตรเกี่ยวกับการหาอนุพันธ์ของผลบวกของฟังก์ชัน ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2.8 กำหนด $y = x^3 + 4x - 5$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}\left(x^3 + 4x - 5\right)\\ &= \frac{d}{dx}x^3 + \frac{d}{dx}4x - \frac{d}{dx}5\\ &= 3x^2 + 4\frac{dx}{dx} - 0\\ &= 3x^2 + 4\end{aligned}$$

ดังนั้น $\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 4$

ตัวอย่าง 2.9 กำหนด $y = x^{10} - 2x + 1$ จงหา $f'(x)$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{d}{dx}\left(x^{10} - 2x + 1\right)\\ &= \frac{d}{dx}x^{10} - \frac{d}{dx}2x + \frac{d}{dx}1\\ &= 10x^9 - 2 + 0\\ &= 10x^9 - 2\end{aligned}$$

ดังนั้น $f'(x) = 10x^9 - 2$

ต่อไปจะกล่าวถึงการหาอนุพันธ์ของผลคูณ ผลหารและตัวยกกำลังดังทฤษฎีบทต่อไปนี้ (ไมตรี ปชาเดชสุวัฒน์, 2532 : 31-33)

ทฤษฎีบท 2.5

ถ้า $u(x)$, $v(x)$ เป็นฟังก์ชันของตัวแปร x และ $u(x)$, $v(x)$ มีอนุพันธ์ที่ x แล้ว $\frac{d}{dx}\left[u(x)\cdot v(x)\right] = u(x)\frac{d}{dx}v(x) + v(x)\frac{d}{dx}u(x)$

ตัวอย่าง 2.10 กำหนด $f(x) = (x^3+4)(6x^2-5x)$ จงหา $f'(x)$

วิธีทำ $f'(x) = \frac{d}{dx}\left(x^3+4\right)\left(6x^2-5x\right)$

$$= \left(x^3+4\right)\frac{d}{dx}\left(6x^2-5x\right) + \left(6x^2-5x\right)\frac{d}{dx}\left(x^3+4\right)$$

$$= \left(x^3+4\right)\left(12x-5\right) + \left(6x^2-5x\right)\left(3x^2\right)$$

$$= 12x^4 - 5x^3 + 48x - 20 + 18x^4 - 15x^3$$

$$= 30x^4 - 20x^3 + 48x - 20$$

ดังนั้น $f'(x) = 30x^4 - 20x^3 + 48x - 20$

ตัวอย่าง 2.11 กำหนด $f(x) = (x-1)(x^{20}+5x)$ จงหา $f'(x)$

วิธีทำ $f'(x) = \frac{d}{dx}(x-1)(x^{20}+5x)$

$$= (x-1)\frac{d}{dx}(x^{20}+5x) + (x^{20}+5x)\frac{d}{dx}(x-1)$$

$$= \left(x-1\right)\left(20x^{19}+5\right) + \left(x^{20}+5x\right)(1)$$

$$= \left(x-1\right)\left(20x^{19}+5\right) + \left(x^{20}+5x\right)$$

$$= 20x^{20} - 20x^{19} + 10x - 5$$

ดังนั้น $f'(x) = 20x^{20} - 20x^{19} + 10x - 5$

ตัวอย่าง 2.12 กำหนด $f(x)=(x^3+1)(3x+5)$ จงหา $f'(x)$

วิธีทำ $f'(x)=\dfrac{d}{dx}(x^3+1)(3x+5)$

$$=(x^3+1)\frac{d}{dx}(3x+5)+(3x+5)\frac{d}{dx}(x^3+1)$$

$$=\left(x^3+1\right)(3)+\left(3x+5\right)\left(3x^2\right)$$

$$=\left(3x^3+3\right)+\left(9x^3+15x^2\right)$$

$$=12x^3+15x^2+3$$

ดังนั้น $f'(x)=12x^3+15x^2+3$

> **ทฤษฎีบท 2.6**
>
> ถ้า $u(x)$, $v(x)$ เป็นฟังก์ชันของตัวแปร x และ $u(x)$, $v(x)$ มีอนุพันธ์ที่ x และ $v(x)\neq 0$ แล้ว $\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]=\dfrac{v(x)\dfrac{d}{dx}u(x)-u(x)\dfrac{d}{dx}v(x)}{\left[v(x)\right]^2}$

ตัวอย่าง 2.13 กำหนด $y=\dfrac{x^3+4}{6x^2-5x}$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

วิธีทำ $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x^3+4}{6x^2-5x}\right)$

$$=\frac{\left(6x^2-5x\right)\dfrac{d}{dx}\left(x^3+4\right)-\left(x^3+4\right)\dfrac{d}{dx}\left(6x^2-5x\right)}{\left(6x^2-5x\right)^2}$$

$$=\frac{\left(6x^2-5x\right)\left(3x^2\right)-\left(x^3+4\right)\left(12x-5\right)}{\left(6x^2-5x\right)^2}$$

$$=\frac{6x^4-10x^3+48x-20}{\left(6x^2-5x\right)^2}$$

ดังนั้น $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{6x^4-10x^3+48x-20}{\left(6x^2-5x\right)^2}$

ตัวอย่าง 2.14 กำหนด $y = \dfrac{x-1}{x-3x^5}$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

วิธีทำ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x-1}{x-3x^5}\right)$

$$= \frac{\left(x-3x^5\right)\frac{d}{dx}\left(x-1\right) - \left(x-1\right)\frac{d}{dx}\left(x-3x^5\right)}{\left(x-3x^5\right)^2}$$

$$= \frac{\left(x-3x^5\right)\left(1\right) - \left(x-1\right)\left(1-15x^4\right)}{\left(x-3x^5\right)^2}$$

$$= \frac{12x^5 - 15x^4 + 1}{\left(x-3x^5\right)^2}$$

ดังนั้น $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{12x^5 - 15x^4 + 1}{\left(x-3x^5\right)^2}$

ทฤษฎีบท 2.7

ถ้า $u(x)$ เป็นฟังก์ชันของตัวแปร x และ $u(x)$ มีอนุพันธ์ที่ x แล้ว $\dfrac{d}{dx}[u(x)]^n = n[u(x)]^{n-1}\dfrac{d}{dx}u(x)$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม

ตัวอย่าง 2.15 กำหนด $f(x) = (x^5 + 4x)^{10}$ จงหา $f'(x)$

วิธีทำ $f'(x) = \dfrac{d}{dx}(x^5 + 4x)^{10}$

$$= 10(x^5 + 4x)^9 \frac{d}{dx}(x^5 + 4x)$$

$$= 10(x^5 + 4x)^9 (5x^4 - 4)$$

ดังนั้น $f'(x) = 10(x^5 + 4x)^9 (5x^4 - 4)$

ตัวอย่าง 2.16 กำหนด $f(x) = (x^6 - 3x + 1)^{101}$ จงหา $f'(x)$

วิธีทำ $f'(x) = \dfrac{d}{dx}\left(x^6 - 3x + 1\right)^{101}$

$$= 101(x^6 - 3x + 1)^{100} \frac{d}{dx}(x^6 - 3x + 1)$$

$$= 101(x^6 - 3x + 1)^{100}(6x^5 - 3)$$

ดังนั้น $f'(x) = 101(x^6 - 3x + 1)^{100}(6x^5 - 3)$

ตัวอย่าง 2.17 กำหนด $f\left(x\right) = \dfrac{1}{\left(x^6 - 3x + 1\right)^{11}}$ จงหา $f'\left(x\right)$

วิธีทำ $f'\left(x\right) = \dfrac{d}{dx}\left(x^6 - 3x + 1\right)^{-11}$

$$= -11\left(x^6 - 3x + 1\right)^{-12} \frac{d}{dx}\left(x^6 - 3x + 1\right)$$

$$= -11(x^6 - 3x + 1)^{-12}(6x^5 - 3)$$

ดังนั้น $f'(x) = -11\left(x^6 - 3x + 1\right)^{-12}\left(6x^5 - 3\right)$

ทฤษฎีบท 2.8

สำหรับจำนวนเต็มบวก n ใด ๆ และ $u(x) > 0$ มีอนุพันธ์ที่ x แล้ว $\dfrac{d}{dx}\left[u(x)\right]^{\frac{1}{n}} = \dfrac{1}{n}\left[u(x)\right]^{\frac{1}{n}-1} \dfrac{d}{dx}u(x)$

ทฤษฎีบท 2.9

สำหรับจำนวนตรรกยะ r ใด ๆ และ $u\left(x\right) > 0$ มีอนุพันธ์ที่ x แล้ว $\dfrac{d}{dx}[u(x)]^r = r[u(x)]^{r-1} \dfrac{d}{dx}u(x)$

ตัวอย่าง 2.18 กำหนด $f(x) = (x^5 + 4x)^{2/3}$ จงหา $f'(x)$

วิธีทำ $$f'(x) = \frac{d}{dx}(x^5 + 4x)^{2/3}$$
$$= \frac{2}{3}\left(x^5 + 4x\right)^{-1/3} \frac{d}{dx}\left(x^5 + 4x\right)$$
$$= \frac{2}{3}(x^5 + 4x)^{-1/3}(5x^4 + 4)$$

ดังนั้น $f'(x) = \frac{2}{3}(x^5 + 4x)^{-1/3}(5x^4 + 4)$

ตัวอย่าง 2.19 กำหนดให้ $y = \sqrt{3x^5 - 2x + 8}$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ $$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\sqrt{3x^5 - 2x + 8}$$
$$= \frac{d}{dx}(3x^5 - 2x + 8)^{1/2}$$
$$= \frac{1}{2}(3x^5 - 2x + 8)^{-1/2} \frac{d}{dx}(3x^5 - 2x + 8)$$
$$= \frac{1}{2}(3x^5 - 2x + 8)^{-1/2}(15x^4 - 2)$$
$$= \frac{15x^4 - 2}{2(3x^5 - 2x + 8)^{1/2}}$$

ดังนั้น $\frac{dy}{dx} = \frac{15x^4 - 2}{2(3x^5 - 2x + 8)^{1/2}}$

ตัวอย่าง 2.20 กำหนดให้ $y = \left(\frac{4x^2 - x}{5x^3 - 2}\right)^{12}$ จงหา y'

วิธีทำ $$y' = \frac{d}{dx}\left(\frac{4x^2 - x}{5x^3 - 2}\right)^{12}$$
$$= 12\left(\frac{4x^2 - x}{5x^3 - 2}\right)^{11} \frac{d}{dx}\left(\frac{4x^2 - x}{5x^3 - 2}\right)$$

$$= 12\left(\frac{4x^2 - x}{5x^3 - 2}\right)^{11} \frac{\left[(5x^3 - 2)\dfrac{d}{dx}(4x^2 - x) - (4x^2 - x)\dfrac{d}{dx}(5x^3 - 2)\right]}{(5x^3 - 2)^2}$$

$$= 12\left(\frac{4x^2 - x}{5x^3 - 2}\right)^{11} \frac{(2 - 16x + 10x^3 - 20x^4)}{(5x^3 - 2)^2}$$

ดังนั้น $y' = 12\left(\dfrac{4x^2 - x}{5x^3 - 2}\right)^{11} \dfrac{(2 - 16x + 10x^3 - 20x^4)}{(5x^3 - 2)^2}$

ตัวอย่าง 2.21 กำหนดให้ $y = (2x^3 - x)\sqrt{3x^5 - 2x + 8}$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

วิธีทำ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}(2x^3 - x)\sqrt{3x^5 - 2x + 8}$

$$= \frac{d}{dx}(2x^3 - x)(3x^5 - 2x + 8)^{1/2}$$

$$= \left[(2x^3 - x)\frac{d}{dx}(3x^5 - 2x + 8)^{1/2}\right] + \left[(3x^5 - 2x + 8)^{1/2}\frac{d}{dx}(2x^3 - x)\right]$$

$$= \left[(2x^3 - x)\frac{1}{2}(3x^5 - 2x + 8)^{-1/2}\frac{d}{dx}(3x^5 - 2x + 8)\right] + \left[(3x^5 - 2x + 8)^{1/2}\frac{d}{dx}(2x^3 - x)\right]$$

$$= \left[(2x^3 - x)\frac{1}{2}(3x^5 - 2x + 8)^{-1/2}(15x^4 - 2)\right] + \left[(3x^5 - 2x + 8)^{1/2}(6x^2 - 1)\right]$$

$$= \frac{1}{2}(3x^5 - 2x + 8)^{-1/2}\left[(2x^3 - x)(15x^4 - 2) + 2(3x^5 - 2x + 8)(6x^2 - 1)\right]$$

$$= (3x^5 - 2x + 8)^{-1/2}(66x^7 - 21x^5 - 28x^3 + 96x^2 - 16)$$

ดังนั้น $\dfrac{dy}{dx} = (3x^5 - 2x + 8)^{-1/2}(66x^7 - 21x^5 - 28x^3 + 96x^2 - 16)$

ตัวอย่าง 2.22 กำหนดให้ $f\left(x\right)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{\left(2x^2+x\right)^2}}$ และ $x\neq 0$ จงหาค่าของ $f'\left(x\right)$

วิธีทำ $$f'(x)=\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\sqrt[3]{\left(2x^2+x\right)^2}}\right]$$

$$=\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{(2x^2+x)^{2/3}}\right]$$

$$=\frac{d}{dx}(2x^2+x)^{-2/3}$$

$$=-\frac{2}{3}(2x^2+x)^{-5/3}\frac{d}{dx}(2x^2+x)$$

$$=-\frac{2}{3}\left(2x^2+x\right)^{-5/3}\left(4x+1\right)$$

ดังนั้น $f'(x)=-\dfrac{2}{3}\left(2x^2+x\right)^{-5/3}\left(4x+1\right)$

2.4 การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบ

ในหัวข้อที่ผ่านมานั้นเราได้สูตรในการหาอนุพันธ์ของ ผลบวก ผลคูณ และผลหารของฟังก์ชันแล้ว แต่การกระทำของฟังก์ชัน 2 ฟังก์ชันที่สำคัญอีกอย่างก็คือ การนำมาประกอบซึ่งจะได้เป็นฟังก์ชันขึ้นใหม่ เรียกว่า ฟังก์ชันประกอบ ซึ่งในที่นี้เราจะหาสูตรอนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบซึ่งจะมีประโยชน์มากในการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่สลับซับซ้อน (Wright,D.F. and New, B.D., 1992 : 85-86)

บทนิยาม 2.4

ให้ $f:A\to B$ และ $g:B\to C$ เป็นฟังก์ชันแล้ว **ฟังก์ชันประกอบ** ของ f และ g เขียนแทนด้วย $g\circ f$ และ $g\circ f=\left\{(x,z)\in A\times C:\right.$ มี $y\in B$ ซึ่ง $(x,y)\in f$ และ $\left.(y,z)\in g\right\}$ หรือ $g\circ f(x)=g\left(f(x)\right)$

กำหนด u เป็นฟังของ x นิยามโดย $u = f(x)$ และ y เป็นฟังก์ชันของ u นิยามโดย $y = g(u)$ แล้ว y จะเป็นฟังก์ชันของ x นิยามโดย $y = g\big(f(x)\big)$ นั่นคือ y เป็นฟังก์ชันประกอบของ f และ g ดังบทนิยาม 2.4

ทฤษฎีบท 2.10

f เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ที่ u และให้ g เป็นฟังก์ชันนิยามโดย

$$g\big(h\big) = \begin{cases} \dfrac{f(u+h)-f(u)}{h} - f'(u), & h \neq 0 \\ 0, & h = 0 \end{cases}$$

แล้ว g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $h = 0$ และ $f(u+h) - f(u) = \big[f'(u) + g(h)\big]h$

ทฤษฎีบท 2.11 กฎลูกโซ่

ถ้า $y = g(u)$ และเป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ที่ u และ $u = f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ที่ x แล้ว $y = g\big(f(x)\big)$ จะเป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ที่ x และ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

หรือ $$\frac{dy}{dx} = g'(u) \cdot f'(x)$$

ทฤษฎีบท 2.12

ให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และมีฟังก์ชันผกผันซึ่งต่อเนื่องบนโดเมน $\big[a,b\big]$ โดย $x = f^{-1}(y) = g(y)$ แล้ว $g'(y) = \dfrac{1}{f'(u)}$ หรือ $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{\frac{dy}{dx}}$ เมื่อ $f'(x)$ หาค่าได้และ $f'(x) \neq 0$

ตัวอย่าง 2.23 กำหนดให้ $y = u^3$ และ $u = x^2 - 2x + 5$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

วิธีที่ 1 ใช้กฎลูกโซ่

จาก $y = u^3$ จะได้ $\dfrac{dy}{du} = 3u^2$

และ $u = x^2 - 2x + 5$ จะได้ $\dfrac{du}{dx} = 2x - 2$

เนื่องจาก $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}$

จะได้ $\dfrac{dy}{dx} = 3u^2 \cdot (2x-2)$

$$\frac{dy}{dx} = 3(x^2 - 2x + 5)^2 (2x-2)$$

ดังนั้น $\dfrac{dy}{dx} = 3\left(x^2 - 2x + 5\right)^2 \left(2x-2\right)$

วิธีที่ 2 วิธีการแทนค่า

จาก $y = u^3$

และ $u = x^2 - 2x + 5$

จะได้ $y = (x^2 - 2x + 5)^3$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(x^2 - 2x + 5)^3 \\ &= 3(x^2 - 2x + 5)^2 \frac{d}{dx}(x^2 - 2x + 5) \\ &= 3(x^2 - 2x + 5)^2(2x-2) \end{aligned}$$

ดังนั้น $\dfrac{dy}{dx} = 3\left(x^2 - 2x + 5\right)^2\left(2x-2\right)$

ตัวอย่าง 2.24 กำหนดให้ $y = (2t-3)^5$ และ $t = x^2 - 2x + 5$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

วิธีที่ 1 ใช้กฎลูกโซ่

จาก $y = \left(2t-3\right)^5$ จะได้ $\dfrac{dy}{dt} = 10\left(2t-3\right)^4$

และ $t = x^2 - 2x + 5$ จะได้ $\dfrac{dt}{dx} = 2x - 2$

เนื่องจาก $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}$

จะได้ $\frac{dy}{dx}=10(2t-3)^4(2x-2)$

$$=10\left[2(x^2-2x+5)-3\right]^4(2x-2)$$

$$=10(2x^2-4x+10-3)^4(2x-2)$$

$$=10(2x^2-4x+7)^4(2x-2)$$

$$=10(2x^2-4x+7)^4 2(x-1)$$

$$=20(2x^2-4x+7)^4(x-1)$$

ดังนั้น $\frac{dy}{dx}=20(2x^2-4x+7)^4(x-1)$

วิธีที่ 2 วิธีการแทนค่า

จาก $y=2t-3$

และ $t=x^2-2x+5$

จะได้ $y=\left[2(x^2-2x+5)-3\right]^5$

$$=(2x^2-4x+10-3)^5$$

$$=(2x^2-4x+7)^5$$

และ $\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(2x^2-4x+7)^5$

$$=5(2x^2-4x+7)^4\frac{d}{dx}(2x^2-4x+7)$$

$$=5(2x^2-4x+7)^4(4x-4)$$

$$=20(2x^2-4x+4)^4(x-1)$$

ดังนั้น $\frac{dy}{dx}=20(2x^2-4x+4)^4(x-1)$

ตัวอย่าง 2.25 กำหนดให้ $y = x^5 - 2x^3 + x$ จงหา $\dfrac{dx}{dy}$

วิธีทำ จาก $y = x^5 - 2x^3 + x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^5 - 2x^3 + x)$$

$$\frac{dy}{dx} = 5x^4 - 6x^2 + 1$$

จาก $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{\frac{dy}{dx}}$

$$= \frac{1}{5x^4 - 6x^2 + 1}$$

ดังนั้น $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{5x^4 - 6x^2 + 1}$

ตัวอย่าง 2.26 กำหนดให้ $y = \dfrac{1}{\left(2x^5 - x^3 + 5x\right)^{10}}$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

วิธีทำ ให้ $y = \dfrac{1}{u^{10}}$ โดยที่ $u = 2x^5 - x^3 + 5x$

ดังนั้น $\dfrac{dy}{du} = \dfrac{d}{du}\left(\dfrac{1}{u^{10}}\right)$

$$= \frac{d}{du}u^{-10}$$
$$= -10u^{-11}$$

และ $\dfrac{du}{dx} = \dfrac{d}{dx}\left(2x^5 - x^3 + 5x\right)$

$$= 10x^4 - 3x^2 + 5$$

จาก $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}$

$$= -10u^{-11}\left(10x^4 - 3x^2 + 5\right)$$

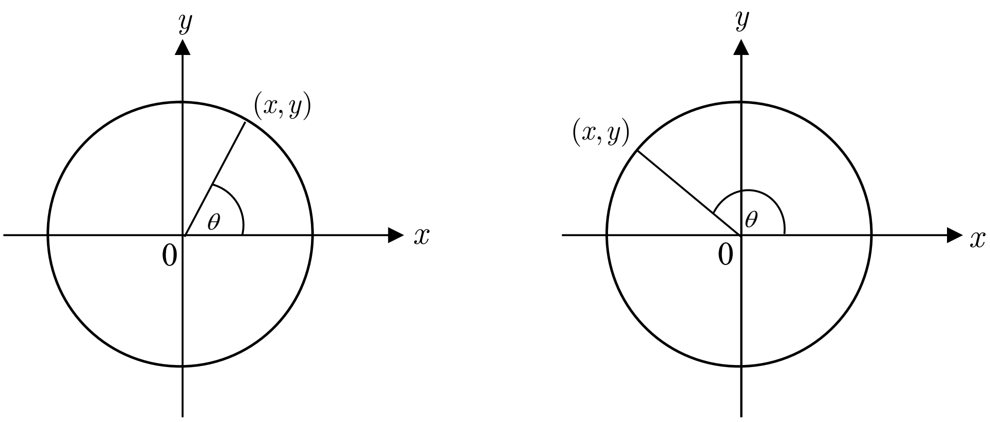
$$= -10\left(2x^5 - x^3 + 5x\right)^{-11}\left(10x^4 - 3x^2 + 5\right)$$

ดังนั้น $\dfrac{dy}{dx} = -10\left(2x^5 - x^3 + 5x\right)^{-11}\left(10x^4 - 3x^2 + 5\right)$

2.5 การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ในหัวข้อที่ผ่านมา ได้กล่าวถึงการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิตแต่ในหัวข้อนี้จะศึกษาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่ไม่ใช่ฟังก์ชันพีชคณิต โดยจะเรียกว่าฟังก์ชันอดิศัย ซึ่งในฟังก์ชันอดิศัยนี้ก็จะประกอบด้วยหลาย ๆ ฟังก์ชันได้แก่ ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ฟังก์ชันตีโกณมิติผกผัน ฟังก์ชันลอการิทึม ฟังก์ชันชี้กำลัง ฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิก และฟังก์ชันในรูป a^u และ u^v ซึ่งในหัวข้อนี้จะได้กล่าวถึงฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ก่อนจะศึกษาการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณ เพื่อเป็นการทบทวนจะกล่าวถึงนิยามพื้นฐานและเอกลักษณ์ตรีโกณมิติที่นักศึกษาต้องทราบก่อนดังต่อไปนี้ กำหนดวงกลมรัศมี r จุดศูนย์กลางที่จุดกำเนิดในระบบพิกัดฉาก θ เป็นมุมตรงจุดศูนย์กลางวัดจากแกน x ด้านบวกในทิศทวนเข็มนาฬิกา (x, y) เป็นจุดตัดของด้านประกอบมุม θ นี้กับวงกลม ดังรูป (คณาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยรามคำแหง, 2542 : 61)



ภาพประกอบ 2.2 วิธีการวัดมุม θ

ที่มา : รณชัย มาเจริญทรัพย์. 2551 : 163

บทนิยาม 2.5

ฟังก์ชันไซน์ และโคไซน์ ของมุม θ นิยามดังนี้ $\sin\theta = \dfrac{y}{r}$ และ $\cos\theta = \dfrac{x}{r}$

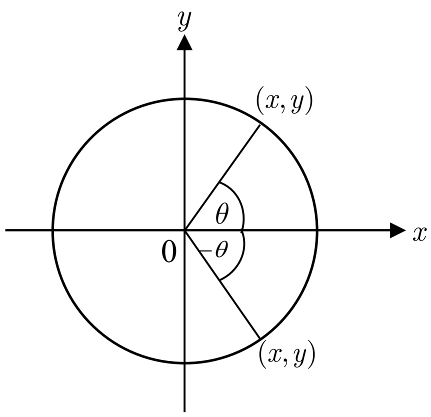
เมื่อ $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

นิยามของ $\sin\theta$ และ $\cos\theta$ นั้นจะไม่ขึ้นอยู่กับขนาดของวงกลมหรือ รัศมีของวงกลม แต่ขึ้นอยู่กับมุม θ เท่านั้นและหน่วยที่ใช้วัดมุมทั่วไปคือ องศา ซึ่งมีมุมรอบศูนย์กลางของวงกลมเท่ากับ 360 องศา แต่ในนิยามของฟังก์ชันตรีโกณมิตินั้นเป็นฟังก์ชันของจำนวนจริง ดังนั้นจึงใช้หน่วยวัดเป็นมุมเรเดียน ฉะนั้นจึงได้ความสัมพันธ์ดังนี้

360 องศา = 2π เรเดียน

หรือ 180 องศา = π เรเดียน

มุมลบคือมุมที่วัดจากแกน x ด้านบวกในทิศตามเข็มนาฬิกาดังรูป



ภาพประกอบ 2.3 มุม θ และมุม $-\theta$

ที่มา : รณชัย มาเจริญทรัพย์. 2551 : 164

ดังนั้นโดยนิยามของไซน์ และโคไซน์ได้ $\sin(-\theta) = -\sin\theta$ และ $\cos(-\theta) = \cos\theta$

บทนิยาม 2.6

ฟังก์ชันแทนเจนต์ มีบทนิยามดังนี้

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{เมื่อ } \cos x \neq 0$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \quad \text{เมื่อ } \sin x \neq 0$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} \quad \text{เมื่อ } \cos x \neq 0$$

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x} \quad \text{เมื่อ } \sin x \neq 0$$

เอกลักษณ์ที่สำคัญทางตรีโกณมิติมีดังต่อไปนี้

1. $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$
2. $1 + \tan^2 A = \sec^2 A$
3. $1 + \cot^2 A = \cos ec^2 A$
4. $\sin\left(A+B\right) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$
5. $\sin\left(A-B\right) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$
6. $\cos\left(A+B\right) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$
7. $\cos\left(A-B\right) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$
8. $\tan\left(A+B\right) = \dfrac{t\,\mathrm{an}\, A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$
9. $\tan\left(A-B\right) = \dfrac{t\,\mathrm{an}\, A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$
10. $\sin 2A = 2 \sin A \cos A$
11. $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$

$$= 2\cos^2 A - 1$$
$$= 1 - 2\sin^2 A$$

10. $\tan 2A = \dfrac{2\tan A}{1 - \tan^2 A}$
11. $\sin A + \sin B = 2\sin\left(\dfrac{A+B}{2}\right)\cos\left(\dfrac{A-B}{2}\right)$
14. $\sin A - \sin B = 2\cos\left(\dfrac{A+B}{2}\right)\sin\left(\dfrac{A-B}{2}\right)$
15. $\cos A + \cos B = 2\cos\left(\dfrac{A+B}{2}\right)\cos\left(\dfrac{A-B}{2}\right)$
16. $\cos A - \cos B = -2\sin\left(\dfrac{A+B}{2}\right)\sin\left(\dfrac{A-B}{2}\right)$

2.5.1 ทฤษฎีบทของอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ให้ $u = u(x)$ เป็นฟังก์ชันของตัวแปร x และ $u(x)$ มีอนุพันธ์ที่ x สำหรับการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิตินั้นอาศัยทฤษฎีบทต่าง ๆ แต่จะเว้นการพิสูจน์ทฤษฎีบท ดังต่อไปนี้ (จันทนีย์ กาญจนะโรจน์ และชุลี โชติกประคัลภ์, 2557 : 52-54)

ทฤษฎีบท 2.13

ถ้า $y = \sin x$ แล้ว $y' = \cos x$ หรือ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}\sin x = \cos x$

ข้อสังเกต 2.1

ถ้า u เป็นฟังก์ชันของ x ซึ่งหาอนุพันธ์ได้แล้วโดยกฎลูกโซ่จะได้ $\dfrac{d}{dx}\sin u = \cos u\dfrac{du}{dx}$

ทฤษฎีบท 2.14

ถ้า $y = \cos x$ แล้ว $y' = -\sin x$ หรือ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}\cos x = -\sin x$

ข้อสังเกต 2.2

ถ้า u เป็นฟังก์ชันของ x ซึ่งหาอนุพันธ์ได้แล้วโดยกฎลูกโซ่จะได้ $\dfrac{d}{dx}\cos u = -\sin u\dfrac{du}{dx}$

ตัวอย่าง 2.27 กำหนด $y = \sin(2x)$ จงหา y'

วิธีทำ $y = \sin(2x)$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{d}{dx}\sin(2x) \\ &= \left[\cos(2x)\right]\left[\frac{d}{dx}(2x)\right] \\ &= \left[\cos(2x)\right]\left[2\right] \\ &= 2\cos 2x \end{aligned}$$

ดังนั้น $y' = 2\cos 2x$

ตัวอย่าง 2.28 กำหนด $y=\sin\left(x^5-5x^3+3\right)$ จงหา y'

วิธีทำ $y=\sin\left(x^5-5x^3+3\right)$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{d}{dx}\sin\left(x^5-5x^3+3\right) \\ &= \cos\left(x^5-5x^3+3\right)\left[\frac{d}{dx}\left(x^5-5x^3+3\right)\right] \\ &= \left[\cos\left(x^5-5x^3+3\right)\right]\left[5x^4-15x^2\right] \end{aligned}$$

ดังนั้น $y'=\left(5x^4-15x^2\right)\cos\left(x^5-5x^3+3\right)$

ตัวอย่าง 2.29 กำหนด $y=\tan 3x$ จงหา y'

วิธีทำ $y=\tan 3x$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{d}{dx}\tan 3x \\ &= \frac{d}{dx}\frac{\sin 3x}{\cos 3x} \\ &= \frac{\cos 3x\frac{d}{dx}\sin 3x-\sin 3x\frac{d}{dx}\cos 3x}{\cos^2 3x} \\ &= \frac{\left(\cos 3x\cos 3x\right)\frac{d}{dx}\left(3x\right)+\left(\sin 3x\sin 3x\right)\frac{d}{dx}\left(3x\right)}{\cos^2 3x} \\ &= \frac{\left(\cos 3x\cos 3x\right)\left(3\right)+\left(\sin 3x\sin 3x\right)\left(3\right)}{\cos^2 3x} \\ &= \frac{3\left(\cos^2 3x+\sin^2 3x\right)}{\cos^2 3x} \\ &= \frac{3}{\cos^2 3x} \\ &= 3\sec^2 3x \end{aligned}$$

ดังนั้น $y'=3\sec^2 3x$

ตัวอย่าง 2.30 กำหนด $y = \cos^5\left(x^3+1\right)$ จงหา y'

วิธีทำ $y = \cos^5\left(x^3+1\right)$

$$y' = \frac{d}{dx}\cos^5\left(x^3+1\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\left[\cos\left(x^3+1\right)\right]^5$$

$$= 5\left[\cos\left(x^3+1\right)\right]^4\frac{d}{dx}\cos\left(x^3+1\right)$$

$$= 5\left[\cos\left(x^3+1\right)\right]^4\left[-\sin\left(x^3+1\right)\right]\frac{d}{dx}\left(x^3+1\right)$$

$$= 5\left[\cos(x^3+1)\right]^4\left[-\sin(x^3+1)\right]\left(3x^2\right)$$

$$= -15x^2\sin(x^3+1)\cos^4(x^3+1)$$

ดังนั้น $y' = -15x^2\sin(x^3+1)\cos^4(x^3+1)$

2.5.2 อนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ

สูตรอนุพันธ์ของ $\tan x$, $\cot x$, $\sec x$ และ $\operatorname{cosec} x$ หาได้โดยเขียนฟังก์ชันตรีโกณเหล่านี้ในรูปของ $\sin x$ และ $\cos x$ ดังแสดงในตัวอย่างจะได้

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\tan x &= \sec^2 x \\
\frac{d}{dx}\sec x &= \sec x\tan x \\
\frac{d}{dx}\cot x &= -\operatorname{cosec}^2 x \\
\frac{d}{dx}\operatorname{cosec} x &= -\operatorname{cosec} x\cot x
\end{aligned}$$

สรุปสูตรอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกนมิติได้ดังนี้ กำหนดให้ $u = u(x)$ เป็นฟังก์ชันของ x ซึ่งหาอนุพันธ์ได้ (ชัยสงคราม เครือหงส์, 2544 : 39)

1. $\dfrac{d}{dx}\sin u = \cos u\,\dfrac{du}{dx}$

2. $\dfrac{d}{dx}\cos u = -\sin u\,\dfrac{du}{dx}$

3. $\dfrac{d}{dx}\tan u \;=\; \sec^2 u\,\dfrac{du}{dx}$

4. $\dfrac{d}{dx}\sec u \;=\; \sec u\tan u\,\dfrac{du}{dx}$

5. $\dfrac{d}{dx}\cot u \;=\; -\operatorname{cosec}^2 u\,\dfrac{du}{dx}$

6. $\dfrac{d}{dx}\operatorname{cosec} u = -\operatorname{cosec} u\,\cot u\,\dfrac{du}{dx}$

เมื่อมีสูตรอนุพันธ์และของฟังก์ชันตรีโกนมิติทั้ง 6 สูตรแล้วเราก็จะสามารถหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติได้ง่ายขึ้นดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2.31 กำหนด $y=\tan\left(x^2-2x\right)^{21}$ จงหา y'

วิธีทำ $y=\tan\left(x^2-2x\right)^{21}$

$$
\begin{aligned}
y' &= \frac{d}{dx}\tan\left(x^2-2x\right)^{21}\\
&= \left[\sec^2\left(x^2-2x\right)^{21}\right]\frac{d}{dx}\left(x^2-2x\right)^{21}\\
&= \left[\sec^2\left(x^2-2x\right)^{21}\right]21\left(x^2-2x\right)^{20}\frac{d}{dx}\left(x^2-2x\right)\\
&= \left[\sec^2\left(x^2-2x\right)^{21}\right]21\left(x^2-2x\right)^{20}\left(2x-2\right)\\
&= 42\left[\sec^2\left(x^2-2x\right)^{21}\right]\left(x^2-2x\right)^{20}\left(x-1\right)\\
&= 42\left(x-1\right)\left(x^2-2x\right)^{20}\sec^2\left(x^2-2x\right)^{21}
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $y'=42\left(x-1\right)\left(x^2-2x\right)^{20}\sec^2\left(x^2-2x\right)^{21}$

ตัวอย่าง 2.32 กำหนด $y = \cot\left(x^3 - 5\right)$ จงหา y'

วิธีทำ $y = \cot\left(x^3 - 5\right)$

$$y' = \frac{d}{dx}\cot\left(x^3 - 5\right)$$

$$= \left[-\operatorname{cosec}^2\left(x^3 - 5\right)\right]\frac{d}{dx}\left(x^3 - 5\right)$$

$$= \left[-\operatorname{cosec}^2\left(x^3 - 5\right)\right]\left(3x^2\right)$$

$$= -\left(3x^2\right)\operatorname{cosec}^2\left(x^3 - 5\right)$$

ดังนั้น $y' = -\left(3x^2\right)\operatorname{cosec}^2\left(x^3 - 5\right)$

ตัวอย่าง 2.33 กำหนด $y = \sec^2\left(3x^3 - 5\right)$ จงหา y'

วิธีทำ $y = \sec^2\left(3x^3 - 5\right)$

$$y' = \frac{d}{dx}\sec^2\left(3x^3 - 5\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\left[\sec\left(3x^3 - 5\right)\right]^2$$

$$= 2\sec\left(3x^3 - 5\right)\frac{d}{dx}\sec\left(3x^3 - 5\right)$$

$$= 2\sec\left(3x^3 - 5\right)\sec\left(3x^3 - 5\right)\tan\left(3x^3 - 5\right)\frac{d}{dx}\left(3x^3 - 5\right)$$

$$= 2\left(9x^2\right)\sec^2\left(3x^3 - 5\right)\tan\left(3x^3 - 5\right)$$

$$= 18x^2\sec^2\left(3x^3 - 5\right)\tan\left(3x^3 - 5\right)$$

ดังนั้น $y' = 18x^2\sec^2\left(3x^3 - 5\right)\tan\left(3x^3 - 5\right)$

ตัวอย่าง 2.34 กำหนด $y = \operatorname{cosec}\left(x - 3\right)$ จงหา y'

วิธีทำ $y = \operatorname{cosec}\left(x - 3\right)$

$$y' = \frac{d}{dx}\operatorname{cosec}\left(3 - x\right)$$

$$= -\operatorname{cosec}\left(3 - x\right)\cot\left(3 - x\right)\frac{d}{dx}\left(3 - x\right)$$

$$= \left[-\operatorname{cosec}(3-x)\cot(3-x)\right](-1)$$

$$= \operatorname{cosec}(3-x)\cot(3-x)$$

ดังนั้น $y' = \left[\operatorname{cosec}(3-x)\right]\left[\cot(3-x)\right]$

ตัวอย่าง 2.35 กำหนด $y = \cot(6x-5)\cos(x^2-3)$ จงหา y'

วิธีทำ $y = \cot(6x-5)\cos(x^2-3)$

$$y' = \frac{d}{dx}\left[\cot(6x-5)\cos(x^2-3)\right]$$

$$= \left[\cot(6x-5)\right]\frac{d}{dx}\cos(x^2-3) + \cos(x^2-3)\frac{d}{dx}\cot(6x-5)$$

$$= \cot(6x-5)\left[-\sin(x^2-3)\right]\frac{d}{dx}(x^2-3)$$

$$+ \cos(x^2-3)\left[-\operatorname{cosec}^2(6x-5)\right]\frac{d}{dx}(6x-5)$$

$$= \cot(6x-5)\left[-\sin(x^2-3)\right](2x)$$

$$+ \cos(x^2-3)\left[-\operatorname{cosec}^2(6x-5)\right](6)$$

$$= -2x\cot(6x-5)\sin(x^2-3) - 6\cos(x^2-3)\operatorname{cosec}^2(6x-5)$$

ดังนั้น $y' = -2x\cot(6x-5)\sin(x^2-3) - 6\cos(x^2-3)\operatorname{cosec}^2(6x-5)$

ตัวอย่าง 2.36 กำหนด $y = \dfrac{\sin(x^3+7)}{(x-3)^5}$ จงหา y'

วิธีทำ $y = \dfrac{\sin(x^3+7)}{(x-3)^5}$

$$y' = \frac{d}{dx}\frac{\sin(x^3+7)}{(x-3)^5}$$

$$= \frac{(x-3)^5\frac{d}{dx}\sin(x^3+7) - \sin(x^3+7)\frac{d}{dx}(x-3)^5}{(x-3)^{10}}$$

$$= \frac{\left[(x-3)^5\cos(x^3+7)\right]\frac{d}{dx}(x^3+7)-\left[\sin(x^3+7)\right]\left[5(x-3)^4\right]\frac{d}{dx}(x-3)}{(x-3)^{10}}$$

$$= \frac{\left[(x-3)^5\cos(x^3+7)\right](3x^2)-\left[\sin(x^3+7)\right]\left[5(x-3)^4\right](1)}{(x-3)^{10}}$$

$$= \frac{3x^2(x-3)^5\cos(x^3+7)-5(x-3)^4\sin(x^3+7)}{(x-3)^{10}}$$

ดังนั้น $y' = \dfrac{3x^2(x-3)^5\cos(x^3+7)-5(x-3)^4\sin(x^3+7)}{(x-3)^{10}}$

ตัวอย่าง 2.37 กำหนด $y = \operatorname{cosec} x + \sin\left(3x^2-1\right) + x - 3$ จงหา y'

วิธีทำ $y = \operatorname{cosec} x + \sin\left(3x^2-1\right) + x - 3$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{d}{dx}\left[\operatorname{cosec} x + \sin(3x^2-1) + x - 3\right] \\ &= \frac{d}{dx}\operatorname{cosec} x + \frac{d}{dx}\sin(3x^2-1) + \frac{d}{dx}x - \frac{d}{dx}3 \\ &= -\operatorname{cosec} x \cot x + \cos(3x^2-1)\frac{d}{dx}(3x^2-1) + 1 - 0 \\ &= -\operatorname{cosec} x \cot x + \left[\cos(3x^2-1)\right](6x) + 1 \\ &= -\operatorname{cosec} x \cot x + 6x\cos(3x^2-1) + 1 \end{aligned}$$

ดังนั้น $y' = -\operatorname{cosec} x \cot x + 6x\cos(3x^2-1) + 1$

2.6 การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันลอการิทึมและฟังก์ชันเลขชี้กำลัง

กำหนดให้ a เป็นจำนวนจริงที่ $a > 0$ และ $a \neq 1$ ฟังก์ชัน $f = \left\{(x,y) : y = a^x\right\}$ เรียกว่าฟังก์ชันเลขชี้กำลังส่วนอินเวอร์สฟังก์ชันเลขชี้กำลังคือ $f^{-1} = \left\{(x,y) : x = a^y\right\}$ เรียกว่าฟังก์ชันลอการิทึม ดังนั้นจะมีสมการเป็น $x = a^y$ หรือ $y = \log_a x$ โดยที่ $a > 0, a \neq 1$ การหาอนุพันธ์นี้อาจเริ่มจากฟังก์ชันใดฟังก์ชันใดก่อนก็ได้แต่เพื่อความสะดวกจะเริ่มจากฟังก์ชันลอการิทึมฐาน e คือ $y = \log_e x = \ln x$ หรือ $x = e^y$ โดยที่ e มีนิยามดังนี้ (สุกัญญา สนิทวงศ์ ณ อยุธยา และคณะ, 2556 : 61)

บทนิยาม 2.7.

$$e = \lim_{n \to \infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} \text{ หรือ } e = \lim_{x \to 0}\left(1 + s\right)^{\frac{1}{s}} \text{ , } s = \frac{1}{n}$$

หมายเหตุ 2.4

e เป็นค่าคงตัวที่เป็นจำนวนอตรรกยะมีค่าประมาณ 2.71828

เพื่อง่ายในการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันลอการิทึมจึงกล่าวถึงคุณสมบัติที่สำคัญของลอการิทึมดังต่อไปนี้ เมื่อ $a > 0\,,\ a \neq 1,\ b > 0,\ b \neq 1,\ M > 0,\ N > 0$ และ M^n เป็นจำนวนจริง

1. $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$
2. $\log_a \dfrac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$
3. $\log_a M^n = n \log_a M$
4. $\log_a a = 1$
5. $\log_a 1 = 0$
6. $a^{\log_a M} = M$
7. $\log_{a^n} M = \dfrac{1}{n}\log_a M$ เมื่อ $n \neq 0$
8. $\log_a M = \dfrac{\log_b M}{\log_b a}$
9. $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$

2.6.1 ทฤษฎีบทของอนุพันธ์ฟังก์ชันลอการิทึมและฟังก์ชันเลขชี้กำลัง

ให้ $u = u(x)$ เป็นฟังก์ชันของตัวแปร x และ $u(x)$ มีอนุพันธ์ที่ x และ a เป็นค่าคงตัวใด ๆ ที่ $a > 0\,,\ a \neq 1$ สำหรับการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันลอการิทึมและฟังก์ชันเลขชี้กำลังนั้นอาศัยทฤษฎีบทดังต่อไปนี้ (พัฒนา สีมากุล, 2539 : 40-42)

ทฤษฎีบท 2.15

ถ้า $y = \log_a u$ เมื่อ $u = u(x)$ เป็นฟังก์ชันของ x โดยที่ $u(x) > 0$ และ a เป็นจำนวนจริงที่ $a > 0$, $a \neq 1$ แล้ว $y' = \frac{1}{u \ln a}\frac{du}{dx}$ นั่นคือ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\log_a u = \frac{1}{u \ln a}\frac{du}{dx}$$

ทฤษฎีบท 2.16

ถ้า $y = \ln u$ เมื่อ $u = u(x)$ เป็นฟังก์ชันของ x โดยที่ $u(x) > 0$ แล้ว $y' = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$ นั่นคือ $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\ln u = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$

ตัวอย่าง 2.38 กำหนดให้ $y = \log_2(x^3 - 1)$ จงหา y'

วิธีทำ $y = \log_2(x^3 - 1)$

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{d}{dx}\log_2\left(x^3 - 1\right) \\
&= \frac{1}{\left(x^3 - 1\right)\ln 2}\frac{d}{dx}\left(x^3 - 1\right) \\
&= \frac{1}{\left(x^3 - 1\right)\ln 2}\left(3x^2\right) \\
&= \frac{3x^2}{\left(x^3 - 1\right)\ln 2}
\end{aligned}$$

ดังนั้น $y' = \frac{3x^2}{\left(x^3 - 1\right)\ln 2}$

ตัวอย่าง 2.39 กำหนดให้ $y=\ln x^2$ จงหา y'

วิธีทำ $y=\ln x^2$

$$y'=\frac{d}{dx}\left(\ln x^2\right)$$

$$=\frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}x^2 \text{ สำหรับ } x\neq 0$$

$$=\frac{1}{x^2}\left(2x\right)$$

ดังนั้น $y'=\dfrac{2}{x}$ สำหรับ $x\neq 0$

จากตัวอย่างที่ผ่านมาเป็นการใช้ทฤษฎีบท 2.16 ในการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยตรงและสำหรับทฤษฎีดังกล่าวนั้นมีประโยชน์อย่างมากในการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่อยู่ในรูปผลคูณ ผลหาร และฟังก์ชันที่มีเลขชี้กำลังเป็นฟังก์ชันพีชคณิตดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2.40 กำหนดให้ $y=\left(x^3-2x\right)^{25}$ จงหา y'

วิธีทำ $y=\left(x^3-2x\right)^{25}$

$$\left|y\right|=\left|\left(x^3-2x\right)^{25}\right|$$

$$\ln\left|y\right|=\ln\left|\left(x^3-2x\right)^{25}\right|$$

$$\frac{d}{dx}\left[\ln\left|y\right|\right]=\frac{d}{dx}\left[\ln\left|\left(x^3-2x\right)^{25}\right|\right]$$

$$\frac{d}{dx}\left[\ln\left|y\right|\right]=\frac{d}{dx}25\left[\ln\left|\left(x^3-2x\right)\right|\right]$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{25}{x^3-2x}\frac{d}{dx}\left(x^3-2x\right)$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{25}{x^3-2x}\left(3x^2-2\right)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{25}{x^3-2x}\left(3x^2-2\right)y$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{25}{x^3-2x}\left(3x^2-2\right)\left(x^3-2x\right)^{25}$$

$$\frac{dy}{dx}=25\left(x^3-2x\right)^{24}\left(3x^2-2\right)$$

ดังนั้น $y'=25\left(x^3-2x\right)^{24}\left(3x^2-2\right)$

ตัวอย่าง 2.41 กำหนดให้ $y = \left(x^3 - 1\right)^2 \left(x^3 + 2x^2 + x - 1\right)^5$ จงหา y'

วิธีทำ

$$y = \left(x^3 - 1\right)^2 \left(x^3 + 2x^2 + x - 1\right)^5$$

$$\left|y\right| = \left|(x^3 - 1)^2(x^3 + 2x^2 + x - 1)^5\right|$$

$$\ln\left|y\right| = \ln\left|(x^3 - 1)^2(x^3 + 2x^2 + x - 1)^5\right|$$

$$\ln\left|y\right| = \ln\left|(x^3 - 1)^2\right| + \ln\left|(x^3 + 2x^2 + x - 1)^5\right|$$

$$\ln\left|y\right| = 2\ln\left|x^3 - 1\right| + 5\ln\left|x^3 + 2x^2 + x - 1\right|$$

$$\frac{d}{dx}\ln\left|y\right| = \frac{d}{dx}\left[2\ln\left|x^3 - 1\right| + 5\ln\left|x^3 + 2x^2 + x - 1\right|\right]$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 2\frac{d}{dx}\ln\left|x^3 - 1\right| + 5\frac{d}{dx}\ln\left|x^3 + 2x^2 + x - 1\right|$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 2\frac{1}{x^3 - 1}\frac{d}{dx}\left(x^3 - 1 + 5\frac{1}{x^3 + 2x^2 + x - 1}\frac{d}{dx}\left(x^3 + 2x^2 + x - 1\right)\right.$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 2\frac{1}{x^3 - 1}(3x^2) + 5\frac{1}{x^3 + 2x^2 + x - 1}\left(3x^2 + 4x + 1\right)$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{6x^2}{x^3 - 1} + \frac{5\left(3x^2 + 4x + 1\right)}{x^3 + 2x^2 + x - 1}$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{6x^2}{x^3 - 1} + \frac{5\left(3x^2 + 4x + 1\right)}{x^3 + 2x^2 + x - 1}$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{6x^2}{x^3 - 1} + \frac{15x^2 + 20x + 5}{x^3 + 2x^2 + x - 1}$$

$$\frac{dy}{dx} = y\left[\frac{6x^2}{x^3 - 1} + \frac{15x^2 + 20x + 5}{x^3 + 2x^2 + x - 1}\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(x^3 - 1\right)^2\left(x^3 + 2x^2 + x - 1\right)^5\left[\frac{21x^5 + 22x^4 + 11x^3 - 21x^2 - 20x - 5}{(x^3 - 1)(x^3 + 2x^2 + x - 1)}\right]$$

$$y' = \left(x^3 - 1\right)\left(21x^5 + 22x^4 + 11x^3 - 21x^2 - 20x - 5\right)\left(x^3 + 2x^2 + x - 1\right)^4$$

ดังนั้น $y' = \left(x^3 - 1\right)\left(21x^5 + 22x^4 + 11x^3 - 21x^2 - 20x - 5\right)\left(x^3 + 2x^2 + x - 1\right)^4$

ตัวอย่าง 2.42 กำหนดให้ $y = x^{x^2+5}$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

วิธีทำ ให้ $y = x^{x^2+5}$

$$|y| = \left|x^{x^2+5}\right|$$

$$\ln|y| = \ln\left|x^{x^2+5}\right|$$

$$\ln|y| = \left(x^2+5\right)\ln|x|$$

$$\frac{d}{dx}\ln|y| = \frac{d}{dx}\left(x^2+5\right)\ln|x|$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \left(x^2+5\right)\frac{d}{dx}\ln|x| + \ln|x|\frac{d}{dx}\left(x^2+5\right)$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+5}{x} + 2x\ln|x|$$

$$\frac{dy}{dx} = y\left[\frac{x^2+5}{x} + 2x\ln|x|\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = x^{x^2+5}\left[\frac{x^2+5}{x} + 2x\ln|x|\right]$$

ดังนั้น $\dfrac{dy}{dx} = x^{x^2+5}\left[\dfrac{x^2+5}{x} + 2x\ln|x|\right]$

ทฤษฎีบท 2.17

กำหนดให้ $u = u(x)$ ฟังก์ชันของ x ถ้า $y = e^u$ แล้ว $y' = e^u\dfrac{du}{dx}$

นั่นคือ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}e^u = e^u\dfrac{du}{dx}$

ทฤษฎีบท 2.18

กำหนดให้ $u = u(x)$ ฟังก์ชันของ x ถ้า $y = a^u$; $a > 0$ แล้ว

$y' = a^u\ln a\dfrac{du}{dx}$ นั่นคือ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}a^u = a^u\ln a\dfrac{du}{dx}$

สรุปสูตรอนุพันธ์ของฟังก์ชันลอการิทึมและฟังก์ชันเลขชี้กำลังได้ดังนี้ กำหนดให้ $u = u(x)$ เป็นฟังก์ชันของ x ซึ่งหาอนุพันธ์ได้ (สุกัญญา สนิทวงศ์ ณ อยุธยา และคณะ, 2556 : 68)

1. $\frac{d}{dx}\ln u = \frac{1}{x}\frac{du}{dx}$
2. $\frac{d}{dx}\log_a u = \frac{1}{u\ln a}\frac{du}{dx}$
3. $\frac{d}{dx}e^u = e^u\frac{du}{dx}$
4. $\frac{d}{dx}a^u = a^u\ln a\frac{du}{dx}$

ตัวอย่าง 2.43 กำหนดให้ $y = 2e^{3x} - 5\ln x^2$ จงหา y'

วิธีทำ $y = 2e^{3x} - 5\ln x^2$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{d}{dx}\left(2e^{3x} - 5\ln x^2\right) \\ &= 2\frac{d}{dx}e^{3x} - 5\frac{d}{dx}\ln x^2 \\ &= 2e^{3x}\frac{d}{dx}3x - \frac{5}{x^2}\frac{d}{dx}x^2 \\ &= 2e^{3x}(3) - \frac{5}{x^2}(2x) \end{aligned}$$

ดังนั้น $y' = 6e^{3x} - \frac{10}{x}$

ตัวอย่าง 2.44 กำหนดให้ $y = e^{-5x}\log_2 x$ จงหา y'

วิธีทำ $y = e^{-5x}\log_2 x$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{d}{dx}\left[e^{-5x}\log_2 x\right] \\ &= e^{-5x}\frac{d}{dx}\log_2 x + \log_2 x\frac{d}{dx}e^{-5x} \\ &= e^{-5x}\frac{1}{x\ln 2} + \log_2 x\left[e^{-5x}\frac{d}{dx}\left(-5x\right)\right] \\ &= e^{-5x}\frac{1}{x\ln 2} + \log_2 x\left[e^{-5x}\left(-5\right)\right] \\ &= e^{-5x}\frac{1}{x\ln 2} - 5e^{-5x}\log_2 x \end{aligned}$$

ดังนั้น $y' = e^{-5x}\frac{1}{x\ln 2} - 5e^{-5x}\log_2 x$

ตัวอย่าง 2.45 กำหนดให้ $f(x)=\dfrac{10^x}{\ln x^6}$ จงหา $f'(x)$

วิธีทำ $f(x)=\dfrac{10^x}{\ln x^6}$

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\frac{10^x}{\ln x^6}$$

$$=\frac{\ln x^6\,\frac{d}{dx}10^x-10^x\,\frac{d}{dx}\ln x^6}{\ln^2 x^6}$$

$$=\frac{(\ln x^6)(10^x\ln 10)-10^x\,\frac{1}{x^6}\frac{d}{dx}x^6}{\ln^2 x^6}$$

$$=\frac{10^x\ln x^6\ln 10-\frac{10^x6x^5}{x^6}}{\ln^2 x^6}$$

$$=\frac{x\,10^x\ln 10\ln x^6-6(10)^x}{x\ln^2 x^2}$$

ดังนั้น $f'(x)=\dfrac{x\,10^x\ln 10\ln x^6-6(10)^x}{x\ln^2 x^2}$

ตัวอย่าง 2.46 กำหนดให้ $f(x)=\sin x^3\ln^{10}x$ จงหา $f'(x)$

วิธีทำ $f(x)=\sin x^3\ln^{10}x$

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\sin x^3\ln^{10}x$$

$$=\sin x^3\,\frac{d}{dx}\ln^{10}x+\ln^{10}x\,\frac{d}{dx}\sin x^3$$

$$=\sin x^3\left[10\ln^9 x\,\frac{d}{dx}\ln x\right]+\ln^{10}x\left[\cos x^3\,\frac{d}{dx}x^3\right]$$

$$=\sin x^3\,10\ln^9 x\,(\ln x)^9\left(\frac{1}{x}\right)+(\ln x)^{10}\ (\cos x^3)\ 3x^2$$

$$=\frac{10}{x}\ln^9 x\ \sin x^3+3x^2\ln^{10}x\ \cos x^3$$

ดังนั้น $f'(x)=\dfrac{10}{x}\ln^9 x\ \sin x^3+3x^2\ln^{10}x\ \cos x^3$

ตัวอย่าง 2.47 กำหนดให้ $f\left(x\right)=e^{\sin 3x-\ln x}$ จงหา $f'\left(x\right)$

วิธีทำ $f(x)=e^{\sin 3x-\ln x}$

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{d}{dx}e^{\sin 3x-\ln x} \\
&= \left(e^{\sin 3x-\ln x}\right)\frac{d}{dx}\left(\sin 3x-\ln x\right) \\
&= \left(e^{\sin 3x-\ln x}\right)\left[\frac{d}{dx}\sin 3x-\frac{d}{dx}\ln x\right] \\
&= \left(e^{\sin 3x-\ln x}\right)\left[\left(\cos 3x\right)\frac{d}{dx}\left(3x\right)-\frac{1}{x}\right] \\
&= \left(e^{\sin 3x-\ln x}\right)\left[\left(\cos 3x\right)\left(3\right)-\frac{1}{x}\right] \\
&= \left(e^{\sin 3x-\ln x}\right)\left[3\cos 3x-\frac{1}{x}\right]
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $f'(x)=\left(e^{\sin 3x-\ln x}\right)\left[3\cos 3x-\frac{1}{x}\right]$

2.7 การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันรูปแบบต่าง ๆ

ในหัวข้อที่ผ่านมาแล้วนั้นเราได้หาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ในในรูปแบบต่าง ๆ เช่น การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิต การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบ การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ และการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันลอการิทึมและฟังก์ชันเลขชี้กำลัง ซึ่งเป็นการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันทั้งการหาอนุพันธ์โดยใช้นิยามและการหาโดยใช้สูตรหรือทฤษฎี สำหรับในหัวข้อนี้จะเป็นการสรุปสูตรการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันรูปแบบต่าง ๆ ดังต่อไปนี้ และกำหนดให้ $u=u\left(x\right)$ เป็นฟังก์ชันของ x ซึ่งหาอนุพันธ์ได้ และ $v=v\left(x\right)$ เป็นฟังก์ชันของ x ซึ่งหาอนุพันธ์ได้

1. $\frac{d}{dx}\left(c\right)=0$
2. $\frac{d}{dx}\left(x\right)=1$
3. $\frac{d}{dx}\left(cu\right)=c\frac{d}{dx}\left(u\right)$

4. $\dfrac{d}{dx}\left(u \pm v\right) = \dfrac{du}{dx} \pm \dfrac{dv}{dx}$

5. $\dfrac{d}{dx}x^{n} = nx^{n-1}$

6. $\dfrac{d}{dx}\left(uv\right) = u\dfrac{dv}{dx} + v\dfrac{du}{dx}$

7. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^{2}}$

8. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}$

9. $\dfrac{d}{dx}\left(u^{n}\right) = nu^{n-1}\dfrac{du}{dx}$

10. $\dfrac{d}{dx}\left(\sin u\right) = \cos u\dfrac{du}{dx}$

11. $\dfrac{d}{dx}\left(\cos u\right) = -\sin u\dfrac{du}{dx}$

12. $\dfrac{d}{dx}\left(\tan u\right) = \sec^{2} u\dfrac{du}{dx}$

13. $\dfrac{d}{dx}\left(\cot u\right) = -\mathrm{cosec}^{2} u\dfrac{du}{dx}$

14. $\dfrac{d}{dx}\left(\sec u\right) = \sec u \tan u\dfrac{du}{dx}$

15. $\dfrac{d}{dx}\left(\mathrm{cosec} u\right) = -\mathrm{cosec} u \cot u\dfrac{du}{dx}$

16. $\dfrac{d}{dx}\left(\arcsin u\right) = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^{2}}}\dfrac{du}{dx}$

17. $\dfrac{d}{dx}\left(\arccos u\right) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^{2}}}\dfrac{du}{dx}$

18. $\dfrac{d}{dx}\left(\arctan u\right) = \dfrac{1}{1+u^{2}}\dfrac{du}{dx}$

19. $\dfrac{d}{dx}\left(\mathrm{arccot} u\right) = -\dfrac{1}{1+u^{2}}u\dfrac{du}{dx}$

20. $\dfrac{d}{dx}\left(\mathrm{arcsec} u\right) = \dfrac{1}{u\sqrt{u^{2}-1}}\dfrac{du}{dx}$

21. $\dfrac{d}{dx}\left(\operatorname{arccosec} u\right) = -\dfrac{1}{u\sqrt{u^2 - 1}}\dfrac{du}{dx}$

22. $\dfrac{d}{dx}\ln u = \dfrac{1}{x}\dfrac{du}{dx}$

23. $\dfrac{d}{dx}\log_a u = \dfrac{1}{u\ln a}\dfrac{du}{dx}$

24. $\dfrac{d}{dx}e^u = e^u\dfrac{du}{dx}$

25. $\dfrac{d}{dx}a^u = a^u \ln a\dfrac{du}{dx}$

26. $\dfrac{d}{dx}\left(u^v\right) = vu^{v-1}\dfrac{du}{dx} + \left(\ln u\right)u^v\dfrac{dv}{dx}$

27. $\dfrac{d}{dx}\left(\sinh u\right) = \cosh u\dfrac{du}{dx}$

28. $\dfrac{d}{dx}\left(\cosh u\right) = \sinh u\dfrac{du}{dx}$

39. $\dfrac{d}{dx}\left(\tanh u\right) = \operatorname{sech}^2 u\dfrac{du}{dx}$

30. $\dfrac{d}{dx}\left(\coth u\right) = -\operatorname{cosech}^2 u\dfrac{du}{dx}$

31. $\dfrac{d}{dx}\left(\operatorname{sech} u\right) = -\operatorname{sech} u\tanh u\dfrac{du}{dx}$

32. $\dfrac{d}{dx}\left(\operatorname{cosech} u\right) = -\operatorname{cosech} u\coth u\dfrac{du}{dx}$

จากสูตรทั้งหมด 32 สูตรที่ได้กล่าวมาข้างต้นบางสูตรได้แสดงตัวอย่างการหารอนุพันธ์ของฟังก์ชันไปแล้วในหัวข้อที่ผ่านมา สำหรับหัวข้อนี้จะขอยกตัวอย่างเฉพาะสูตรที่ยังไม่ได้แสดงวิธีการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันมาก่อน และจะแสดงได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2.48 จงแสดงวิธีทำเพื่อหา $\dfrac{dy}{dx}$ เมื่อกำหนด $y = \arcsin 5x^2$

วิธีทำ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}\left(\arcsin 5x^2\right)$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - 25x^4}}\frac{d}{dx}5x^2$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\left(5x^2\right)^2}} \frac{d}{dx}\left(5x^2\right)$$

$$= \frac{10x}{\sqrt{1-25x^4}}$$

ดังนั้น $\frac{d}{dx}\left(\arcsin 5x^2\right) = \frac{10x}{\sqrt{1-25x^4}}$

ตัวอย่าง 2.49 จงแสดงวิธีทำเพื่อหา $\frac{dy}{dx}$ เมื่อกำหนด $y = \arccos\left(x+3\right)$

วิธีทำ $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\arccos\left(x+3\right)\right)$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1-\left(x+3\right)^2}} \frac{d}{dx}\left(x+3\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\left(x^2+6x+9\right)}} \frac{d}{dx}\left(x+3\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{10+6x-x^2}}$$

ดังนั้น $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{10+6x-x^2}}$

ตัวอย่าง 2.50 จงแสดงวิธีทำเพื่อหา $\frac{dy}{dx}$ เมื่อกำหนด $y = \arctan\left(x^3-1\right)$

วิธีทำ $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\arctan\left(x^3-1\right)$

$$= \frac{1}{1+\left(x^3-1\right)^2} \frac{d}{dx}\left(x^3-1\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\left(x^{6}-2x^{3}+1\right)}}\frac{d}{dx}\left(x^{3}-1\right)$$

$$= \frac{3x^{2}}{\sqrt{-x^{6}+2x^{3}}}$$

ดังนั้น $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x^{2}}{\sqrt{-x^{6}+2x^{3}}}$

ตัวอย่าง 2.51 จงแสดงวิธีทำเพื่อหา $\dfrac{dy}{dx}$ เมื่อกำหนด $y = \operatorname{arccot}\left(2x^{3}\right)$

วิธีทำ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}\operatorname{arccot}\left(2x^{3}\right)$

$$= -\frac{1}{1+\left(2x^{3}\right)^{2}}\frac{d}{dx}\left(2x^{3}\right)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1-4x^{6}}}\frac{d}{dx}\left(2x^{3}\right)$$

$$= -\frac{6x^{2}}{\sqrt{1-4x^{6}}}$$

ดังนั้น $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{6x^{2}}{\sqrt{1-4x^{6}}}$

ตัวอย่าง 2.51 จงแสดงวิธีทำเพื่อหา $\dfrac{dy}{dx}$ เมื่อกำหนด $y = \operatorname{arcsec}\left(2x^{3}\right)$

วิธีทำ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}\operatorname{arcsec}\left(2x^{3}\right)$

$$= -\frac{1}{2x^{3}\sqrt{\left(2x^{3}\right)^{2}-1}}\frac{d}{dx}\left(2x^{3}\right)$$

$$= -\frac{1}{2x^{3}\sqrt{4x^{6}-1}}\frac{d}{dx}\left(2x^{3}\right)$$

$$= -\frac{6x^2}{2x^3\sqrt{4x^6 - 1}}$$

ดังนั้น $\frac{dy}{dx} = -\frac{6x^2}{2x^3\sqrt{4x^6 - 1}}$

ตัวอย่าง 2.52 จงแสดงวิธีทำเพื่อหา $\frac{dy}{dx}$ เมื่อกำหนด $y = \text{arccosec}\left(x+5\right)$

วิธีทำ $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\text{arccosec}\left(x+5\right)$

$$= -\frac{1}{\left(x+5\right)\sqrt{\left(x+5\right)^2 - 1}}\frac{d}{dx}\left(x+5\right)$$

$$= -\frac{1}{\left(x+5\right)\sqrt{x^2 + 10x + 25 - 1}}\frac{d}{dx}\left(x+5\right)$$

$$= -\frac{1}{\left(x+5\right)\sqrt{x^2 + 10x + 24}}$$

ตัวอย่าง 2.53 กำหนด $y = \sinh\left(2x\right)$ จงหา y'

วิธีทำ $y = \sin\left(2x\right)$

$$y' = \frac{d}{dx}\sinh\left(2x\right)$$

$$= \left[\cosh\left(2x\right)\right]\left[\frac{d}{dx}\left(2x\right)\right]$$

$$= \left[\cosh\left(2x\right)\right]\left[2\right]$$

$$= 2\cosh 2x$$

ดังนั้น $y' = 2\cosh 2x$

ตัวอย่าง 2.54 กำหนด $y = \sinh(x^5 - 5x^3 + 3)$ จงหา y'

วิธีทำ $y = \sinh(x^5 - 5x^3 + 3)$

$$y' = \frac{d}{dx}\sinh(x^5 - 5x^3 + 3)$$

$$= \cosh(x^5 - 5x^3 + 3)\left[\frac{d}{dx}(x^5 - 5x^3 + 3)\right]$$

$$= \left[\cosh(x^5 - 5x^3 + 3)\right]\left[5x^4 - 15x^2\right]$$

ดังนั้น $y' = (5x^4 - 15x^2)\cosh(x^5 - 5x^3 + 3)$

ตัวอย่าง 2.55 กำหนด $y = \cosh^5\left(x^3 + 1\right)$ จงหา y'

วิธีทำ $y = \cosh^5\left(x^3 + 1\right)$

$$y' = \frac{d}{dx}\cosh^5(x^3 + 1)$$

$$= \frac{d}{dx}\left[\cosh(x^3 + 1)\right]^5$$

$$= 5\left[\cosh(x^3 + 1)\right]^4 \frac{d}{dx}\cosh(x^3 + 1)$$

$$= 5\left[\cosh(x^3 + 1)\right]^4\left[-\sinh(x^3 + 1)\right]\frac{d}{dx}(x^3 + 1)$$

$$= 5\left[\cosh(x^3 + 1)\right]^4\left[-\sinh(x^3 + 1)\right](3x^2)$$

$$= -15x^2\sinh(x^3 + 1)\cosh^4(x^3 + 1)$$

ดังนั้น $y' = -15x^2\sinh(x^3 + 1)\cosh^4(x^3 + 1)$

ตัวอย่าง 2.56 กำหนด $y = \tanh(x^2 - 2x)^{21}$ จงหา y'

วิธีทำ $y = \tan(x^2 - 2x)^{21}$

$$y' = \frac{d}{dx}\tanh(x^2 - 2x)^{21}$$

$$= \left[\operatorname{sech}^2(x^2 - 2x)^{21}\right]\frac{d}{dx}(x^2 - 2x)^{21}$$

$$= \left[\operatorname{sech}^2\left(x^2-2x\right)^{21}\right]21\left(x^2-2x\right)^{20}\frac{d}{dx}\left(x^2-2x\right)$$

$$= \left[\operatorname{sech}^2\left(x^2-2x\right)^{21}\right]21\left(x^2-2x\right)^{20}\left(2x-2\right)$$

$$= 42\left[\operatorname{sech}^2\left(x^2-2x\right)^{21}\right]\left(x^2-2x\right)^{20}\left(x-1\right)$$

$$= 42\left(x-1\right)\left(x^2-2x\right)^{20}\operatorname{sech}^2\left(x^2-2x\right)^{21}$$

ดังนั้น $y' = 42\left(x-1\right)\left(x^2-2x\right)^{20}\operatorname{sech}^2\left(x^2-2x\right)^{21}$

ตัวอย่าง 2.57 กำหนด $y = \coth\left(x^3-5\right)$ จงหา y'

วิธีทำ $y = \coth\left(x^3-5\right)$

$$y' = \frac{d}{dx}\coth\left(x^3-5\right)$$

$$= \left[-\operatorname{cosech}^2\left(x^3-5\right)\right]\frac{d}{dx}\left(x^3-5\right)$$

$$= \left[-\operatorname{cosech}^2\left(x^3-5\right)\right]\left(3x^2\right)$$

$$= -\left(3x^2\right)\operatorname{cosech}^2\left(x^3-5\right)$$

ดังนั้น $y' = -\left(3x^2\right)\operatorname{cosech}^2\left(x^3-5\right)$

ตัวอย่าง 2.58 กำหนด $y = \operatorname{sech}^2\left(3x^3-5\right)$ จงหา y'

วิธีทำ $y = \operatorname{sech}^2\left(3x^3-5\right)$

$$y' = \frac{d}{dx}\operatorname{sech}^2\left(3x^3-5\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\left[\operatorname{sech}\left(3x^3-5\right)\right]^2$$

$$= 2\operatorname{sech}\left(3x^3-5\right)\frac{d}{dx}\operatorname{sech}\left(3x^3-5\right)$$

$$= -2\operatorname{sech}\left(3x^3-5\right)\operatorname{sech}\left(3x^3-5\right)\tanh\left(3x^3-5\right)\frac{d}{dx}\left(3x^3-5\right)$$

$$= -2\left(9x^2\right)\operatorname{sech}^2\left(3x^3-5\right)\tanh\left(3x^3-5\right)$$

$$= 18x^2 \sec^2\left(3x^3 - 5\right)\tan\left(3x^3 - 5\right)$$

ดังนั้น $y' = 18x^2 \operatorname{sech}^2\left(3x^3 - 5\right)\tanh\left(3x^3 - 5\right)$

ตัวอย่าง 2.59 กำหนด $y = \operatorname{cosech}\left(x - 3\right)$ จงหา y'

วิธีทำ $y = \operatorname{cosech}\left(x - 3\right)$

$$y' = \frac{d}{dx}\operatorname{cosech}\left(3 - x\right)$$

$$= -\operatorname{cosech}\left(3 - x\right)\coth\left(3 - x\right)\frac{d}{dx}\left(3 - x\right)$$

$$= \left[-\operatorname{cosech}\left(3 - x\right)\coth\left(3 - x\right)\right]\left(-1\right)$$

$$= \operatorname{cosech}\left(3 - x\right)\coth\left(3 - x\right)$$

ดังนั้น $y' = \operatorname{cosech}\left(3 - x\right)\coth\left(3 - x\right)$

ตัวอย่าง 2.60 กำหนด $y = \dfrac{\sinh\left(x^3 + 7\right)}{\left(x - 3\right)^5}$ จงหา y'

วิธีทำ $y = \dfrac{\sinh\left(x^3 + 7\right)}{\left(x - 3\right)^5}$

$$y' = \frac{d}{dx}\frac{\sinh\left(x^3 + 7\right)}{\left(x - 3\right)^5}$$

$$= \frac{\left(x - 3\right)^5 \dfrac{d}{dx}\sinh\left(x^3 + 7\right) - \sinh\left(x^3 + 7\right)\dfrac{d}{dx}\left(x - 3\right)^5}{\left(x - 3\right)^{10}}$$

$$= \frac{\left[\left(x - 3\right)^5 \cosh\left(x^3 + 7\right)\right]\dfrac{d}{dx}\left(x^3 + 7\right) - \left[\sinh\left(x^3 + 7\right)\right]\left[5\left(x - 3\right)^4\right]\dfrac{d}{dx}\left(x - 3\right)}{\left(x - 3\right)^{10}}$$

$$= \frac{\left[(x-3)^5 \cosh(x^3+7)\right](3x^2) - \left[\sinh(x^3+7)\right]\left[5(x-3)^4\right](1)}{(x-3)^{10}}$$

$$= \frac{3x^2(x-3)^5 \cosh(x^3+7) - 5(x-3)^4 \sinh(x^3+7)}{(x-3)^{10}}$$

ดังนั้น $y' = \dfrac{3x^2(x-3)^5 \cosh(x^3+7) - 5(x-3)^4 \sinh(x^3+7)}{(x-3)^{10}}$

ตัวอย่าง 2.61 กำหนด $y = \operatorname{cosech} x + \sinh\left(3x^2-1\right) + x - 3$ จงหา y'

วิธีทำ $y = \operatorname{cosech} x + \sinh\left(3x^2-1\right) + x - 3$

$$y' = \frac{d}{dx}\left[\operatorname{cosech} x + \sinh(3x^2-1) + x - 3\right]$$

$$= \frac{d}{dx}\operatorname{cosech} x + \frac{d}{dx}\sinh(3x^2-1) + \frac{d}{dx}x - \frac{d}{dx}3$$

$$= -\operatorname{cosech} x \coth x + \cosh(3x^2-1)\frac{d}{dx}(3x^2-1) + 1 - 0$$

$$= -\operatorname{cosech} x \coth x + \left[\cosh(3x^2-1)\right](6x) + 1$$

$$= -\operatorname{cosech} x \coth x + 6x\cosh(3x^2-1) + 1$$

ดังนั้น $y' = -\operatorname{cosech} x \coth x + 6x\cosh(3x^2-1) + 1$

2.8 การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยปริยาย

สำหรับฟังก์ชันที่กำหนดโดยสมการที่แสดงถึงความสัมพันธ์ระหว่าง x กับ y นั้นพบว่าบางฟังก์ชันสามารถเขียนแสดงค่า y ในพจน์ x เช่น $y = x + 3$ หรือ $y = \dfrac{x^2+1}{3x-1}$ เป็นต้น ซึ่งฟังก์ชันที่สามารถเขียนให้อยู่ในรูป $y = f(x)$ ดังกล่าวข้างต้นนั้นเรียกว่าเป็น**ฟังก์ชันชัดแจ้ง** ฟังก์ชันชนิดนี้สามารถหาอนุพันธ์ได้ทันที โดยอาศัยสูตรอนุพันธ์หรือทฤษฎีของอนุพันธ์ต่าง ๆ ที่ได้กล่าวมาแล้วในหัวข้อที่ผ่านมา แต่สำหรับบางฟังก์ชันที่กำหนดโดยสมการที่แสดงถึงความสัมพันธ์ระหว่างนั้นพบว่าบางฟังก์ชันสามารถเขียนในรูป $f(x,y) = c$ เช่น $x^2y + xy^2 = 9$ เรียกว่า **ฟังก์ชันโดยปริยาย**

วิธีการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยปริยายทำตามขั้นตอนโดยสรุปดังต่อไปนี้ (ธีระศักดิ์ อุรัจนานนท์, 2546 : 87-88)

1. หาอนุพันธ์เทียบตัวแปร x ทั้งสองข้างของสมการฟังก์ชันโดยปริยาย
2. หาอนุพันธ์แต่ละพจน์
3. แก้สมการหา $\dfrac{dy}{dx}$

ตัวอย่าง 2.62 ให้ y เป็นฟังก์ชันของ x ซึ่งสอดคล้องกับสมการ $x^2+y^2=9$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

วิธีทำ

$$x^2+y^2=9$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^2+y^2\right)=\frac{d}{dx}9$$

$$\frac{d}{dx}x^2+\frac{d}{dx}y^2=0$$

$$2x+2y\frac{dy}{dx}=0$$

$$2y\frac{dy}{dx}=-2x$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-2x}{2y}$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$$

ดังนั้น $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{y}$

ตัวอย่าง 2.63 ให้ y เป็นฟังก์ชันของ x ซึ่งสอดคล้องกับสมการ $x^3y+y^5=x^6-3$ จงหา y'

วิธีทำ

$$x^3y+y^5=x^6-3$$

$$x^3y+y^5-x^6=-3$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^3y+y^5-x^6\right)=\frac{d}{dx}(-3)$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^3y\right)+\frac{d}{dx}y^5-\frac{d}{dx}x^6=0$$

$$\left(x^3\frac{d}{dx}y + y\frac{d}{dx}x^3\right) - 5y^4\frac{dy}{dx} - 6x^5 = 0$$

$$x^3\frac{dy}{dx} + y\left(3x^2\right) - 5y^4\frac{dy}{dx} - 6x^5 = 0$$

$$x^3\frac{dy}{dx} - 5y^4\frac{dy}{dx} = 6x^5 - 3x^2y$$

$$\left(x^3 - 5y^4\right)\frac{dy}{dx} = 6x^5 - 3x^2y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6x^5 - 3x^2y}{x^3 - 5y^4}$$

ดังนั้น $y' = \dfrac{6x^5 - 3x^2y}{x^3 - 5y^4}$

ตัวอย่าง 2.64 ให้ y เป็นฟังก์ชันของ x ซึ่งสอดคล้องกลับสมการ $x^4 + \sin y^3 - x = 0$ จงหา y'

วิธีทำ $x^4 + \sin y^3 - x = 0$

$$\frac{d}{dx}\left(x^4 + \sin y^3 - x\right) = \frac{d}{dx}0$$

$$\frac{d}{dx}x^4 + \frac{d}{dx}\sin y^3 - \frac{d}{dx}x = \frac{d}{dx}0$$

$$4x^3 + \cos y^3\frac{dy^3}{dx} - 1 = 0$$

$$4x^3 + \left(\cos y^3\right)3y^2\frac{dy}{dx} - 1 = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - 4x^3}{3y^2\cos y^3}$$

ดังนั้น $y' = \dfrac{1 - 4x^3}{3y^2\cos y^3}$

2.9 อนุพันธ์อันดับสูง

อนุพันธ์ของฟังก์ชันที่กล่าวมาแล้วในข้างต้น อาจเรียกว่าอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งของฟังก์ชันเขียนแทนด้วย $f'(x)$, y', $\dfrac{dy}{dx}$ หรือ $\dfrac{d}{dx}f(x)$ (Ross, F.L. Maurice,.W.D. and Frank, G.R., 2001 : 98)

บทนิยาม 2.8

ให้ $f'(x)$ เป็นอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x)$ แล้วถ้า $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f'\left(x+h\right)-f'\left(x\right)}{h}$ หาค่าได้ เรียกค่าของลิมิตนี้ว่า**อนุพันธ์อันดับที่สอง**ของ $f(x)$ เทียบกับ x อนุพันธ์อันดับที่สองของฟังก์ชันเขียนแทนด้วย $f''(x)$, y'' , $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ หรือ $\dfrac{d^2}{dx^2}f(x)$ ในทำนองเดียวกันถ้า $f''(x)$ มีอนุพันธ์เทียบกับ x เรียกอนุพันธ์นี้ว่า**อนุพันธ์อันดับที่สาม** ของ $f(x)$ เทียบกับ x และเขียนแทนด้วย $f'''(x)$, y''', $\dfrac{d^3y}{dx^3}$ หรือ $\dfrac{d^3}{dx^3}f(x)$ และถ้า $f'''(x)$ มีอนุพันธ์เทียบกับ x เรียกอนุพันธ์นี้ว่า**อนุพันธ์อันดับที่สี่**ของ $f(x)$ เทียบกับ x และเขียนแทนด้วย $f^{(4)}(x)$, $y^{(4)}$, $\dfrac{d^4y}{dx^4}$ หรือ $\dfrac{d^4}{dx^4}f(x)$ ในทำนองเดียวกันผลลัพธ์จากการหาอนุพันธ์ n ครั้งติดต่อกันไปเมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกก็จะเรียกกว่า**อนุพันธ์อันดับที่** n ของ $f(x)$ ซึ่งเขียนแทนด้วย $f^{(n)}(x)$, $y^{(n)}$, $\dfrac{d^ny}{dx^n}$ หรือ $\dfrac{d^n}{dx^n}f\left(x\right)$ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2.65 กำหนดให้ $f\left(x\right)=3x^5-2x+3$ จงหา $f''\left(x\right)$

วิธีทำ $f(x)=3x^5-2x+3$

$$f'(x)=\frac{d}{dx}(3x^5-2x+3)$$

$$=15x^4-2$$

$$f''(x)=\frac{d}{dx}(15x^4-2)$$

$$=60x^3$$

ดังนั้น $f''(x)=60x^3$

ตัวอย่าง 2.66 กำหนดให้ $f(x)=\sin 2x^5$ จงหา $f''(x)$

วิธีทำ $f(x)=\sin 2x^5$

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\sin 2x^5$$

$$=\cos 2x^5\,\frac{d}{dx}2x^5$$

$$=\left(\cos 2x^5\right)\left(10x^4\right)$$

$$f''\left(x\right)=\frac{d}{dx}\left(\cos 2x^5\right)\left(10x^4\right)$$

$$=\left(\cos 2x^5\right)\frac{d}{dx}\left(10x^4\right)+\left(10x^4\right)\frac{d}{dx}\left(\cos 2x^5\right)$$

$$=\left(\cos 2x^5\right)\left(40x^3\right)+\left(10x^4\right)\left(-\sin 2x^5\right)\frac{d}{dx}2x^5$$

$$=\left(\cos 2x^5\right)\left(40x^3\right)+\left(10x^4\right)\left(-\sin 2x^5\right)\left(10x^4\right)$$

$$=40x^3\left(\cos 2x^5\right)-100x^8\left(\sin 2x^5\right)$$

ดังนั้น $f''\left(x\right)=40x^3\left(\cos 2x^5\right)-100x^8\left(\sin 2x^5\right)$

ตัวอย่าง 2.67 ให้ $f\left(x\right)=x^4-5x+2$ จงหาค่า n ที่มีค่าน้อยที่สุดที่ทำให้ $f^{(n)}\left(x\right)=0$

วิธีทำ $f(x)=x^4-5x+2$

$$f'(x)=\frac{d}{dx}x^4-5x+2$$

$$=4x^3-5$$

$$f''(x)=\frac{d}{dx}(4x^3-5)$$

$$=12x^2$$

$$f'''(x)=\frac{d}{dx}12x^2$$

$$=24x$$

$$f^{(4)}(x)=\frac{d}{dx}24x$$

$$=24$$

$$f^{(5)}(x) = \frac{d}{dx}24$$
$$= 0$$

เนื่องจาก $f^{(5)}(x) = 0$ และ $f^{(4)}(x) \neq 0$ ดังนั้น $n = 5$

2.10 สรุปท้ายบทที่ 2

ก่อนที่เราจะหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันนั้น ก่อนอื่นเราต้องตรวจสอบก่อนเสมอว่าฟังก์ชันที่เราจะหาอนุพันธ์นั้นมีอนุพันธ์หรือไม่ ซึ่งถ้าหากฟังก์ชันนั้นมีอนุพันธ์แล้วเราสามารถหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันได้เลยอาจจะหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันแบบใช้นิยามก็ได้ แต่ถ้าบางฟังก์ชันไม่เหมาะกับการหาโดยใช้นิยามเราสามารถแบ่งฟังก์ชันที่เราจะหาอนุพันธ์ในรูปแบบต่าง ๆ ที่ได้กล่าวมา เช่นการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิต การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบ การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันลอการิทึมและฟังก์ชันเลขชี้กำลัง การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยปริยาย และการหาอนุพันธ์อันดับสูง ซึ่งเราได้รู้ความหมายของอนุพันธ์ไปแล้วนั้นแล้วเราก็จะสามารถนำอนุพันธ์นั้นไปแก้ปัญหาต่าง ๆ ได้อย่างถูกต้องและเหมาะสมต่อไป

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 2

1. จงหาอนุพันธ์ของ $f(x) = x^2 + 5x$

    1.1 ที่จุด x ใด ๆ

    1.2 ที่จุด $x = 1$

    1.3 ที่จุด $x = 0$

2. จงหาอนุพันธ์ของ $f(x) = 3x^2 + x - 5$

    2.1 ที่จุด x ใด ๆ

    2.2 ที่จุด $x = 3$

    2.3 ที่จุด $x = 2$

3. จงหาอนุพันธ์ของ $f(x) = (3x^2 - 5)^2$

    3.1 ที่จุด x ใด ๆ

    3.2 ที่จุด $x = 0$

    3.3 ที่จุด $x = 2$

4. จงหาอนุพันธ์ของ $f(x) = (x-3)^2 + x$

    4.1 ที่จุด x ใด ๆ

    4.2 ที่จุด $x = -1$

    4.3 ที่จุด $x = 0$

5. จงหาอนุพันธ์ของ $f(x) = x - (x-2)^3$

    5.1 ที่จุด x ใด ๆ

    5.2 ที่จุด $x = 1$

    5.3 ที่จุด $x = 10$

6. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

6.1 $y = x^3 - 6x + 1$

6.2 $y = \sqrt{x} - 6x^{10} + 12$

6.3 $f(x) = \left(5x^3 - x + 1\right)^{12}$

6.4 $y = \sqrt[3]{\left(2x^{10} - 3x + 5\right)^2}$

6.5 $f(x) = \left(x^6 - 3x\right)\left(x + 5\right)$

6.6 $y = \left(2x^6 - x\right)\left(3x^2 + 4x\right)$

6.7 $f(x) = \left(x^6 - 3x\right)^{20}\left(x + 5\right)$

6.8 $y = \dfrac{\left(2x^6 - x\right)^5}{\sqrt{3x^2 + 4x}}$

6.9 $y = \dfrac{\left(2x^6 - x\right)^{12}}{3x^2 + 4x}$

6.10 $f(x) = \dfrac{\left(x^6 - 3x\right)^{20}}{x + 5}$

6.11 $y = \dfrac{\left(2x^6 - x\right)^5}{\sqrt{3x^2 + 4x}}$

6.12 $y = \dfrac{\left(2x^6 - x\right)^{12}\sqrt{3x^2 + 4x}}{3x^2 + 4x}$

7. จงหา $\dfrac{dy}{dx}$ เมื่อกำหนดให้

7.1. $y = 3u$ และ $u = x^2 - 5x + 1$

7.2. $y = u^{10}$ และ $u = 3x - 5$

7.3. $y = 2u^4$ และ $u = x^5 + 3x^2 - 11$

8. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้และตรวจสอบว่าอนุพันธ์เท่ากันหรือไม่

8.1. $y = \sin^3\left(x^2 - 5\right)$ และ $y = \sin\left(x^2 - 5\right)^3$

8.2. $y = \dfrac{\sin\left(x + 2\right)}{\cos\left(x + 2\right)}$ และ $y = \tan\left(x + 2\right)$

8.3. $y = \sin\left(2x - 1\right)$ และ $y = \dfrac{1}{\operatorname{cosec}\left(2x - 1\right)}$

9. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

9.1 $y = \sin\left(x^{10} - 6x - 12\right)$

9.2 $y = \cos\left(3x^{5} - x\right)$

9.3 $y = \tan\left(x^{10} - 1\right)$

9.4 $y = \cot\left(3x^{20} - 4\right)$

9.5 $y = \operatorname{cosec}\left(x^{5} - 3x^{2}\right)$

9.6 $y = \sec\left(x^{10} - 21\right)$

9.7 $y = \cos\left(3x^{5} - x\right)\tan\left(x - 3\right)$

9.8 $y = \tan^{19}\left(x^{5} - 1\right)$

9.9 $y = \dfrac{\cot\left(3x^{20} - 4\right)}{x^{3} - 5x}$

9.10 $y = \cos^{12}\left(x^{5} - 3\right)\tan^{10}\left(3x - 4\right)$

9.11 $y = \cos x - \left(\tan x^{2}\right)\left(3x^{2} - 9x\right)$

10. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

10.1 $y = \sinh\left(x^{10} - 6x - 12\right)$

10.2 $y = \cosh\left(3x^{5} - x\right)$

10.3 $y = \tanh\left(x^{10} - 1\right)$

10.4 $y = \coth\left(3x^{20} - 4\right)$

10.5 $y = \operatorname{cosech}\left(x^{5} - 3x^{2}\right)$

10.6 $y = \operatorname{sech}\left(x^{10} - 21\right)$

10.7 $y = \cosh\left(3x^{5} - x\right)\tanh\left(x - 3\right)$

10.8 $y = \tanh^{19}\left(x^{5} - 1\right)$

10.9 $y = \dfrac{\coth\left(3x^{20} - 4\right)}{x^{3} - 5x}$

10.10 $y = \cosh^{12}\left(x^{5} - 3\right)\tanh^{10}\left(3x - 4\right)$

10.11 $y = \cosh x - \left(\tanh x^{2}\right)\left(3x^{2} - 9x\right)$

11. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

11.1 $y = \arcsin\left(x^{10} - 12\right)$

11.2 $y = \arccos\left(3x^{5} - x\right)$

11.3 $y = \operatorname{arctanh}\left(x^{10} - 1\right)$

11.4 $y = \operatorname{arccot}\left(3x^{20} - 4\right)$

11.5 $y = \operatorname{arccosec}\left(x - 3\right)$

11.6 $y = \operatorname{arcsec}\left(x^{10} - 21\right)$

11.7 $y = \arccos\left(3x^{5} - x\right)\arctan\left(x - 3\right)$

11.8 $y = \dfrac{\operatorname{arccot}\left(3x^{20} - 4\right)}{x^{3} - 5x}$

11.9 $y = \arccos x - \left(\arctan x^{2}\right)\left(3x^{2} - 9x\right)$

12. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

12.1 $y=\ln\left(x^{10}-6x-12\right)$ 12.2 $y=\log_2\left(3x^5-x\right)$

12.3 $y=e^{x^{10}-1}$ 12.4 $y=12^{5x^3-7x}$

12.5 $y=\ln x^3+3x-\log_5 x$ 12.6 $y=\ln x^3+e^{\sin x}$

12.7 $y=\ln\left(\cos^3 x\right)$ 12.8 $y=\left[\ln\left(x^5-1\right)\right]^{20}$

12.9 $y=\dfrac{\ln\left(3x^{20}-4\right)}{x^3-5x}$ 12.10 $y=\left(\ln x^5\right)e^{\cot 5x}$

13. ให้ y เป็นฟังก์ชันของ x ซึ่งสอดคล้องกลับสมการดังต่อไปนี้ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

13.1 $xy-x^2=5$ 13.2 $y^5x-3=x^2$

13.3 $3yx^5-x=2$ 13.4 $y^5x^6-3x=x^2$

13.5 $y^5\sin x-y=1$ 13.6 $e^{y-3}-x^2=5$

13.7 $y^5\sin x^6-x=y^2$ 13.8 $y^2x-y^{10}=2x$

13.9 $e^y-\sin x=y-2$ 13.10 $y\tan x^6-3=x-y^2$

14. กำหนด $f\left(x\right)=x^3-6x^2-4$ จงหาค่า $f''\left(x\right)$

15. กำหนด $f\left(x\right)=3x^{10}-x^2+4x-1$ จงหาค่า $f^{(4)}\left(x\right)$

16. กำหนด $y=\cot 5x$ จงหาค่า y''

17. กำหนด $y=e^{3x-2}$ จงหาค่า y''

18. ให้ $f\left(x\right)=2x^3-5x^2$ จงหาค่า n ที่น้อยที่สุดที่ทำให้ $f^{(n)}\left(x\right)=0$

19. ให้ $f\left(x\right)=x^5-x^3+1$ จงหาค่า n ที่น้อยที่สุดที่ทำให้ $f^{(n)}\left(x\right)=0$

บทที่ 3
การประยุกต์อนุพันธ์

สำหรับในบทที่ 3 ที่ผ่านมานั้นเราได้ศึกษาเรื่อง ส่วนเปลี่ยนแปลงและอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ย ซึ่งเป็นพื้นฐานที่มีโยชน์ต่อวิทยาการในสาขาต่าง ๆ มากมาย เช่น ฟิสิกส์ เคมี ชีววิทยา วิศวกรรมศาสตร์ ดาราศาสตร์ เศรษฐศาสตร์ สังคมวิทยา และพฤติกรรมทางจิตวิทยา ตลอดจนเป็นพื้นฐานของการศึกษาคณิตศาสตร์สาขาอื่น ๆ แทบทุกสาขา ซึ่งมีประโยชน์อย่างกว้างขวางในการแก้ปัญหาต่าง ๆ ดังนั้นในบทนี้จะกล่าวถึงการนำอนุพันธ์ไปประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหา ต่าง ๆ เช่น ปัญหาเกี่ยวการเคลื่อนที่ของวัตถุ ซึ่งเมื่อวัตถุเคลื่อนที่นั้นจะเกิดสมการการเคลื่อนที่ขึ้น มีความเร็วและความเร่ง ในการเคลื่อนที่ การประยุกต์ส่วนเปลี่ยนแปลงและอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยนั้นเกี่ยวกับเรื่องอัตราการเปลี่ยนแปลงของสิ่งต่าง ๆ ในชีวิตประจำวัน หรือเรียกว่าอัตราสัมพัทธ์ และการประยุกต์ทางเรขาคณิตเช่นการหาสมการเส้นสัมผัสและสมการเส้นปกติของสมการเส้นโค้งที่กำหนดให้และใช้ในการตรวจสอบช่วงของฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลด ค่าสูงสุดสัมและค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ จุดเปลี่ยนเว้า ลักษณะกราฟเว้าลงและเว้าขึ้น แล้วนำข้อมูลที่ได้ทั้งหมดไปใช้ในการวาดกราฟ และสุดท้ายจะนำอนุพันธ์ของฟังก์ชันไปช่วยหาค่าลิมิตได้โดยใช้กฎของโลปิตาล

3.1 ความเร็ว และความเร่ง

การเคลื่อนที่ของวัตถุมีการเคลื่อนที่ได้หลายวิธีมีทั้งการเคลื่อนที่ในแนวเส้นตรงและไม่ใช่เส้นตรงแต่สำหรับในบทนี้จะศึกษาถึงการเคลื่อนที่ของวัตถุในแนวเส้นตรงเท่านั้นโดยจะกล่าวถึงเฉพาะความเร็วและความเร่งของวัตถุที่เคลื่อนที่ในแนวเส้นตรงเท่านั้น วัตถุเคลื่อนที่ในแนวเส้นตรงมีสมการการเคลื่อนที่ในรูปความสัมพันธ์ของระยะทางและเวลา ให้วัตถุเคลื่อนที่ได้ทาง s หน่วยระยะทางโดยใช้เวลาในการเคลื่อนที่ t หน่วยเวลา ดังนั้น $s = f(t)$ แทนสมการการเคลื่อนที่

ความเร็วโดยทั่วไปเราได้จากอัตราส่วนระหว่างปริมาณการเปลี่ยนแปลงของ s(ระยะทาง) กับปริมาณการเปลี่ยนแปลงของ t(เวลา) แต่ถ้าต้องการความเร็วชั่วขณะหรือความเร็วที่เวลา t ใด ๆ คือ $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ ซึ่งแทนด้วย $\dfrac{ds}{dt}$ ดังนั้นความเร็วของวัตถุเมื่อเวลา t ใด ๆ คือ $v = \dfrac{ds}{dt}$
(ชัยสงคราม เครือหงส์, 2544 : 47)

ข้อสังเกต 3.1

1. ถ้า $v > 0$ วัตถุจะเคลื่อนที่ในทิศทางที่ได้ระยะทางเพิ่มขึ้น
2. ถ้า $v < 0$ วัตถุจะเคลื่อนที่ในทิศทางที่ได้ระยะทางลดลง
3. ถ้า $v = 0$ แสดงว่าวัตถุหยุดนิ่ง

เช่นเดียวกันกับความเร่งของวัตถุเมื่อเวลา t ใด ๆ เราหาได้จากอัตราส่วนระหว่างปริมาณการเปลี่ยนแปลงของ v กับปริมาณการเปลี่ยนแปลงของ t โดยหาค่า $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta v}{\Delta t}$ ซึ่งแทนด้วยสัญลักษณ์ $\dfrac{dv}{dt}$ นั่นคือความเร่งของวัตถุเมื่อเวลา t ใด ๆ คือ $a = \dfrac{dv}{dt}$ แต่ $v = \dfrac{ds}{dt}$ ดังนั้น $a = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{ds}{dt}\right) = \dfrac{d^2 s}{dt^2}$ (มาริสา มัยยะ และวันเพ็ญ จันทรังษี, 2550 : 85)

ข้อสังเกต 3.2

1. ถ้า $a > 0$ ความเร็วจะเพิ่มขึ้น
2. ถ้า $a < 0$ ความเร็วจะลดลง

ตัวอย่าง 3.1 วัตถุชิ้นหนึ่งเคลื่อนที่ในแนวเส้นตรงมีสมการการเคลื่อนที่ $s = \dfrac{1}{3}t^3 - t + 1$ เมตร จงหาความเร็ว ความเร่งที่เวลา t ใด ๆ และหาความเร็ว ความเร่งของวัตถุเมื่อเวลาผ่านไป 3 วินาที

วิธีทำ จาก $v = \dfrac{ds}{dt}$

$$v = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{3}t^3 - t + 1\right)$$

$$= t^2 - 1$$

จะได้ $v = t^2 - 1$

ณ $t = 3$ ได้ $v = 3^2 - 1 = 8$

ดังนั้น ความเร็วของวัตถุเมื่อเวลาผ่านไป 3 วินาทีเป็น 8 เมตร/วินาที

จาก $a = \dfrac{dv}{dt}$

$$a = \frac{d}{dt}(t^2 - 1)$$

$$= 2t$$

ได้ $a = 2t$

ณ $t = 3$ ได้ $a = 2(3) = 6$

ดังนั้น ความเร่งของวัตถุเมื่อเวลาผ่านไป 3 วินาทีเป็น 6 เมตร/(วินาที)^2

ตัวอย่าง 3.2 ระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่ได้เมื่อเวลา t ใด ๆ แทนด้วย $s = t^3 - 6t^2 + 9t + 4$ เมื่อ s มีหน่วยเป็นเมตรและ t มีหน่วยเป็นวินาที

1. จงหา s (ระยะทาง) และ a (ความเร่ง) เมื่อ $v = 0$
2. จงหา s (ระยะทาง) และ v (ความเร็ว) เมื่อ $a = 0$
3. เมื่อใดที่ s (ระยะทาง) เพิ่มขึ้น
4. เมื่อใดที่ v (ความเร็ว) เพิ่มขึ้น

วิธีทำ $v = \dfrac{ds}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(t^3 - 6t^2 + 9t + 4\right) = 3t^2 - 12t + 9$

$$= 3\left(t-1\right)\left(t-3\right)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(3t^2 - 12t + 9\right) = 6t - 12$$

$$= 6\left(t-2\right)$$

1. เมื่อ $v = 0$ ดังนั้น $t = 1,\ 3$

เมื่อ $t = 1$

$$s = 1^3 - 6(1)^2 + 9(1) + 4 = 8$$

$$a = 6(1-2) = -6$$

เมื่อ $t = 3$

$$s = 3^3 - 6(3)^2 + 9(3) + 4 = 4$$

$$a = 6(3-2) = 6$$

2. เมื่อ $a = 0$ ดังนั้น $t = 2$

เมื่อ $t = 2$

$$s = 2^3 - 6(2)^2 + 9(2) + 4 = 6$$

$$v = 3(2-1)(2-3) = -3$$

3. s(ระยะทาง) เพิ่มขึ้นเมื่อ $v > 0$

$$v = 3\left(t-1\right)\left(t-3\right) > 0$$

จะได้ $t < 1$ หรือ $t > 3$

ดังนั้น s(ระยะทาง) เพิ่มขึ้นเมื่อ $t < 1$ หรือ $t > 3$

4. v (ความเร็ว) เพิ่มขึ้น เมื่อ $a > 0$

$$a = 6(t-2) > 0$$

จะได้ $t > 2$

ดังนั้น v (ความเร็ว) เพิ่มขึ้น เมื่อ $t > 2$

ตัวอย่าง 3.3 กำหนดให้ $s = t^3 - 4t^2 - 3t + 2$ จงหาความเร่งขณะที่ความเร็วเท่ากับศูนย์

วิธีทำ $v = \dfrac{ds}{dt}$

$$v = \frac{d}{dt}\left(t^3 - 4t^2 - 3t + 2\right)$$

$$= 3t^2 - 8t - 3$$

$$a = \frac{dv}{dt}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(3t^2 - 8t - 3\right)$$

$$= 6t - 8$$

เมื่อ $v = 0$ จะได้ $3t^2 - 8t - 3 = 0$

$$\left(3t+1\right)\left(t-3\right) = 0$$

$$t = -\frac{1}{3}, 3$$

$t = -\frac{1}{3}$ ใช้ไม่ได้เพราะ $t \geq 0$

ให้ $t = 3$ จะได้ $a = 6(3) - 8 = 10$

ดังนั้น ขณะที่ความเร็วเป็น 0 ความเร่งมีค่าเป็น 10 หน่วยระยะทาง/(หน่วยเวลา)^2

ตัวอย่าง 3.4 ลูกบอลลูกหนึ่งถูกปล่อยให้ตกลงมาจากระดับความสูง 320 ฟุต และความสูงของลูกบอลลูกนี้ เมื่อขณะเวลา t วินาทีใด ๆ กำหนดระยะ $s = 320 - 16t^2$

1. จงหาความเร็วของลูกบอลเมื่อเวลา $t = 2$ วินาที
2. จงหาความเร็วของลูกบอลขณะที่ลูกบอลตกกระทบพื้น

วิธีทำ 1. ความเร็วของลูกบอลขณะเวลา t ใด ๆ คือ

$$\begin{aligned} v &= \frac{ds}{dt} \\ &= \frac{d}{dt}(320 - 16t^2) \\ &= -32t \end{aligned}$$

ความเร็วของลูกบอลเมื่อเวลา $t = 2$ วินาทีคือ $v = -32(2) = -64$ ฟุตต่อวินาที

2. ความเร็วของลูกบอลขณะที่ลูกบอลตกกระทบพื้นแสดงว่า $s = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= 320 - 16t^2 \\ 16t^2 &= 320 \\ t^2 &= \frac{320}{16} \\ t^2 &= 20 \\ t &= \pm\sqrt{20} \end{aligned}$$

แต่ $t = -\sqrt{20}$ ใช้ไม่ได้เพราะ $t \geq 0$ ได้ $t = \sqrt{20}$

ขณะที่ $t = \sqrt{20}$ ได้ $v = -32\sqrt{20}$ ฟุตต่อวินาที

3.2 อัตราสัมพัทธ์

อัตราสัมพัทธ์ หมายถึงอัตราการเปลี่ยนแปลงของตัวแปร 2 ตัวหรือมากกว่า 2 ซึ่งมีปัญหาอีกจำนวนมากที่เกี่ยวข้องกับตัวแปรหลายตัว และแต่ละตัวแปรเหล่านั้นก็เป็นฟังก์ชันของเวลาถ้าเราทราบค่าตัวแปร และอัตราการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรบางตัวเทียบกับเวลาแล้วจะสามารถหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรที่ต้องการเทียบกับเวลาได้วิธีการนี้เรียกว่า อัตราสัมพัทธ์ (พัฒนา สีมากุล, 2537 : 31)

ในการแก้ปัญหามีขั้นตอนดังนี้

ขั้นที่ 1 เขียนแผนภาพประกอบปัญหา

ขั้นที่ 2 กำหนดตัวแปรแทนปริมาณต่าง ๆ ที่เปลี่ยนแปลงตามเวลา

ขั้นที่ 3 สร้างสมการแสดงความสัมพันธ์ของตัวแปรต่าง ๆ ซึ่งเป็นจริง ณ เวลาใด ๆ ในช่วงเวลาของปัญหา

ขั้นที่ 4 หาอนุพันธ์เทียบกับเวลา จากสมการที่สร้างขึ้นในข้อ 3

ขั้นที่ 5 แทนค่าอัตราการเปลี่ยนแปลงเทียบกับเวลาและตัวแปรที่ทราบ แล้วคำนวณสิ่งที่ต้องการทราบ

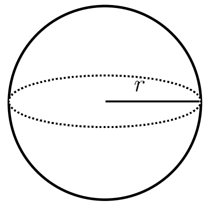
ตัวอย่าง 3.5 บอลลูน (ทรงกลม) ลูกหนึ่งจะมีการขยายตัวเมื่อได้รับความร้อน ถ้ารัศมีบอลลูนเพิ่มขึ้นในอัตรา 4 นิ้ว/นาที แล้วปริมาตรของบอลลูนจะเพิ่มขึ้นในอัตราเท่าไรขณะที่บอลลูนมีรัศมี 50 นิ้ว

วิธีทำ กำหนด v แทนปริมาตรของบอลลูนขณะเวลา t นาที

กำหนด r แทนรัศมีของบอลลูนขณะเวลา t นาที

สูตรปริมาตรของทรงกลม $v = \frac{4}{3}\pi r^3$

วาดรูปทรงกลมได้ดังนี้



จาก $v = \frac{4}{3}\pi r^3$

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)\\ &= \frac{4}{3}\pi\frac{d}{dt}\left(r^3\right)\\ &= \frac{4}{3}\pi 3r^2\frac{dr}{dt}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dt} &= \frac{4}{3}\pi 3r^2\frac{dr}{dt}\\ &= \frac{4}{3}\pi 3(50)^2(4)\\ &= 40000\pi\end{aligned}$$

ดังนั้น ปริมาตรบอลลูนเพิ่มขึ้นในอัตรา 40000π ลูกบาศก์นิ้ว/นาที

ตัวอย่าง 3.6 เส้นผ่านศูนย์กลางและส่วนสูงของทรงกระบอก ณ เวลาหนึ่งเป็น 10 ฟุต และ 40 ฟุต ตามลำดับถ้ารัศมีเพิ่มขึ้นด้วยอัตรา 1 ฟุต/ชั่วโมง แล้วส่วนสูงจะมีอัตราการเปลี่ยนแปลงอย่างไรจึงจะทำให้ปริมาตรคงเดิม

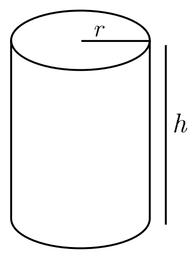
วิธีทำ กำหนด v แทนปริมาตรของทรงกระบอกขณะเวลา t

กำหนด r แทนรัศมีของทรงกระบอกขณะเวลา t

กำหนด h แทนส่วนสูงของทรงกระบอกขณะเวลา t

สูตรปริมาตรของทรงกระบอก $v = \pi r^2 h$

วาดรูปทรงกระบอกได้ดังนี้



จาก $v = \pi r^2 h$

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(\pi r^2 h\right)\\ &= \pi\frac{d}{dt}\left(r^2 h\right)\end{aligned}$$

$$= \pi\left(r^2\frac{d}{dt}h + h\frac{d}{dt}r^2\right)$$

$$= \pi\left(r^2\frac{dh}{dt} + 2hr\frac{dr}{dt}\right)$$

ได้ $$\frac{dv}{dt} = \pi\left(r^2\frac{dh}{dt} + 2hr\frac{dr}{dt}\right)$$

$$0 = \pi\left(5^2\frac{dh}{dt} + (2)(40)(5)\frac{dr}{dt}\right)$$

$$0 = \pi\left(5^2\frac{dh}{dt} + (2)(40)(5)(1)\right)$$

$$-400 = 25\frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dh}{dt} = -16$$

ดังนั้น ส่วนสูงของทรงกระบอกลดลงในอัตรา 24 ฟุต/ชั่วโมง

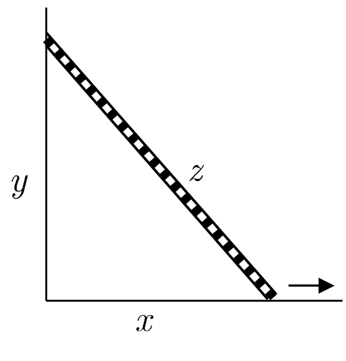
ตัวอย่าง 3.7 บันไดยาว 50 เมตร วางพิงไว้กับผนังซึ่งตั้งฉากกับพื้นราบ ถ้าปลายล่างของบันไดเลื่อนออกห่างจากผนังด้วยอัตรา 4 เมตร/วินาที จงหาว่าปลายบนของบันไดจะเคลื่อนที่อย่างไร ในขณะที่ปลายล่างของบันไดอยู่ห่างจากผนัง 30 เมตร

วิธีทำ กำหนด x แทนระยะห่างระหว่างผนังถึงปลายล่างของบันได ขณะเวลา t

กำหนด y แทนระยะห่างระหว่างพื้นถึงปลายบนของบันได เวลา t

กำหนด z แทนความยาวของบันได

วาดรูปความสัมพันธ์ได้ดังนี้



ได้ความสัมพันธ์ของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก $x^2 + y^2 = z^2$

$$(30)^2 + y^2 = (50)^2$$
$$y^2 = 2500 - 900$$
$$y^2 = 1600$$
$$y = \pm\sqrt{1600}$$
$$= \pm 40$$

เพราะว่า $y \geq 0$ เพราะฉะนั้น $y = 40$

จาก $\qquad x^2 + y^2 = z^2$

$$\frac{d}{dt}\left(x^2 + y^2\right) = \frac{d}{dt}\left(z^2\right)$$
$$\frac{d}{dt}x^2 + \frac{d}{dt}y^2 = \frac{d}{dt}z^2$$
$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 2z\frac{dz}{dt}$$
$$2(30)4 + 2(40)\frac{dy}{dt} = 0$$
$$\frac{dy}{dt} = \frac{-240}{80}$$
$$= -3$$

ดังนั้น ปลายบนของบันไดเคลื่อนที่ลงด้วยอัตรา 3 เมตร/วินาที

ตัวอย่าง 3.8 ถังน้ำรูปกรวยกลมสูง 10 ฟุต เส้นผ่านศูนย์กลางของปากกรวยยาว 10 ฟุต มีน้ำไหลเข้าสู่ถังด้วยอัตรา 2 ลูกบาศก์ฟุต/นาที จงหาว่าขณะที่น้ำในถังสูง 6 ฟุต ระดับน้ำจะสูงขึ้นด้วยอัตราเท่าใด

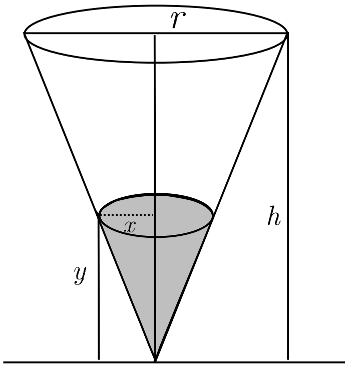
วิธีทำ กำหนด v เป็นปริมาตรของน้ำในถังขณะเวลา t

กำหนด x เป็นรัศมีของผิวน้ำในถังรูปขณะเวลา t

กำหนด y เป็นความสูงของน้ำในถังขณะเวลา t

ปริมาตรทรงกระบอก $v = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ โดยที่ h เป็นความสูงของทรงกระบอก

วาดรูปความสัมพันธ์ได้ดังนี้



จากความสัมพันธ์จะได้ $\frac{x}{y}=\frac{r}{h}$

$$\frac{x}{y}=\frac{5}{10}$$

$$x=\frac{1}{2}y$$

พิจารณาปริมาตรของน้ำ $v=\frac{1}{3}\pi x^2 y$

$$=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{1}{2}y\right)^2 y$$

$$=\frac{1}{12}\pi y^3$$

จาก $v=\frac{1}{12}\pi y^3$

จะได้ $\frac{dv}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{12}\pi y^3\right)$

$$\frac{dv}{dt}=\frac{1}{12}\pi 3y^2\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt}=\frac{1}{4}\pi y^2\frac{dy}{dt}$$

$$2=\frac{1}{4}\pi(6)^2\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{2}{9}\pi=\frac{dy}{dt}$$

ดังนั้น ระดับน้ำจะสูงขึ้นด้วยอัตรา $\frac{2}{9}\pi$ ฟุต/นาที

3.3 สมการเส้นสัมผัส และเส้นปกติ

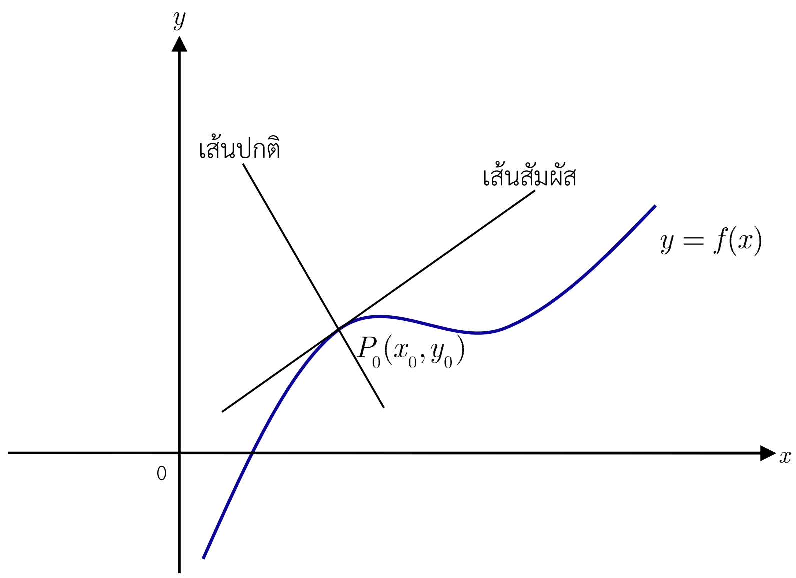
สมการเส้นตรงที่ผ่านจุด (x_0, y_0) มีความชันเท่ากับ m คือสมการ $y - y_0 = m(x - x_0)$ กำหนดให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ $x = x_0$ จะได้ว่า $\frac{dy}{dx}$ ที่จุด $x = x_0$ คือความชันของเส้นโค้ง $y = f(x)$ ที่ $x = x_0$ หรือกล่าวได้อีกอย่างหนึ่งก็คือสมการของเส้นสัมผัสที่สัมผัสเส้นโค้ง $y = f(x)$ ที่ $x = x_0$ คือ $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ (เลิศ สิทธิโกศล, 2541 : 44-46)

ข้อสังเกต 3.3

ถ้า $f'(x_0) \neq 0$ แล้วสมการเส้นสัมผัสคือคือ $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ แต่ถ้า $f'(x_0) = 0$ เส้นโค้ง $y = f(x)$ จะมีเส้นสัมผัสเป็นเส้นขนานกับแกน x

บทนิยาม 4.1

กำหนดให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่จุด $P_0(x_0, y_0)$ เส้นตรงที่ผ่านจุด $P_0(x_0, y_0)$ และตั้งฉากกับเส้นสัมผัสที่จุดสัมผัส $P_0(x_0, y_0)$ เรียกว่า**เส้นปกติ** สมการเส้นปกติที่ผ่านจุด $P_0(x_0, y_0)$ คือ $x = x_0$ ถ้าเส้นสัมผัสอยู่ในแนวระดับ สำหรับกรณีอื่นสมการคือ $y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$ ถ้า $f'(x_0) \neq 0$



ภาพประกอบ 3.1 แสดงเส้นปกติ และเส้นสัมผัส

ข้อสังเกต 3.4

ถ้า $m \neq 0$ แทนความชันของเส้นสัมผัสจะได้ $-\dfrac{1}{m}$ แทนความชันของเส้นปกติ เพราะเส้นปกติกับเส้นสัมผัสตั้งฉากกันความชันคูณกันจึงมีค่าเท่ากับ -1

ตัวอย่าง 3.9 จงหาสมการเส้นสัมผัส และเส้นปกติของเส้นโค้ง $y = x^3 - 2x^2 + 4$ ที่จุด $(2,4)$

วิธีทำ จากโจทย์กำหนดให้ $f(x) = y = x^3 - 2x^2 + 4$

จะได้ $f'(x) = 3x^2 - 4x$

ความชันของเส้นตรงที่สัมผัสเส้นโค้งที่จุด $(2,4)$

คือ
$$\begin{aligned} f'(2) &= 3(2)^2 - 4(2) \\ &= 12 - 8 \\ &= 4 \end{aligned}$$

สมการเส้นตรงที่สัมผัสจุด $(2,4)$ และมีความชันเท่ากับ 4

คือ
$$\begin{aligned} y - 4 &= 4\left(x-2\right) \\ y &= 4\left(x-2\right) + 4 \\ &= 4x - 4 \end{aligned}$$

เนื่องจากความชันของเส้นสัมผัสมีค่าเท่ากับ 4 ดังนั้นความชันของเส้นปกติมีค่าเท่ากับ $-\dfrac{1}{4}$

ดังนั้น สมาการเส้นปกติที่ผ่านจุด $(2,4)$ และความชันมีค่าเท่ากับ $-\dfrac{1}{4}$

คือ
$$\begin{aligned} y - 4 &= -\frac{1}{4}\left(x-2\right) \\ y &= -\frac{1}{4}\left(x-2\right) + 4 \\ &= -\frac{1}{4}x + \frac{2}{4} + 4 \\ &= -\frac{1}{4}x + \frac{9}{2} \end{aligned}$$

ดังนั้น สมการเส้นสัมผัสคือ $y = 4x - 4$ และสมการเส้นปกติคือ $y = -\dfrac{1}{4}x + \dfrac{9}{2}$

ตัวอย่าง 3.10 จงหาสมการเส้นสัมผัส และเส้นปกติของเส้นโค้ง $x^2 + 3xy + y^2 = 5$ ที่จุด $(1,1)$

วิธีทำ จากโจทย์กำหนดสมการเส้นโค้ง $x^2 + 3xy + y^2 = 5$

จะได้
$$\frac{d}{dx}\left(x^2 + 3xy + y^2\right) = \frac{d}{dx}\left(5\right)$$
$$\frac{d}{dx}x^2 + \frac{d}{dx}3xy + \frac{d}{dx}y^2 = 0$$
$$2x + 3\frac{d}{dx}\left(xy\right) + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$
$$2x + 3\left[x\frac{dy}{dx} + y\frac{dx}{dx}\right] + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$
$$2x + 3\left[x\frac{dy}{dx} + y\right] + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$
$$2x + 3x\frac{dy}{dx} + 3y + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$
$$3x\frac{dy}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} = -2x - 3y$$
$$\left(3x + 2y\right)\frac{dy}{dx} = -2x - 3y$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\left(2x + 3y\right)}{3x + 2y}$$

ความชันของเส้นตรงที่สัมผัสเส้นโค้งที่จุด $(1,1)$

คือ
$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(1,1)} = \frac{-\left[2(1) + 3(1\right]}{3(1) + 2(1)}$$
$$= -1$$

สมการส้นตรงที่สัมผัสจุด $\left(1,1\right)$ และมีความชันเท่ากับ -1

คือ
$$y - 1 = -1\left(x - 1\right)$$
$$y - 1 = -x + 1$$
$$y = -x + 2$$
$$y + x = 2$$

เนื่องจากความชันของเส้นสัมผัสมีค่าเท่ากับ -1 ดังนั้นความชันของเส้นปกติมีค่าเท่ากับ 1

ดังนั้น สมการเส้นปกติที่จุด $(1,1)$ และความชันมีค่าเท่ากับ 1

คือ
$$y-1=1(x-1)$$
$$y-1=x-1$$
$$y-x=0$$

ดังนั้น สมการเส้นสัมผัสคือ $y+x=2$ และสมการเส้นปกติคือ $x-y=0$

ตัวอย่าง 3.11 กำหนดให้ a เป็นจำนวนจริงที่ไม่เท่ากับศูนย์จงแสดงว่าเส้นปกติของเส้นโค้ง $x^2+y^2=a^2$ ที่จุด (x_0,y_0) ใด ๆ บนเส้นโค้งนี้ เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุดกำเนิด

วิธีทำ จากโจทย์กำหนดสมการเส้นโค้ง $x^2+y^2=a^2$

จะได้
$$\frac{d}{dx}\left(x^2+y^2\right)=\frac{d}{dx}\left(a^2\right)$$
$$\frac{d}{dx}x^2+\frac{d}{dx}y^2=0$$
$$2x+2y\frac{dy}{dx}=0$$
$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$$

เพราะฉะนั้นความชันของเส้นสัมผัสที่จุด (x_0,y_0) เท่ากับ $-\dfrac{x_0}{y_0}$

ดังนั้น ความชันของเส้นปกติที่จุด (x_0,y_0) คือ $-\dfrac{1}{-\dfrac{x_0}{y_0}}=\dfrac{y_0}{x_0}$

สมการเส้นปกติของเส้นโค้งที่ผ่านจุด (x_0,y_0) คือ

$$y-y_0=\frac{y_0}{x_0}(x-x_0)$$
$$y-y_0=\frac{y_0}{x_0}x-\frac{y_0}{x_0}x_0$$
$$y-y_0=\frac{y_0}{x_0}x-y_0$$
$$y=\frac{y_0}{x_0}x$$

เนื่องจากสมการ $y=\dfrac{y_0}{x_0}x$ เป็นสมการเส้นตรงซึ่งผ่านจุดกำเนิดเสมอ

ดังนั้น เส้นปกติของเส้นโค้ง $x^2+y^2=a^2$ ที่จุด (x_0,y_0) ใด ๆ เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุดกำเนิด

ตัวอย่าง 3.12 จงหาสมการเส้นตรงทั้งหมดที่ลากจากจุด $P(-1,2)$ มาสัมผัสกับเส้นโค้ง $4xy=1$

วิธีทำ ความชันของเส้นโค้ง $4xy=1$ ที่จุด (x,y) ใด ๆ คือ $\dfrac{dy}{dx}$

จาก $\quad 4xy = 1$

ได้
$$\frac{d}{dx}(4xy) = \frac{d}{dx}(1)$$
$$4\frac{d}{dx}(xy) = \frac{d}{dx}(1)$$
$$4\left(x\frac{dy}{dx} + y\frac{dx}{dx}\right) = 0$$
$$4x\frac{dy}{dx} + 4y = 0$$
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \qquad (1)$$

ความชันที่ผ่านจุด $(-1,2)$ และ (x,y) ใด ๆ มีความชันเท่ากับ
$$m = \frac{y-2}{x+1} \qquad (2)$$

แต่ $(1)=(2)$

ได้
$$\frac{y-2}{x+1} = -\frac{y}{x}$$
$$x(y-2) = -y(x+1)$$
$$xy - 2x = -xy - y$$
$$2xy - 2x + y = 0$$
$$4xy - 4x + 2y = 0$$

แต่เนื่องจาก $\quad 4xy = 1$

ได้ $\quad 1 - 4x + 2y = 0$

และ $\quad 4x = \dfrac{1}{y}$

ได้ $\quad 1 - \dfrac{1}{y} + 2y = 0$

$$y-1+2y^2=0$$

$$2y^2+y-1=0$$

$$(2y-1)(y+1)=0$$

$$y=\frac{1}{2},-1$$

แทนค่า y จะได้ค่า $x=\frac{1}{2},-\frac{1}{4}$

เพราะฉะนั้นเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด $\left(-\frac{1}{4},-1\right)$ และ $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

โดยมีความชันของเส้นสัมผัสที่จุด $\left(-\frac{1}{4},-1\right)$ คือ $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}=-4$

สมการเส้นสัมผัสที่ผ่านจุด $(-1,2)$ และมีความชันเท่ากับ -4 คือ

$$y-2=-4(x+1)$$

$$y-2=-4x-4$$

$$y+4x+2=0$$

ส่วนความชันของเส้นสัมผัสที่จุด $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ คือ $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}=-1$

สมการเส้นสัมผัสที่ผ่านจุด $(-1,2)$ และมีความชันเท่ากับ -1 คือ

$$y-2=-1(x+1)$$

$$y-2=-x-1$$

$$y+x-1=0$$

3.4 ค่าสูงสุดค่าต่ำสุด และกราฟ

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการหาค่าสูงสุด ค่าต่ำสุดของ ฟังก์ชันเพิ่ม ฟังก์ชันลด จุดวิกฤต จุดสูงสุดสัมพัทธ์ จุดต่ำสุดสัมพัทธ์ จุดเปลี่ยนเว้า ค่าวิกฤต ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ และนำความรู้ทั้งหมดไปช่วยในการเขียนกราฟของฟังก์ชันต่าง ๆ (กมล เอกไทยเจริญ, 2544 : 51)

3.4.1 ฟังก์ชันเพิ่ม ฟังก์ชันลด

ฟังก์ชันเพิ่ม คือฟังก์ชันที่ค่า $y = f(x)$ มีค่าเพิ่มขึ้นในขณะที่ x มีค่าเพิ่มขึ้น ส่วนฟังก์ชันลด คือฟังก์ชันที่ค่า $y = f(x)$ มีค่าลดลงในขณะที่ x มีค่าเพิ่มขึ้น และฟังก์ชันคงตัว คือฟังก์ชันที่ค่า $y = f(x)$ มีค่าคงตัวไม่ว่า x จะมีค่าเพิ่มขึ้น หรือลดลงก็ตาม ดังบทนิยาม (คณาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยรามคำแหง, 2542 : 66)

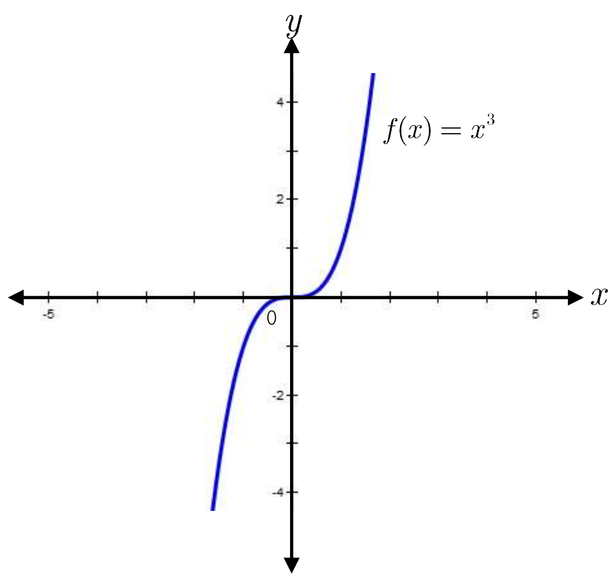
บทนิยาม 3.2

กำหนดให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง I

1. ถ้า $f(x_1) < f(x_2)$ สำหรับทุกค่า $x_1 < x_2$ บนช่วง I
   เรียก $f(x)$ ว่าเป็น**ฟังก์ชันเพิ่ม** บนช่วง I
2. ถ้า $f(x_1) > f(x_2)$ สำหรับทุกค่า $x_1 < x_2$ บนช่วง I
   เรียก $f(x)$ ว่าเป็น**ฟังก์ชันลด**บนช่วง I
3. ถ้า $f'(x) = 0$ ในช่วง (a,b) แล้ว $f(x)$ เป็นฟังก์ชันคงตัวบนช่วง (a,b)

ตัวอย่าง 3.13 จงพิจารณาว่าฟังก์ชัน $f(x) = x^3$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มหรือลดบนช่วงใด

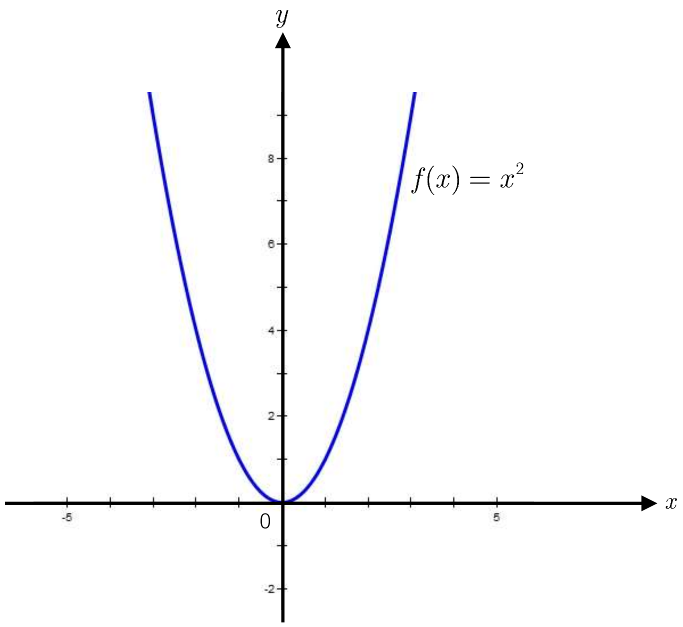
วิธีทำ กราฟของฟังก์ชัน $f(x) = x^3$ เป็นดังนี้



จากกราฟจะเห็นว่าฟังก์ชัน $f(x)=x^3$ นั้น $f(x)$ มีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อ x มีค่าเพิ่มขึ้นบนช่วง$(-\infty,\infty)$ ดังนั้น $f(x)=x^3$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $(-\infty,\infty)$

ตัวอย่าง 3.14 จงพิจารณาว่าฟังก์ชัน $f(x)=x^2$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มหรือลดบนช่วงใด

วิธีทำ กราฟของฟังก์ชัน $f(x)=x^2$ เป็นดังนี้



จากกราฟจะเห็นว่า ฟังก์ชัน $f(x)=x^2$ นั้น $f(x)$ มีค่าลดลงเมื่อ x มีค่าเพิ่มขึ้นบนช่วง $(-\infty,0)$ และ $f(x)$ มีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อ x มีค่าเพิ่มขึ้นบนช่วง$(0,\infty)$ ดังนั้น $f(x)=x^2$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $(0,\infty)$ และเป็นฟังก์ชันลดบนช่วง$(-\infty,0)$

จากตัวอย่างที่ผ่านมานั้นการพิจารณาฟังก์ชันเพิ่มหรือฟังก์ชันลดพิจารณาจากกราฟนั้นจะค่อนข้างยากและเสียเวลาในการวาดกราฟ ดังนั้นเราสามารถพิจารณาโดยใช้อนุพันธ์ดันดับที่ 1 มาช่วยในการพิจารณาโดยใช้ทฤษฎีบทต่อไปนี้ (Stein, S.K.& Barcellos, A., 1992 : 131)

ทฤษฎีบท 3.1

กำหนดให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a,b]$ โดยที่ $a,b\in R$

1. ถ้า $f'(x)>0$ ทุก ๆ $x\in(a,b)$ แล้ว $f(x)$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มขึ้นบนช่วง $[a,b]$
2. ถ้า $f'(x)<0$ ทุก ๆ $x\in(a,b)$ แล้ว $f(x)$ เป็นฟังก์ชันลดลงบนช่วง $[a,b]$

ตัวอย่าง 3.15 จงพิจารณาว่าฟังก์ชัน $f(x)=x^3$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มหรือลดบนช่วงใดโดยใช้อนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง

วิธีทำ ให้ $f(x)=x^3$

ได้ $f'(x)=3x^2$

เนื่องจาก $x^2 \geq 0$ เสมอ

จะได้ $3x^2 \geq 0$

นั้นคือ $f'(x)>0$ ทุก ๆ ค่า $x \neq 0$

ดังนั้น $f(x)=x^3$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $(-\infty,\infty)$

ตัวอย่าง 3.16 จงพิจารณาว่าฟังก์ชัน $f(x)=x^2$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มหรือลดบนช่วงใดโดยใช้อนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง

วิธีทำ ให้ $f(x)=x^2$

ดังนั้น $f'(x)=2x$

เนื่องจาก $x>0$ แล้ว $2x>0$ และถ้า $x<0$ แล้ว $2x<0$

นั้นคือถ้า $x>0$ แล้ว $f'(x)>0$ และถ้า $x<0$ แล้ว $f'(x)<0$

ดังนั้น $f(x)=x^2$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $\left[0,\infty\right)$ และเป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $\left(-\infty,0\right]$

ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน

อุษณีย์ ลีรวัฒน์ (2552 : 47) ได้ให้รายละเอียดไว้ดังบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 3.3

กำหนดให้ a และ b เป็นค่าคงตัวใด ๆ และ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $\left[a,b\right]$ และ $x_0 \in \left[a,b\right]$

1. ถ้า $f(x_0) \geq f(x)$ ทุก ๆ ค่า x อยู่ในบางช่วงเปิดที่บรรจุ x_0 แล้วจะเรียก $f(x)$ ว่ามีค่า**สูงสุดสัมพัทธ์** หรือ **มีค่าสูงสุดเฉพาะที่** ที่จุด x_0
2. ถ้า $f(x_0) \leq f(x)$ ทุก ๆ ค่า x อยู่ในบางช่วงเปิดที่บรรจุ x_0 แล้วจะเรียก $f(x)$ ว่ามีค่า**ต่ำสุดสัมพัทธ์** หรือ **มีค่าต่ำสุดเฉพาะที่** ที่จุด x_0
3. ถ้า $f(x_0) \geq f(x)$ สำหรับทุก ๆ $x \in \left[a,b\right]$ แล้ว $f(x)$ มีค่า**สูงสุดสัมบูรณ์** ที่จุด x_0
4. ถ้า $f(x_0) \leq f(x)$ สำหรับทุก ๆ $x \in \left[a,b\right]$ แล้ว $f(x)$ มีค่า **ต่ำสุดสัมบูรณ์** ที่จุด x_0

บทนิยาม 3.4

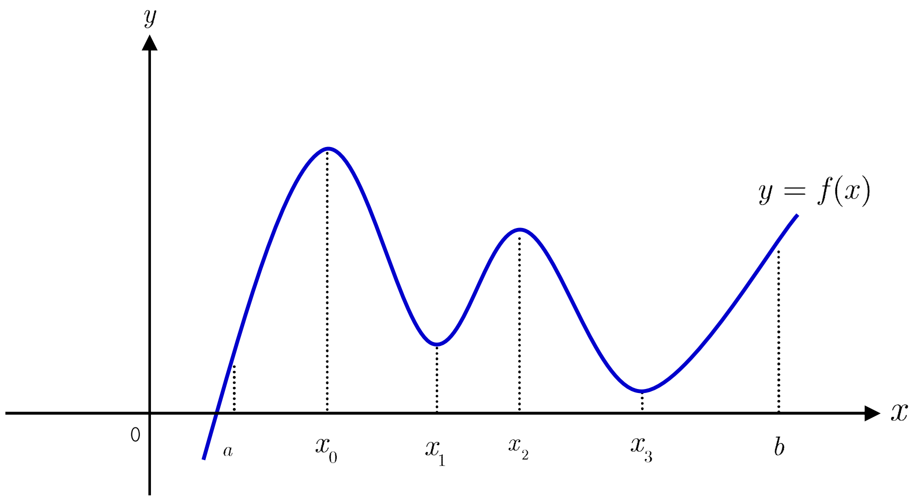
จุดวิกฤต คือจุด $x_0 \in D_f$ ซึ่ง $f'(x_0) = 0$ หรือ $f'(x_0)$ หาค่าไม่ได้

จากบทนิยาม 3.3 และบทนิยาม 3.4 ค่าสูงสุดสัมพัทธ์คือค่าสูงสุดของฟังก์ชันเมื่อเทียบกับค่าใกล้เคียง ส่วนค่าต่ำสุดสัมพัทธ์คือค่าต่ำสุดของฟังก์ชันเมื่อเทียบกับค่าใกล้เคียง โดยจุดต่ำสุดสัมพัทธ์และสูงสุดสัมพัทธ์นั้นจะอยู่ที่จุดวิกฤต ซึ่งจุดวิกฤตคือจุด x_0 ที่ $f'(x_0) = 0$ หรือ $f'(x_0)$ หาค่าไม่ได้ (Ross, F.L. Maurice,.W.D. and Frank, G.R, 2001 : 113)

ทฤษฎีบท 3.2

กำหนดให้ a และ b เป็นค่าคงตัวใด ๆ ฟังก์ชัน $f(x)$ มีอนุพันธ์บน $[a,b]$ และ $f(x)$ มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ หรือต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x = x_0$ เมื่อ $a < x_0 < b$ แล้ว $f'(x_0) = 0$

ตัวอย่าง 3.17 กำหนดกราฟของฟังก์ชัน $y = f(x)$ ดังต่อไปนี้



ฟังก์ชัน $f(x)$ มีอนุพันธ์บนช่วง $[a,b]$ จะได้ว่า

$f'(x_0) = 0$ หรือหาค่าไม่ได้ $\qquad f'(x_1) = 0$ หรือหาค่าไม่ได้

$f'(x_2) = 0$ หรือหาค่าไม่ได้ $\qquad f'(x_3) = 0$ หรือหาค่าไม่ได้

การทดสอบค่าสูงสุดหรือต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน ณ จุดวิกฤต

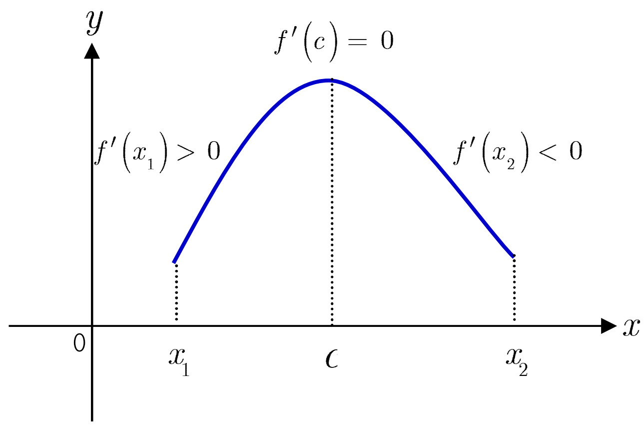
พลอนันต์ แสงประสิทธิ์ (2554 : 93) ได้ให้รายละเอียดไว้ดังนี้

ให้ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ ถ้า c เป็นจุดวิกฤต และ $f'(c)=0$

1. ถ้า $f'(x)>0$ เมื่อ $x_1<x<c$ และ $f'(x)<0$ เมื่อ $c<x<x_2$ แล้ว $f(x)$ มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x=c$

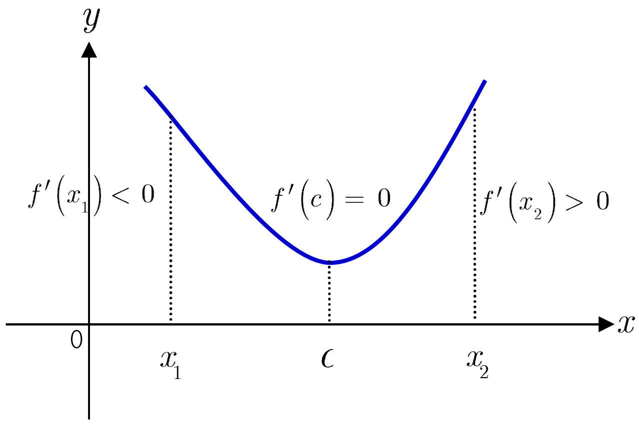
2. ถ้า $f'(x)<0$ เมื่อ $x_1<x<c$ และ $f'(x)>0$ เมื่อ $c<x<x_2$ แล้ว $f(x)$ มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x=c$

3. ถ้า $f'(x)\neq 0$ บนช่วง (x_1,x_2) และเครื่องหมาย $f'(x)$ ไม่เปลี่ยนแปลงบนช่วง (x_1,x_2) แล้ว $f(x)$ จะไม่มีค่าสูงสุดหรือต่ำสุดในช่วงดังกล่าว แสดงได้จากกราฟต่อไปนี้



ภาพประกอบ 3.2 แสดงจุดสูงสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันบนช่วง (x_1,x_2)

ที่มา : พลอนันต์ แสงประสิทธิ์. 2554 : 93



ภาพประกอบ 3.3 แสดงจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันบนช่วง (x_1,x_2)

ที่มา : พลอนันต์ แสงประสิทธิ์. 2554 : 93

ตัวอย่าง 3.18 กำหนด $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 5$ จงหาจุดสูงสุดและจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน

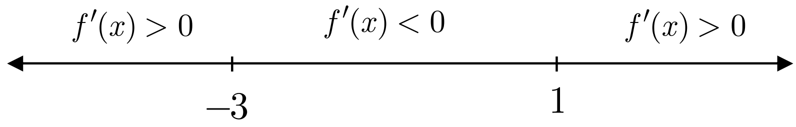
วิธีทำ $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 5$

$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9$

หาจุดวิกฤตให้ $f'(x) = 0$

$$3x^2 + 6x - 9 = 0$$
$$3(x^2 + 2x - 3) = 0$$
$$3(x+3)(x-1) = 0$$
$$x = -3, 1$$

แสดงได้ดังรูปดังนี้



ดังนั้น $f(x)$ มี $x = -3$ เป็นจุดสูงสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันและ มี $x = 1$ เป็นจุดต่ำสุดสัมพัทธ์

ตัวอย่าง 3.19 กำหนด $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$ จงหาจุดสูงสุดและจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน

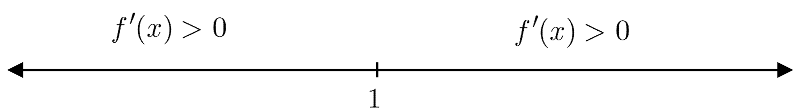
วิธีทำ $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$

$f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$

หาจุดวิกฤตให้ $f'(x) = 0$

$$3x^2 - 6x + 3 = 0$$
$$3(x^2 - 2x + 1) = 0$$
$$3(x-1)(x-1) = 0$$
$$x = 1$$

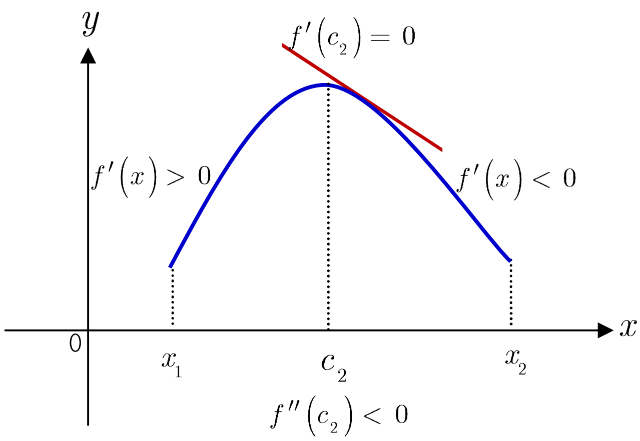
แสดงได้ดังรูป



ดังนั้น $f(x)$ ไม่มีจุดสูงสุดและจุดต่ำสุดสัมพัทธ์

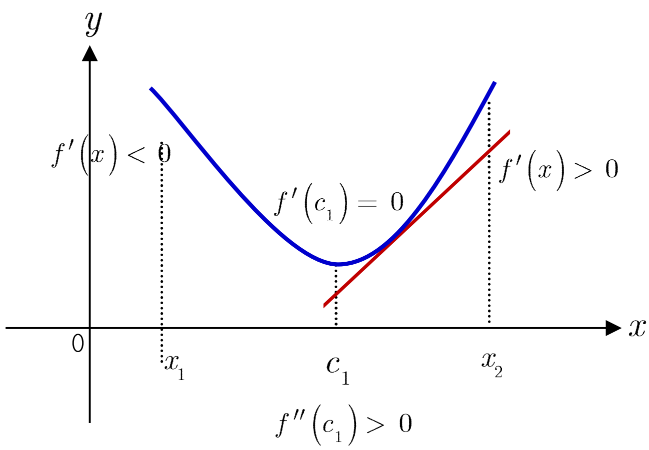
การทดสอบจุดวิกฤตโดยใช้อนุพันธ์อันดับสอง

ถ้า $x = c_1$ เป็นจุดวิกฤตที่ $f'(c_1) = 0$ โดยที่ $c_1 \in (x_1, x_2)$ สมมุติว่ากราฟของฟังก์ชันมีลักษณะ **โค้งเว้าขึ้น** (กราฟหงาย) หรืออยู่ในลักษณะเส้นโค้งอยู่เหนือเส้นสัมผัสบนช่วง (x_1, x_2) จะเห็นว่าเมื่อ x เพิ่มขึ้นเส้นสัมผัสมีค่าความชันเพิ่มขึ้นแสดงว่า $f'(x)$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มขึ้นบนช่วง (x_1, x_2) ดังนั้น $f''(x) > 0$ บนช่วง (x_1, x_2) และที่จุด $x = c_2$ โดยที่ $c_2 \in (x_1, x_2)$ ฟังก์ชันมีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ ในทางกลับกันถ้ากราฟมีลักษณะ **โค้งเว้าลง** (กราฟคว่ำ) หรืออยู่ในลักษณะเส้นสัมผัสอยู่เหนือเส้นโค้งบนช่วง (x_1, x_2) จะเห็นว่าเมื่อ x เพิ่มขึ้นค่าแต่ค่าของ $f'(x)$ ลดลงแสดงว่า $f'(x)$ เป็นฟังก์ชันลดลงบนช่วง (x_1, x_2) ดังนั้น $f''(x) < 0$ บนช่วง (x_1, x_2) และที่จุด $x = c_2$ ฟังก์ชันมีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ (เฟื่องฟ้า ศรีจันทพงศ์ และคณะ, 2553 : 87)



ภาพประกอบ 3.4 แสดงจุดสูงสุดสัมพัทธ์โดยใช้อนุพันธ์อันดับที่สองบนช่วง (x_1, x_2)

ที่มา : อุษณีย์ ลีรวัฒน์. 2552 : 51



ภาพประกอบ 3.5 แสดงจุดต่ำสุดสัมพัทธ์โดยใช้อนุพันธ์อันดับที่สองบนช่วง (x_1, x_2)

ที่มา : อุษณีย์ ลีรวัฒน์. 2552 : 51

ทฤษฎีบท 3.3

กำหนดให้ a,b และ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ ถ้า $f\left(x\right)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องถึงอนุพันธ์อันดับสองบนช่วง $\left(a,b\right)$ ที่มี c อยู่และ $x=c$ เป็นจุดวิกฤตซึ่ง $f'\left(c\right)=0$ และ $f'\left(x\right), f''\left(x\right)$ หาค่าได้ทุกค่า x ในช่วงเปิด $\left(a,b\right)$

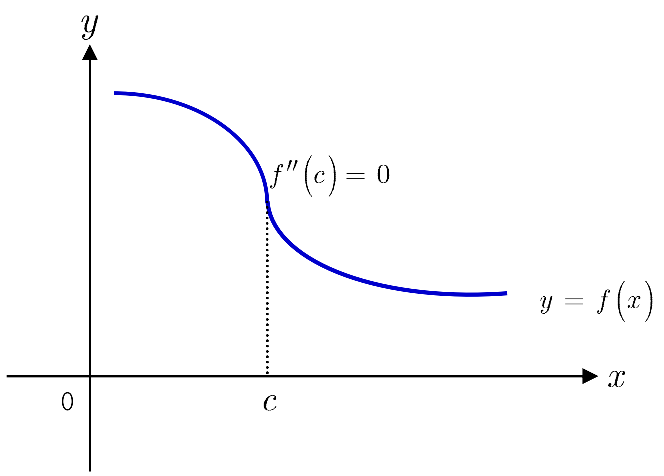
1. ถ้า $f''\left(c\right)<0$ แล้ว $f\left(x\right)$ มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x=c$
2. ถ้า $f''\left(c\right)>0$ แล้ว $f\left(x\right)$ มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x=c$

หมายเหตุ กรณี $f''\left(c\right)=0$ สรุปไม่ได้ต้องใช้อนุพันธ์อันดับหนึ่ง

บทนิยาม 3.5

จุดเปลี่ยนเว้าคือจุดที่เชื่อมระหว่างเส้นโค้งเว้าขึ้นกับเว้าลง หรือระหว่างเส้นโค้งเว้าลงกับเว้าขึ้น

กราฟจะมีจุดเปลี่ยนเว้าที่ $x=c$ ถ้า $f''\left(x\right)$ เปลี่ยนเครื่องหมายเมื่อ x เปลี่ยนค่าผ่านจุด $x=c$ จากน้อยไปมาก และจุดเปลี่ยนเว้าอาจจะเกิดขึ้นที่ $x=c$ เมื่อ $f''\left(c\right)=0$ ดังรูป (Anton, Howard, 1995 : 132)



ภาพประกอบ 3.6 แสดงจุดเปลี่ยนเว้าของฟังก์ชัน $y=f\left(x\right)$

ที่มา : Anton, Howard. 1995 : 132

ทฤษฎีบท 3.4

ให้ $f''(x)$ หาค่าได้บนช่วงเปิด (a,b)

ถ้า $f''(x) > 0$ สำหรับทุก $x \in (a,b)$ แล้วกราฟจะ **เว้าขึ้น** บนช่วงเปิด (a,b)

ถ้า $f''(x) < 0$ สำหรับทุก $x \in (a,b)$ แล้วกราฟจะ **เว้าลง** บนช่วงเปิด (a,b)

ทฤษฎีบท 3.5

ถ้า f มีจุดเปลี่ยนเว้าที่ $x = a$ แล้ว $f''(x) = 0$

บทกลับของทฤษฎีบท 3.5 ไม่จำเป็นต้องเป็นจริง ต้องทดสอบโดยใช้ทฤษฎีบท 3.4

หมายเหตุ

กรณี $f''(c)$ หาค่าไม่ได้และ $f''(x)$ เปลี่ยนเครื่องหมายเมื่อ x เปลี่ยนแปลงผ่าน c จากน้อยไปหามากจะได้ว่า $x = c$ เป็นจุดเปลี่ยนเว้าเช่นเดียวกัน

ตัวอย่าง 3.20 กำหนด $f(x) = x^4 - 2x^3$ จงหาจุดเปลี่ยนเว้า

วิธีทำ $f(x) = x^4 - 2x^3$

$f'(x) = 4x^3 - 6x^2$

$f''(x) = 12x^2 - 12x$

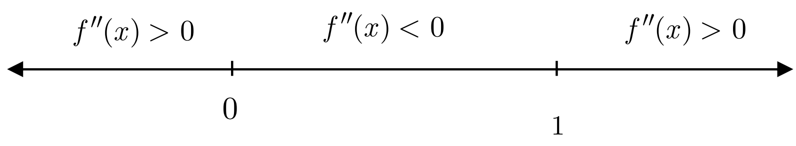
หาจุดเปลี่ยนเว้าให้ $f''(x) = 0$

$$12x^2 - 12x = 0$$

$$12x(x-1) = 0$$

$$x = 0,1$$

สามารถตรวจสอบโดยอนุพันธ์อันดับสอง ดังรูป



ดังนั้น $f(x) = x^4 - 2x^3$ อาจมีจุดเปลี่ยนเว้าที่ $x = 0,1$

ตัวอย่าง 3.21 กำหนด $f(x)=x^3+3x^2-9x+5$ จงหา

1. จุดสูงสุดสัมพัทธ์ จุดต่ำสุดสัมพัทธ์
2. เป็นฟังก์ชันเพิ่มขึ้นบนช่วงใด และเป็นฟังก์ชันลดลงบนช่วงใด
3. จุดเปลี่ยนเว้า
4. ช่วงใดที่ลักษณะของกราฟโค้งเว้าขึ้น และโค้งเว้าลงบนช่วงใด

วิธีทำ $f(x)=x^3+3x^2-9x+5$

$f'(x)=3x^2+6x-9$

$f''(x)=6x+6$

หาจุดวิกฤตให้ $f'(x)=0$

$$3x^2+6x-9=0$$

$$3(x^2+2x-3)=0$$

$$3(x+3)(x-1)=0$$

$$x=-3,1$$

1. จุดสูงสุดสัมพัทธ์ จุดต่ำสุดสัมพัทธ์

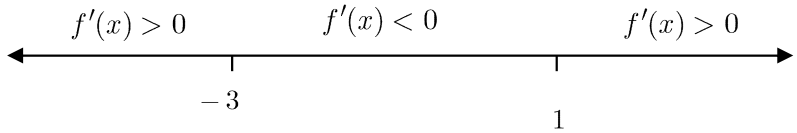
$f''(-3)=6(-3)+6=-12<0$ ดังนั้น $x=-3$ เป็นจุดสูงสุดสัมพัทธ์

$f''(1)=6(1)+6=12>0$ ดังนั้น $x=1$ เป็นจุดต่ำสุดสัมพัทธ์

2. เป็นฟังก์ชันเพิ่มขึ้นบนช่วงใด และเป็นฟังก์ชันลดลงบนช่วงใด

$f(x)$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มขึ้นบนช่วง $f'(x)>0$ และ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันลดลงบนช่วง $f'(x)<0$

แสดงได้ดังรูป



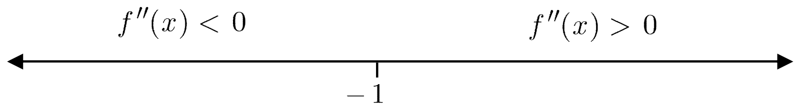
ดังนั้น $f(x)$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มขึ้นบนช่วง $(-\infty,-3)\cup(1,\infty)$

$f(x)$ เป็นฟังก์ชันลดลงบนช่วง $x\in(-3,1)$

3. หาจุดเปลี่ยนเว้าให้ $f''(x)=0$

$$\begin{aligned} 6x+6&=0 \\ 6x&=-6 \\ x&=-1 \end{aligned}$$

สามารถตรวจสอบโดยอนุพันธ์อันดับสอง ดังรูป

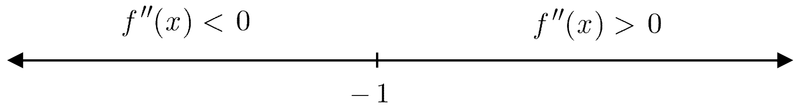


ดังนั้น $f(x)$ อาจมีจุดเปลี่ยนเว้าที่ $x=-1$

4. ช่วงใดที่ลักษณะของกราฟโค้งเว้าขึ้น และโค้งเว้าลงบนช่วงใด

กราฟของ $f(x)$ จะโค้งเว้าขึ้นบนช่วง $f''(x)>0$ และโค้งเว้าลงบนช่วงใดบนช่วง $f''(x)<0$

แสดงได้ดังรูป



ดังนั้น กราฟ $f(x)$ จะโค้งเว้าลงบนช่วง $\left(-\infty,-1\right)$

กราฟ $f(x)$ จะโค้งเว้าขึ้นบนช่วง $\left(-1,\infty\right)$

สรุปหลักการเขียนกราฟ

1. หา $f'(x)$ และ $f''(x)$

2. หาจุดวิกฤตจาก $f'(x)=0$ หรือหาค่าไม่ได้ เพื่อตรวจสอบช่วงที่ฟังก์ชันมีค่าเพิ่มขึ้นหรือลดลงค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

3. หาค่า x ที่ทำให้ $f''(x)=0$ หรือหาค่าไม่ได้เพื่อตรวจสอบลักษณะการโค้งของเส้นกราฟ และจุดเปลี่ยนเว้า

4. เขียนกราฟของฟังก์ชันโดยใช้ข้อมูลที่ได้จากขั้นตอนที่ 1-3

ตัวอย่าง 3.22 จงวาดกราฟของฟังก์ชัน $f(x) = x^4 - 2x^3$

วิธีทำ $f(x) = x^4 - 2x^3$

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2$$

$$f''(x) = 12x^2 - 12x$$

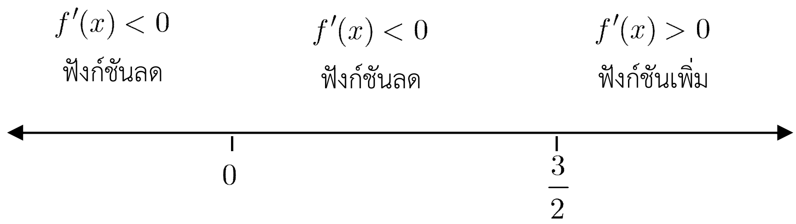
หาจุดวิกฤตให้ $f'(x) = 0$

$$4x^3 - 6x^2 = 0$$

$$x^2(4x - 6) = 0$$

$$x = 0, \frac{3}{2}$$

แสดงได้ดังรูป



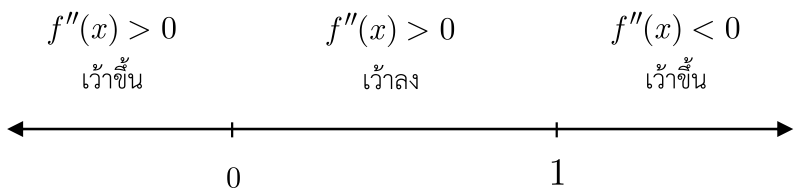
หาจุดเปลี่ยนเว้าให้ $f''(x) = 0$

$$12x^2 - 12x = 0$$

$$12x(x - 1) = 0$$

$$x = 0, 1$$

แสดงได้ดังรูป



หาพิกัดจุดคร่าว ๆ เพื่อช่วยในการเขียนกราฟดังต่อไปนี้

จาก $f(x) = x^4 - 2x^3$

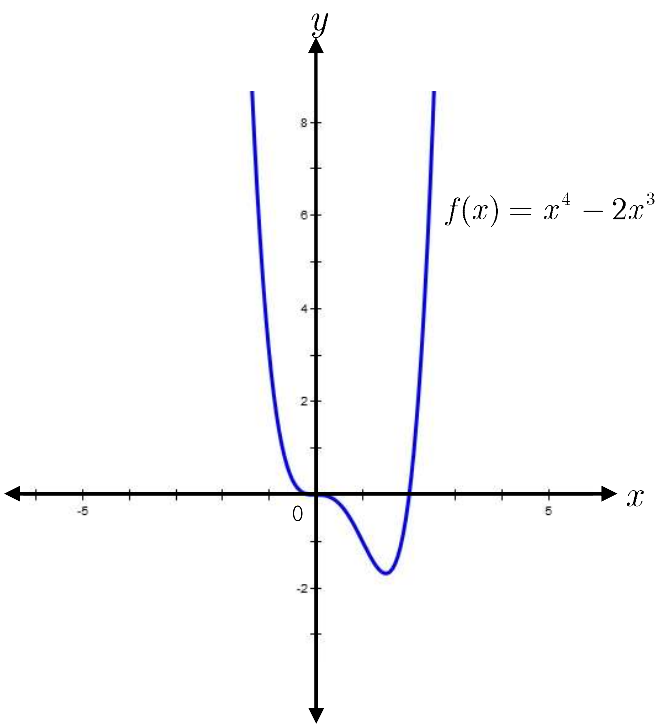
ได้ $f(-1) = (-1)^4 - 2(-1)^3 = -1 + 2 = 1$ พิกัด $(-1,1)$

$f(0) = (0)^4 - 2(0)^3 = 0 - 0 = 0$ พิกัด $(0,0)$

$f(1) = (1)^4 - 2(1)^3 = 1 - 2 = -1$ พิกัด $(1,-1)$

$f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^4 - 2\left(\frac{3}{2}\right)^3 = \left(\frac{3}{2}\right)^3\left(\left(\frac{3}{2}\right) - 2\right) = 1.6875$ พิกัด $\left(\frac{3}{2}, 1.6875\right)$

จากข้อมูลทั้งหมดนำมาเขียนกราฟได้ดังนี้



ตัวอย่าง 3.23 เขียนกราฟของฟังก์ชัน $f(x) = 12 - 12x + x^3$

วิธีทำ $f(x) = 12 - 12x + x^3$

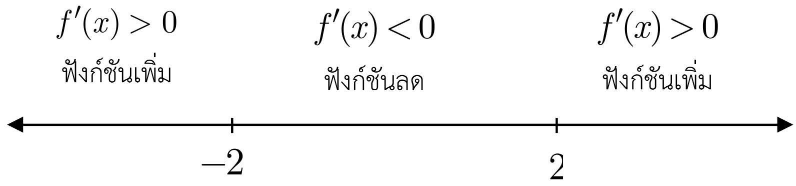
$f'(x) = -12 + 3x^2$

$f''(x) = 6x$

หาจุดวิกฤตให้ $f'(x) = 0$

$$-12+3x^2=0$$
$$3(x^2-4)=0$$
$$3(x-2)(x+2)=0$$
$$x=-2,2$$

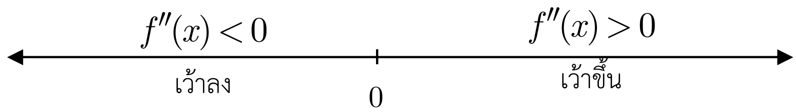
แสดงได้ดังรูป



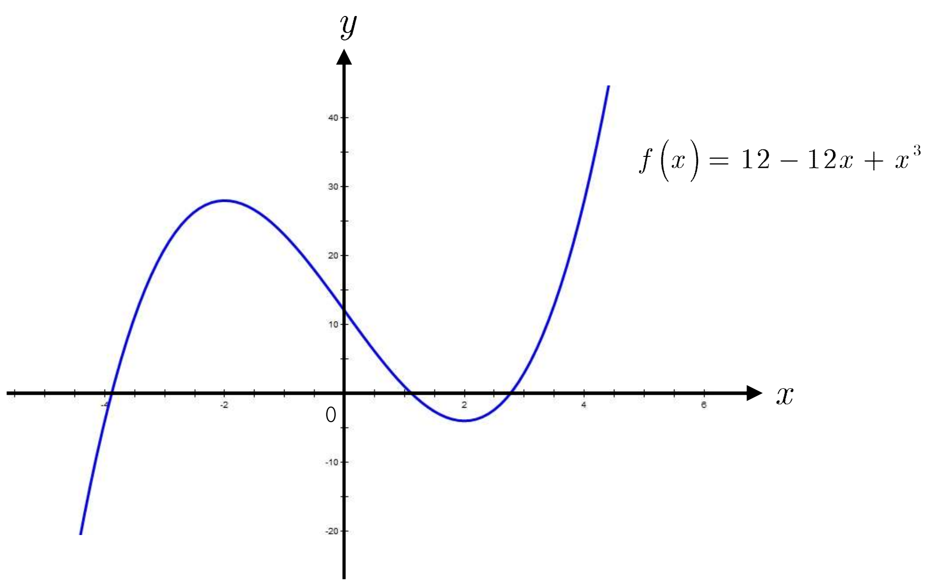
หาจุดเปลี่ยนเว้าให้ $f''(x)=0$

$$6x=0$$
$$x=0$$

แสดงได้ดังรูป



จากข้อมูลทั้งหมดนำมาเขียนกราฟได้ดังนี้



3.5 หลักเกณฑ์โลปิตาล

หลักเกณฑ์นี้เป็นการประยุกต์ของอนุพันธ์อีกทางหนึ่ง ซึ่งเป็นการนำอนุพันธ์มาช่วยในหาหาค่าลิมิตของฟังก์ชัน โดยการหาค่าลิมิตของฟังก์ชันนั้นได้กล่าวแล้วในบทที่ 1 แต่การจะใช้หลักเกณฑ์โลปิตาลนั้นต้องผ่านการเรียนเรื่องอนุพันธ์ของฟังก์ชันมาก่อนด้วย จึงจะสามารถหาลิมิตโดยใช้หลักเกณฑ์โลปิตาลได้ และการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันนั้นได้กล่าวถึงในบทที่ 2 ไปแล้ว การหาลิมิตของฟังก์ชันโดยใช้กฎของโลปิตาลนั้น ลิมิตต้องอยู่ในรูปแบบที่ไม่กำหนดตามบทนิยามต่อไปนี้ (อุษณีย์ ลีรวัฒน์, 2552 : 61)

บทนิยาม 3.6

ฟังก์ชัน $f(x)$ เป็นฟังก์ชันซึ่งเมื่อ x เข้าใกล้ a แล้ว $f(x)$ อยู่ในรูปแบบใดรูปแบบหนึ่งดังต่อไปนี้ คือ $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0\cdot\infty, \infty-\infty, 0^0, \infty^0$ หรือ 1^∞ แล้วจะได้ว่า $\lim_{x\to a} f(x)$ มี**รูปแบบที่ไม่กำหนด** ที่ $x=a$

หลักเกณฑ์โลปิตาลจะช่วยให้สามารถคำนวณลิมิตในรูปแบบ $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ ในกรณีรูปแบบที่ไม่กำหนดเมื่อตัวเศษ $f(x)$ และตัวส่วน $g(x)$ เข้าใกล้ 0 ทั้งคู่หรือเข้าใกล้ $\pm\infty$ ทั้งคู่ ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้ (อัจฉรา ปาจีนบูรวรรณ์, 2555 : 71)

ทฤษฎีบท 3.6

กำหนดให้ I เป็นช่วงเปิดที่บรรจุ a , L เป็นจำนวนจริง f และ g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บนช่วงเปิด I โดยที่ $g(x)\neq 0$ ทุกค่าของ x ในช่วงเปิด I ยกเว้นที่ $x=a$ ถ้า $\lim_{x\to a} f(x)=0$, $\lim_{x\to a} g(x)=0$ และ $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L$ แล้ว $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=L$

ทฤษฎีบท 3.7

กำหนดให้ I เป็นช่วงเปิดที่บรรจุ a , L เป็นจำนวนจริง f และ g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บนช่วงเปิด I ถ้า $\lim_{x\to a} f(x)=\infty$ (หรือ $-\infty$), $\lim_{x\to a} f(x)=\infty$ (หรือ $-\infty$) และ $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L$ แล้ว $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=L$

จากทฤษฎีบท 1.8 และ 1.9 จะช่วยให้สามารถคำนวณลิมิตในรูปแบบ $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ในกรณีรูปแบบที่ไม่กำหนดได้ง่ายยิ่งขึ้น นั้นหมายถึงว่าถ้าตัวเศษ $f(x)$ และตัวส่วน $g(x)$ เข้าใกล้ 0 ทั้งคู่หรือเข้าใกล้ $\pm\infty$ ทั้งคู่แล้วเราสามารถหา $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ โดยการหา $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ แทนดังตัวอย่างต่อไปนี้ (สุรวิทย์ ตันแต่งผล และอนุสรณ์ ชนวีรยุทธ, 2557 : 44)

ตัวอย่าง 3.24 จงหาค่า $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x+5x^2}{x}$

วิธีทำ พิจารณา $\lim\limits_{x\to 0}(2x+5x^2)=0$

และ $\lim\limits_{x\to 0}x=0$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x+5x^2}{x}$ อยู่ในรูปแบบที่ไม่กำหนด

ให้ $f\left(x\right)=2x+5x^2$ ได้ $f'\left(x\right)=2+10x$

และ $g\left(x\right)=x$ ได้ $g'\left(x\right)=1$

จากหลักเกณฑ์โลปิตาล $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

จะได้ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x+5x^2}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2+10x}{1}=2$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x+5x^2}{x}=2$

ตัวอย่าง 3.25 จงหาค่า $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-7x+12}{x-4}$

วิธีทำ พิจารณา $\lim\limits_{x\to 4}(x^2-7x+12)=0$

และ $\lim\limits_{x\to 4}(x-4)=0$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-7x+12}{x-4}$ อยู่ในรูปแบบที่ไม่กำหนด

ให้ $f(x)=x^2-7x+12$ ได้ $f'(x)=2x-7$

และ $g(x)=x-4$ ได้ $g'(x)=1$

จากหลักเกณฑ์โลปิตาล $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

จะได้ $\lim_{x\to 4}\dfrac{x^2-7x+12}{x-4}=\lim_{x\to 4}\dfrac{2x-7}{1}=1$

ดังนั้น $\lim_{x\to 4}\dfrac{x^2-7x+12}{x-4}=1$

ตัวอย่าง 3.26 จงหาค่า $\lim_{x\to -2}\dfrac{x^3+8}{x+2}$

วิธีทำ พิจารณา $\lim_{x\to -2}(x^3+8)=0$

และ $\lim_{x\to -2}(x+2)=0$

ดังนั้น $\lim_{x\to -2}\dfrac{x^3+8}{x+2}$ อยู่ในรูปแบบที่ไม่กำหนด

ให้ $f(x)=x^3+8$ ได้ $f'(x)=3x^2$

และ $g(x)=x+2$ ได้ $g'(x)=1$

จากหลักเกณฑ์โลปิตาล $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

จะได้ $\lim_{x\to -2}\dfrac{x^3+8}{x+2}=\lim_{x\to -2}\dfrac{3x^2}{1}=12$

ดังนั้น $\lim_{x\to -2}\dfrac{x^3+8}{x+2}=12$

ตัวอย่าง 3.27 จงหาค่า $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^3-8}$

วิธีทำ พิจารณา $\lim_{x\to 2}(x^2-4)=0$

และ $\lim_{x\to 2}(x^3-8)=0$

ดังนั้น $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^3-8}$ อยู่ในรูปแบบที่ไม่กำหนด

ให้ $f(x)=x^2-4$ ได้ $f'(x)=3x^2$

และ $g(x)=x^3-8$ ได้ $g'(x)=1$

จากหลักเกณฑ์โลปิตาล $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

จะได้ $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^3-8}=\lim_{x\to 2}\frac{2x}{3x^2}=\frac{1}{3}$

ดังนั้น $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^3-8}=\frac{1}{3}$

ตัวอย่าง 3.28 จงหาค่า $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{4x^3-x-3}$

วิธีทำ พิจารณา $\lim_{x\to 1}(x^3-1)=0$

และ $\lim_{x\to 1}(4x^3-x-3)=0$

ดังนั้น $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{4x^3-x-3}$ อยู่ในรูปแบบที่ไม่กำหนด

ให้ $f(x)=x^3-1$ ได้ $f'(x)=3x^2$

และ $g(x)=4x^3-x-3$ ได้ $g'(x)=12x^2-1$

จากหลักเกณฑ์โลปิตาล $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

จะได้ $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{4x^3-x-3}=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2}{12x^2-1}=\frac{3}{11}$

ดังนั้น $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{4x^3-x-3}=\frac{3}{11}$

3.6 สรุปท้ายบทที่ 3

จะเห็นวว่าอนุพันธ์นั้นสามารถนำไปประยุกต์ใช้ได้ในทางวิทยาศาสตร์ได้หลากหลายสาขา เช่น การเคลื่อนที่ของวัตถุ เราสามารถหาความเร็วและความเร่งของการเคลื่อนที่จาก $s=f(t)$ ซึ่งแทนสมการการเคลื่อนที่ ส่วนความเร็วโดยทั่วไปเราได้จากอัตราส่วนระหว่างปริมาณการเปลี่ยนแปลงของ s(ระยะทาง) กับปริมารการเปลี่ยนแปลงของ t(เวลา) แต่ถ้าต้องการความเร็วชั่วขณะหรือความเร็วที่เวลา t ใด ๆ คือ $\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}$ ซึ่งแทนด้วย $\frac{ds}{dt}$ ดังนั้นความเร็วของวัตถุเมื่อเวลา t ใด ๆ คือ $v=\frac{ds}{dt}$ และความเร่งของวัตถุเมื่อเวลา t ใด ๆ คือ $a=\frac{dv}{dt}$ สำหรับอัตราสัมพัทธ์เป็นการเปลี่ยนแปลงของตัวแปร 2 ตัวหรือมากกว่า 2 ซึ่งมีปัญหาอีกจำนวนมากที่เกี่ยวข้องกับตัวแปรหลายตัว และแต่ละตัวแปร

เหล่านั้นก็เป็นฟังก์ชันของเวลาถ้าเราทราบค่าตัวแปร และอัตราการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรบางตัวเทียบกับเวลาแล้วจะสามารถหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรที่ต้องการเทียบกับเวลาได้ สมการเส้นสัมผัสและเส้นปกติ ฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลด จุดสูงสุดและจุดต่ำสุดเราสามารถหาได้จากอนุพันธ์อันดับที่ 1 และอันดับที่ 2 แล้วเราสามารถนำข้อมูลที่ได้ไปเขียนกราฟของฟังก์ชัน และอนุพันธ์นี้ยังนำไปช่วยหาลิมิตของฟังก์ชันได้อีกด้วยโดยใช้หลักเกณฑ์ของโลปิตาล ถ้าหากเราศึกษาการประยุกต์ในระดับที่สูงขึ้นไปจะเห็นได้ชัดเจนว่า อนุพันธ์สามารถนำไปประยุกต์กับวิทยาศาสตร์ชั้นสูงได้อย่างมากมาย

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 3

1. จงหาความเร็ว (v) ความเร่ง (a) เมื่อกำหนด $s = f(t)$ ณ เวลา t ใดๆ

   1.1 $s = 3t^2 - t + 1$

   1.2 $s = t^5 - 4t^2 + 8t$

   1.3 $s = (2t^6 - 5t)^3$

   1.4 $s = (3t^3 - t)(t + 1)$

2. จงหาความเร็ว (v) ความเร่ง (a) เมื่อ $t = 2$ ของ $s = f(t)$ ในข้อที่ 1.

3. วัตถุเคลื่อนที่ในแนวราบมีสมการการเคลื่อนที่ $s = t^3 - 9t^2 + 24t$ จงหา

   3.1. จงหา s(ระยะทาง) และ a (ความเร่ง) เมื่อ $v = 0$

   3.2. จงหา s(ระยะทาง) และ v(ความเร็ว) เมื่อ $a = 0$

   3.3. เมื่อใดที่ s(ระยะทาง) เพิ่มขึ้น

   3.4. เมื่อใดที่ v(ความเร็ว) เพิ่มขึ้น

4. จงใช้แสดงวิธีทำเพื่อหาคำตอบ

   4.1 บอลลูนลอยสูง 60 เมตร และกำลังลอยขึ้นในแนวดิ่งด้วยอัตราเร็วคงตัว 4.5 เมตรต่อวินาที รถยนต์คันหนึ่งแล่นในแนวเส้นตรงผ่านใต้บอลลูนด้วยอัตราเร็ว 20 เมตร/วินาที ถามว่าระยะทางระหว่างบอลลูนกับรถยนต์เป็นไปอย่างไร เมื่อเวลาผ่านไป 1 วินาที

   4.2 พิงบันไดยาว 26 ฟุต ไว้กับผนังซึ่งตั้งฉากกับพื้นดิน ถ้าปลายล่างของบันไดเลื่อนลงด้วยอัตรา 4 ฟุต/วินาที จงหาว่าปลายล่างของบันไดจะเคลื่อนที่อย่างไร ในขณะที่ปลายบนของบันไดอยู่ห่างจากพื้น 10 ฟุต

   4.3 บอลลูนรูปทรงกลม ชายคนหนึ่งปล่อยแก๊สเข้าไปในบอลลูนด้วยอัตราเร็ว 1000 ลูกบาศก์ฟุต/วินาที อยากทราบว่ารัศมีของบอลลูนจะเพิ่มขึ้นเท่าไร เมื่อรัศมีบอลลูนเป็น 5 ฟุต

   4.4 วัตถุทรงกระบอกสูง 20 เมตรได้มีการขยายตัว ถ้ารัศมีของทรงกระบอกเพิ่มขึ้นด้วยอัตรา 3 เมตร/นาที ปริมาตรของทรงกระบอกจะเปลี่ยนแปลงอย่างไรในขณะที่รัศมี 10 เมตร และความสูงคงที่

4.5 ดวงไฟแขวนอยู่เหนือทางเท้า 10 ฟุต และห่างจากผนังตึกซึ่งตั้งฉากกับทางเท้า 20 ฟุต ชายผู้หนึ่งสูง 6 ฟุต เดินบนทางเท้าเข้าหาผนังตึกด้วยอัตราเร็ว 2 ฟุต/วินาที จงหาว่าในขณะที่เขาอยู่ห่างจากผนังตึก 4 ฟุต เงาศีรษะของเขาจะเคลื่อนไปบนผนังด้วยอัตราเท่าไร

4.6 ขณะที่เล่นว่าวอยู่ที่ระดับสูง 300 เมตรจากพื้นดิน ลมได้พัดพาว่าวลอยไปในแนวระดับด้วยอัตรา 25 เมตร/วินาที คนเล่นว่าวจะต้องผ่อนสายป่านด้วยอัตราความเร็วเท่าใดเมื่อว่าวอยู่ห่างจากตัวเขา 500 เมตร

5. กำหนดให้ $f(x)=x^3-2x^2-5x-3$ เป็นสมการเส้นโค้งและ L_1 เป็นเส้นตรงที่สัมผัสเส้นโค้งที่จุด $x=2$ จงหาเส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นตรง L_1 ที่จุด ซึ่ง L_1 สัมผัสเส้นโค้ง

6. กำหนดให้ $f(x)=x^3+2x^2-5x-3$ จงหาสมการเส้นสัมผัสและเส้นปกติของเส้นโค้งที่จุด $x=1$

7. เส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นโค้ง $y=x^{\frac{3}{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}-2$ ที่จุด $(1,0)$ ตัดกับเส้นตรง $y=-1$ ที่จุดใด

8. กำหนด $y=f(x)$ ดังต่อไปนี้

8.1 $f(x)=x^2-2x+3$

8.2 $f(x)=x^3-27x+36$

8.3 $f(x)=2x^3-3x+3$

8.4 $f(x)=(x-3)^3$

8.5 $f(x)=x^3-2x^2+x+2$

8.6 $f(x)=x-3x^3$

จงหา

1 จุดสูงสุดสัมพัทธ์ จุดต่ำสุดสัมพัทธ์

2 เป็นฟังก์ชันเพิ่ม และเป็นฟังก์ชันลด บนช่วงใด

3 จุดเปลี่ยนเว้า

4 ช่วงใดที่ลักษณะของกราฟโค้งเว้าขึ้น และโค้งเว้าลง

5 เขียนกราฟ

9. จงหาค่าลิมิตที่กำหนดให้ต่อไปนี้โดยใช้หลักเกณฑ์โลปิตาล

9.1 $\lim_{x \to 2} \frac{(x+1)(x-2)}{x-2}$

9.2 $\lim_{x \to -1} \frac{(x^2-1)}{x+1}$

9.3 $\lim_{x \to 0} \frac{x^3-2x}{x}$

9.4 $\lim_{x \to 2} \frac{x^3-4x}{x^2-4}$

9.5 $\lim_{x \to 0} \frac{x^3-3x^2-2x}{x}$

9.6 $\lim_{x \to 1} \frac{x^3-3x+2}{x-1}$

บทที่ 4
ฟังก์ชันหลายตัวแปรและอนุพันธ์ย่อย

การศึกษา เรื่องลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน และอนุพันธ์ของฟังก์ชัน ในบทที่ผ่านมานั้นเป็นการศึกษาเกี่ยวกับความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณสองปริมาณในลักษณะที่ค่าของปริมาณหนึ่งขึ้นอยู่กับอีกปริมาณหนึ่ง เราจึงแทนความสัมพันธ์เช่นนั้นได้ด้วยฟังก์ชันของตัวแปรเพียงหนึ่งตัว แต่ในการศึกษาบางเรื่อง อาจมีปริมาณมากกว่าสองปริมาณที่เกี่ยวข้องสัมพันธ์กันในรูปต่าง ๆ ซึ่งในบทนี้จะได้ศึกษาความสัมพันธ์ในรูปที่ปริมาณหนึ่งขึ้นอยู่กับปริมาณต่าง ๆ หลายปริมาณ เช่นปริมาตรของรูปทรงกระบอก $V = \pi r^2 h$ หรืออาจเขียนอยู่ในรูปของฟังก์ชันได้เป็น $V = f(r,h)$ ซึ่งจะเรียกความสัมพันธ์ในลักษณะนี้ว่าฟังก์ชันสองตัวแปรเพราะว่าค่าของ V(ปริมาตรของรูปทรงกระบอก) จะมีความสัมพันธ์กับตัวแปรอีกสองตัวคือ r (รัศมีของวงกลมที่เป็นหน้าตัด) และ h(ความสูงของทรงกระบอก) ในการศึกษาฟังก์ชันของสองตัวแปร เราถือว่าโดเมนของฟังก์ชันเป็นเซตของคู่อันดับของจำนวนจริง ส่วนฟังก์ชันหลายตัวแปรนั้นโดยทั่ว ๆ ไปก็เหมือนกับฟังก์ชันสองตัวแปร ดังนั้นผู้เรียนจะได้ศึกษาเรื่องฟังก์ชันสองตัวแปรเสียก่อน แล้วค่อยศึกษาฟังก์ชันหลายตัวแปรโดยทั่ว ๆ ไป

4.1 ฟังก์ชันค่าจริงของสองตัวแปรหรือมากกว่า

บทนิยามและสัญลักษณ์ของฟังก์ชันสองตัวแปรหรือฟังก์ชันหลายตัวแปรมีความคล้ายคลึงกับฟังก์ชันตัวแปรเดียวดังจะกล่าวบทนิยามต่อไปนี้ (คณาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น, 2539 : 237)

บทนิยาม 4.1

สัญลักษณ์ R^n ใช้แทนเซตของสิ่งของ n สิ่งที่เป็นอันดับ ของจำนวนจริงนั่นคือ

$$R^n = \left\{ (x_1, x_2, x_3, \ldots x_n) \middle| x_1 \in R,\ x_2 \in R,\ x_3 \in R, \ldots x_n \in R \right\}$$

และโดยความหมายทางเรขาคณิตจะได้ว่า

เมื่อ $n = 1,\ R$ คือเส้นจำนวนจริง

เมื่อ $n = 2,\ R^2 \left\{ (x,y) \middle| x \in R,\ y \in R \right\}$ คือระนาบพิกัด

เมื่อ $n = 3,\ R^3 \left\{ (x,y,z) \middle| x \in R,\ y \in R,\ z \in R \right\}$ คือปริภูมิสามมิติ

หมายเหตุ

เราไม่สามารถเขียนความหมายทางเรขาคณิตของ R^n เมื่อ $n > 3$

บทนิยาม 4.2

กำหนดให้ $f : D \to R$ โดยที่ $D \subseteq R^n$ เรียกฟังก์ชัน f ว่าเป็น **ฟังก์ชัน n ตัวแปร** $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ ถ้าสำหรับจุด $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ ใด ๆ ในโดเมน D สามารถหาค่า $f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ ได้เพียงค่าเดียวเท่านั้น และถ้า กำหนดให้ $z = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ เรียกเซตของ $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ ซึ่งเป็นจำนวนจริงว่า **โดเมนของฟังก์ชัน** f เขียนแทนด้วย D_f ส่วนเซตของ z ซึ่งเป็นจำนวนจริงเรียกว่า **เรนจ์ของฟังก์ชัน** f เขียนแทนด้วย R_f

หมายเหตุ

ในกรณีที่ f เป็นฟังก์ชันของตัวแปร 2 ตัว x, y เรามักจะใช้ตัวแปร z แทนค่าของ f และเขียนแทนด้วย $z = f(x, y)$ ซึ่งในที่นี้จะใช้ z เป็นตัวแปรตามของ f

ในกรณีที่ f เป็นฟังก์ชันของตัวแปร 3 ตัว x, y, z เรามักจะใช้ตัวแปร w แทนค่าของ f และเขียนแทนด้วย $w = f(x, y, z)$

ตัวอย่าง 4.1 ให้ $f(x,y) = x^2y - 5y^2 - 3$ จงหา $f(1,0)$, $f(2,3)$ และ $f(3d,c)$

วิธีทำ กำหนด $f(x,y) = x^2y - 5y^2 - 3$

$$f(1,0) = 1^2(0) - 5(0^2) - 3 = -3$$

$$f(2,3) = 2^2(3) - 5(3^2) - 3 = 12 - 45 - 3 = -36$$

$$f(3d,c) = (3d)^2(c) - 5(3d)^2 - 3 = 9d^2c - 45d^2 - 3$$

ดังนั้น $f(1,0) = -3$, $f(2,3) = -36$ และ $f(3d,c) = 9d^2c - 45d^2 - 3$

ตัวอย่าง 4.2 ให้ $f(x,y)=\dfrac{x^2-3xy+1}{xy-1}$ โดยที่ $xy\neq 1$ จงหา $f(0,0)$, $f(1,2)$ และ $f(b,c)$

วิธีทำ กำหนดให้ $f(x,y)=\dfrac{x^2-3xy+1}{xy-1}$ โดยที่ $xy\neq 1$

$$f(0,0)=\frac{0^2-3(0)(0)+1}{(0)(0)-1}=-1$$

$$f(1,2)=\frac{1^2-3(1)(2)+1}{(1)(2)-1}=4$$

$$f(b,c)=\frac{b^2-3(b)(c)+1}{(b)(c)-1}=\frac{b^2-3bc+1}{bc-1} \quad ; \quad bc\neq 0$$

ตัวอย่าง 4.3 กำหนด $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$ จงหา $f(1,0)$ และหา D_f พร้อมทั้งเขียนกราฟของ D_f

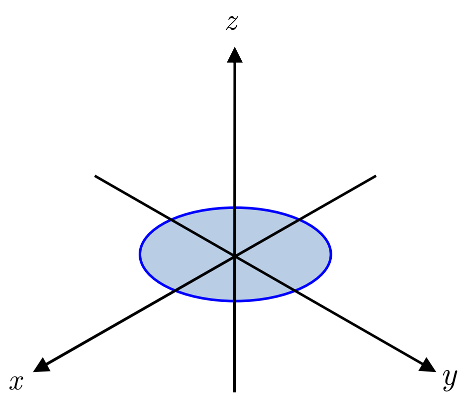
วิธีทำ เนื่องจาก $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$

ดังนั้น $f(1,0)=\sqrt{1-1^2-0^2}=0$

D_f พิจาณาได้จาก $D_f=\left\{(x,y):1-x^2-y^2\geq 0\right\}$

หรือ $D_f=\left\{(x,y):x^2+y^2\leq 1\right\}$

เขียนกราฟ D_f ได้ดังนี้



ตัวอย่าง 4.4 กำหนดให้ $f(x,y,z)=\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}$ จงหาค่า $f(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$ พร้อมทั้งหา D_f

วิธีทำ เนื่องจาก $f(x,y,z)=\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}$

ดังนั้น $f(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2})=\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(-\frac{1}{2}\right)^2}$

$$=\sqrt{1-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}}$$

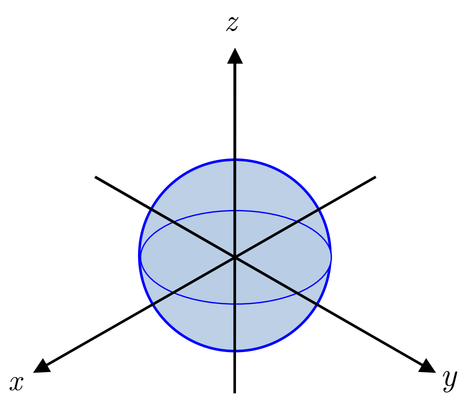
$$=\frac{1}{2}$$

โดเมนของฟังก์ชัน $f=\left\{(x,y,z):1-x^2-y^2-z^2\geq 0\right\}$

หรือ $f=\left\{(x,y,z):x^2+y^2+z^2\leq 1\right\}$

ซึ่งเป็นรูปทรงกลมตันจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(0,0,0)$ และมีรัศมี 1 หน่วย

เขียนกราฟ D_f ได้ดังนี้



ตัวอย่าง 4.5 กำหนดให้ $f(x,y)=1-x-\frac{y}{2}$ จงเขียนกราฟของฟังก์ชัน f พร้อมทั้งบอก D_f และ R_f

วิธีทำ กำหนดให้ $z=f(x,y)$

ดังนั้น $z=1-x-\frac{y}{2}$

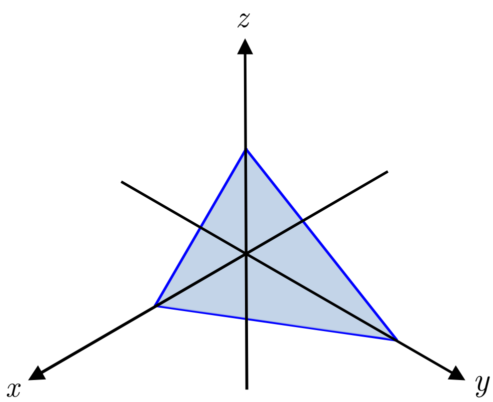
หรือ $2z+2x+y-2=0$

ซึ่งเป็นกราฟของระนาบ ตัดแกน x ที่จุด $(1,0,0)$

ตัดแกน y ที่จุด $(0,2,0)$

ตัดแกน z ที่จุด $(0,0,1)$

เขียนกราฟ D_f ได้ดังนี้

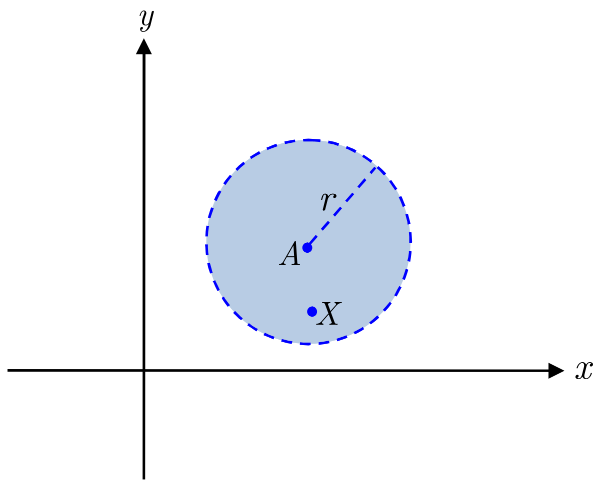


4.2 ลิมิตของฟังก์ชันสองตัวแปร

ในการศึกษาลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน จำเป็นต้องทราบความหมายของเซตของจุดในระนาบหรืออาณาบริเวณในระนาบที่สำคัญซึ่งจะต้องอ้างอิงถึงบ่อย ๆ มีดังต่อไปนี้คือ (สุชาติ เจริญนิตย์, 2554 : 103-105)

1) กำหนด $A(x_0, y_0)$ เป็นจุดคงที่จุดหนึ่งใน R^2 และจุด $X(x,y)$ เป็นจุดใด ๆ ใน R^2 ระยะทางระหว่างจุดสองจุดคือ $|XA| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$ หรืออาจเขียนแทนด้วย $\|X-A\|$

2) กำหนด $A(x_0, y_0)$ เป็นจุดคงที่จุดหนึ่งใน R^2 และ r เป็นจำนวนจริงบวก แผ่นกลมเปิดซึ่งมีจุด A เป็นจุดศูนย์กลางและรัศมี r คือเซต $\{x \in R : \|X-A\| < r\}$ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $B(A;r)$ ดังภาพ



ภาพประกอบ 4.1 แสดงเซต $B(A;r)$

ที่มา : สุชาติ เจริญนิตย์. 2554 : 103

กรณีที่ไม่กำหนดรัศมีของวงกลม เราจะแทนด้วยสัญลักษณ์ $B(A)$

3) กำหนดให้ $D \subseteq R^2$ และ $A \in D$ จะเรียก A ว่าจุดภายในของ D ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก ๆ แผ่นกลมเปิด $B(A)$ ซึ่ง $B(A) \subseteq D$ และถ้าจุดทุกจุดที่อยู่ใน D เป็นจุดภายในของ D จะเรียก D ว่าเป็นเซตเปิด

4) กำหนดให้ $D \subseteq R^2$ และ $A \in R^2$ จะเรียก A ว่าจุดขอบของ D ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก ๆ แผ่นกลมเปิด $B(A)$ มีจุดอย่างน้อยหนึ่งจุดซึ่งอยู่ใน D และมีจุดอย่างน้อยหนึ่งจุดซึ่งไม่อยู่ใน D และถ้าจุดขอบทุกจุดของ D อยู่ใน D จะเรียก D ว่าเป็นเซตปิด

5) กำหนด $D \subseteq R^2$ และ $A \in R^2$ จะเรียก A ว่าจุดลิมิตของ D ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก ๆ แผ่นกลมเปิด $B(A)$ จะได้ว่า $\left(B(A) - \{A\}\right) \cap D \neq \varnothing$

บทนิยาม 4.3

กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันสองตัวแปร $f : D \to R$ โดยที่ $D \subseteq R^2$ เราจะกล่าวว่า f มีค่าลิมิตเท่ากับจำนวนจริง L ขณะที่ (x,y) ย่างเข้าสู่ จุด (x_0, y_0) ซึ่งแทนด้วยสัญลักษณ์

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$$

ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก ๆ จำนวนจริงบวก ε ที่กำหนดให้จะมีจำนวนจริงบวก $\delta > 0$ ที่ทำให้ $\left|f(x,y) - L\right| < \varepsilon$ สำหรับทุก ๆ $(x,y) \in D$ ซึ่ง $0 < \left\|(x,y) - (x_0, y_0)\right\| < \delta$

ตัวอย่าง 4.6 จงแสดงว่า $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} (3x + 2y) = 7$

วิธีทำ จะต้องแสดงว่าสำหรับทุก ๆ จำนวนจริงบวก ε ที่กำหนดให้จะมีจำนวนจริงบวก $\delta > 0$ ที่ทำให้ $\left|(3x + 2y) - 7\right| < \varepsilon$ สำหรับทุก ๆ $(x,y) \in D$ ซึ่ง $\left\|(x,y) - (1,2)\right\| < \delta$

ดังนั้นจะต้องเลือก δ ที่เหมาะสม นั่นคือต้องเลือก δ ที่ทำให้ $\left|(3x + 2y) - 7\right| < \varepsilon$

พิจารณาจากสิ่งที่ต้องการ

$$\begin{aligned}
\left|(3x + 2y) - 7\right| &= \left|3x + 2y - 7\right| \\
&= \left|3x - 3 + 2y - 4\right| \\
&= \left|(3x - 3) + (2y - 4)\right| \\
&\leq \left|3x - 3\right| + \left|2y - 4\right| \\
&= 3\left|x - 3\right| + 2\left|y - 2\right| \\
&< 5\delta
\end{aligned}$$

ดังนั้นเราเลือก $\delta = \dfrac{\varepsilon}{5}$

สามารถแสดงวิธีทำได้ดังนี้คือ

กำหนด $\varepsilon > 0$ เลือก $\delta = \dfrac{\varepsilon}{5}$ ดังนั้น $\delta > 0$

ให้ (x,y) เป็นจุดใด ๆ บน R^2 โดยที่ $(x,y) \neq (1,2)$

สมมุติให้ $0 < \left\|(x,y)-(1,2)\right\| < \delta$

และ $\left\|(x,y)-(1,2)\right\| = \sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}$

ได้ $0 < \sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2} < \delta$

ดังนั้น

$$
\begin{aligned}
\left|(3x+2y)-7\right| &= \left|3x+2y-7\right| \\
&= \left|3x-3+2y-4\right| \\
&= \left|(3x-3)+(2y-4)\right| \\
&\leq \left|3x-3\right| + \left|2y-4\right| \\
&= 3\left|x-3\right| + 2\left|y-2\right| \\
&< 5\delta \\
&= 5\left(\frac{\varepsilon}{5}\right) \\
&= \varepsilon
\end{aligned}
$$

จึงสรุปได้ว่า $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} 3x+2y = 7$

บทนิยาม 4.4

กำหนดให้ f ว่าเป็นฟังก์ชันสองตัวแปร $f : D \to R$ โดยที่ $D \subseteq R^2$ และ (x_0, y_0) เป็นจุดลิมิตของ D ถ้า C เป็นเส้นโค้งใด ๆ ใน R^2 ซึ่งผ่านจุด (x_0, y_0) จะกล่าวว่า f มีค่าลิมิตเท่ากับจำนวนจริง L เมื่อ (x,y) ย่างเข้าสู่จุด (x_0, y_0) ตามเส้นโค้ง C

บทนิยาม 4.4 (ต่อ)

ซึ่งแทนด้วยสัญลักษณ์

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0) \\ \text{บน } C}} f(x,y) = L$$

ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก ๆ จำนวนจริงบวก ε ที่กำหนดให้จะมีจำนวนจริงบวก $\delta > 0$ ที่ทำให้ $\left|f(x,y) - L\right| < \varepsilon$ สำหรับทุก ๆ $(x,y) \in C \cap D$ ซึ่ง $0 \le \left\|(x,y) - (x_0,y_0)\right\| < \delta$

ข้อสังเกต 4.1

1. ถ้า $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$ จะได้ว่า $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0) \\ \text{บน } C}} f(x,y) = L$ สำหรับทุกเส้นโค้ง C ที่ผ่านจุด (x_0,y_0)

2. ผลจากข้อ 1 ถ้ามีเส้นโค้ง C สองเส้นคือเส้นโค้ง C_1 และ C_2 ซึ่งต่างก็ผ่านจุด (x_0,y_0) แต่ถ้า $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0) \\ \text{บน } C_1}} f(x,y) \ne \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0) \\ \text{บน } C_2}} f(x,y)$ เราสามารถสรุปได้ว่า $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ ไม่มีลิมิต

ตัวอย่าง 4.7 จงแสดงว่า $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y^2 - x^2}{y^2 + x^2}$ ไม่มีลิมิต

วิธีทำ กำหนดให้ C_1 แทนเส้นตรง $x = 0$

และ C_2 แทนเส้นตรง $y = 0$

จะเห็นว่า C_1 และ C_2 ซึ่งต่างก็เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด $(0,0)$ เหมือนกัน

สำหรับจุด (x,y) ใด ๆ ที่อยู่บน C_1 ซึ่ง $(x,y) \ne (0,0)$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ \text{บน } C_1}} \frac{y^2 - 0^2}{y^2 + 0^2} &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2}{y^2} \\ &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} 1 \\ &= 1\end{aligned}$$

สำหรับจุด (x,y) ใด ๆ ที่อยู่บน C_2 ซึ่ง $(x,y) \neq (0,0)$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \text{บน } C_2}} \frac{0^2 - x^2}{0^2 + x^2} &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{-x^2}{x^2} \\ &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} -1 \\ &= -1\end{aligned}$$

จะเห็นว่า $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \text{บน } C_1}} \dfrac{y^2 - x^2}{y^2 + x^2} \neq \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \text{บน } C_2}} \dfrac{y^2 - x^2}{y^2 + x^2}$

ดังนั้น $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y^2 - x^2}{y^2 + x^2}$ ไม่มีลิมิต

ตัวอย่าง 4.8 กำหนดให้ $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ เมื่อ $(x,y) \neq (0,0)$ จงแสดงว่า $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ ไม่มีลิมิต

วิธีทำ ให้ $(x,y) \to (0,0)$ ตามเส้นตรงที่ผ่านจุดกำเนิด $y = mx$ แต่ $(x,y) \neq (0,0)$

ดังนั้น
$$\begin{aligned}f(x,y) &= \frac{x(mx)}{x^2 + (mx)^2} \\ &= \frac{mx^2}{x^2 + m^2x^2} \\ &= \frac{mx^2}{x^2(1 + m^2)} \\ &= \frac{m}{1 + m^2}\end{aligned}$$

นั่นคือ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \dfrac{m}{1 + m^2}$

(ตาม $y = mx$)

จะเห็นว่าเมื่อค่าของ m เปลี่ยนลิมิตของ $f(x,y)$ ก็จะเปลี่ยนด้วย นั่นคือเมื่อให้ $(x,y) \to (0,0)$ ตามเส้นตรงที่ต่างกันแล้ว $f(x,y)$ จะมีค่าต่างกันไปด้วย

ดังนั้น $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ ไม่มีลิมิต

ตัวอย่าง 4.9 กำหนดให้ $f(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$ เมื่อ $(x,y)\neq(0,0)$ จงหาลิมิตของ $f(x,y)$ เมื่อ $(x,y)\to(0,0)$ ตามเส้นตรง $y=mx$ และตามพาราโบลา $y=x^2$ และพิจารณาว่า $f(x,y)$ มีลิมิตเมื่อ $(x,y)\to(0,0)$ หรือไม่

วิธีทำ ให้ $f(x,y)\to(0,0)$ ตาม $y=mx$ และ $(x,y)\neq(0,0)$

ดังนั้น
$$f(x,y)=\frac{x^2(mx)}{x^4+(mx)^2}=\frac{mx^3}{x^4+m^2x^2}=\frac{mx^3}{x^2(x^2+m^2)}=\frac{mx}{x^2+m^2}$$

นั่นคือ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{mx}{x^2+m^2}=0$ ตาม $y=mx$

ให้ $f(x,y)\to(0,0)$ ตาม $y=x^2$ และ $(x,y)\neq(0,0)$

ดังนั้น
$$f(x,y)=\frac{x^2(x^2)}{x^4+(x^2)^2}=\frac{x^4}{x^4+x^4}=\frac{x^4}{2x^4}=\frac{1}{2}$$

นั่นคือ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\dfrac{1}{2}$ ตาม $y=x^2$

จะเห็นว่าได้ค่าลิมิตต่างกันเมื่อ $(x,y)\to(0,0)$ ในทิศทางที่ต่างกัน

ดังนั้น $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ ไม่มีลิมิต

ตัวอย่าง 4.10 ให้ $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$ เมื่อ $(x,y) \neq (0,0)$ จงพิสูจน์ว่า $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$

วิธีทำ ในการที่จะพิสูจน์ว่า $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ นั้นสามารถพิสูจน์ได้โดยใช้นิยามของลิมิต นั่นคือ จะต้องพิสูจน์ว่าเมื่อกำหนด $\varepsilon > 0$ ใด ๆ มาให้จะสามารถหา $\delta > 0$

ซึ่งทำให้ $\left|f(x,y)\right| = \left|\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}\right| < \varepsilon$ ถ้า $0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$

เริ่มต้นจาก $\left|f(x,y)\right| = \left|\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}\right|$

เนื่องจาก $\left|x\right| < \sqrt{x^2+y^2}$ และ $y^2 \leq x^2+y^2$ ดังนั้น

$$\left|\frac{xy^2}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{\sqrt{x^2+y^2}(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \sqrt{x^2+y^2}$$

นั่นคือ ถ้ากำหนดให้ $\varepsilon > 0$ มาให้จะเลือก $\delta = \varepsilon$ แล้วจะทำให้ $\left|f(x,y)\right| < \varepsilon$

ถ้า $0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$

ดังนั้น $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$

ในการหาค่าลิมิตของ $f(x,y)$ เมื่อ $(x,y) \to (0,0)$ สามารถทำให้ง่ายขึ้น โดยการใช้ทฤษฎีบทของลิมิตเข้าช่วง ซึ่งจะกล่าวถึงโดยไม่พิสูจน์ ดังต่อไปนี้ (คณาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น, 2539 : 258)

ทฤษฎีบท 4.1

1. $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} x = x_0$.
2. $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} y = y_0$.
3. $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} k = k$. เมื่อ k เป็นค่าคงตัว

ทฤษฎีบท 4.2

ถ้า $f(x,y)$ และ $g(x,y)$ เป็นฟังก์ชันที่ $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L_1$ และ $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = L_2$ แล้วจะได้ว่า

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) + g(x,y) = L_1 + L_2$
2. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) - g(x,y) = L_1 - L_2$
3. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) \cdot g(x,y) = L_1 \cdot L_2$
4. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} kf(x,y) = kL_1$ เมื่อ k เป็นค่าคงตัว
5. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \dfrac{f(x,y)}{g(x,y)} = \dfrac{L_1}{L_2}$ เมื่อ $L_2 \neq 0$
6. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \sqrt[n]{f(x,y)} = \begin{cases} \sqrt[n]{L_1} & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นเลขคู่ และ } L_1 > 0 \\ \sqrt[n]{L_1} & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นเลขคี่} \end{cases}$

ตัวอย่าง 4.11 จงหาค่าของ $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} (3xy^2 - x^2 + 5)$

วิธีทำ $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} (3xy^2 - x^2 + 5) = \lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} 3xy^2 - \lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} x^2 + \lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} 5$

$$= 3 \lim_{(x,y)\to(1,0)} xy^2 - \lim_{(x,y)\to(1,0)} x^2 + \lim_{(x,y)\to(1,0)} 5$$

$$= 3\left(\lim_{(x,y)\to(1,0)} x\right)\left(\lim_{(x,y)\to(1,0)} y^2\right) - \lim_{(x,y)\to(1,0)} x^2 + \lim_{(x,y)\to(1,0)} 5$$

$$= 3(1)(0) - 1 + 5$$

$$= 4$$

ดังนั้น $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} (3xy^2 - x^2 + 5) = 4$

ตัวอย่าง 4.12 จงหาค่าของ $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \dfrac{x^3-2x^2+2xy^2-4y^2}{xy+3x-2y-6}$

วิธีทำ
$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{x^3-2x^2+2xy^2-4y^2}{xy+3x-2y-6} = \lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{(x^3-2x^2)+(2xy-4y^2)}{(xy+3x)-(2y+6)}$$
$$= \lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{x^2(x-2)+2y^2(x-2)}{x(y+3)-2(y+3)}$$
$$= \lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{(x^2+2y^2)(x-2)}{(x-2)(y+3)}$$
$$= \lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{x^2+2y^2}{y+3}$$
$$= \frac{\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)}\left(x^2+2y^2\right)}{\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)}\left(y+3\right)}$$
$$= \frac{\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} x^2 + 2\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} y^2}{\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} y + \lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} 3}$$
$$= \frac{1+8}{2+3}$$
$$= \frac{9}{5}$$

ดังนั้น $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \dfrac{x^3-2x^2+2xy^2-4y^2}{xy+3x-2y-6} = \dfrac{9}{5}$

4.3 ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน 2 ตัวแปร

ในบทที่ผ่านมานั้นเราได้ศึกษาเรื่องความต่อเนื่องของฟังก์ชัน 1 ตัวแปรไปแล้ว ส่วนในหัวข้อนี้เป็นการตรวจสอบความต่อเนื่องของฟังก์ชัน 2 ตัวแปรซึ่งสามารถตรวจสอบโดยนิยามซึ่งจะคล้าย ๆ กับฟังก์ชัน 1 ตัวแปล และในหัวข้อนี้จะได้ให้นิยามพร้อมทั้งตัวอย่างการตรวจสอบความต่อเนื่องของฟังก์ชัน 2 ตัวแปร ดังต่อไปนี้

บทนิยาม 4.5

ให้ $z=f(x,y)$ เป็นฟังก์ชันที่หาค่าได้ที่ทุก ๆ จุด (x,y) ในย่านจุด (x_0,y_0) จะกล่าวว่าฟังก์ชัน f ต่อเนื่องที่จุด (x_0,y_0) ถ้า $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)$

จากบทนิยามจะได้ว่า $z = f(x,y)$ จะต่อเนื่องที่ (x_0, y_0) ถ้าฟังก์ชัน f สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

1. $f(x_0, y_0)$ หาค่าได้
2. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ มีหรือหาค่าได้
3. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0)$

ถ้าฟังก์ชัน f ไม่สอดคล้องกับเงื่อนไขข้อใดข้อหนึ่งใน 3 ข้อนี้ จะกล่าวว่าฟังก์ชัน f ไม่ต่อเนื่องที่จุด (x_0, y_0)

บทนิยาม 4.6

ถ้า f ต่อเนื่องทุก ๆ จุด (x,y) ใน $S \subseteq R^2$ แล้วจะกล่าวว่า f ต่อเนื่องบน S

ตัวอย่าง 4.13 ให้ $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2 + y^2}$ จงพิจารณาว่า $f(x,y)$ ต่อเนื่องที่จุด $(0,0)$ หรือไม่

วิธีทำ เนื่องจาก $f(0,0)$ หาค่าไม่ได้ ดังนั้น $f(x,y)$ ไม่ต่อเนื่องที่จุด $(0,0)$

ตัวอย่าง 4.14 ให้ $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & ; \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$ จงแสดงว่า f ไม่ต่อเนื่องที่จุด $(0,0)$

วิธีทำ เนื่องจาก $f(0,0) = 0$

พิจารณา $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ เมื่อ $(x,y) \neq (0,0)$

ให้ $(x,y) \to (0,0)$ ตามเส้นตรงที่ผ่านจุดกำเนิด $y = mx$ แต่ $(x,y) \neq (0,0)$

ดังนั้น $f(x,y) = \dfrac{x(mx)}{x^2 + (mx)^2}$

$$= \frac{mx^2}{x^2 + m^2x^2}$$
$$= \frac{mx^2}{x^2(1+m^2)}$$
$$= \frac{m}{1+m^2}$$

นั่นคือ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \dfrac{m}{1+m^2}$

(ตาม $y = mx$)

จะเห็นว่าเมื่อค่าของ m เปลี่ยนลิมิตของ $f(x,y)$ ก็จะเปลี่ยนด้วย นั่นคือเมื่อให้ $(x,y) \to (0,0)$ ตามเส้นตรงที่ต่างกันแล้ว $f(x,y)$ จะมีค่าต่างกันไปด้วย

นั่นคือ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ ไม่มีลิมิต

ดังนั้น $f(x,y)$ ไม่ต่อเนื่องที่ $(0,0)$

ตัวอย่าง 4.15 ให้ $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & ; \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & ; \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$ จงแสดงว่า f ไม่ต่อเนื่องที่จุด $(0,0)$

วิธีทำ เนื่องจาก $f(0,0) = 0$

และ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} = 0$ (จากตัวอย่าง 4.10)

ดังนั้น $f(x,y)$ ไม่ต่อเนื่องที่ $(0,0)$

ตัวอย่าง 4.16 ให้ $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & ; \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$ จงแสดงว่า f ไม่ต่อเนื่องที่จุด $(0,0)$

วิธีทำ เนื่องจาก $f(0,0) = 0$

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} = 0$ (จากตัวอย่าง 4.10)

และ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} = f(0,0)$

ดังนั้น $f(x,y)$ ต่อเนื่องที่ $(0,0)$

4.4 อนุพันธ์ย่อย

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงวิธีการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันของหลายตัวแปร โดยเริ่มจากฟังก์ชันของตัวแปร 2 ตัว $z = f(x, y)$ และถ้าเราให้ตัวแปรตัวหนึ่งสมมติว่าเป็น y มีค่าคงตัวแล้ว f จะกลายเป็นฟังก์ชันของตัวแปร 1 ตัวคือ x เท่านั้นดังนั้นเราจึงสามารถหาอนุพันธ์ของ f เทียบกับ x ได้ฟังก์ชันที่ได้ใหม่นี้เรียกว่า **อนุพันธ์ย่อยของ** f **เทียบกับ** x และถ้าเราให้ตัวแปรตัวหนึ่งสมมติว่าเป็น x มีค่าคงตัวแล้ว f จะกลายเป็นฟังก์ชันของตัวแปร 1 ตัวคือ y เท่านั้นดังนั้นเราจึงสามารถหาอนุพันธ์ของ f เทียบกับ y ได้ฟังก์ชันที่ได้ใหม่นี้เรียกว่า **อนุพันธ์ย่อยของ** f **เทียบกับ** y (Buck, Creighton R., 1978 : 163-164)

บทนิยาม 4.7

ให้ $z = f(x, y)$ เป็นฟังก์ชัน 2 ตัวแปร และ $(x_0, y_0) \in D_f$

อนุพันธ์ย่อยของ f **เทียบกับ** x **ที่จุด** (x_0, y_0) คือ

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \text{ ถ้าลิมิตหาค่าได้}$$

อนุพันธ์ย่อยของ f **เทียบกับ** y **ที่จุด** (x_0, y_0) คือ

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h} \text{ ถ้าลิมิตหาค่าได้}$$

หมายเหตุ

การใช้สัญลักษณ์เกี่ยวกับอนุพันธ์ย่อยมีหลายแบบเช่น (Taylor Angus E.,1972 : 158)

อนุพันธ์ย่อยของ f เทียบกับ x ที่จุด (x_0, y_0) จะใช้สัญลักษณ์

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0) = f_1(x_0, y_0) = D_1(x_0, y_0) = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0, y_0)}$$

อนุพันธ์ย่อยของ f เทียบกับ y ที่จุด (x_0, y_0) จะใช้สัญลักษณ์

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = f_2(x_0, y_0) = D_2(x_0, y_0) = \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0, y_0)}$$

เนื่องจาก $f_x(x_0, y_0)$ และ $f_y(x_0, y_0)$ เป็นค่าอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชัน f เมื่อเทียบกับ x และ y ที่จุด (x_0, y_0) ตามลำดับ ในการหาค่า $f_x(x, y)$ และ $f_y(x, y)$ สำหรับอนุพันธ์ย่อยเมื่อเทียบกับ x และ y ที่จุด (x, y) ใด ๆ ก็สามารแทนค่า $x = x_0$ และ $y = y_0$ ได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้ (สุเทพ ลิ่มอรุณ, 2542 : 78)

ตัวอย่าง 4.17 กำหนด $f(x,y) = 2xy - 1$ จงหา $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$

วิธีทำ $f(x,y) = 2xy - 1$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\left[2x(y+h) - 1\right] - \left[2xy - 1\right]}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{2xy + 2xh - 1 - 2xy + 1}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{2xh}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} 2x \\
&= 2x
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x$

ตัวอย่าง 4.18 กำหนด $f(x,y) = 3x^2y - 5x$ จงหา $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ โดยใช้บทนิยาม

วิธีทำ $f(x,y) = 3x^2y - 5x$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\left[3(x+h)^2y - 5(x+h)\right] - \left[3x^2y - 5x\right]}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\left[3(x^2 + 2xh + h^2)y - 5(x+h)\right] - \left[3x^2y - 5x\right]}{h}
\end{aligned}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left[3x^2y + 6xyh + 3h^2y - 5x - 5h\right] - \left[3x^2y - 5x\right]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3x^2y + 6xyh + 3h^2y - 5x - 5h - 3x^2y + 5x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{6xyh + 3h^2y - 5h}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(6xy + 3hy - 5)h}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (6xy + 3hy - 5)$$

$$= 6xy - 5$$

ดังนั้น $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 6xy - 5$

ตัวอย่าง 4.19 กำหนด $f(x, y) = 3x^2y - 5x$ จงหา $\dfrac{\partial f}{\partial y}(2,1)$ โดยใช้บทนิยาม

วิธีทำ $f(x, y) = 3x^2y - 5x$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(2,1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2,1+h) - f(2,1)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left[3(2)^2(1+h) - 5(2)\right] - \left[3(2)^2(1) - 5(2)\right]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left[12 + 12h - 10\right] - \left[12 - 10\right]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{12h}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} 12$$

$$= 12$$

ดังนั้น $\dfrac{\partial f}{\partial y}(2,1) = 12$

สำหรับอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันของตัวแปรที่มากกว่าสองตัวแปรนั้นก็จะคล้ายกันกับอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันสองตัวแปรดังจะกล่าวในบทนิยามต่อไปนี้ (สุกัญญา สนิทวงศ์ ณ อยุธยา และอนัญญา อภิชาตบุตร, 2551 : 79)

บทนิยาม 4.8

กำหนดให้ $D \subset R^n$ $f : D \to R$ และ $(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) \in D$

อนุพันธ์ย่อยของ f เทียบกับ x_1 คือ

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1 + h, x_2, x_3, ..., x_n) - f(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)}{h}$$

อนุพันธ์ย่อยของ f เทียบกับ x_2 คือ

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, x_2 + h, x_3, ..., x_n) - f(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)}{h}$$

อนุพันธ์ย่อยของ f เทียบกับ x_3 คือ

$$\frac{\partial f}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, x_2, x_3 + h, ..., x_n) - f(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)}{h}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

อนุพันธ์ย่อยของ f เทียบกับ x_n คือ

$$\frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, x_2, x_3, ..., x_n + h) - f(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)}{h}$$

จากบทนิยาม และตัวอย่างข้างต้นการหาอนุพันธ์ย่อยเทียบแต่ละตัวแปรเราสามารถคิดเสมือนว่าตัวแปรนั้นเป็นตัวแปรที่จะทำการหาอนุพันธ์เพียงตัวแปรเดียวส่วนตัวแปรที่เหลือให้มองเป็นค่าคงตัว ดังนั้น สามารถนำทฤษฎีต่าง ๆ ของการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันหนึ่งตัวแปรมาใช้แสดงได้เหมือนกันดังตัวอย่างต่อไปนี้ (Trench William F., 1978 : 112-115)

ตัวอย่าง 4.20 กำหนด $f(x,y) = 3x^2y^3 - 5x^4 - y - 12$ จงหา $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ และ $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$

วิธีทำ กำหนด $f(x,y) = 3x^2y^3 - 5x^4 - y - 12$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(3x^2y^3 - 5x^4 - y - 12\right)\\ &= \frac{\partial}{\partial x}3x^2y^3 - \frac{\partial}{\partial x}5x^4 - \frac{\partial}{\partial x}y - \frac{\partial}{\partial x}12\\ &= 6xy^3 - 20x^3 - 0 - 0\\ &= 6xy^3 - 20x^3\end{aligned}$$

ดังนั้น $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 6xy^3 - 20x^3$

กำหนด $f(x,y) = 3x^2y^3 - 5x^4 - y - 12$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(3x^2y^3 - 5x^4 - y - 12\right)\\ &= \frac{\partial}{\partial y}3x^2y^3 - \frac{\partial}{\partial y}5x^4 - \frac{\partial}{\partial y}y - \frac{\partial}{\partial y}12\\ &= 9x^2y^2 - 0 - 1 - 0\\ &= 9x^2y^2 - 1\end{aligned}$$

ดังนั้น $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 9x^2y^2 - 1$

ตัวอย่าง 4.21 กำหนด $f(x,y) = \left(5x^4 - xy\right)\sin 3x^2y^5$ จงหา $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ และ $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$

วิธีทำ กำหนด $f(x,y) = \left(5x^4 - xy\right)\sin 3x^2y^5$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(5x^4 - xy\right)\sin 3x^2y^5\\ &= \left(5x^4 - xy\right)\frac{\partial}{\partial y}\sin 3x^2y^5 + \sin 3x^2y^5\frac{\partial}{\partial y}\left(5x^4 - xy\right)\\ &= \left(5x^4 - xy\right)\left(\cos 3x^2y^5\right)\frac{\partial}{\partial y}3x^2y^5 + \left(\sin 3x^2y^5\right)\left(0 - x\right)\\ &= \left(75x^6y^4 - 15x^3y^5\right)\cos 3x^2y^5 - x\sin 3x^2y^5\end{aligned}$$

ดังนั้น $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \left(75x^6y^4 - 15x^3y^5\right)\cos 3x^2y^5 - x\sin 3x^2y^5$

กำหนด $f(x,y)=(5x^4-xy)\sin 3x^2y^5$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}(5x^4-xy)\sin 3x^2y^5$$

$$=(5x^4-xy)\frac{\partial}{\partial x}\sin 3x^2y^5+(\sin 3x^2y^5)\frac{\partial}{\partial x}(5x^4-xy)$$

$$=(5x^4-xy)(\cos 3x^2y^5)\frac{\partial}{\partial x}3x^2y^5+(\sin 3x^2y^5)(20x^3-y)$$

$$=(30x^5y^5-6x^2y^6)\cos 3x^2y^5+(20x^3-y)\sin 3x^2y^5$$

ดังนั้น $\dfrac{\partial f}{\partial x}=(30x^5y^5-6x^2y^6)\cos 3x^2y^5+(20x^3-y)\sin 3x^2y^5$

ตัวอย่าง 4.22 กำหนด $f(x,y)=(x^{12}+\sin 3x^2y^5)^{30}$ จงหา $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ และ $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$

วิธีทำ กำหนด $f(x,y)=(x^{12}+\sin 3x^2y^5)^{30}$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(x^{12}+\sin 3x^2y^5)^{30}$$

$$=30(x^{12}+\sin 3x^2y^5)^{29}\frac{\partial}{\partial y}(x^{12}+\sin 3x^2y^5)$$

$$=30(x^{12}+\sin 3x^2y^5)^{29}\left[\frac{\partial}{\partial y}x^{12}+\frac{\partial}{\partial y}\sin 3x^2y^5\right]$$

$$=30(x^{12}+\sin 3x^2y^5)^{29}\left[0+\cos 3x^2y\frac{\partial}{\partial y}(3x^2y^5)\right]$$

$$=30(x^{12}+\sin 3x^2y^5)^{29}\left[0+(\cos 3x^2y)(15x^2y^4)\right]$$

$$=450x^2y^4\cos 3x^2y(x^{12}+\sin 3x^2y^5)^{29}$$

ดังนั้น $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=450x^2y^4\cos 3x^2y(x^{12}+\sin 3x^2y^5)^{29}$

กำหนด $f(x,y)=(x^{12}+\sin 3x^2y^5)^{30}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}(x^{12}+\sin 3x^2y^5)^{30}$$

$$= 30\left(x^{12} + \sin 3x^2y^5\right)^{29} \frac{\partial}{\partial x}\left(x^{12} + \sin 3x^2y^5\right)$$

$$= 30\left(x^{12} + \sin 3x^2y^5\right)^{29} \left[\frac{\partial}{\partial x}x^{12} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\sin 3x^2y^5\right)\right]$$

$$= 30\left(x^{12} + \sin 3x^2y^5\right)^{29} \left[12x^{11} + \cos 3x^2y \frac{\partial}{\partial x}\left(3x^2y^5\right)\right]$$

$$= 30\left(x^{12} + \sin 3x^2y^5\right)^{29} \left[12x^{11} + \left(\cos 3x^2y\right)\left(6xy^5\right)\right]$$

$$= 30\left(x^{12} + \sin 3x^2y^5\right)^{29} \left[12x^{11} + 6xy^5 \cos 3x^2y\right]$$

ดังนั้น $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 30\left(x^{12} + \sin 3x^2y^5\right)^{29} \left[12x^{11} + 6xy^5 \cos 3x^2y\right]$

4.5 กฎลูกโซ่ของฟังก์ชันของตัวแปร 2 ตัว

สำหรับฟังก์ชัน $y = f(x)$ การกล่าวว่า $f'(a)$ มีค่าหมายความว่า f หาอนุพันธ์ได้ที่จุด $x = a$ แต่สำหรับฟังก์ชันหลายตัวแปร $z = f(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ การกล่าวว่า $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$ มีค่า ทุก i ไม่ได้หมายความว่า f หาอนุพันธ์ได้ที่จุด $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$ ทั้งนี้เพราะอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันเทียบแต่ละตัวแปรเปรียบเทียบได้กับอัตราการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันขณะที่ตัวแปรนั้นเปลี่ยนแปลงเพียงตัวแปรเดียว ซึ่งความเป็นจริงนั้น อัตราการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันหลายตัวแปรควรพิจารณาขณะที่ทุก ๆ ตัวแปรเปลี่ยนแปลงไปพร้อม ๆ กัน (Taylor Angus E., 1972 : 145)

บทนิยาม 4.9

กำหนดให้ $D \subset R^n$ $f : D \to R$ และ $z = f(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ เป็นฟังก์ โดย $(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) \in D$ เรากล่าวว่า f **หาอนุพันธ์ได้** ที่จุด $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$ ถ้า $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$ มีค่าทุก i

ทฤษฎีบท 4.3

$z=f(x,y)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ และสมมติว่า $x=x(t)$ และ $y=y(t)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ที่ $\frac{dx}{dt}$ และ $\frac{dy}{dt}$ หาค่าได้ และต่อเนื่อง ดังนั้น $z=f\big(x(t),y(t)\big)$ จะเป็นฟังก์ชันที่สามารถหาอนุพันธ์เทียบกับ t ได้

และ $\dfrac{df}{dt}=\dfrac{\partial f}{\partial x}\cdot\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\cdot\dfrac{dy}{dt}$

ตัวอย่าง 4.23 กำหนด $z=f(x,y)=x^3y$ และ $x=3t,\ y=t^2-1$ จงหา $\dfrac{df}{dt}(x,y)$

วิธีที่ 1 ใช้กฎลูกโซ่

ให้ $f(x,y)=x^3y$ และ $x=3t,\ y=t^2-1$

ได้ $\dfrac{\partial f}{\partial x}=3x^2y,\quad \dfrac{\partial f}{\partial y}=x^3$

$\dfrac{dx}{dt}=3,\qquad \dfrac{dy}{dt}=2t$

และ $\dfrac{df}{dt}=\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{dy}{dt}$

$$\begin{aligned}
\frac{df}{dt}&=\left(3x^2y\right)3+x^3 2t\\
&=9x^2y+2x^3t\\
&=9(3t)^2\left(t^2-1\right)+2(3t)^3t\\
&=81t^2\left(t^2-1\right)+54t^4\\
&=81t^4-81t^2+54t^4\\
&=135t^4-81t^2
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\dfrac{df}{dt}=135t^4-81t^2$

วิธีที่ 2 ใช้การแทนค่า

ให้ $f(x,y) = x^3y$, $x = 3t$, และ $y = t^2 - 1$

ได้ $f(x,y) = x^3y$

$$= (3t)^3(t^2 - 1)$$

$$= 27t^3(t^2 - 1)$$

$$= 27t^5 - 27t^3$$

จาก $f\big(x(t), y(t)\big) = 27t^5 - 27t^3$

$$\frac{df}{dt} = \frac{d}{dt}\left(27t^5 - 27t^3\right)$$

$$\frac{df}{dt} = 135t^4 - 81t^2$$

ดังนั้น $\dfrac{df}{dt} = 135t^4 - 81t^2$

ตัวอย่าง 4.24 กำหนด $z = f(x,y) = xy^2$ และ $x = \cos t$, $y = \sin t$ จงหา $\dfrac{df}{dt}$

วิธีที่ 1 ใช้กฎลูกโซ่

ให้ $z = f(x,y) = xy^2$ และ $x = \cos t$, $y = \sin t$

ได้ $\dfrac{\partial f}{\partial x} = y^2, \qquad \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2xy$

$$\frac{dx}{dt} = -\sin t, \quad \frac{dy}{dt} = \cos t$$

และ $\dfrac{df}{dt} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{dy}{dt}$

$$\frac{df}{dt} = y^2(-\sin t) + 2xy(\cos t)$$

$$= -(\sin t)^2 \sin t + 2(\cos t)(\sin t)(\cos t)$$

$$= -(\sin t)^3 + 2(\cos t)^2(\sin t)$$

$$= 2\cos^2 t\ \sin t - \sin^3 t$$

ดังนั้น $\dfrac{df}{dt} = 2\cos^2 t\ \sin t - \sin^3 t$

วิธีที่ 2 ใช้การแทนค่า

ให้ $z = f(x,y) = xy^2$ และ $x = \cos t\,,\ y = \sin t$

ได้ $f(x,y) = xy^2$

$$= \cos t \sin^2 t$$

จาก $f\left(x(t), y(t)\right) = \cos t \sin^2 t$

$$\frac{df}{dt} = \frac{d}{dt}\cos t \sin^2 t$$

$$\frac{df}{dt} = \cos t \frac{d}{dt}\sin^2 t + \sin^2 t \frac{d}{dt}\cos t$$

$$= (\cos t)2(\sin t)(\cos t) + \sin^2 t(-\sin t)$$

$$= 2\cos^2 t\ \sin t - \sin^3 t$$

ดังนั้น $\dfrac{df}{dt} = 2\cos^2 t\ \sin t - \sin^3 t$

ทฤษฎีบท 4.4

$z = f(x,y)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้และ $y = y(x)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ซึ่ง $\dfrac{dy}{dx}$ หาค่าได้และต่อเนื่อง ดังนั้น $z = f\left(x, y(x)\right)$ เป็นฟังก์ชันที่สามารถหาอนุพันธ์เทียบกับ x ได้ และ $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\dfrac{dy}{dx}$

ตัวอย่าง 4.25 กำหนด $u = f\left(x,y\right) = x + y^2$ และ $y = \sin x$ จงหา $\dfrac{du}{dx}$

วิธีทำ จาก $u = x + y^2$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2y$$

$$\frac{dy}{dx} = \cos x$$

จาก $\dfrac{du}{dx} = \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{dy}{dx}$

ดังนั้น $\dfrac{du}{dx} = 1 + 2y\cos x$

ตัวอย่าง 4.26 กำหนด $f(x,y) = x^3 + xy^2$ และ $y = \tan x$ จงหา $\dfrac{df}{dx}$

วิธีทำ จาก $f(x,y) = x^3 + xy^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + y^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy$$

$$\frac{dy}{dx} = \sec^2 x$$

จาก $\dfrac{df}{dx} = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{dy}{dx}$

ดังนั้น $\dfrac{df}{dx} = \left(3x^2 + y^2\right) + 2xy\sec^2 x$

ทฤษฎีบท 4.5

กำหนดให้ $z = f(x,y)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ x และ y เป็นฟังก์ชันของตัวแปร 2 ตัว r และ s นั่นคือ $x = x(r,s)$ และ $y = y(r,s)$ เป็นฟังก์ชันที่ $\dfrac{\partial f}{\partial r}, \dfrac{\partial x}{\partial s}, \dfrac{\partial y}{\partial r}$ และ $\dfrac{\partial y}{\partial s}$ ต่อเนื่อง ดังนั้นฟังก์ชันประกอบ $z = f\big(x(r,s), y(r,s)\big)$ เป็นฟังก์ชันที่สามารถหาอนุพันธ์เทียบกับ r และ s ได้และ

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}$$
$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}$$

ตัวอย่าง 4.27 กำหนด $z = f\Big(2x - y, x^2 + y^2\Big)$ โดยที่ f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ จงหา $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ และ $\dfrac{\partial z}{\partial y}$

วิธีทำ สามารถเขียนฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้ใหม่เป็น

$z = f(u,v)$ โดยที่ $u = 2x - y$ และ $v = x^2 + y$

จากกฎลูกโซ่ $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = f_u, \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = 2$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = f_y, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = 2x$$

ดังนั้น $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2f_u + 2xf_v$

จากกฎลูกโซ่ $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y}$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = f_u, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -1$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = f_y, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = 1$$

ดังนั้น $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -1f_u + 1f_v = -f_u + f_v$

4.6 อนุพันธ์ย่อยอันดับสูง

อนุพันธ์ย่อยที่กล่าวมาแล้วเป็นอนุพันธ์ย่อยอันดับที่หนึ่งของฟังก์ชันหลายตัวแปรหลาย ซึ่งจะเห็นว่าอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันดังกล่าวนั้นยังคงเป็นฟังก์ชันของตัวแปรเดิม ดังนั้นสำหรับฟังก์ชันของตัวแปร 2 ตัว $z = f(x,y)$ เราสามารถหา f_x และ f_y ได้ และ f_x นั้นก็สามารถหาอนุพันธ์ย่อยเทียบกับตัวแปร x และ y ได้ และในทำนองเดียวกันก็จะสามารถหาอนุพันธ์ย่อยของ f_y เทียบกับตัวแปร x และ y ได้เช่นกัน ซึ่งอนุพันธ์ดังกล่าวนี้เรียกว่าอนุพันธ์ย่อยอันดับสองของ f ซึ่งมีวิธีการหาดังนี้ (สุกัญญา สนิทวงศ์ ณ อยุธยา และอนัญญา อภิชาตบุตร, 2551 : 69)

1. การหาอนุพันธ์ย่อยเทียบกับ x สองครั้ง

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

2. การหาอนุพันธ์ย่อยเทียบกับ y สองครั้ง

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

3. การหาอนุพันธ์ย่อยเทียบกับ y ก่อน แล้วจึงเทียบกับ x

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

4. การหาอนุพันธ์ย่อยเทียบกับ x ก่อน แล้วจึงเทียบกับ y

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

หมายเหตุ อนุพันธ์ย่อย $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ และ $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ เรียกว่าอนุพันธ์ย่อยอันดับที่สองแบบผสม

ตัวอย่าง 4.28 จงหาอนุพันธ์ย่อยอันดับที่สองของ $f(x,y) = 3x^2y - x^5 + 3y^4$

วิธีทำ จาก $f(x,y) = 3x^2y - x^5 + 3y^4$

ได้ $f_x(x,y) = 6xy - 5x^4$

และ $f_y(x,y) = 3x^2 + 12y^3$

พิจารณา

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left[f_x(x,y)\right] \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(6xy - 5x^4\right) \\ &= 6y - 20x^3 \end{aligned}$$

ดังนั้น $f_{xx}(x,y) = 6y - 20x^3$

พิจารณา

$$\begin{aligned} f_{yx}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left[f_y(x,y)\right] \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(3x^2 + 12y^3\right) \\ &= 6x \end{aligned}$$

ดังนั้น $f_{yx}(x,y) = 6x$

พิจารณา

$$f_{xy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left[f_x(x,y)\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\left(6xy - 5x^4\right)$$

$$= 6x$$

ดังนั้น $f_{xy}(x,y) = 6x$

พิจารณา

$$f_{yy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left[f_y(x,y)\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\left(3x^2 + 12y^3\right)$$

$$= 36y^2$$

ดังนั้น $f_{yy}(x,y) = 36y^2$

ตัวอย่าง 4.29 กำหนด $f(x,y) = e^{2x} + \sin 3xy^5$

วิธีทำ จาก $f(x,y) = e^{2x} + \sin 3xy^5$

ได้ $f_x(x,y) = 2e^{2x} + 3y^5 \cos 3xy^5$

และ $f_y(x,y) = 15xy^4 \cos 3xy^5$

พิจารณา

$$f_{xx}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left[f_x(x,y)\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(2e^{2x} + 3y^5 \cos 3xy^5\right)$$

$$= 4e^{2x} + 3y^5\left(-3y^5 \sin 3xy^5\right)$$

$$= 4e^{2x} - 9y^{10} \sin 3xy^5$$

ดังนั้น $f_{xx}(x,y) = 4e^{2x} - 9y^{10} \sin 3xy^5$

พิจารณา

$$
\begin{aligned}
f_{yx}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left[f_y(x,y)\right] \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(15xy^4 \cos 3xy^5\right) \\
&= 15xy^4 \frac{\partial}{\partial x}\left(\cos 3xy^5\right) + \cos 3xy^5 \frac{\partial}{\partial x} 15xy^4 \\
&= 15xy^4\left(3y^5(-\sin 3xy^5)\right) + \left(\cos 3xy^5\right)\left(15y^4\right)
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $f_{yx}(x,y) = -45xy^9 \sin 3xy^5 + 15y^4 \cos 3xy^5$

พิจารณา

$$
\begin{aligned}
f_{xy}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left[f_x(x,y)\right] \\
&= \frac{\partial}{\partial y}\left(2e^{2x} + 3y^5 \cos 3xy^5\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial y} 2e^{2x} + \frac{\partial}{\partial y} 3y^5 \cos 3xy^5 \\
&= 0 + 3y^5 \frac{\partial}{\partial y} \cos 3xy^5 + \cos 3xy^5 \frac{\partial}{\partial y} 3y^5 \\
&= 3y^5\left(-15xy^4 \sin 3xy^5\right) + \left(\cos 3xy^5\right)\left(15y^4\right) \\
&= -45xy^9 \sin 3xy^5 + 15y^4 \cos 3xy^5
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $f_{xy}(x,y) = -45xy^9 \sin 3xy^5 + 15y^4 \cos 3xy^5$

พิจารณา

$$
\begin{aligned}
f_{yy}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left[f_{yy}(x,y)\right] \\
&= \frac{\partial}{\partial y}\left(15xy^4 \cos 3xy^5\right) \\
&= 15xy^4 \frac{\partial}{\partial y}\left(\cos 3xy^5\right) + \left(\cos 3xy^5\right) \frac{\partial}{\partial y} 15xy^4 \\
&= 15xy^4\left(-15xy^4 \sin 3xy^5\right) + \left(\cos 3xy^5\right)\left(60xy^3\right) \\
&= -225x^2y^8 \sin 3xy^5 + 60xy^3 \cos 3xy^5
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $f_{yy}(x,y) = -225x^2y^8 \sin 3xy^5 + 60xy^3 \cos 3xy^5$

จากตัวอย่าง 4.28 และ 4.29 จะเห็นว่าอนุพันธ์ย่อยอันดับที่สอง $f_{xy}(x,y)$ และ $f_{yx}(x,y)$ มีค่าเท่ากัน ซึ่งเรามีทฤษฎีบทที่กล่าวถึงเงื่อนไขที่อนุพันธ์ย่อยแบบผสมจะเท่ากันดังนี้ (สิริวรรณ ตั้งจิตรวัฒนะกุล และสมศักดิ์ บุญมาเลิศ, 2542 : 87)

ทฤษฎีบท 5.6

ถ้า $f(x,y)$ และอนุพันธ์ย่อย $f_x(x,y), f_y(x,y), f_{xy}(x,y)$ และ $f_{yx}(x,y)$ หาค่าได้และต่อเนื่องที่จุด (x_0,y_0) แล้ว $f_{xy}(x_0,y_0) = f_{yx}(x_0,y_0)$

เราสามารถนิยามการหาอนุพันธ์ย่อยอันดับที่สองและทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับการเท่ากันของอนุพันธ์ย่อยแบบผสมของฟังก์ชัน 3 ตัวหรือมากกว่า 3 ตัวในทำนองเดียวกัน กำหนดฟังก์ชันของตัวแปร 3 ตัว $w = f(x,y,z)$ จะได้อนุพันธ์ย่อยอันดับที่สองของฟังก์ชัน f ดังนี้ (ศรีบุตร แววเจริญ, 2541 : 102)

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= f_{xx}(x,y,z), & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= f_{xy}(x,y,z), & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} &= f_{xz}(x,y,z) \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= f_{yy}(x,y,z), & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= f_{yx}(x,y,z), & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} &= f_{yz}(x,y,z) \\
\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} &= f_{zz}(x,y,z), & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} &= f_{zy}(x,y,z), & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} &= f_{zx}(x,y,z)
\end{aligned}
$$

ทฤษฎีบท 4.7

กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชัน 3 ตัวแปรซึ่ง $f = f(x,y,z)$ โดยที่อนุพันธ์ย่อยแบบผสมของ $f_x(x,y,z)$, $f_y(x,y,z)$, $f_z(x,y,z)$ หาค่าได้และ $f(x,y,z)$ ต่อเนื่องที่จุด (x_0,y_0,z_0) แล้ว

$$f_{xy}\left(x_0,y_0,z_0\right) = f_{yx}\left(x_0,y_0,z_0\right)$$

$$f_{xz}\left(x_0,y_0,z_0\right) = f_{zx}\left(x_0,y_0,z_0\right)$$

$$f_{yz}\left(x_0,y_0,z_0\right) = f_{zy}\left(x_0,y_0,z_0\right)$$

ตัวอย่าง 4.30 จงหาอนุพันธ์ย่อยอันดับที่สองของ $f(x,y,z) = 3x^2yz - yx^5 + 3y^4 + z^2$

วิธีทำ จาก $f(x,y,z) = 3x^2yz - yx^5 + 3y^4 + z^2$

จะได้ $f_x(x,y,z) = 6xyz - 5x^4y$

$f_y(x,y,z) = 3x^2z - x^5 + 12y^3$

$f_z(x,y,z) = 3x^2y + 2z$

พิจารณา

$$
\begin{aligned}
f_{xx}(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial x}\left[f_x(x,y,z)\right] \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(6xyz - 5x^4y\right) \\
&= 6yz - 20x^3y
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $f_{xx}(x,y,z) = 6yz - 20x^3y$

พิจารณา

$$
\begin{aligned}
f_{yx}(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial x}\left[f_y(x,y,z)\right] \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(3x^2z - x^5 + 12y^3\right) \\
&= 6xz - 5x^4
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $f_{yx}(x,y,z) = 36y^2$

พิจารณา

$$
\begin{aligned}
f_{xy}(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial y}\left[f_x(x,y,z)\right] \\
&= \frac{\partial}{\partial y}\left(6xyz - 5x^4y\right) \\
&= 6xz - 5x^4
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $f_{xy}(x,y,z) = 6xz - 5x^4$

พิจารณา

$$\begin{aligned} f_{yy}(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial y}\Big[f_{y}(x,y,z)\Big] \\ &= \frac{\partial}{\partial y}\big(3x^2z - x^5 + 12y^3\big) \\ &= 36y^2 \end{aligned}$$

ดังนั้น $f_{yy}(x,y,z) = 36y^2$

พิจารณา

$$\begin{aligned} f_{xz}(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial z}\Big[f_{x}(x,y,z)\Big] \\ &= \frac{\partial}{\partial z}\big(6xyz - 5x^4y\big) \\ &= 6xy \end{aligned}$$

ดังนั้น $f_{xz}(x,y,z) = 6xy$

พิจารณา

$$\begin{aligned} f_{zx}(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial x}\Big[f_{z}(x,y,z)\Big] \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\big(3x^2y + 2z\big) \\ &= 6xy \end{aligned}$$

ดังนั้น $f_{xz} = 6xy$

พิจารณา

$$\begin{aligned} f_{yz}(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial z}\Big[f_{y}(x,y,z)\Big] \\ &= \frac{\partial}{\partial z}\big(3x^2z - x^5 + 12y^3\big) \\ &= 3x^2 \end{aligned}$$

ดังนั้น $f_{yz}(x,y,z) = 3x^2$

พิจารณา

$$\begin{aligned} f_{zy}(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial y}\left[f_z(x,y,z)\right] \\ &= \frac{\partial}{\partial y}\left(3x^2y+2z\right) \\ &= 3x^2 \end{aligned}$$

ดังนั้น $f_{zy}(x,y,z)=3x^2$

พิจารณา

$$\begin{aligned} f_{zz}(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial z}\left[f_z(x,y,z)\right] \\ &= \frac{\partial}{\partial z}\left(3x^2y+2z\right) \\ &= 2 \end{aligned}$$

ดังนั้น $f_{zz}(x,y,z)=2$

จากตัวอย่างจะเห็นว่า $f_{xy}(x,y,z)=f_{yx}(x,y,z),\ f_{xz}(x,y,z)=f_{zx}(x,y,z)$ และ $f_{yz}(x,y,z)=f_{zy}(x,y,z)$

จากตัวอย่างและทฤษฎีที่ผ่านมานั้น เราสามารถนิยามอนุพันธ์ย่อยอันดับที่สูงกว่าของฟังก์ชันที่มีตัวแปรสองตัว หรือมากกว่าสองตัวได้ในทำนองเดียวกัน ดังตัวอย่าง (บัญญัติ สร้อยแสง, 2553 : 71-72)

อนุพันธ์ย่อยอันดับที่สาม

เช่น $f_{xyz}(x,y,z)=\dfrac{\partial^3 f}{\partial z\partial y\partial x}=\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right)=\dfrac{\partial}{\partial z}\left[f_{xy}(x,y,z)\right]$

อนุพันธ์ย่อยอันดับที่สี่

เช่น $f_{yxyz}(x,y,z)=\dfrac{\partial^4 f}{\partial z\partial y\partial x\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial^3 f}{\partial y\partial x\partial y}\right)=\dfrac{\partial}{\partial z}\left[f_{yxy}(x,y,z)\right]$

ตัวอย่าง 4.31 จงหาอนุพันธ์ย่อยอันดับที่สองของ $f(x,y,z) = 3x^5y^2z - x^5y + xz^4 + yz^2$

จงหา $\dfrac{\partial^3}{\partial z\partial y\partial z}f(x,y,z)$, $\dfrac{\partial^4}{\partial z\partial y\partial x\partial x}f(x,y,z)$, $\dfrac{\partial^4}{\partial z\partial y\partial z\partial y}f(x,y,z)$ และ

$\dfrac{\partial^5}{\partial x\partial z\partial y\partial z\partial x}f(x,y,z)$

วิธีทำ เนื่องจาก $\dfrac{\partial^3}{\partial z\partial y\partial z}f(x,y,z) = f_{xyz}\left(x,y,z\right)$

และ

$$\begin{aligned}
f\left(x,y,z\right) &= 3x^5y^2z - x^5y + xz^4 + yz^2 \\
f_x(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(3x^5y^2z - x^5y + xz^4 + yz^2\right) \\
&= 15x^4y^2z - 5x^4y + z^4 \\
f_{xy}(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(15x^4y^2z - 5x^4y + z^4\right) \\
&= 30x^4yz - 5x^4 \\
f_{xyz}(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial z}\left(30x^4yz - 5x^4\right) \\
&= 30x^4y
\end{aligned}$$

ดังนั้น $f_{xyz}(x,y,z) = 30x^4y$

วิธีทำ เนื่องจาก $\dfrac{\partial^4}{\partial z\partial y\partial x\partial x}f(x,y,z) = f_{xxyz}(x,y,z)$

และ

$$\begin{aligned}
f\left(x,y,z\right) &= 3x^5y^2z - x^5y + xz^4 + yz^2 \\
f_x(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(3x^5y^2z - x^5y + xz^4 + yz^2\right) \\
&= 15x^4y^2z - 5x^4y + z^4 \\
f_{xx}(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(15x^4y^2z - 5x^4y + z^4\right) \\
&= 60x^3y^2z - 20x^3y \\
f_{xxy}(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(60x^3y^2z - 20x^3y\right) \\
&= 120x^3yz - 20x^3
\end{aligned}$$

$$f_{xxyz}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial y}\left(120x^3yz - 20x^3\right)$$
$$= 120x^3y$$

ดังนั้น $f_{xxyz}(x,y,z) = 120x^3y$

วิธีทำ เนื่องจาก $\frac{\partial^4}{\partial z \partial y \partial z \partial y} f(x,y,z) = f_{yzyz}(x,y,z)$

และ $$f\left(x,y,z\right) = 3x^5y^2z - x^5y + xz^4 + yz^2$$

$$f_y(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x}\left(3x^5y^2z - x^5y + xz^4 + yz^2\right)$$
$$= 6x^5yz - x^5 + z^2$$
$$f_{yz}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial z}\left(6x^5yz - x^5 + z^2\right)$$
$$= 6x^5y + 2z$$
$$f_{yzy}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial y}\left(6x^5y + 2z\right)$$
$$= 6x^5$$
$$f_{yzyz}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial z}\left(6x^5\right)$$
$$= 0$$

ดังนั้น $f_{yzyz}(x,y,z) = 0$

วิธีทำ เนื่องจาก $\frac{\partial^5}{\partial x \partial z \partial y \partial z \partial x} f(x,y,z) = f_{xzyzx}(x,y,z)$

และ $$f\left(x,y,z\right) = 3x^5y^2z - x^5y + xz^4 + yz^2$$

$$f_x(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x}\left(3x^5y^2z - x^5y + xz^4 + yz^2\right)$$
$$= 15x^4y^2z - 5x^4y + z^4$$
$$f_{xz}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial z}\left(15x^4y^2z - 5x^4y + z^4\right)$$
$$= 15x^4y^2 - 4z^3$$

$$
\begin{aligned}
f_{xzy}(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(15x^4y^2 - 4z^3\right) \\
&= 30x^4y \\
f_{xzyz}(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial z}\left(30x^4y\right) \\
&= 0 \\
f_{xzyzx}(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial z}\left(0\right) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $f_{xzyzx} = 0$

4.7 สรุปท้ายบทที่ 4

ในบทนี้นั้นเป็นเรื่องของฟังก์ชันหลายตัวแปรและอนุพันธ์ย่อย โดยพื้นฐานเริ่มต้นจากฟังก์ชันหลายตัวแปรจากบทนิยาม นั้นคือกำหนดให้ $f: D \to R$ โดยที่ $D \subseteq R^n$ เรียกฟังก์ชัน f ว่าเป็น **ฟังก์ชัน n ตัวแปร** $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ ถ้าสำหรับจุด $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ ใด ๆ ในโดเมน D สามารถหาค่า $f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ ได้เพียงค่าเดียวเท่านั้น และถ้า กำหนดให้ $z = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ เรียกเซตของ $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ ซึ่งเป็นจำนวนจริงว่า **โดเมนของฟังก์ชัน** f เขียนแทนด้วย D_f ส่วนเซตของ z ซึ่งเป็นจำนวนจริงเรียกว่า **เรนจ์ของฟังก์ชัน** f เขียนแทนด้วย R_f เพื่อหาโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันหลายตัวแปร หลังจากนั้นเป็นการหาลิมิตของฟังก์ชันสองตัวแปรจากบทนิยามที่ว่าถ้า f มีค่าลิมิตเท่ากับจำนวนจริง L ขณะที่ (x, y) ย่างเข้าสู่ จุด (x_0, y_0) ซึ่งแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$ ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก ๆ จำนวนจริงบวก ε ที่กำหนดให้จะมีจำนวนจริงบวก $\delta > 0$ ที่ทำให้ $\left|f(x,y) - L\right| < \varepsilon$ สำหรับทุก ๆ $(x,y) \in D$ ซึ่ง $0 < \left\|(x,y) - (x_0,y_0)\right\| < \delta$

หรือจะเป็นการหาค่าลิมิตของฟังก์ชันสองตัวแปรโดยใช้ทฤษฎีบทต่าง ๆ เพื่อนำไปสู่การหาอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันก์หลายตัวแปรโดยเริ่มจากฟังก์ชันสองตัวแปรจนถึงฟังก์ชัน n ตัวแปร พร้อมทั้งการใช้กฎลูกโซ่ในการหาอนุพันธ์ย่อย และเรื่องสุดท้ายคือการหาอนุพันธ์ย่อยอันดับสูง

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 4

1. กำหนดให้ $f\left(x,y\right)=2x^2y-5y^2-3x-1$

   1.1 จงหา $f\left(0,0\right)$

   1.2 จงหา $f\left(-2,0\right)$

   1.3 จงหา $f\left(2,5\right)$

   1.4 จงหา $f\left(x,y+h\right)$

   1.5 จงหา $f\left(x+h,y\right)$

2. กำหนดให้ $f\left(x,y\right)=\dfrac{3x^2y-y^2}{xy-2}$ โดยที่ $xy\neq 2$

   2.1 จงหา $f\left(0,0\right)$

   2.2 จงหา $f\left(-2,0\right)$

   2.3 จงหา $f\left(2,5\right)$

   2.4 จงหา $f\left(x,y+h\right)$

   2.5 จงหา $f\left(x+h,y\right)$

3. กำหนดให้ $f\left(x,y\right)=\left(x^2y-y^3\right)\left(xy-5\right)$

   3.1 จงหา $f\left(0,0\right)$

   3.2 จงหา $f\left(-2,0\right)$

   3.3 จงหา $f\left(2,5\right)$

   3.4 จงหา $f\left(x,y+h\right)$

   3.5 จงหา $f\left(x+h,y\right)$

4. จงหาโดเมนของฟังก์ชันต่อไปนี้พร้อมทั้งเขียนกราฟของโดเมนของแตละฟังก์ชัน

   4.1 $f\left(x,y\right)=\sqrt{9-x^2-y^2}$

   4.2 $f\left(x,y\right)=\sqrt{x^2+y^2-1}$

5. จงหาลิมิตต่อไปนี้

5.1 $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} 3y^2 - x^2y + 5$

5.2 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} 2xy^2$

5.3 $\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)} \dfrac{xy + x}{x^2 - y^2}$

5.4 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}$

6. จงแสดงว่าลิมิตของฟังก์ชันต่อไปนี้ไม่มีค่า

6.1 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 + y}{x^2 + y^2}$

6.2 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^3}{x^2 + y^6}$

7. กำหนด $f(x,y)$ ดังต่อไปนี้จงหา $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ และ $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ โดยใช้บทนิยาม

7.1 $f(x,y) = x^2y + 2xy$

7.2 $f(x,y) = 3xy - x^2y$

7.3 $f(x,y) = 15x^2y + x^2 - 2x + y$

7.4 $f(x,y) = xy^3 + xy - 2x^2 + y$

7.5 $f(x,y) = 2y^3 + 2x^2$

8. กำหนด $f(x,y)$ดังต่อไปนี้จงหา $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ และ $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$

8.1 $f(x,y) = 15x^2y + x^2 - 2x + y$

8.2 $f(x,y) = xy^3 + xy - 2x^2 + y$

8.3 $f(x,y) = (xy^3 + x^5y)\sin 2x$

8.4 $f(x,y) = \dfrac{\tan(xy^3 + x^5y)}{5x - \sin 2x}$

8.5 $f(x,y) = \dfrac{xy^3 + x^5y}{15x^2y + x^2 - 2x + y}$

9. กำหนด $z = f\left(x,y\right) = x - y$ และ $x = \cos t$, $y = \cot t$ จงหา $\dfrac{df}{dt}\left(x,y\right)$

10. กำหนด $z = f\left(x,y\right) = x - y^2$ และ $x = \cos t$, $y = \sin t$ จงหา $\dfrac{df}{dt}\left(x,y\right)$

11. กำหนด $z = f\left(x,y\right) = 2xy^2$ และ $x = 3t + 5$, $y = \sin t$ จงหา $\dfrac{df}{dt}\left(x,y\right)$

12. กำหนด $z = f\left(x,y\right) = 2xy^2$ และ $x = 3t + 5$, $y = \sin t$ จงหา $\dfrac{df}{dt}\left(x,y\right)$

13. กำหนด $f\left(x,y\right) = x^3 + xy^2$ และ, $x = 3t + 5$, $y = \sin t$ จงหา $\dfrac{df}{dx}\left(x,y\right)$

14. จงหา $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ และ $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ กำหนด $z = f\left(x - y, 2x^2 + y^2\right)$ โดยที่ f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้

15. กำหนด $f\left(x,y,z\right) = x^{10}y^2z - 11y^5z - xz + x^3$ จงหาอนุพันธ์ย่อยดังต่อไปนี้

15.1 $\dfrac{\partial}{\partial y \partial z} f\left(x,y,z\right)$

15.2 $\dfrac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} f\left(x,y,z\right)$

15.3 $f_{xyz}\left(x,y,z\right)$

15.4 $f_{yxzyx}\left(x,y,z\right)$

บรรณานุกรม

กมล เอกไทยเจริญ. (2544). **แคลคูลัส 1.** กรุงเทพมหานคร : ไฮเอ็ดพับลิชชิ่ง.

__________. (2545). **แคลคูลัส 2.** กรุงเทพมหานคร : ไฮเอ็ดพับลิชชิ่ง.

กวิยา เนาวประทีป. (2547). **เทคนิคการเรียนคณิตศาสตร์ แคลคูลัสเบื้องต้น.** กรุงเทพมหานคร : ฟิสิกส์เซ็นเตอร์.

กานดา ลือสุทธิวิบูลย์ และยุพิน จิรสุขานนท์. (2549). **สรุปคณิตศาสตร์ ม.ปลาย.** กรุงเทพมหานคร : เดอะบุคส์ จำกัด

คณาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยรามคำแหง. (2542). **แคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ 1.** พิมพ์ครั้งที่ 8. กรุงเทพมหานคร : มหาวิทยาลัยรามคำแหง.

คณาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น. (2539). **แคลคูลัส 2.** พิมพ์ครั้งที่ 3. ขอนแก่น : มหาวิทยาลัยขอนแก่น.

จำรัส อินสม และประทีป โรจนวิกาต. (2550). **คู่มือคณิตศาสตร์พื้นฐาน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เล่ม 2 ภาคเรียนที่ 2.** กรุงเทพมหานคร : แม็ค.

จันทนีย์ กาญจนะโรจน์ และชุลี โชติกประคัลภ์. (2557). **แคลคูลัส 1.** พิมพ์ครั้งที่ 4. กรุงเทพมหานคร : คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยกรุงเทพ.

ชัยสงคราม เครือหงส์. (2544). **เอกสารประกอบการสอนรายวิชาแคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์1.** สุราษฎร์ธานี : มหาวิทยาลัยราชภัฏสุราษฎร์ธานี.

ดวงใจ ลิ้มอำไพ. (2554). **คณิตศาสตร์สำหรับคอมพิวเตอร์.** บุรีรัมย์ : คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี สถาบันราชภัฏบุรีรัมย์.

ทัศนีย์ อารยะตระกูลลิขิต. (2539). **แคลคูลัส 1.** ขอนแก่น : ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น.

ธีระศักดิ์ อุรัจนานนท์. (2548). **อินทิกรัล.** กรุงเทพมหานคร : สกายบุ๊กส์.

__________. (2546). **แคลคูลัส 1.** กรุงเทพมหานคร : สกายบุ๊กส์.

บัญญัติ สร้อยแสง. (2553). **เอกสารประกอบการสอนแคลคูลัสและสมการเชิงอนุพันธ์สำหรับวิทยาศาสตร์ชีวภาพ.** ภาควิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์

ประเสริฐ ภู่เงิน.(2538). **คณิตศาสตร์พื้นฐาน.** บุรีรัมย์ : ภาควิชาคณิตศาสตร์และสถิติ สถาบันราชภัฏบุรีรัมย์

ปราณี เหรียญกิติวัฒน์ และลัดดาวัลย์ เพ็ญสุภา. (2530). **คณิตศาสตร์ทั่วไป.** กรุงเทพมหานคร : สำนักประกายพรึก.

ปิยรัตน์ จาตุรันตบุตร. (2547). **หลักการคณิตศาสตร์.** กรุงเทพมหานคร : ด่านสุทธาการพิมพ์.

พลอนันต์ แสงประสิทธิ์. (2554). **แนวข้อสอบคณิตศาสตร์ ม. ปลาย.** กรุงเทพมหานคร : เดอะบุคส์.

พัฒนา สีมากุล. (2537). **แคลคูลัส 1.** กรุงเทพมหานคร : เจเนอรัลบุ๊คส์.

เฟื่องฟ้า ศรีจันทพงศ์ และคณะ. (2553). **แคลคูลัส 1.** พิมพ์ครั้งที่ 5. ขอนแก่น : ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น.

ไมตรี ปชาเดชสุวัฒน์. (2532). **แคลคูลัสเบื้องต้น.** กรุงเทพมหานคร : ประกอบเมไตร.

มาริสา มัยยะ และวันเพ็ญ จันทรังษี. (2550). **แคลคูลัส 1.** กรุงเทพมหานคร : ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์.

ราชบัณฑิตยสถาน. (2553). **พจนานุกรมศัพท์คณิตศาสตร์ฉบับราชบัณฑิตยสถาน.** พิมพ์ครั้งที่ 10. กรุงเทพมหานคร นานมีบุคส์พับลิเคชั่นส์.

รณชัย มาเจริญทรัพย์. (2547). **คณิตศาสตร์เพิ่มเติมเล่ม 1.** กรุงเทพมหานคร : ภูมิบัณฑิตการพิมพ์.

__________ . (2551). **คณิตศาสตร์เพิ่มเติมเล่ม 3.** กรุงเทพมหานคร : ภูมิบัณฑิตการพิมพ์.

เลิศ สิทธิโกศล. (2541). **แคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ 1.** กรุงเทพมหานคร : สกายบุคส์.

วิรุฬห์ บูญสมบัติ.(2534). **คณิตศาสตร์ทั่วไป.** กรุงเทพมหานคร : จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

วีระศักดิ์ วาจาบัณฑิตย์. (2541). **สมการเชิงอนุพันธ์.** กรุงเทพมหานคร : ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยรามคำแหง.

เวชชัย สังข์สาย. (2536). **คณิตศาสตร์พื้นฐาน.** สุรินทร์ : ภาควิชาคณิตศาสตร์และสถิติ วิทยาลัยครูสุรินทร์.

ศรีบุตร แววเจริญ. (2541). **คณิตศาสตร์สำหรับวิศวกรรมและวิทยาศาสตร์.** กรุงเทพมหานคร : วงตะวัน.

ศุภกิจ เฉลิมวิสุตม์กุล. (2553). **คณิตศาสตร์ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4.** กรุงเทพมหานคร : แม็ค.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2546). **หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 1 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ มัธยมศึกษาปีที่ 4.** กรุงเทพมหานคร : สำนักพิมพ์คุรุสภา.

สิริวรรณ ตั้งจิตรวัฒนะกุล และสมศักดิ์ บุญมาเลิศ. (2542). **แคลคูลัสขั้นสูง 1.** พิมพ์ครั้งที่ 8. กรุงเทพมหานคร : ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยรามคำแหง.

สุกัญญา สนิทวงศ์ ณ อยุธยา และอนัญญา อภิชาตบุตร. (2551). **แคลคูลัส 2.** กรุงเทพมหานคร : ไฮเอ็ดพับลิชชิ่ง.

สุรวิทย์ ตันแต่งผล และอนุสรณ์ ชนวีรยุทธ. (2557). **แคลคูลัส 1.** กรุงเทพมหานคร : จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

สุชาติ เจริญนิตย์. (2554). **แคลคูลัส 2.** พิมพ์ครั้งที่ 9. ปทุมธานี : มหาวิทยาลัยกรุงเทพ.

สุเทพ ลิ่มอรุณ. (2542). **แคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ 2.** เพชรบุรี : มหาวิทยาลัยราชภัฏเพชรบุรี.

สมเกียรติ พาน้อย. (2543). **แคลคูลัส 1.** ขอนแก่น : ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น.

อัจฉรา ปาจีนบูรวรรณ์. (2555). **แคลคูลัส 1.** กรุงเทพมหานคร : ภาควิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์.

อุษณีย์ ลีรวัฒน์. (2552). **เอกสารประกาอบการสอนรายวิชาคณิตศาสตร์ขั้นสูง I.** กรุงเทพมหานคร : มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์.

อุบล กลองกระโทก. (2549). **เอกสารคำสอนคณิตศาสตร์สำหรับวิทยาศาสตร์ 2.** กรุงเทพมหานคร : คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา.

Anton, Howard. (1995). **Calculus with analytic geometry.** New York : John Wiley & son.

Ben-Ari, M. (1993). **Mathematical Logic for Computer Science.** Prentice Hall International (UK) Ltd.

Buck, Creighton R. (1987). **Advanced Calculus.** New York : Mcgraw-Hill Book company Inc.

Combe, H.J. (1971). **Set and Symbolic Logic.** London : Macmillan Company.

Olmsted, John. M.H. (1962). **The Real Number System.** New York : Appletion-Century Crofts

Ross, F.L. Maurice,.W.D. and Frank, G.R. (2001). **Calculus with analytic geometry.** New Yok : Addison-wesley.

Stein, S.K.& Barcellos, A. (1992). **Calculus and analytic Geometry.** McGraw-Hill.

Taylor Angus E. (1972). **Advanced Calculus.** Lexingtion.

Trench William F. (1978)**Advanced Calculus.** Harper & Row, Publishers, New York.

Wright,D.F. and New, B.D. (1992). **Calulus with Applications.** Massachusetts :
D.C Heath.