บทที่ 2
อนุพันธ์ของฟังก์ชัน

วิชาแคลคูลัสเป็นวิชาที่กล่าวถึงการเปลี่ยนแปลงทางคณิตศาสตร์และเครื่องมือหลักสำหรับศึกษาการเปลี่ยนแปลงจะเป็นกระบวนการที่เราเรียกว่า **การหาอนุพันธ์** (differentiation) ในการศึกษาเรื่องอนุพันธ์ของฟังก์ชันนั้น มีความสำคัญต่อการศึกษาด้านวิทยาศาสตร์ มีการนำอนุพันธ์ไปใช้อย่างแพร่หลายในทางวิทยาศาสตร์ วิศวกรรมศาสตร์ เศรษฐศาสตร์ การแพทย์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงความหมายของอนุพันธ์ของฟังก์ชัน และกระบวนการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันในแต่ละวิธี

ความหมายอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

อนุพันธ์ของฟังก์ชัน หมายถึง อัตราส่วนระหว่างผลต่างของตัวแปรตามต่อผลต่างที่น้อยที่สุดของตัวแปรอิสระ หรือผลที่ตัวแปรอิสระเปลี่ยนไปมีค่าเป็นกี่เท่าของตัวแปรอิสระที่เปลี่ยนไปโดยการเปลี่ยนไปของตัวแปรอิสระมีค่าน้อยที่สุด

พิจารณา $y = f(x)$ จากฟังก์ชันเราจะเรียกตัวแปร x ว่าตัวแปรอิสระ และตัวแปร y ว่าตัวแปรตาม ถ้าตัวแปรอิสระ x เป็นเปลี่ยนแปลงไป $x+\vartriangle x$ โดยที่ $\vartriangle x$ จะเป็นค่าบวกหรือลบก็ได้ แล้วตัวแปรตาม y จะเปลี่ยนแปลงไปเป็น $y+\vartriangle y$ ตามไปด้วย

$$y+\vartriangle y = f\left(x+\vartriangle x\right)$$

ซึ่งเราอาจกล่าวได้ว่า $\vartriangle x$ คือสิ่งที่ทำให้ตัวแปรอิสระที่เปลี่ยนแปลงไป และ $\vartriangle y$ คือผลของการเปลี่ยนแปลงฟังก์ชัน ซึ่งจะอยู่ในรูป

$$\vartriangle y = f\left(x+\vartriangle x\right)-y$$
$$\vartriangle y = f\left(x+\vartriangle x\right)-f(x)$$

จากสมการข้างต้น จะพบว่าผลการเปลี่ยนแปลงฟังก์ชัน $\vartriangle y$ คือผลต่างของค่าฟังก์ชันที่เปลี่ยนแปลงไปกับค่าฟังก์ชันเดิม และเมื่อทำการหารสมการด้วย $\vartriangle x$ จะได้ว่า

$$\frac{\vartriangle y}{\vartriangle x} = \frac{f\left(x+\vartriangle x\right)-f(x)}{\vartriangle x}$$

โดยเราจะเรียกว่า $\dfrac{\vartriangle y}{\vartriangle x}$ ว่า **อัตราการเปลี่ยนแปลง (Rate of Change)**

จากการความหมายของอนุพันธ์ที่กล่าวเป็นข้างต้น คือ อัตราส่วนระหว่างผลต่างของตัวแปรตามต่อผลต่างที่น้อยที่สุดของตัวแปรอิสระ นั่นคือ $\vartriangle x$ มีค่าน้อยที่สุด หรือกล่าวได้ $\vartriangle x$ มีค่าเข้าใกล้ศูนย์ $(\vartriangle x \to 0)$ ดังนั้นเรา สามารถนิยามอนุพันธ์ของฟังก์ชันได้โดย

$$\lim_{\vartriangle x\to 0}\frac{\vartriangle y}{\vartriangle x} = \lim_{\vartriangle x\to 0}\frac{f\left(x+\vartriangle x\right)-f(x)}{\vartriangle x}$$

บทนิยามที่ 2.1 ให้ f เป็นฟังก์ชันที่มี x เป็นตัวแปรอิสระและ y เป็นตัวแปรตาม เรากล่าวว่า f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ x ใด ๆ ก็ต่อเมื่อ

$$\lim_{\triangle x \to 0} \frac{f\left(x+\triangle x\right)-f(x)}{\triangle x} \quad \text{หาค่าได้}$$

สัญลักษณ์ของอนุพันธ์

การเขียนอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $y = f(x)$ เทียบกับ x มีหลายแบบ นอกจาก $f'(x)$ แล้วยังมีสัญลักษณ์อื่น ดังนี้

y' อ่านว่า วายไพรม์

$\frac{dy}{dx}$ อ่านว่า ดีวายบายดีเอ็กซ์ (ไม่ใช่ d คูณ y หารด้วย d คูณ x)

$\frac{df}{dx}$ อ่านว่า ดีเอฟบายดีเอ็กซ์

$\frac{d}{dx}f(x)$ อ่านว่า ดีบายดีเอ็กซ์ของ $f(x)$

นอกจากนี้เรายังนิยามอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่ $x = a$ อาจเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$f'(a) \quad , \quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} , \quad \left.\frac{d}{dx}f(x)\right|_{x=a}$$

เราเรียกสัญลักษณ์ $\Big|_{x=a}$ ว่า สัญลักษณ์การคำนวณค่า (Evaluating Symbol) ซึ่งเราคำนวณนิพจน์โดยแทน $x = a$

โดยอาศัยบทนิยามข้างต้นจะได้ว่า

$$f'(a) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f\left(a+\triangle x\right)-f(a)}{\triangle x}$$

ตัวอย่างที่ 1 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x) = x^2 - 9x$

วิธีทำ จาก $f(x) = x^2 - 9x$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left[(x+\Delta x)^2 - 9(x+\Delta x)\right] - \left[x^2 - 9x\right]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x \frac{\left[x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - 9x - 9\Delta x\right] - \left[x^2 - 9x\right]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - 9x - 9\Delta x - x^2 + 9x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2 - 9\Delta x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(2x + \Delta x - 9)\Delta x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x - 9)$$

$$= 2x + 0 - 9$$

$$= 2x - 9$$

ดังนั้น อนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x) = x^2 - 9x$ คือ $2x - 9$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x) = 3x^2 + 2x - 5$

ก. ที่จุด x ใด ๆ

ข. ที่จุด $x = 1$

วิธีทำ ก. หาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่ จุด x ใด ๆ จาก $f(x) = 3x^2 + 2x - 5$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left[3(x+\Delta x)^2 + 2(x+\Delta x) - 5\right] - \left[3x^2 + 2x - 5\right]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x \frac{\left[3\left(x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2\right) + 2x + 2\Delta x - 5\right] - \left[3x^2 + 2x - 5\right]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x^2 + 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2 + 2x + 2\Delta x - 5 - 3x^2 - 2x + 5}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{6x\Delta x + 3(\Delta x)^2 + 2\Delta x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(6x+3\Delta x+2)\Delta x}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} (6x+3\Delta x+2)$$
$$= 6x+0+2$$
$$= 6x+2$$

ดังนั้น อนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x) = 3x^2+2x-5$ คือ $6x+2$

ข. หาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน ที่จุด $x = 1$ จาก $f(x) = 3x^2+2x-5$

จาก $f'(x) = 6x+2$

จะได้ว่า $f'(1) = 6(1)+2 = 8$

ดังนั้น อนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x) = 3x^2+2x-5$ ที่จุด $x = 1$ คือ 8

ตัวอย่างที่ 3 กำหนดฟังก์ชัน $f(x) = \begin{cases} 3x-1 & , \; x \le 1 \\ x^3+1 & , \; x > 1 \end{cases}$ จงหาค่า $f'(x)$

วิธีทำ เราจะแยกพิจารณาเป็น 3 กรณีดังต่อไปนี้

กรณีที่ 1 $x<1$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[3(x+\Delta x)-1]-[3x-1]}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[3x+3\Delta x-1]-[3x-1]}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x+3\Delta x-1-3x+1}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3\Delta x}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} 3$$
$$= 3$$

ดังนั้น $f'(x) = 3$

กรณีที่ 2 $x>1$

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x+\triangle x) - f(x)}{\triangle x} \\
&= \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\left[(x+\triangle x)^3 + 1\right] - \left[x^3 + 1\right]}{\triangle x} \\
&= \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\left[x^3 + 3x^2 \triangle x + 3x(\triangle x)^2 + (\triangle x)^3 + 1\right] - \left[x^3 + 1\right]}{\triangle x} \\
&= \lim_{\triangle x \to 0} \frac{x^3 + 3x^2 \triangle x + 3x(\triangle x)^2 + (\triangle x)^3 + 1 - x^3 - 1}{\triangle x}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{\triangle x \to 0} \frac{3x^2 \triangle x + 3x(\triangle x)^2 + (\triangle x)^3}{\triangle x} \\
&= \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\left[3x^2 + 3x\triangle x + (\triangle x)^2\right]\triangle x}{\triangle x} \\
&= \lim_{\triangle x \to 0} 3x^2 + 3x\triangle x + (\triangle x)^2 \\
&= 3x^2
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $f'(x) = 3x^2$

กรณีที่ 3 $x = 1$

เนื่องจาก $x = 1$ ค่าทางซ้ายและทางขวาของฟังก์ชันต่างกัน ดังนั้นเราจึงต้องพิจารณาอนุพันธ์ด้านซ้ายและอนุพันธ์ด้านขวาดังต่อไปนี้

$$f'(1^+) = \lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$
$$= \lim_{x\to1^+}\frac{\left[x^3+1\right]-\left[3(1)-1\right]}{x-1}$$
$$= \lim_{x\to1^+}\frac{x^3+1-2}{x-1}$$
$$= \lim_{x\to1^+}\frac{x^3-1}{x-1} = \lim_{x\to1^+}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}$$
$$= \lim_{x\to1^+}(x^2+x+1) = 3$$
$$f'(1^-) = \lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$
$$= \lim_{x\to1^-}\frac{\left[3x-1\right]-\left[3(1)-1\right]}{x-1}$$
$$= \lim_{x\to1^-}\frac{3x-1-2}{x-1}$$
$$= \lim_{x\to1^-}\frac{3x-3}{x-1}$$
$$= \lim_{x\to1^-}\frac{3(x-1)}{x-1}$$
$$= \lim_{x\to1^-}3$$
$$= 3$$

ดังนั้น จากทั้งสามกรณีสรุปได้ว่า $f'(x) = \begin{cases} 3 & , \quad x \le 1 \\ 3x^2 & , \quad x > 1 \end{cases}$

การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิต

จากหัวข้อที่ผ่านมา แสดงให้เห็นว่าเราสามารถหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้บทนิยาม แต่ค่อนข้างจะยุ่งยากและซับซ้อน ซึ่งในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิต โดยใช้ทฤษฎีอนุพันธ์

ทฤษฎีบทที่ 2.1 ให้ $f(x) = c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว จะได้ว่า $\frac{d}{dx}f(x) = 0$

ตัวอย่างที่ 4 ถ้า $y = 5$ จงหาค่า $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ $y = 5$

ดังนั้น $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(5) = 0$

ทฤษฎีบทที่ 2.2 ให้ $f(x) = x$ จะได้ว่า $\frac{d}{dx}f(x) = 1$

ตัวอย่างที่ 5 ถ้า $y = 8x$ จงหาค่า $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ $y = 8x$

ดังนั้น $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(8x) = 8\frac{d}{dx}(x) = 8$

ตัวอย่างที่ 6 ถ้า $y = -15x$ จงหาค่า $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ $y = -15x$

ดังนั้น $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(-15x) = -15\frac{d}{dx}(x) = -15$

ทฤษฎีบทที่ 2.3 ให้ $f(x) = x^n$ เมื่อ n เป็นจำนวนจริงแล้ว
จะได้ว่า $\frac{d}{dx}f(x) = nx^{n-1}$

ตัวอย่างที่ 7 ถ้า $y = 2x^6$ จงหาค่า $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ $y = 2x^6$

ดังนั้น $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(2x^6) = 12x^{6-1}\frac{dx}{dx} = 12x^5\frac{dx}{dx} = 12x^5$

ตัวอย่างที่ 8 ถ้า $y = -5x^{10}$ จงหาค่า $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ $y = -5x^{10}$

ดังนั้น $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(-5x^{10}) = -50x^{10-1}\frac{dx}{dx} = -50x^9$

ทฤษฎีบทที่ 2.4 ให้ $u = f(x)$ และ $v = g(x)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ x จะได้ว่า $\frac{d}{dx}(u+v) = \frac{d}{dx}(u)+\frac{d}{dx}(v)$

ทฤษฎีบทที่ 2.5 ให้ $u = f(x)$ และ $v = g(x)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ x จะได้ว่า $\frac{d}{dx}(u-v) = \frac{d}{dx}(u)-\frac{d}{dx}(v)$

ทฤษฎีบทที่ 2.6 ให้ c เป็นค่าคงตัว และ $f(x)$ หาอนุพันธ์ได้ที่ x และสมมติให้ $u = f(x)$ จะได้ว่า $\frac{d}{dx}(cu) = c\frac{d}{dx}(u)$

ตัวอย่างที่ 9 ถ้า $y = x^4-2x^3+11x$ จงหาค่า $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ จาก $y = x^4-2x^3+11x$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(x^4-2x^3+11x)\\ &= \frac{d}{dx}(x^4)-2\frac{d}{dx}(x^3)+11\frac{dx}{dx}\\ &= 4\left(x^{4-1}\frac{dx}{dx}\right)-2\left((3)x^{3-1}\frac{dx}{dx}\right)+11\\ &= 4x^3-6x^2+11\end{aligned}$$

ดังนั้น $\frac{dy}{dx} = 4x^3-6x^2+11$

ตัวอย่างที่ 10 ถ้า $y = 2x^5 + x^4 - 8x^2 - 12$ จงหาค่า $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ จาก $y = 2x^5 + x^4 - 8x^2 - 12$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(2x^5 + x^4 - 8x^2 - 12)\\ &= 2\frac{d}{dx}(x^5) + \frac{d}{dx}(x^4) - 8\frac{d}{dx}(x^2) - \frac{d}{dx}(12)\\ &= 2(5)x^{5-1} + 4x^{4-1} - 8(2)x^{2-1} - 0\\ &= 10x^4 + 4x^3 - 16x\end{aligned}$$

ดังนั้น $\frac{dy}{dx} = 10x^4 + 4x^3 - 16x$

ตัวอย่างที่ 11 ถ้า $y = x^{\frac{3}{2}} - 5x^{\frac{1}{2}} + 2x^{-\frac{1}{3}}$ จงหาค่า $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ จาก $y = x^{\frac{3}{2}} - 5x^{\frac{1}{2}} + 2x^{-\frac{1}{3}}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^{\frac{3}{2}} - 5x^{\frac{1}{2}} + 2x^{-\frac{1}{3}})$$

$$= \frac{d}{dx}(x^{\frac{3}{2}}) - 5\frac{d}{dx}(x^{\frac{1}{2}}) + 2\frac{d}{dx}(x^{-\frac{1}{3}})$$

$$= \left(\frac{3}{2}\right)x^{\frac{3}{2}-1} - 5\left(\frac{1}{2}\right)x^{\frac{1}{2}-1} + 2\left(-\frac{1}{3}\right)x^{-\frac{1}{3}-1}$$

$$= \left(\frac{3}{2}\right)\frac{x^{\frac{1}{2}}}{1/2} - 5\left(\frac{1}{2}\right)\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-1/2} + 2\left(-\frac{1}{3}\right)\frac{x^{-\frac{4}{3}}}{-4/3}$$

$$= 3x^{\frac{1}{2}} + 5x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{4}{3}}$$

ดังนั้น $\frac{dy}{dx} = 3x^{\frac{1}{2}} + 5x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{4}{3}}$ หรือ $3\sqrt{x} + \frac{5}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{4}{3}}$

ตัวอย่างที่ 12 ถ้า $y = \sqrt{2x} - 9\sqrt{x}$ จงหาค่า $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ จาก $y = \sqrt{2x} - 9\sqrt{x}$ หรือ $y = (2x)^{\frac{1}{2}} - 9x^{\frac{1}{2}}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left((2x)^{\frac{1}{2}} - 9x^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$= \frac{d}{dx}(2x)^{\frac{1}{2}} - 9\frac{d}{dx}(x^{\frac{1}{2}})$$

$$= \frac{1}{2}(2x)^{\frac{1}{2}-1}\frac{d}{dx}(2x) - 9\left(\frac{1}{2}\right)x^{\frac{1}{2}-1}$$

$$= \frac{1}{2}(2x)^{\frac{1}{2}-1}(2)\frac{dx}{dx} - \frac{9}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$= (2x)^{-\frac{1}{2}} - \frac{9}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2x}} - \frac{9}{2\sqrt{x}}$$

ดังนั้น $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2x}} - \frac{9}{2\sqrt{x}}$

ทฤษฎีบทที่ 2.7 ให้ u เป็นฟังก์ชันของ x ถ้า $f(x) = u^n$ เมื่อ n เป็นจำนวนจริง จะได้ว่า $\frac{d}{dx}\left(u^n\right) = nu^{n-1}\frac{d}{dx}(u)$

ตัวอย่างที่ 13 ถ้า $y = (x-9)^5$ จงหาค่า $\dfrac{dy}{dx}$

วิธีทำ จาก $y = (x-9)^5$

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(x-9)^5 \\
&= 5(x-9)^4\frac{d}{dx}(x-9) \\
&= 5(x-9)^4\left[\frac{dx}{dx}-\frac{d}{dx}(9)\right] \\
&= 5(x-9)^4(1-0) \\
&= 5(x-9)^4
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\dfrac{dy}{dx} = 5(x-9)^4$

ตัวอย่างที่ 14 ถ้า $y = (2x^2+9x-7)^5$ จงหาค่า $\dfrac{dy}{dx}$

วิธีทำ จาก $y = (2x^2+9x-7)^5$

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(2x^2+9x-7)^5 \\
&= 5(2x^2+9x-7)^4\frac{d}{dx}(2x^2+9x-7) \\
&= 5(2x^2+9x-7)^4\left[2\frac{d}{dx}x^2+9\frac{dx}{dx}-\frac{d}{dx}(7)\right] \\
&= 5(2x^2+9x-7)^4\left[2(2x)+9(1)-0\right] \\
&= 5(2x^2+9x-7)^4(4x+9)
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\dfrac{dy}{dx} = 5(2x^2+9x-7)^4(4x+9)$

ตัวอย่างที่ 15 ถ้า $y = \sqrt{3+5x+4x^3}$ จงหาค่า $\dfrac{dy}{dx}$

วิธีทำ จาก $y = \sqrt{3+5x+4x^3}$ หรือ $y = \left(3+5x+4x^3\right)^{\frac{1}{2}}$

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}\left(3+5x+4x^3\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{2}\left(3+5x+4x^3\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{d}{dx}\left(3+5x+4x^3\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(3+5x+4x^3\right)^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{d}{dx}(3)+5\frac{dx}{dx}+4\frac{d}{dx}(x^3)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left(3+5x+4x^3\right)^{-\frac{1}{2}} \left[0+5(1)+4(3)x^2\right] \\
&= \frac{1}{2}\left(3+5x+4x^3\right)^{-\frac{1}{2}} (5+12x^2) \\
&= \frac{1}{2}(5+12x^2)\left(3+5x+4x^3\right)^{-\frac{1}{2}} \\
&= \frac{(5+12x^2)}{2}\left(3+5x+4x^3\right)^{-\frac{1}{2}} \\
&= \frac{(5+12x^2)}{2\left(3+5x+4x^3\right)^{\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{(5+12x^2)}{2\sqrt{3+5x+4x^3}}
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(5+12x^2)}{2\sqrt{3+5x+4x^3}}$

> **ทฤษฎีบทที่ 2.8** ให้ $u = f(x)$ และ $v = g(x)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ x จะได้ว่า $\dfrac{d}{dx}(uv) = u\dfrac{d}{dx}(v) + v\dfrac{d}{dx}(u)$

ตัวอย่างที่ 16 ถ้า $y = (6x)(9x^2+2)$ จงหาค่า $\dfrac{dy}{dx}$

วิธีทำ จาก $y = (6x)(9x^2+2)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(6x)(9x^2+2)$$

$$= (6x)\frac{d}{dx}(9x^2+2)+(9x^2+2)\frac{d}{dx}(6x)$$

$$= (6x)\left[9\frac{d}{dx}x^2+\frac{d2}{dx}\right]+(9x^2+2)\left[6\frac{dx}{dx}\right]$$

$$= (6x)(18x)+(9x^2+2)(6)$$

$$= 108x^2+54x^2+12$$

ดังนั้น $\frac{dy}{dx} = 108x^2+54x^2+12$

ตัวอย่างที่ 17 ถ้า $y = (2x^2+1)(3x+6)$ จงหาค่า $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ จาก $y = (2x^2+1)(3x+6)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(2x^2+1)(3x+6)$$

$$= (2x^2+1)\frac{d}{dx}(3x+6)+(3x+6)\frac{d}{dx}(2x^2+1)$$

$$= (2x^2+1)\left[3\frac{dx}{dx}+\frac{d6}{dx}\right]+(3x+6)\left[2\frac{d}{dx}x^2+\frac{d1}{dx}\right]$$

$$= (2x^2+1)(3+0)+(3x+6)(4x+0)$$

$$= (2x^2+1)(3)+(3x+6)(4x)$$

$$= 6x^2+3+12x^2+24x$$

$$= 18x^2+24x+3$$

ดังนั้น $\frac{dy}{dx} = 18x^2+24x+3$

ตัวอย่างที่ 18 ถ้า $y = (5x-3)(2x^4-11)$ จงหาค่า $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ จาก $y = (5x-3)(2x^4-11)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(5x-3)(2x^4-11x)$$
$$= (5x-3)\frac{d}{dx}(2x^4-11x)+(2x^4-11x)\frac{d}{dx}(5x-3)$$
$$= (5x-3)\left[2\frac{d}{dx}x^4-11\frac{dx}{dx}\right]+(2x^4-11x)\left[5\frac{dx}{dx}-\frac{d3}{dx}\right]$$
$$= (5x-3)(8x^3-11)+(2x^4-11x)(5)$$
$$= (40x^4-55x-24x^3+33)+(10x^4-55x)$$
$$= 50x^4-24x^3-110x+33$$

ดังนั้น $\frac{dy}{dx} = 50x^4-24x^3-110x+33$

ตัวอย่างที่ 19 ถ้า $y = (x^2-3)^3(2x^2+7)^2$ จงหาค่า $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ จาก $y = (x^2-3)^3(2x^2+7)^2$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2-3)^3(2x^2+7)^2$$
$$= (x^2-3)^3\frac{d}{dx}(2x^2+7)^2+(2x^2+7)^2\frac{d}{dx}(x^2-3)^3$$
$$= (x^2-3)^3 2(2x^2+7)\frac{d}{dx}\left[2x^2+7\right]+(2x^2+7)^2 3(x^2-3)^2\frac{d}{dx}\left[x^2-3\right]$$
$$= (x^2-3)^3 2(2x^2+7)(4x)+(2x^2+7)^2 3(x^2-3)^2(2x)$$
$$= 8x(x^2-3)^3(2x^2+7)+6x(2x^2+7)^2(x^2-3)^2$$
$$= x(x^2-3)^2(2x^2+7)\left[8(x^2-3)+6(2x^2+7)\right]$$

ดังนั้น $\frac{dy}{dx} = x(x^2-3)^2(2x^2+7)\left[8(x^2-3)+6(2x^2+7)\right]$

ทฤษฎีบทที่ 2.9 ให้ $u = f(x)$ และ $v = g(x)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ x จะได้ว่า

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{d}{dx}(u)-u\frac{d}{dx}(v)}{v^2}$$

ตัวอย่างที่ 20 ถ้า $y = \dfrac{x^4 - 6x}{5x^2 + 3}$ จงหาค่า $\dfrac{dy}{dx}$

วิธีทำ จาก $y = \dfrac{x^4 - 6x}{5x^2 + 3}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^4 - 6x}{5x^2 + 3}\right)$$

$$= \frac{(5x^2+3)\frac{d}{dx}\left(x^4-6x\right) - (x^4-6x)\frac{d}{dx}\left(5x^2+3\right)}{(5x^2+3)^2}$$

$$= \frac{(5x^2+3)\frac{d}{dx}\left(x^4-6x\right) - (x^4-6x)\frac{d}{dx}\left(5x^2+3\right)}{(5x^2+3)^2}$$

$$= \frac{(5x^2+3)(4x^3-6) - (x^4-6x)(10x)}{(5x^2+3)^2}$$

$$= \frac{(20x^5 - 30x^2 + 12x^3 - 18) - (10x^5 - 60x^2)}{(5x^2+3)^2}$$

$$= \frac{10x^5 + 12x^3 - 90x^2 - 18}{(5x^2+3)^2}$$

ดังนั้น $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{10x^5 + 12x^3 - 90x^2 - 18}{(5x^2+3)^2}$

ตัวอย่างที่ 21 ถ้า $y = \dfrac{x-1}{x-3x^5}$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

วิธีทำ จาก $y = \dfrac{x-1}{x-3x^5}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x-1}{x-3x^5}\right)$$

$$= \frac{\left(x-3x^5\right)\frac{d}{dx}\left(x-1\right) - \left(x-1\right)\frac{d}{dx}\left(x-3x^5\right)}{\left(x-3x^5\right)^2}$$

$$= \frac{\left(x-3x^5\right)\left(1\right) - \left(x-1\right)\left(1-15x^4\right)}{\left(x-3x^5\right)^2}$$

$$= \frac{\left(x-3x^5\right) - \left(x-15x^5-1+15x^4\right)}{\left(x-3x^5\right)^2}$$

$$= \frac{12x^5 - 15x^4 + 1}{\left(x-3x^5\right)^2}$$

ดังนั้น $\quad \dfrac{dy}{dx} \;=\; \dfrac{12x^5-15x^4+1}{(x-3x^5)^2}$

ตัวอย่างที่ 22 ถ้า $y \;=\; \dfrac{3x-5}{x^2+2}$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

วิธีทำ จาก $\quad y \;=\; \dfrac{3x-5}{x^2+2}$

$$\frac{dy}{dx} \;=\; \frac{d}{dx}\left(\frac{3x-5}{x^2+2}\right)$$

$$=\; \frac{(x^2+2)\frac{d}{dx}(3x\ \ 5)-(3x\ \ 5)\frac{d}{dx}(x^2+2)}{(x^2+2)^2}$$

$$=\; \frac{(x^2+2)(3)-(3x\ \ 5)(2x)}{(x^2+2)^2}$$

$$=\; \frac{(3x^2+6)-(6x^2-10x)}{(x^2+2)^2}$$

$$=\; \frac{-3x^2+10x-6}{(x^2+2)^2}$$

$$=\; \frac{1}{(x^2+2)^2}\left(-3x^2+10x-6\right)$$

ดังนั้น $\quad \dfrac{dy}{dx} \;=\; \dfrac{1}{(x^2+2)^2}\left(-3x^2+10x-6\right)$

ตัวอย่างที่ 23 ถ้า $y \;=\; \dfrac{3x^2+4x+6}{x^4+8x+2}$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

วิธีทำ จาก $\quad y \;=\; \dfrac{3x^2+4x+6}{x^4+8x+2}$

$$\frac{dy}{dx} \;=\; \frac{d}{dx}\left(\frac{3x^2+4x+6}{x^4+8x+2}\right)$$

$$=\; \frac{(x^4+8x+2)\frac{d}{dx}(3x^2+4x+6)-(3x^2+4x+6)\frac{d}{dx}(x^4+8x+2)}{(x^4+8x+2)^2}$$

$$=\; \frac{(x^4+8x+2)(6x+4)-(3x^2+4x+6)(4x^3+8)}{(x^4+8x+2)^2}$$

ดังนั้น $\quad \dfrac{dy}{dx} \;=\; \dfrac{(x^4+8x+2)(6x+4)-(3x^2+4x+6)(4x^3+8)}{(x^4+8x+2)^2}$

ตัวอย่างที่ 24 ถ้า $y = \left(\frac{4x^2 - x}{5x^3 - 2}\right)^{12}$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ จาก $y = \left(\frac{4x^2 - x}{5x^3 - 2}\right)^{12}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{4x^2 - x}{5x^3 - 2}\right)^{12}$$

$$= 12\left(\frac{4x^2 - x}{5x^3 - 2}\right)^{11} \frac{d}{dx}\left(\frac{4x^2 - x}{5x^3 - 2}\right)$$

$$= 12\left(\frac{4x^2 - x}{5x^3 - 2}\right)^{11} \frac{\left[(5x^3 - 2)\frac{d}{dx}(4x^2 - x) - (4x^2 - x)\frac{d}{dx}(5x^3 - 2)\right]}{(5x^3 - 2)^2}$$

$$= 12\left(\frac{4x^2 - x}{5x^3 - 2}\right)^{11} \frac{(2 - 16x + 10x^3 - 20x^4)}{(5x^3 - 2)^2}$$

ดังนั้น $\frac{dy}{dx} = 12\left(\frac{4x^2 - x}{5x^3 - 2}\right)^{11} \frac{(2 - 16x + 10x^3 - 20x^4)}{(5x^3 - 2)^2}$

ในหัวข้อที่ผ่านมา ได้กล่าวถึงการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิต แต่ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันอดิศัยบางฟังก์ชัน เช่น ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ฟังก์ชันตีโกณมิติผกผัน ฟังก์ชันลอการิทึม ฟังก์ชันชี้กำลัง และฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิก

การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ฟังก์ชันตรีโกณมิติที่เรารู้จักกันดี ก็มี ฟังก์ชัน sine, cosine, tangent, secant, cosecant และ cotangent ซึ่งในหัวข้อนี้เราจะหาสูตรต่าง ๆ ของอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติเหล่านี้ แต่จะเว้นการพิสูจน์ทฤษฎีบทต่าง ๆ ดังจะกล่าวต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 2.10 ให้ $f(x) = \sin x$ แล้ว $\frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx}\sin x = \cos x$

ทฤษฎีบทที่ 2.11 ให้ $f(u) = \sin u$ แล้ว $\frac{d}{dx} f(u) = \frac{d}{dx}\sin u = \cos u \frac{du}{dx}$

ตัวอย่างที่ 25 กำหนดให้ $y = \sin(5x+8)$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ จาก $y = \sin(5x+8)$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}\sin(5x+8) \\ &= \cos(5x+8)\frac{d}{dx}(5x+8) \\ &= \cos(5x+8)(5) \\ &= 5\cos(5x+8)\end{aligned}$$

ดังนั้น $\frac{dy}{dx} = 5\cos(5x+8)$

ตัวอย่างที่ 26 กำหนดให้ $y = \sin(1-3x)+\sin(2x^2-5)$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ จาก $y = \sin(1-3x)+\sin(2x^2-5)$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}\left[\sin(1-3x)+\sin(2x^2-5)\right] \\ &= \frac{d}{dx}\sin(1-3x)+\frac{d}{dx}\sin(2x^2-5) \\ &= \cos(1-3x)\frac{d}{dx}(1-3x)+\cos(2x^2-5)\frac{d}{dx}(2x^2-5) \\ &= \cos(1-3x)(-3)+\cos(2x^2-5)(4x) \\ &= -3\cos(1-3x)+4x\cos(2x^2-5)\end{aligned}$$

ดังนั้น $\frac{dy}{dx} = -3\cos(1-3x)+4x\cos(2x^2-5)$

ทฤษฎีบทที่ 2.13 ให้ $f(x) = \cos x$ แล้ว $\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$

ทฤษฎีบทที่ 2.14 ให้ $f(u) = \cos u$ แล้ว $\frac{d}{dx}f(u) = \frac{d}{dx}\cos u = -\sin u\frac{du}{dx}$

ตัวอย่างที่ 27 กำหนดให้ $y = \cos(x^3-8x)$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

วิธีทำ จาก $y = \cos(x^3-8x)$

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}\cos(x^3-8x) \\
&= -\sin(x^3-8x)\frac{d}{dx}(x^3-8x) \\
&= -\sin(x^3-8x)(3x^2-8) \\
&= -(3x^2-8)\sin(x^3-8x)
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\dfrac{dy}{dx} = -(3x^2-8)\sin(x^3-8x)$

ตัวอย่างที่ 28 กำหนดให้ $y = \dfrac{\sin^2 x}{1-\cos 2x}$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

วิธีทำ จาก $y = \dfrac{\sin^2 x}{1-\cos 2x}$

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}\left[\frac{\sin^2 x}{1-\cos 2x}\right] \\
&= \frac{(1-\cos 2x)\frac{d}{dx}\sin^2 x-\sin^2 x\frac{d}{dx}(1-\cos 2x)}{(1-\cos 2x)^2} \\
&= \frac{(1-\cos 2x)\left(2\sin x\frac{d}{dx}\sin x\right)-\sin^2 x\left(\sin 2x\frac{d}{dx}2x\right)}{(1-\cos 2x)^2} \\
&= \frac{(1-\cos 2x)(2\sin x\cos x)-\sin^2 x(4\sin 2x)}{(1-\cos 2x)^2} \\
&= \frac{(\sin 2x)(1-\cos 2x)-(4\sin 2x)\sin^2 x}{(1-\cos 2x)^2}
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(\sin 2x)(1-\cos 2x)-(4\sin 2x)\sin^2 x}{(1-\cos 2x)^2}$

ตัวอย่างที่ 29 กำหนดให้ $y = \sqrt{\sin x\cos(3x-7)}$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

วิธีทำ จาก $y = \sqrt{\sin x\cos(3x-7)}$ จะได้ว่า $y = \left(\sin x\cos(3x-7)\right)^{\frac{1}{2}}$

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}\left(\sin x\cos(3x-7)\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{2}\left(\sin x\cos(3x-7)\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}\sin x\cos(3x-7) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\sin x\cos(3x-7)}}\left[\sin x\frac{d}{dx}\cos(3x-7)+\cos(3x-7)\frac{d}{dx}\sin x\right] \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\sin x\cos(3x-7)}}\left[\sin x\left(-3\sin(3x-7)\right)+\cos(3x-7)\cos x\right] \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\sin x\cos(3x-7)}}\left[-3\sin x\sin(3x-7)+\cos(3x-7)\cos x\right] \\
&= \frac{\cos x\cos(3x-7)-3\sin x\sin(3x-7)}{2\sqrt{\sin x\cos(3x-7)}}
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\cos x\cos(3x-7)-3\sin x\sin(3x-7)}{2\sqrt{\sin x\cos(3x-7)}}$

สูตรอนุพันธ์ของ $\tan x$, $\cot x$, $\sec x$ และ $\operatorname{cosec} x$ หาได้โดยเขียนฟังก์ชันตรีโกณเหล่านี้ในรูปของ $\sin x$ และ $\cos x$ ดังแสดงในตัวอย่างจะได้

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\tan x &= \sec^2 x \\
\frac{d}{dx}\sec x &= \sec x\tan x \\
\frac{d}{dx}\cot x &= -\operatorname{cosec}^2 x \\
\frac{d}{dx}\operatorname{cosec} x &= -\operatorname{cosec} x\cot x
\end{aligned}$$

สรุปสูตรอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกนมิติได้ดังนี้ กำหนดให้ $u = f(x)$ เป็นฟังก์ชันของ x ซึ่งหาอนุพันธ์ได้

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\sin u &= \cos u\,\frac{du}{dx} & \qquad \frac{d}{dx}\cos u &= -\sin u\,\frac{du}{dx} \\
\frac{d}{dx}\tan u &= \sec^2 u\,\frac{du}{dx} & \qquad \frac{d}{dx}\sec u &= \sec u\tan u\,\frac{du}{dx} \\
\frac{d}{dx}\cot u &= -\operatorname{cosec}^2 u\,\frac{du}{dx} & \qquad \frac{d}{dx}\operatorname{cosec} u &= -\operatorname{cosec} u\,\cot u\,\frac{du}{dx}
\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 30 กำหนดให้ $y = \cot(2-3x^2)$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ จาก $y = \cot(2-3x^2)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\cot(2-3x^2)$$
$$= -\csc^2(2-3x^2)\frac{d}{dx}(2-3x^2)$$
$$= -\csc^2(2-3x^2)(-6x)$$
$$= 6x\csc^2(2-3x^2)$$

ดังนั้น $\frac{dy}{dx} = 6x\csc^2(2-3x^2)$

ตัวอย่างที่ 31 กำหนดให้ $y = \sqrt{2-3\tan^2 x}$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ จาก $y = \sqrt{2-3\tan^2 x}$ จะได้ว่า $y = \left(2-3\tan^2 x\right)^{\frac{1}{2}}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(2-3\tan^2 x\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{1}{2}\left(2-3\tan^2 x\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}\left(2-3\tan^2 x\right)$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{2-3\tan^2 x}}\left(-3(2)\tan x(\sec^2 x)\right)$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{2-3\tan^2 x}}\left(-6\tan x\sec^2 x\right)$$
$$= \frac{-3\tan x\sec^2 x}{\sqrt{2-3\tan^2 x}}$$

ดังนั้น $\frac{dy}{dx} = \frac{-3\tan x\sec^2 x}{\sqrt{2-3\tan^2 x}}$

ตัวอย่างที่ 32 กำหนดให้ $y = \operatorname{cosec} x + \sin\left(3x^2 - 1\right) + x - 3$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ จาก $y = \operatorname{cosec} x + \sin\left(3x^2 - 1\right) + x - 3$

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}\left[\operatorname{cosec} x + \sin(3x^2 - 1) + x - 3\right] \\
&= \frac{d}{dx}\operatorname{cosec} x + \frac{d}{dx}\sin(3x^2 - 1) + \frac{dx}{dx} - \frac{d3}{dx} \\
&= -\operatorname{cosec}x \cot x + \cos(3x^2 - 1)\frac{d}{dx}(3x^2 - 1) + 1 - 0 \\
&= -\operatorname{cosec}x \cot x + \left(\cos(3x^2 - 1)\right)(6x) + 1 \\
&= -\operatorname{cosec}x \cot x + 6x\cos(3x^2 - 1) + 1
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $$\frac{dy}{dx} = -\operatorname{cosec}x \cot x + 6x\cos(3x^2 - 1) + 1$$

การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน

เนื่องจากฟังก์ชันไซน์เป็นฟังก์ชันจากจำนวนจริงไปบนช่วงปิด $[-1, 1]$ ซึ่งไม่ใช่ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจึงทำให้ฟังก์ชันไซน์ผกผันไม่เป็นฟังก์ชัน แต่ถ้าเราจำกัดโดเมนของฟังก์ชันไซน์ให้อยู่ในช่วงปิด $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ จะทำให้ฟังก์ชันไซน์เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจากช่วงปิด $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ไปบนช่วง $[-1, 1]$ ซึ่งจะทำให้ผกผันของฟังก์ชันไซน์เป็นฟังก์ชันและเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจากช่วงปิด $[-1, 1]$ ไปบนช่วงปิด $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ และเราจะเรียนผกผันของฟังก์ชันไซน์ว่า ฟังก์ชันอาร์คไซน์ และเขียนแทนด้วย arcsin

ดังนั้น จะได้ว่า $y = \arcsin x$ เมื่อ $x \in [-1, 1]$ ก็ต่อเมื่อ $x = \sin y$ เมื่อ $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ และจะหาอนุพันธ์ได้ดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 2.15 ให้ $y = \arcsin x$ เมื่อ $x \in [-1, 1]$ และ $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ จะได้ว่า

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

จากกฎลูกโซ่ ถ้า $u = f(x)$ แล้วจะได้ว่า $\frac{d}{dx}\arcsin u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}$

ในทำนองเดียวกันเราสามารถจำกัดโดเมนของฟังก์ชัน cosine, tangent, cotangent, secant และ cosecant เพื่อทำให้ฟังก์ชันเหล่านี้เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ซึ่งจะทำให้ผกผันของฟังก์ชันเหล่านี้เป็นฟังก์ชัน ซึ่งสรุปได้ดังนี้ คือ

$y = \arccos x$ เมื่อ $x \in [-1, 1]$ ก็ต่อเมื่อ $x = \cos y$ เมื่อ $y \in [0, \pi]$

$y = \arctan x$ เมื่อ $x \in \mathbb{R}$ ก็ต่อเมื่อ $x = \tan y$ เมื่อ $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$y = \operatorname{arccot} x$ เมื่อ $x \in \mathbb{R}$ ก็ต่อเมื่อ $x = \cot y$ เมื่อ $y \in [0, \pi]$

$y = \operatorname{arcsec} x$ เมื่อ $x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ ก็ต่อเมื่อ $x = \sec y$ เมื่อ $y \in [0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$

$y = \operatorname{arccsc} x$ เมื่อ $x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ ก็ต่อเมื่อ $x = \csc y$ เมื่อ $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$

ตัวอย่างที่ 33 กำหนดให้ $y = \arcsin(4x-9)$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ จาก $y = \arcsin(4x-9)$

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}\arcsin(4x-9) \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-(4x-9)^2}}\frac{d}{dx}(4x-9) \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-(4x-9)^2}}(4) \\
&= \frac{4}{\sqrt{1-(4x-9)^2}} \\
&= \frac{4}{\sqrt{1-(16x^2-72x+81)}} = \frac{4}{\sqrt{-16x^2+72x-80}}
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\frac{dy}{dx} = \frac{4}{\sqrt{-16x^2+72x-80}}$

สรุปสูตรอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกนมิติผกผันได้ดังนี้ กำหนดให้ $u = f(x)$ เป็นฟังก์ชันของ x ซึ่งหาอนุพันธ์ได้

$$\frac{d}{dx} arc\sin u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} arc\cos u = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx} \quad ; \quad |u|<1$$

$$\frac{d}{dx} arc\tan u = \frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} arc\sec u = \frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} arc\cot u = \frac{-1}{1+u^2}\frac{du}{dx} \quad ; \quad u \in \mathbb{R}$$

$$\frac{d}{dx} \mathrm{arccsc}\, u = \frac{-1}{|u|\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx} \quad ; \quad |u|>1$$

ตัวอย่างที่ 34 กำหนดให้ $y = \mathrm{arccot}\frac{(1+x)}{(1-x)}$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ จาก $y = \mathrm{arccot}\frac{(1+x)}{(1-x)}$

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}\mathrm{arccot}\frac{(1+x)}{(1-x)} \\
&= \frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2}\frac{d}{dx}\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \\
&= \frac{(1+x)^2}{(1-x)^2+(1+x)^2}\left(\frac{(1-x)-(1+x)(-1)}{(1-x)^2}\right) \\
&= \frac{-2}{2+2x^2} \\
&= -\frac{1}{1+x^2}
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{1+x^2}$

ตัวอย่างที่ 35 กำหนดให้ $y = \arctan\left(\frac{2}{3}\tan x\right)$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ จาก $y = \arctan\left(\frac{2}{3}\tan x\right)$

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}\arctan\left(\frac{2}{3}\tan x\right) \\
&= \frac{1}{1+\left(\frac{2}{3}\tan x\right)^2}\frac{d}{dx}\left(\frac{2}{3}\tan x\right) \\
&= \frac{1}{1+\frac{4}{9}\tan^2 x}\left(\frac{2}{3}\sec^2 x\right) \\
&= \frac{6\sec^2 x}{9+4\tan^2 x}
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\frac{dy}{dx} = \frac{6\sec^2 x}{9+4\tan^2 x}$

การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันลอการิทึมและฟังก์ชันชี้กำลัง

ในการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันลอการิทึมโดยนิยามนั้นจะมี e เข้ามาเกี่ยวข้องด้วย ซึ่ง e เป็นค่าคงตัว และมีค่าประมาณ 2.71828 เป็นค่า $\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}$

นั่นคือ $$e = \lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}$$

เพื่อง่ายในการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันลอการิทึม จึงกล่าวถึงคุณสมบัติที่สำคัญของลอการิทึมดังต่อไปนี้ เมื่อ $a>0$, $a\neq 1$, $b>0$, $b\neq 1$, $M>0$, $N>0$ และ M^n เป็นจำนวนจริง

1. $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$
2. $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$
3. $\log_a M^n = n\log_a M$
4. $\log_a a = 1$
5. $\log_a 1 = 0$
6. $a^{\log_a M} = M$

7. $\log_{a^n} M = \frac{1}{n}\log_a M$ เมื่อ $n \neq 0$

8. $\log_a M = \frac{\log_b M}{\log_b a}$

9. $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

ทฤษฎีบทที่ 2.16 ให้ $f(x) = \ln x$ เมื่อ $x > 0$ แล้ว จะได้ว่า

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$$

ทฤษฎีบทที่ 2.17 ให้ $f(u) = \ln u$ เมื่อ $u > 0$ และ u เป็นฟังก์ชันของ x ที่หาอนุพันธ์ได้ จะได้ว่า

$$\frac{d}{dx} f(u) = \frac{d}{dx}\ln u = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$$

ตัวอย่างที่ 37 กำหนดให้ $f(x) = \ln(3x^2 - 6x + 5)$ จงหา $f'(x)$

วิธีทำ จาก $f(x) = \ln(3x^2 - 6x + 5)$

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}\ln(3x^2 - 6x + 5)$$

$$= \frac{1}{3x^2 - 6x + 5}\frac{d}{dx}\left(3x^2 - 6x + 5\right)$$

$$= \frac{1}{3x^2 - 6x + 5}\left(6x - 6\right)$$

$$= \frac{6x - 6}{3x^2 - 6x + 5}$$

ดังนั้น $f'(x) = \frac{6x - 6}{3x^2 - 6x + 5}$

ตัวอย่างที่ 38 กำหนดให้ $f(x) = \ln\left(\dfrac{x-1}{4x-3}\right)$ จงหา $f'(x)$

วิธีทำ จาก $f(x) = \ln\left(\dfrac{x-1}{4x-3}\right)$ จะได้ $f(x) = \ln(x-1)-\ln(4x-3)$

$$\begin{aligned}
\frac{df}{dx} &= \frac{d}{dx}\left[\ln(x-1)-\ln(4x-3)\right] \\
&= \frac{d}{dx}\ln(x-1)-\frac{d}{dx}\ln(4x-3) \\
&= \frac{1}{x-1}\frac{d}{dx}(x-1)-\frac{1}{4x-3}\frac{d}{dx}(4x-3) \\
&= \frac{1}{x-1}-\frac{4}{4x-3} \\
&= \frac{1(4x-3)-4(x-1)}{(x-1)(4x-3)} \\
&= \frac{4x-3-4x+4}{(x-1)(4x-3)} \\
&= \frac{1}{4x^2-7x+3}
\end{aligned}$$

ดังนั้น $f'(x) = \dfrac{1}{4x^2-7x+3}$

ทฤษฎีบทที่ 2.18 ให้ $f(x) = \log_a x$ เมื่อ $x > 0$ โดยที่ a เป็นจำนวนจริงซึ่ง $a > 0$ และ $a \neq 1$ จะได้ว่า

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}\log_a x = \frac{1}{x\ln a}$$

ทฤษฎีบทที่ 2.19 ให้ $f(u) = \log_a u$ เมื่อ $u > 0$ เมื่อ u เป็นฟังก์ชันของ x ที่หาอนุพันธ์ได้ โดยที่ a เป็นจำนวนจริงซึ่ง $a > 0$ และ $a \neq 1$ จะได้ว่า

$$\frac{d}{dx}f(u) = \frac{d}{dx}\log_a u = \frac{1}{u\ln a}\frac{du}{dx}$$

ตัวอย่างที่ 38 กำหนดให้ $f(x) = \log_3(3x+5)$ จงหา $f'(x)$

วิธีทำ จาก $f(x) = \log_3(3x+5)$

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}\log_3(3x+5)$$
$$= \frac{1}{(3x+5)\ln 3}\frac{d}{dx}(3x+5)$$
$$= \frac{1}{(3x+5)\ln 3}(3)$$
$$= \frac{3}{(3x+5)\ln 3}$$

ดังนั้น $f'(x) = \dfrac{3}{(3x+5)\ln 3}$

ตัวอย่างที่ 39 กำหนดให้ $f(x) = \log\left(x^2-7x+10\right)$ จงหา $f'(x)$

วิธีทำ จาก $f(x) = \log\left(x^2-7x+10\right)$

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}\log\left(x^2-7x+10\right)$$
$$= \frac{1}{(x^2-7x+10)\ln 10}\frac{d}{dx}\left(x^2-7x+10\right)$$
$$= \frac{1}{(x^2-7x+10)\ln 10}(2x-7)$$
$$= \frac{2x-7}{(x^2-7x+10)\ln 10}$$

ดังนั้น $f'(x) = \dfrac{2x-7}{(x^2-7x+10)\ln 10}$

ทฤษฎีบทที่ 2.20 ให้ $f(u) = e^u$ เมื่อ $u>0$ เมื่อ u เป็นฟังก์ชันของ x ที่หาอนุพันธ์ได้ จะได้ว่า

$$\frac{d}{dx}f(u) = \frac{d}{dx}e^u = e^u\frac{du}{dx}$$

ทฤษฎีบทที่ 2.21 ให้ $f(u) = a^u$ เมื่อ $u>0$ เมื่อ u เป็นฟังก์ชันของ x ที่หาอนุพันธ์ได้ โดยที่ a เป็นจำนวนจริงซึ่ง $a>0$ และ $a \neq 1$ จะได้ว่า

$$\frac{d}{dx}f(u) = \frac{d}{dx}a^u = a^u\ln a\frac{du}{dx}$$

ตัวอย่างที่ 40 กำหนดให้ $f(x) = e^{x^3} + 3e^{-\frac{x}{4}} - 5e^{2x}$ จงหา $f'(x)$

วิธีทำ จาก $f(x) = e^{x^3} + 3e^{-\frac{x}{4}} - 5e^{2x}$

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}\left(e^{x^3} + 3e^{-\frac{x}{4}} - 5e^{2x}\right)$$

$$= \frac{d}{dx}e^{x^3} + 3\frac{d}{dx}e^{-\frac{x}{4}} - 5\frac{d}{dx}e^{2x}$$

$$= e^{x^3}\frac{d}{dx}(x^3) + 3e^{-\frac{x}{4}}\frac{d}{dx}\left(-\frac{x}{4}\right) - 5e^{2x}\frac{d}{dx}(2x)$$

$$= e^{x^3}(3x^2) + 3e^{-\frac{x}{4}}\left(-\frac{1}{4}\right) - 5e^{2x}(2)$$

$$= 3x^2e^{x^3} - \frac{3}{4}e^{-\frac{x}{4}} - 10e^{2x}$$

ดังนั้น $f'(x) = 3x^2e^{x^3} - \frac{3}{4}e^{-\frac{x}{4}} - 10e^{2x}$

ตัวอย่างที่ 41 กำหนดให้ $f(x) = e^{-3x}\log_5 x$ จงหา $f'(x)$

วิธีทำ จาก $f(x) = e^{-3x}\log_5 x$

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}\left(e^{-3x}\log_5 x\right)$$

$$= e^{-3x}\frac{d}{dx}\log_5 x + \log_5 x\frac{d}{dx}e^{-3x}$$

$$= e^{-3x}\frac{1}{x\ln 5} + \log_5 x\left[e^{-3x}\frac{d}{dx}(-3x)\right]$$

$$= e^{-3x}\frac{1}{x\ln 5} + \log_5 x\left[e^{-3x}(-3)\right]$$

$$= e^{-3x}\frac{1}{x\ln 5} - 3e^{-3x}\log_5 x$$

ดังนั้น $f'(x) = e^{-3x}\frac{1}{x\ln 5} - 3e^{-3x}\log_5 x$

ตัวอย่างที่ 42 กำหนดให้ $f(x) = \dfrac{e^{-3x}+e^{3x}}{e^{-3x}-e^{3x}}$ จงหา $f'(x)$

วิธีทำ จาก $f(x) = \dfrac{e^{-3x}+e^{3x}}{e^{-3x}-e^{3x}}$

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^{-3x}+e^{3x}}{e^{-3x}-e^{3x}}\right)$$

$$= \frac{\left(e^{-3x}-e^{3x}\right)\frac{d}{dx}\left(e^{-3x}+e^{3x}\right)-\left(e^{-3x}+e^{3x}\right)\frac{d}{dx}\left(e^{-3x}-e^{3x}\right)}{\left(e^{-3x}-e^{3x}\right)^2}$$

$$= \frac{\left(e^{-3x}-e^{3x}\right)\left(-3e^{-3x}+3e^{3x}\right)-\left(e^{-3x}+e^{3x}\right)\left(-3e^{-3x}-3e^{3x}\right)}{\left(e^{-3x}-e^{3x}\right)^2}$$

$$= \frac{\left(-3e^{-6x}+3e^{0}+3e^{0}-3e^{6x}\right)-\left(-3e^{-6x}-3e^{0}-3e^{0}-3e^{6x}\right)}{\left(e^{-3x}-e^{3x}\right)^2}$$

$$= \frac{-3e^{-6x}+3+3-3e^{6x}+3e^{-6x}+3+3+3e^{6x}}{\left(e^{-3x}-e^{3x}\right)^2}$$

$$= \frac{12}{\left(e^{-3x}-e^{3x}\right)^2}$$

ดังนั้น $f'(x) = \dfrac{12}{\left(e^{-3x}-e^{3x}\right)^2}$

การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันปริยาย

โดยทั่วไปเราจะพบฟังก์ชันที่เขียนอยู่ในรูปของ $y = f(x)$ ซึ่งเราจะเรียก y เป็นฟังก์ชันชัดแจ้ง (explicit function) ของ x ตัวอย่าง เช่น

$$y = x^2+4x+2 \quad , \quad y = \sqrt{x^2-3} \quad , \quad y = \frac{x+1}{x-1} \quad \text{เป็นต้น}$$

เมื่อพิจารณาสมการ $y^2+x^2 = 1$ ซึ่งเราทราบว่าเป็นสมการของวงกลมที่จุดศูนย์กลางอยู่ที่ (0, 0) และมีรัศมีเท่ากับ 1 จากสมการนี้เราจะเรียก y เป็น**ฟังก์ชันปริยาย** (implicit function) ของ x เนื่องจากค่า x หนึ่งค่า จะให้ค่าของ y สองค่าด้วยกัน นั่นคือ

$$y = \pm\sqrt{1-x^2}$$

โดยที่ $y = \sqrt{1-x^2}$ จะให้กราฟครึ่งวงกลมที่อยู่เหนือแกน x และ $y = -\sqrt{1-x^2}$ จะให้กราฟครึ่งวงกลมที่อยู่ใต้แกน x เมื่อพิจารณาความชันของเส้นสัมผัส ณ จุด x ใด ๆ บนวงกลม จะสามารถหาได้จากการหาอนุพันธ์ของสมการวงกลมเทียบกับตัวแปร x นั่นคือ

$$\frac{d}{dx}\left(y^2\right)+\frac{d}{dx}\left(x^2\right) = \frac{d}{dx}(1)$$

เนื่องจาก y เป็นฟังก์ชันของตัวแปร x ดังนั้นเราจึงใช้กฎลูกโซ่มาช่วยในการหาอนุพันธ์ นั่นคือ

$$2y\frac{dy}{dx}+2x = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$

ดังนั้น ความชันของเส้นสัมผัสวงกลมที่จุด x ใด ๆ จะมีค่าเท่ากับ $-\frac{x}{y}$

ตัวอย่างที่ 43 จงหา $\frac{dy}{dx}$ ของสมการ $2y^3+xy = 5$

วิธีทำ จากโจทย์พิจารณาสมการ $2y^3+xy = 5$ พบว่า y เป็นฟังก์ชันปริยายของ x

เราสามารถหา $\frac{dy}{dx}$ ได้โดยหาอนุพันธ์เทียบตัวแปร x ทั้งสองข้างของสมการจะได้ว่า

$$\frac{d}{dx}\left(2y^3+xy\right) = \frac{d}{dx}(5)$$

$$2\frac{d}{dx}\left(y^3\right)+\frac{d}{dx}(xy) = \frac{d}{dx}(5)$$

โดยกฎลูกโซ่ จะได้ว่า

$$6y^2\frac{dy}{dx}+\left[x\frac{dy}{dx}+y\frac{dx}{dx}\right] = 0$$

$$6y^2\frac{dy}{dx}+x\frac{dy}{dx}+y = 0$$

$$\left[6y^2+x\right]\frac{dy}{dx}+y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{6y^2+x}$$

ดังนั้น ค่าของ $\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{6y^2+x}$

ตัวอย่างที่ 44 จงหาค่าของ $\dfrac{dx}{dy}$ เมื่อกำหนด $4\sqrt{x}-x^2y = \sqrt{2y}$ ที่จุด (2, 1)

วิธีทำ จากโจทย์พิจารณาสมการ $4\sqrt{x}-x^2y = \sqrt{2y}$ พบว่า x เป็นฟังก์ชันปริยายของ y

เราสามารถหา $\dfrac{dx}{dy}$ ได้โดยหาอนุพันธ์เทียบตัวแปร y ทั้งสองข้างของสมการจะได้ว่า

$$\frac{d}{dy}\left(4\sqrt{x}-x^2y\right) = \frac{d}{dy}\left(\sqrt{2y}\right)$$

$$\frac{d}{dy}\left(4\sqrt{x}\right)-\frac{d}{dy}\left(x^2y\right) = \frac{d}{dy}\left(\sqrt{2y}\right)$$

เนื่องจาก x เป็นฟังก์ชันของ y โดยกฎลูกโซ่จะได้ว่า

$$4\frac{d}{dy}\left(x^{\frac{1}{2}}\right)-\left[x^2\frac{d}{dy}(y)+y\frac{d}{dy}\left(x^2\right)\right] = \frac{d}{dy}\left((2y)^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$4\left[\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\frac{dx}{dy}\right]-x^2-2xy\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2}(2y)^{-\frac{1}{2}}(2)$$

$$(2)\frac{1}{\sqrt{x}}\frac{dx}{dy}-x^2-2xy\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\sqrt{2y}}$$

$$\left(\frac{2}{\sqrt{x}}-2xy\right)\frac{dx}{dy}-x^2 = \frac{1}{\sqrt{2y}}$$

$$\left(\frac{2}{\sqrt{x}}-2xy\right)\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\sqrt{2y}}+x^2$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\dfrac{1}{\sqrt{2y}}+x^2}{\left(\dfrac{2}{\sqrt{x}}-2xy\right)}$$

ดังนั้น ค่าของ $\dfrac{dx}{dy}$ ที่จุด (2, 1) จะมีค่าเท่ากับ

$$\left.\frac{dx}{dy}\right|_{(2,1)} = \frac{\dfrac{1}{\sqrt{2}}+2^2}{\dfrac{2}{\sqrt{2}}-2(2)(1)} = \frac{\dfrac{1}{\sqrt{2}}+4}{\dfrac{2}{\sqrt{2}}-4}$$

ตัวอย่างที่ 45 จงหาค่าของ $\dfrac{dy}{dx}$ และ $\dfrac{dx}{dy}$ เมื่อกำหนด $6xy^2 - x^2y = 2x - 3y$

วิธีทำ จากโจทย์พิจารณาสมการ $6xy^2 - x^2y = 2x - 3y$ พบว่า

กรณีที่ 1 y เป็นฟังก์ชันปริยายของ x เราสามารถหา $\dfrac{dy}{dx}$ โดยหาอนุพันธ์เทียบตัวแปร x ทั้งสองข้างของสมการจะได้ว่า

$$\frac{d}{dx}\left(6xy^2 - x^2y\right) = \frac{d}{dx}\left(2x-3y\right)$$

$$6\frac{d}{dx}\left(xy^2\right) - \frac{d}{dx}\left(x^2y\right) = 2\frac{dx}{dx} - 3\frac{d}{dx}y$$

โดยกฎลูกโซ่ จะได้ว่า

$$6\left[x\frac{d}{dx}(y^2) + y^2\frac{dx}{dx}\right] - \left[x^2\frac{d}{dx}(y) + y\frac{d}{dx}(x^2)\right] = 2\frac{dx}{dx} - 3\frac{d}{dx}y$$

$$6\left[2xy\frac{dy}{dx} + y^2\right] - \left[x^2\frac{dy}{dx} + 2xy\right] = 2 - 3\frac{dy}{dx}$$

$$12xy\frac{dy}{dx} + 6y^2 - x^2\frac{dy}{dx} - 2xy = 2 - 3\frac{dy}{dx}$$

$$\left[12xy - x^2 + 3\right]\frac{dy}{dx} = 2 + 6y^2 + 2xy$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6y^2 + 2xy + 2}{-x^2 + 12xy + 3}$$

กรณีที่ 2 x เป็นฟังก์ชันปริยายของ y เราสามารถหา $\dfrac{dx}{dy}$ โดยหาอนุพันธ์เทียบตัวแปร y ทั้งสองข้างของสมการจะได้ว่า

$$\frac{d}{dy}\left(6xy^2 - x^2y\right) = \frac{d}{dy}\left(2x-3y\right)$$

$$6\frac{d}{dy}\left(xy^2\right) - \frac{d}{dy}\left(x^2y\right) = 2\frac{dx}{dy} - 3\frac{d}{dy}y$$

โดยกฎลูกโซ่ จะได้ว่า

$$6\left[x\frac{d}{dy}(y^2)+y^2\frac{dx}{dy}\right]-\left[x^2\frac{d}{dy}(y)+y\frac{d}{dy}(x^2)\right] = 2\frac{dx}{dy}-3\frac{dy}{dy}$$

$$6\left[2xy+y^2\frac{dx}{dy}\right]-\left[x^2+2xy\frac{dx}{dy}\right] = 2\frac{dx}{dy}-3$$

$$12xy+6y^2\frac{dx}{dy}-x^2-2xy\frac{dx}{dy} = 2\frac{dx}{dy}-3$$

$$\left[6y^2-2xy-2\right]\frac{dx}{dy} = x^2-12xy-3$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x^2-12xy-3}{6y^2-2xy-2}$$

ดังนั้น ค่าของ $\frac{dy}{dx} = \frac{6y^2+2xy+2}{-x^2+12xy+3}$

และค่าของ $\frac{dx}{dy} = \frac{x^2-12xy-3}{6y^2-2xy-2}$

ตัวอย่างที่ 46 จงหาค่าของ $\frac{dy}{dx}$ เมื่อกำหนด $x\cos y+y\sin x = 0$

วิธีทำ จากโจทย์พิจารณาสมการ $x\cos y+y\sin x = 0$ พบว่า y เป็นฟังก์ชันปริยายของ x เราสามารถหา $\frac{dy}{dx}$ ได้โดยหาอนุพันธ์เทียบตัวแปร x ทั้งสองข้างของสมการจะได้ว่า

$$\frac{d}{dx}\left(x\cos y+y\sin x\right) = \frac{d}{dx}(0)$$

$$\frac{d}{dx}\left(x\cos y\right)+\frac{d}{dx}\left(y\sin x\right) = \frac{d}{dx}(0)$$

โดยกฎลูกโซ่ จะได้ว่า

$$\left[x\frac{d}{dx}(\cos y)+\cos y\frac{dx}{dx}\right]+\left[y\frac{d}{dx}(\sin x)+\sin x\frac{dy}{dx}\right] = 0$$

$$\left[-x\sin y\frac{dy}{dx}+\cos y\right]+\left[y\cos x+\sin x\frac{dy}{dx}\right] = 0$$

$$-x\sin y\frac{dy}{dx}+\sin x\frac{dy}{dx} = -\cos y-y\cos x$$

$$\left[\sin x-x\sin y\right]\frac{dy}{dx} = -\cos y-y\cos x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\cos y-y\cos x}{\sin x-x\sin y}$$

ดังนั้น ค่าของ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-\cos y - y\cos x}{\sin x - x\sin y}$

ตัวอย่างที่ 47 จงหาค่าของ $\dfrac{dy}{dx}$ เมื่อกำหนด $e^{xy} + ylnx = \cos 2x$

วิธีทำ จากโจทย์พิจารณาสมการ $e^{xy} + ylnx = \cos 2x$ พบว่า y เป็นฟังก์ชันปริยายของ x เราสามารถหา $\dfrac{dy}{dx}$ ได้โดยหาอนุพันธ์เทียบตัวแปร x ทั้งสองข้างของสมการจะได้ว่า

$$\frac{d}{dx}\left(e^{xy} + ylnx\right) = \frac{d}{dx}(\cos 2x)$$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{xy}\right) + \frac{d}{dx}(ylnx) = \frac{d}{dx}(\cos 2x)$$

โดยกฎลูกโซ่ จะได้ว่า

$$e^{xy}\frac{d}{dx}(xy) + \left[y\frac{d}{dx}(\ln x) + \ln x\frac{dy}{dx}\right] = \frac{d}{dx}(\cos 2x)$$

$$e^{xy}\left[x\frac{dy}{dx} + y\frac{dx}{dx}\right] + \left[y\frac{1}{x} + \ln x\frac{dy}{dx}\right] = -\sin 2x\frac{d}{dx}(2x)$$

$$e^{xy}\left[x\frac{dy}{dx} + y\right] + \left[y\frac{1}{x} + \ln x\frac{dy}{dx}\right] = -2\sin 2x$$

$$xe^{xy}\frac{dy}{dx} + e^{xy}y + y\frac{1}{x} + \ln x\frac{dy}{dx} = -2\sin 2x$$

$$xe^{xy}\frac{dy}{dx} + \ln x\frac{dy}{dx} = -2\sin 2x - ye^{xy} - \frac{y}{x}$$

$$\left(xe^{xy} + \ln x\right)\frac{dy}{dx} = -2\sin 2x - ye^{xy} - \frac{y}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x\sin 2x - xye^{xy} - y}{x\left(xe^{xy} + \ln x\right)}$$

ดังนั้น ค่าของ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-2x\sin 2x - xye^{xy} - y}{x\left(xe^{xy} + \ln x\right)}$

บทสรุป

อนุพันธ์ของฟังก์ชัน หมายถึง อัตราส่วนระหว่างผลต่างของตัวแปรตามต่อผลต่างที่น้อยที่สุดของตัวแปรอิสระ

การที่เราจะหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันนั้น ก่อนอื่นต้องตรวจสอบก่อนว่าฟังก์ชันที่เราต้องการหาค่าอนุพันธ์นั้นมีอนุพันธ์หรือไม่ ซึ่งถ้าหากฟังก์ชันนั้นมีอนุพันธ์แล้วเราสามารถหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันได้เลยอาจจะหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันนั้น ๆ โดยใช้บทนิยามก็ได้ แต่ถ้าหากบางฟังก์ชันการใช้บทนิยามอาจจะเกิดความยุ่งยากและซับซ้อน ทำให้เกิดความไม่เหมาะสม เราสามารถใช้ทฤษฎีของการหาอนุพันธ์ หรือสูตรต่าง ๆ ที่มีการพิสูจน์ไว้แล้ว เพื่อความง่ายและสะดวก ซึ่งจำแนกได้หลายรูปแบบ เช่น การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิต การหาอนุพันธ์ การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันลอการิทึมและฟังก์ชันเลขชี้กำลัง และการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยปริยาย เราสามารถนำการหาอนุพันธ์ไปใช้อย่างแพร่หลายทั้งในทางวิทยาศาสตร์ วิศวกรรมศาสตร์ เศรษฐศาสตร์ การแพทย์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ เพื่อแก้ปัญหาต่าง ๆ ได้อย่างถูกต้องและเหมาะสม

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 2

1. จงหาอนุพันธ์ของ $f(x) = 2x^2 + x - 7$

   1.1 ที่จุด x ใด ๆ

   1.2 ที่จุด $x = 2$

   1.3 ที่จุด $x = 3$

2. จงหาอนุพันธ์ของ $f(x) = (3x^2 - 5)^2$

   2.1 ที่จุด x ใด ๆ

   2.2 ที่จุด $x = 1$

   2.3 ที่จุด $x = 2$

3. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

   3.1 $f(x) = \left(3x^3 - 2x + 4\right)^9$

   3.2 $f(x) = \sqrt{x} - 6x^{10} + 12$

   3.3 $f(x) = \left(x^4 - 5x\right)\left(x - 9\right)$

   3.4 $f(x) = \dfrac{\left(2x^6 - x\right)^5}{\sqrt{3x^2 + 4x}}$

   3.5 $f(x) = \left(2x^6 - x\right)\left(3x^2 + 4x\right)$

   3.6 $f(x) = \dfrac{2x^4 + 9x^3 - 4x}{x^2 + 2}$

   3.7 $f(x) = \dfrac{\left(2x^6 - x\right)^{12}}{3x^2 + 4x}$

   3.8 $f(x) = \dfrac{(2x^6 - x)^{12}\sqrt{3x^2 + 4x}}{3x^2 + 4x}$

4. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

   4.1 $y = \sin\left(x^{14} + 9x + 15\right)$

   4.2 $y = \sin 4x + \cos 3x$

   4.3 $y = \tan^2 x$

   4.4 $y = \cot\left(4x^{10} - 8\right)$

   4.5 $y = \sin x \cos 2x$

   4.6 $y = \sec\left(x^6 - 14\right)$

   4.7 $y = \cos\left(3x^5 - x\right)\tan\left(x - 3\right)$

   4.8 $y = \tan^{19}\left(x^5 - 1\right)$

   4.9 $y = \sec x \tan x$

   4.10 $y = \dfrac{\cot\left(3x^{20} - 4\right)}{x^3 - 5x}\sin x \cos 2x$

5. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

5.1 $y = \arccos x^3$

5.2 $y = arc\tan 4x^2$

5.3 $y = \left(\operatorname{arccot}\sqrt{x}\right)^2$

5.4 $y = \tan(\arcsin 2x^2)$

5.5 $y = x\left(\operatorname{arccsc}\frac{1}{x}\right)+\sqrt{1+x^2}$

5.6 $y = \operatorname{arcsec}\left(x-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

6. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

6.1 $y = \ln\left(x^5+7x-20\right)$

6.2 $y = \log\left(4x^5-3x\right)$

6.3 $y = 9^{5x^3-7x}$

6.4 $y = e^{x^{10}-1}$

6.5 $y = \dfrac{\ln\left(3x^{20}-4\right)}{x^3-5x}$

6.6 $y = \ln\left(\cos^3 x\right)$

6.7 $y = (\ln x+x)^2$ $y=\ln\left(\cos^3 x\right)$

6.8 $y = \ln\left(\cos^4 x\right)$

6.9 $y = \left[\ln\left(x^4-1\right)\right]^{10}$

6.10 $y = e^x \ln x^2$

7. ให้ y เป็นฟังก์ชันปริยายของ x ซึ่งสอดคล้องกลับสมการดังต่อไปนี้ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

7.1 $3yx^5-x = 6$

7.2 $x(3-y^2) = \sin y$

7.3 $y^5x^6-x = x^2$

7.4 $\dfrac{x+y}{x-y} = x$

7.5 $y^5\sin x-y = 1$

7.6 $\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{xy} = 9$

7.7 $e^y-\sin x = y-2$

7.8 $y\tan x^6-3 = x-y^2$