บทที่ 1

การวิเคราะห์เชิงการจัดการ (Combinatorial Analysis)

ในการหาจำนวนผลลัพธ์ทั้งหมดที่อาจเกิดขึ้นได้จากการทดลองหนึ่งๆ หรือหาจำนวนวิธีที่จะเกิดเหตุการณ์ต่าง ๆ ที่สนใจ ในหลาย ๆ ปัญหาของเรื่องความน่าจะเป็นนั้นเราสามารถหาได้โดยใช้วิธีการนับอย่างง่าย แต่สำหรับบางปัญหาซึ่งมีความซับซ้อน จะยุ่งยากต่อการแจงนับสมาชิกทุกตัวของผลลัพธ์ที่จะเกิดขึ้นจากการทดลอง หรือของเหตุการณ์ที่เราสนใจ มีทฤษฎีบททางคณิตศาสตร์ (Mathematical Theory) เกี่ยวกับการนับ ที่เรียกกันเป็นทางการว่า **การวิเคราะห์ เชิงการจัด** ซึ่งสามารถนำมาช่วยในกรคำนวณหาจำนวนวิธีทั้งหมดของผลลัพธ์ จากโจทย์ที่ซับซ้อนเหล่านี้ได้อย่างถูกต้องและมีประสิทธิภาพ ดังจะได้กล่าวให้ทราบตามลำดับดังนี้

1.1 หลักพื้นฐานของการนับ (Basic Principle of Counting)

ทฤษฎีบท 1.1 งานชิ้นหนึ่งประกอบด้วยการทดลอง 2 ขั้น ขั้นแรกมีจำนวนวิธีต่าง ๆ ให้เลือกทำได้ m วิธี ในแต่ละวิธีของขั้นแรก จะมีวิธีเลือกทำงานในขั้นที่ 2 ได้อีก n วิธี ดังนั้นจำนวนวิธีทั้งหมดที่จะทำงานชิ้นนี้ให้เสร็จ คือ $m \cdot n$

ตัวอย่าง 1.1 โยนเหรียญที่เที่ยงตรง 1 อัน 2 ครั้ง จงหาจำนวนผลลัพธ์ทั้งหมดที่อาจเกิดขึ้นได้จากการโยนเหรียญนี้

....

....

....

....

กฎผลคูณ k สิ่งอันดับ (Product rule for k-tuple)

ทฤษฎีบท 1.2 งานชิ้นหนึ่ง จะทำให้เสร็จ ต้องประกอบด้วย k ขั้น

ขั้นที่ $1(\mathrm{w}_1)$ วิธีเลือกทำงานได้ n_1 วิธี

ในแต่ละวิธีของขั้นที่ 1 จะมีวิธีเลือกทำงานขั้นที่ $2(\mathrm{w}_1)$ ได้ n_2 วิธี

ในแต่ละวิธีของขั้นที่ 1 และขั้นที่ 2 จะมีวิธีเลือกทำงานขั้นที่ $3(\mathrm{w}_3)$ ได้ n_3 วิธี

⋮ ⋮ ⋮

ในแต่ละวิธีของขั้นที่ 1 ขั้นที่ 2… ขั้นที่ $(\mathrm{k}-1)$ มีวิธีเลือกทำขั้นที่ $\mathrm{k}(\mathrm{w}_k)$ ได้ n_k วิธี ดังนั้น จำนวนวิธีทั้งหมดที่จะทำงานนี้ให้เสร็จ คือ $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k$ วิธี

ขั้น คือ $\mathrm{n}_1 \cdot \mathrm{n}_2 \cdot \ldots \cdot \mathrm{n}_k$ วิธี

ตัวอย่าง 1.2 โยนเหรียญเที่ยงตรง 3 อัน 1 ครั้ง จงหาจำนวนผลลัพธ์ทั้งหมดที่อาจเกิดขึ้นได้

....

....

....

....

ตัวอย่าง 1.3 ชายคนหนึ่งต้องการย้ายไปอยู่ในต่างจังหวัด ซึ่งในโรงพยาบาลมีแพทย์เฉพาะทางอยู่ 2 สาขา คือ สูตินรีแพทย์ และ กุมารแพทย์ เนื่องจากเขามีบุตรอายุ 1 ขวบ 1 คน และภรรยากำลังจะคลอดบุตรคนเล็กอีก 1 คน เนื่องจากเขาสามารถใช้บัตรประกันสังคมเป็นค่ารักษาพยาบาลได้ ถ้าจังหวัดหนึ่งมีโรงพยาบาลอยู่ 2 แห่ง มีจำนวนแพทย์ทั้ง 2 สาขาเหมือนกันและเท่ากัน กล่าวคือ แต่ละแห่งมีสูตินรีแพทย์ 4 คนและกุมารแพทย์ 3 คน

จงหาจำนวนวิธีทั้งหมดที่เข้าจะพาครอบครัวไปรักษาที่โรงพยาบาลแห่งเดียวกันและได้พบแพทย์ทั้ง 2 สาขา

วิธีทำ

....

....

....

....

ตัวอย่าง 1.4 จากตัวอย่าง 1.3 ถ้าโรงพยาบาลแต่ละแห่งมีแพทย์เวชปฏิบัติเพิ่มแห่งละ 3 คน และมีศัลยแพทย์เพิ่งแห่งละ 2 คนเหมือนกัน จงหาจำนวนวิธีทั้งหมดที่เขาจะสามารถเลือกพบแพทย์ได้ครบทั้ง 4 สาขาในโรงพยาบาลแห่งเดียวกัน

วิธีทำ

....

....

....

....

....

....

....

....

1.2 การเรียงสับเปลี่ยน (Permutation)

ปัญหาอีกแบบหนึ่งที่นำทฤษฎีความน่าจะเป็นไปใช้ คือ ปัญหาเกี่ยวกับเรื่องการเลือกของขนาด r จากของที่แตกต่างกันทั้งหมด n สิ่ง วิธีการเลือกของเหล่านี้ เราเรียกว่า การชักตัวอย่าง (Sampling) ซึ่งมี 2 แบบ คือ แบบคืนที่ (with replacement) และแบบไม่คืนที่ (without replacement) ก่อนหยิบครั้งต่อไป ในการชักตัวอย่างแต่ละแบบ อันดับ (order) อาจจะมีความสำคัญหรือไม่มีความสำคัญก็ได้

1.2.1) การเรียงสับเปลี่ยนของที่แตกต่างกันทั้งหมด

บทนิยาม 1.2 **ตัวอย่างที่เป็นอันดับขนาน** r (ordered sample of size r) คือ r สิ่งอันดับ $(x_1, x_2, x_3, ..., x_r)$ เมื่อ x_i แทนผลที่เลือกได้ในครั้งที่ $i(i = 1,2,...,r)$ โดยเลือกของ r สิ่ง จากทั้งหมด n สิ่ง และคำนึงถึงอันดับของการเลือกด้วย

บทนิยาม 1.3 **การชักตัวอย่างแบบคืนที่ (sampling with replacement)** คือ การหยิบหรือเลือกของทีละสิ่งและใส่กลับคืนที่เดิมก่อน แล้วจึงหยิบครั้งต่อไป

ทฤษฎีบท 1.3 ในการชักตัวอย่างอันดับแบบคือที่ขนาน r จากของที่แตกต่างกันทั้งหมด n สิ่ง $(\mathrm{r} \leq \mathrm{n})$ จะมีวิธีทำได้ทั้งหมดเท่ากับ n^r วิธี

ตัวอย่าง 1.5 ถ้าโยนลูกเต๋า 6 หน้า 5 ครั้ง จงหาจำนวนผลลัพธ์ที่อาจเกิดขึ้นได้ทั้งหมด

....

....

....

....

ตัวอย่าง 1.6 กล่องใบหนึ่งมีสลากอยู่ 10 ใบ เขียนหมายเลข $1,2,...,10$ ไว้ หยิบสลาก 4 ครั้ง ครั้งละใบแบบคืนที่ จงหาจำนวนผลลัพธ์ทั้งหมดของการหยิบในครั้งนี้

....

....

....

....

ตัวอย่าง 1.7 โยนห่วงยางสีต่างกัน 8 ห่วงให้คล้องขวดต่างกัน 5 ขวด จงหาจำนวนวิธีโยนที่เป็นไปได้ทั้งหมด

วิธีทำ

....

....

ตัวอย่าง 1.8 จงหาจำนวนผลลัพธ์ทั้งหมดที่ได้จากการทดลองในข้อต่อไปนี้

ก. โยนเหรียญต่างกัน 3 อันพร้อมกัน 1 ครั้ง (หรือโยนเหรียญ 1 อัน 3 ครั้ง)

ข. โยนเหรียญ 3 อันพร้อมกัน 5 ครั้ง

วิธีทำ

....

....

ต่อไปจะกล่าวถึงการหาจำนวนวิธีทั้งหมดเมื่อการชักตัวอย่างเป็นแบบจัดอันดับและไม่คืนที่ (Sampling without replacement)

บทนิยาม 1.4 **การชักตัวอย่างแบบไม่คืนที่** คือ การหยิบหรือเลือกของทีละสิ่ง แล้วไม่ใส่กลับคืนที่เดิมก่อนหยิบครั้งต่อไป

ถ้าเรามีตำแหน่งที่อยู่ n ต้องการเรียนของต่างกันทั้งหมด n สิ่ง ลงในที่ว่างทั้ง n ที่นี้ พบว่า

ตำแหน่งที่ 1 สามารถนำของวางลงได้ทั้ง	n	สิ่ง
ตำแหน่งที่ 2 เหลือของที่จะนำไปวางลงได้อีก	$n-1$	สิ่ง
ตำแหน่งที่ 3 เหลือของที่จะนำไปวางลงได้อีก	$n-2$	สิ่ง
⋮ ⋮	⋮	
ตำแหน่งที่ $n-2$ เหลือของที่จะนำไปวางลงได้อีก	3	สิ่ง
ตำแหน่งที่ $n-1$ เหลือของที่จะนำไปวางลงได้อีก	2	สิ่ง
ตำแหน่งที่ n เหลือของที่จะนำไปวางลงได้อีก	1	สิ่ง

ทฤษฎีบท 1.4 ${}^{n}P_{r} = n(n-1)(n-2)...(n-r+1)$ หรือ ${}^{n}P_{r} = \dfrac{n!}{(n-r)!}$

บทนิยาม 1.5 ทุกสมาชิก n ที่เป็นจำนวนเต็มบวก $(\forall \mathrm{n} \in \mathrm{I}^{+})$, แฟกทอเรียล n

กำหนดโดย $n! = n(n-1)(n-2)...(2)(1)$

และกำหนด $0! = 1$

จำนวนวิธีเรียงของทั้งหมด คือ $n(n-1)(n-2).....(3)(2)(1)=n!$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก

ตัวอย่าง 1.9 จงหาค่าของ ก) $5!$ ข) $\frac{8!}{6!}$

....

....

....

บทนิยาม 1.6 การเรียงสับเปลี่ยน คือ การหาจำนวนวิธีทั้งหมดของการชักตัวอย่างอันดับขนาด r แบบไม่คืนที่ จากของที่แตกต่างกัน n สิ่ง $(n \geq r)$ ซึ่งจะใช้สัญลักษณ์แทนด้วย ${}^{n}P_{r}$ หรือ $(n)_{r}$

บทนิยาม 1.7

$$ {}^{n}P_{r} = 1 \quad \text{เมื่อ} \quad r = 0 $$
$$ {}^{n}P_{r} = 0 \quad \text{เมื่อ} \quad r < 0 $$
$$ {}^{n}P_{r} = 0 \quad \text{เมื่อ} \quad r > n \quad (n = 1, 2, 3 ...) $$

ตัวอย่าง 1.10 ไพ่สำรับหนึ่งมี 52 ใบ ดึงไพ่ออกจากสำรับ 4 ครั้ง ครั้งละใบ แบบไม่คืน จะทำได้กี่วิธี

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 1.11 ถ้วยใบหนึ่งมีสลากชื่อคนงานอยู่ 30 คน หยิบรายชื่อมาครั้งละคน 3 ครั้ง แบบไม่คืนที่จงหาจำนวนวิธีที่ทั้งหมด ในการหยิบสลากครั้งนี้

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 1.12 จงหาจำนวนวิธีทั้งหมดในการสั่งไอศกรีม 5 รสที่ไม่ซ้ำกันจากไอศกรีม 10 รส

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 1.13 จงหาจำนวนวิธีทั้งหมดในการจัดนักศึกษา 8 คนนั่งเข้าแถวเพื่อรอรับรางวัลชนิดเดียวกัน โดยที่ ก) นั่งอย่างไรก็ได้ ข) มี 3 คน ไม่ยอมนั่งชิดกัน

....

....

....

....

....

บทแทรก 1.2 **การเรียงสับเปลี่ยนในแนววงกลม (permutation in circle)**

ถ้าต้องการเรียงของที่ต่างกันทั้งหมด n สิ่งในแนววงกลม จะทำได้ $=(n-1)!$ วิธี

ตัวอย่าง 1.14 จงหาวิธีที่จะจัดนักศึกษา 10 คน ให้นั่งลอมกันเป็นวงกลม โดยที่

ก) นั่งอย่างไรก็ได้ ข) 4 คนที่สนิทกัน ต้องการนั่งชิดกัน

....

....

....

....

1.2.2 การเรียงสับเปลี่ยนของที่ไม่ต่างกันทั้งหมด

บทแทรก 1.5 จำนวนวิธีการเรียงสับเปลี่ยนของทั้งหมด n สิ่ง ซึ่งเหมือนกันเป็นพวกๆดังนี้

ชนิดที่ 1 เหมือนกัน n_1 สิ่ง

ชนิดที่ 1 เหมือนกัน n_2 สิ่ง

$\vdots$ $\vdots$

ชนิดที่ k เหมือนกัน n_k สิ่ง คือ $\dfrac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot n_3!\cdot\ldots n_k!}$

ตัวอย่าง 1.14 จงหาวิธีเรียงตัวอักษรในคำว่า “MATHEMATICS”

....

....

....

....

ตัวอย่าง 1.15 มีธงสีเขียว 3 ผืน สีเหลือง 2 ผืน และสีฟ้า 1 ผืน จะนำมาเรียงกันเป็นสัญญาณได้กี่แบบ

....

....

....

....

....

1.3 การจัดหมู่ (Combination)

ในบางครั้งลำดับจากการเลือกจะไม่มีความสำคัญ และเราก็ไม่สนใจว่าจะได้สิ่งใดก่อนหรือหลัง เพียงแต่ต้องการให้ได้ตัวอย่างขนาด r เท่านั้น ซึ่งการเลือกชนิดนี้ ถือได้ว่าเป็นการชักตัวอย่างแบบไม่จัดลำดับ (unordered sampling) และเนื่องจากของที่เลือกมาขนาด r นั้นต้องแตกต่างกัน จึงเป็นการชักตัวอย่างแบบไม่คืนที่ (sampling without replacement) การชักตัวอย่างประเภทนี้ที่สำคัญ ได้แก่ การจัดหมู่

ทฤษฎีบท 1.6 **การจัดหมู่ (Combination)**

ในการเลือกของแบบไม่จัดอันดับขนาด r จากของที่แตกต่างกัน n สิ่ง $(n \geq r)$ โดยเลือกแล้วไม่คืนที่ จะมีวิธีเลือกได้ทั้งหมด เท่ากับ $\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ วิธี

ตัวอย่าง 1.16 จงหาจำนวนวิธีหยิบไพ่จากสำรับที่มีไพ่ 52 ใบ ตามเงื่อนไขจากข้อต่อไปนี้

ก) หยิบไพ่ 4 ใบ ข) หยิบไพ่ 5 ใบ ได้โพดำทั้งหมด

ค) หยิบได้ไพ่แต้มสิบ 2 ใบ และได้ไพ่ คิง 3 ใบ

....

....

....

....

....

....

....

....