1. ตัวแปรสุ่ม (Random variables)

ในการทดลองส่วนใหญ่ เรามักสนใจผลลัพธ์ที่เป็นตัวเลขสรุป หรือผลลัพธ์ที่เป็นตัวเลขแสดงลักษณะเฉพาะที่เกิดขึ้นมากกว่าตัวลัพธ์จริงที่ไม่ใช่ตัวเลข ตัวอย่างเช่น สนใจผลบวกของแต้มลูกเต๋าที่หงายขึ้น จากการทดลองโยนลูกเต๋า 1 คู่ สนใจจำนวนทารกที่คลอดจากโรงพยาบาลแห่งหนึ่งในแต่ละวัน สนใจเวลาที่รถประจำทางมาถึงสถานีในแต่ละวัน สนใจปริมาณน้ำฝนที่วัดได้ในจังหวัดสงขลาในระหว่างปีที่กำหนด เป็นต้น เราจะแทนแต่ละผลลัพธ์ของการทดลองด้วยจำนวนจริง x หรือคู่อันดับ x_1, x_2 ของจำนวนจริงหรือถ้าเป็นกรณีทั่วไปจะแทนด้วย n สิ่งอันดับ $x_1, x_2, ..., x_n$ ของจำนวนจริง

ตัวอย่าง.1 โยนเหรียญ 1 อัน 1 ครั้ง ให้ x แทนจำนวนก้อยที่หงายขึ้น จงแสดงว่า x เป็นตัวแปรสุ่ม

.....

.....

ตัวอย่าง 2 หยิบไพ่ 2 ใบ จากสำรับ 52 ใบ แบบคืนที่ ให้ Y คือจำนวนไพ่โพดำที่หยิบได้จงหาเรนจ์ของ Y

.....

.....

ตัวอย่าง 3 โยนเหรียญ 3 อันหนึ่งครั้ง ถ้าให้ Z คือจำนวนครั้งของการขึ้นหัว (H) จงหาเรนจ์ของ Z

.....

.....

ตัวอย่าง 4 โยนลูกเต๋า 1 ลูก 1 ครั้ง ให้ W แทนแต้มของลูกเต๋าที่หงายขึ้น จงหาปริภูมิของ W

.....

.....

ตัวอย่าง 5 ในการปาลูกดอกเข้าเป้าวงกลมที่มีรัศมี 10 นิ้ว ให้ V แทนระยะทางที่ปลายลูกดอกห่างจากจุดศูนย์กลางของเป้า จงหาเรนจ์ของ V

.....

.....

ตัวอย่าง 6 โยนเหรียญเที่ยงตรง 1 อัน 1 ครั้ง ถ้าเหรียญขึ้นหัว ให้สุ่มเลือกจำนวนจริงที่อยู่ระหว่าง 0 กับ 1 มา 1 จำนวน แต่ถ้าเหรียญขึ้นก้อย จะได้รับเงิน 90 บาท และหยุดทำการทดลอง ให้ M เป็นตัวแปรสุ่ม จงเขียนเรนจ์ของ M

.....

.....

บทนิยาม 1 ตัวแปรสุ่มวิยุต (ไม่ต่อเนื่อง) (Discrete Random Variable) คือ ตัวแปรสุ่มเป็นจำนวนเต็มจำกัดแบบนับได้ $x \middle| x = x_1, x_2, x_3, \ldots, \mathrm{x}_n$ หรือจำนวนเต็มอนันต์แบบนับได้ (countable infinite) $x \middle| x = x_1, x_2, x_3, \ldots$

บทนิยาม 2 ตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง (Continuous Random Variable) คือตัวแปรสุ่มที่ เป็นจำนวนจริงนับไม่ถ้วน หรือมีค่าเป็นได้ทุกจุดในช่วง (Intervals) ซึ่งอาจมี 1 ช่วง หรือมากกว่า 1 ช่วงก็ได้ เช่น $X \middle| X \geq 0$ และ $\left\{ x \middle| 0 < x < 1 \text{ หรือ } 2 < x < 3 \right\}$ เป็นต้น

2. ฟังก์ชันความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มวิยุต

บทนิยาม 3 ฟังก์ชันความน่าจะเป็นของ X ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มวิยุต ฟังก์ชันความน่าจะเป็นของ X คือ ฟังก์ชันค่าจริง ซึ่ง $p(\mathrm{x}) = \mathrm{P}\left[X = x\right]$ ทุกจำนวนจริง x ใด ๆ

ทฤษฎีบท 3 ฟังก์ชันค่า p ใด ๆ เป็นฟังก์ชันความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มก็ต่อเมื่อ

1. $0 \leq p\left(x\right) \leq 1$ ทุก $x \in \mathbb{R}$
2. $\left\{ x \in \mathbb{R} \,/\, \mathrm{p}\left(x\right) \neq 0 \right\}$ สามารถนับได้ นั่นคือ เซตของจำนวนจริงซึ่งฟังก์ชันความน่าจะเป็นไม่เป็นศูนย์ เป็นเซตที่นับได้ และ
3. $\sum_{x \in \mathbb{R}} p\left(x\right) = 1$

ตัวอย่าง 7 ตู้ควบคุมระบบป้องกันอัคคีภัยตู้หนึ่ง ประกอบด้วยแผงวงจร 10 แผง ซึ่งมี 6 แผงมาจากสาย A และมี 4 แผงมาจากสาย B ผู้ตรวจสอบคนหนึ่งเลือกมา 2 แผง โดยสุ่มแล้วนำมาตรวจสอบความเรียบร้อย ถ้าให้ X คือจำนวนแผงที่สุ่มมาแล้วได้มาจากสาย A จงหา

1. ตารางการแจกแจงความน่าจะเป็นของ X
2. ความน่าจะเป็นที่ผู้ตรวจสอบสุ่มเลือกแผงวงจรแล้วได้มาจากสาย A ทั้ง 2 แผง

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

ทฤษฎีบท 2 ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มวิยุต มี $p\left(x\right)$ เป็นฟังก์ชันความน่าจะเป็น จะได้

$$P\left[X = x\right] = p\left(x\right) = P\left(x \in C\right) = \sum_{x \in C} p\left(x\right)$$

ตัวอย่าง 8 โยนลูกเต๋าเที่ยงตรง 2 ลูก 1 ครั้ง ให้ X แทน ผลบวกแต้มของลูกเต๋าทั้งสอง จงหา

1. การแจกแจงความน่าจะเป็นของ X
2. $P\left(X > 8\right)$

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

3 ฟังก์ชันความหนาแน่นของตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง

บทนิยาม 4 ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง ค่าของ X จะมีจำนวนอนันต์ (infinite number) และฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็น ของ X คือ ฟังก์ชันค่าไม่เป็นลบ จะได้ว่า

$$P\left(C\right) = P\left(X = C\right) = \int_a^b f\left(x\right)dx$$

บทนิยาม 5 ฟังก์ชันค่าจริง f ใด ๆ เป็นฟังก์ชันความหนาแน่นของตัวแปรสุ่ม X ก็ต่อเมื่อ

1. $f\left(x\right) \geq 0 \quad , \forall x \in \mathbb{R}$ และ
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f\left(x\right)dx = 1$

บทนิยาม 6 ตัวแปรสุ่ม X เรียกว่า ตัวแปรสุ่มต่อเนื่องสัมบูรณ์ ก็ต่อเมื่อ มีฟังก์ชันความหนาแน่น f ซึ่งทำให้ $P\left(a \leq X \leq b\right) = \int_a^b f\left(x\right)dx$ เมื่อ $a < b$

ตัวอย่าง 9 ให้ X คือ อายุการใช้งานของแบตเตอรี่ ซึ่งมีฟังก์ชันความหนาแน่น คือ

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} & ,x > 0 \\ 0 & ,else \end{cases}$$

จงหาความน่าจะเป็นที่อายุการใช้งานของแบตเตอรี่นี้น้อยกว่า 200 ชั่วโมง หรือมากกว่า 400 ชั่วโมง

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ตัวอย่าง 10 จากตัวอย่างที่ 9 จงหาความน่าจะเป็นที่แบตเตอรี่ชนิดนี้มีอายุการใช้งานมากกว่า 300 ชั่วโมง เมื่อทราบว่า มันถูกใช้งานมามากกว่า 200 ชั่วโมงมาแล้ว

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

4 ฟังก์ชันการแจกแจง (The Distribution Function)

บางครั้งเราสามารถศึกษาพฤติกรรมของตัวแปรสุ่ม โดยอาศัยความน่าจะเป็นสะสม (Cumulative probabilities) ของมันได้ ซึ่งจะสะดวกกว่าการคำนวณหาค่าความน่าจะเป็น

บทนิยาม 7 ฟังก์ชันการแจกแจง ของตัวแปรสุ่ม X กำหนดโดย $F(b) = P(X \le b)$

ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มวิยุต แล้ว

$$F(b) = \sum_{x=-b}^{b} p(x) \text{ ทุก } -\infty < b < \infty$$

เมื่อ $p(x)$ คือ ฟังก์ชันความน่าจะเป็นของ X

และถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง แล้ว

$$F(b) = \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx \quad ; -\infty < b < \infty$$

เมื่อ $f(x)$ คือ ฟังก์ชันความหนาแน่นของ X

ทฤษฎีบท 3 สำหรับจำนวนจริง b ใด ๆ $P(X > b) = 1 - F(b)$

ทฤษฎีบท 4 สำหรับจำนวนจริง b_1 และ b_2 ใด ๆ ซึ่ง $b_1 < b_2$

$$P(b_1 < X \le b_2) = F(b_2) - F(b_1)$$

ตัวอย่างที่ 11 ผู้ค้าส่งน้ำมันก๊าดจะมีน้ำมันอยู่ในถัง 200 แกลลอน ทุกวันจันทร์ของแต่ละสัปดาห์ ใน 1 สัปดาห์ความต้องการน้ำมันก๊าดของท้องตลาดอยู่ระหว่าง 100 ถึง 200 แกลลอน ให้ X แทนความต้องการของลูกค้าใน 1 สัปดาห์ในหนึ่งหน่วย 100 แกลลอน สมมุติความถี่สัมพันธ์ (relative frequencies) ของความต้องการมีตัวแบบเป็น

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ x & , 0 \le x \le 1 \\ \frac{1}{2} & , 1 < x \le 2 \\ 0 & , x > 2 \end{cases}$$

1. จงเขียนกราฟของฟังก์ชัน $f(x)$
2. จงหา $F(b)$ สำหรับตัวแปรสุ่ม X
3. จงใช้ $F(b)$ หาความน่าจะเป็นที่ความต้องการน้ำมันก๊าดจะมากกว่า 150 แกลลอนในสัปดาห์นั้น

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....