การแจกแจงของตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง (Continuous Distributions)

1 การแจกแจงเอกรูป (Uniform Distribution)

ให้ X เป็นตัวแปรสุ่ม แทนผลที่จะได้จากการสุ่มจำนวนจริงจำนวนหนึ่งจากช่วง $\left[a,\ b\right]$ เมื่อ $-\infty < a < b < \infty$ ถ้าการทดลองนี้เป็นไปอย่างสุ่ม และแต่ละจำนวนมีโอกาสที่จะถูกเลือกเท่า ๆ กัน (Equally Likely-outcome) แล้ว มีเหตุผลเพียงพอที่จะสมมติว่า ความน่าจะเป็นที่จำนวน $\left[a,\ x\right]$ ที่ถูกสุ่มมาจากช่วง $a \le x \le b$ จะมีค่าเท่ากับ $\dfrac{x-a}{b-a}$ นั่นคือค่าความน่าจะเป็น จะเป็นสัดส่วนโดยตรงกับความยาวของช่วงนั้นทั้งหมด ดังนั้นฟังก์ชันการแจกแจง(c.d.f) ของ x คือ

$$F(x) = \begin{cases} 0 & ,x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & ,a \le x \le b\,. \\ 1 & ,x \ge b \end{cases}$$

เนื่องจาก X เป็นตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง $F'\left(X\right)$ คือฟังก์ชันความหนาแน่นของ X ถ้า $F'\left(X\right)$ มีอยู่ และจะได้ฟังก์ชันความหนาแน่น(p.d.f) ของ X คือ

$$\begin{aligned} f(x) &= F'(x) \\ &= \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & ,a \le x \le b \\ 0 & ,else \end{cases} \end{aligned}$$

จะเรียก X ว่ามีการแจกแจงเอกรูปบนช่วง $(a,\ b)$ และใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $X \sim\ U\left(a,\ b\right)$

ตัวอย่าง 1 รถไฟฟ้าขบวนหนึ่งจะถึงสถานีอย่างตรงเวลาทุก ๆ 30 นาที ทุกเช้าดำรงจะเดินออกจากบ้านไปเรื่อย ๆ จนถึงสถานีรถไฟฟ้า ถ้าให้ X คือ ระยะเวลา(นาที) ที่ดำรงรอรถไฟฟ้า นับจากเวลาที่ออกจากบ้านจนถึงสถานี จงหาฟังก์ชันการแจกแจงและฟังก์ชันความหนาแน่นของ X

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 2 จากโจทย์ในตัวอย่าง 1 ถ้าให้ X คือ ระยะเวลา (นาที) ที่ดำรงรอคอยรถไฟฟ้า จงหาความน่าจะเป็นที่เขาจะใช้เวลารอ

ก) ระหว่าง 10 ถึง 15 นาที

ข) อย่างน้อย 10 นาที

....

....

....

....

....

....

....

....

บทนิยาม 1 X เป็นตัวแปรสุ่มเอกรูปต่อเนื่อง บนช่วง $\left[a,\ b\right]$ ก็ต่อเมื่อ X มีฟังก์ชันความหนาแน่น

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x;a,b) \\ &= \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & ,a \le x \le b \\ 0 & ,else \end{cases} \end{aligned}$$

เมื่อ a, b คือ ค่าคงตัวจำนวนจริงใด ๆ

บทนิยาม 2 ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง แล้วฟังก์ชันการแจกแจงสะสม (cumulative distribution function : c.d.f.) ของ X คือ

$$\begin{aligned} F(t) &= P(X \le t) \\ &= \int_{-\infty}^{t} f(x)dx \end{aligned}$$

เมื่อ t เป็นจำนวนจริงใด ๆ

ตัวอย่าง 3 รถประจำทางจะมาจอดที่ป้ายในเวลา 7:15 และ 7:30 ตามลำดับ ผู้โดยสารคนที่หนึ่งจะมาถึงป้ายรถประจำทางด้วยการแจกแจงเอกรูปบนช่วง (7, 7:30) จงหาความน่าจะเป็นที่

ก. ผู้โดยสารจะคอยรถประจำทางไม่เกิน 5 นาที

ข. ผู้โดยสารจะคอยรถประจำทางเกิน 10 นาที

ตัวอย่าง 4 ให้ X มีฟังก์ชันความหนาแน่น คือ

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{5} & ,0 \le x \le 5 \\ 0 & ,else \end{cases}$$

จงหา $P(1 \le X \le 3)$

ทฤษฎีบท 1 ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง แล้ว

1. $P\left(X = c\right) = 0$ เมื่อ c คือค่าคงตัว
2. $\forall a,b \in R$ ซึ่ง $a < b$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} P(a \le X \le b) &= P(a < X \le b) \\ &= P(a \le X < b) \\ &= P(a < X < b) \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 5 ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง และมีการแจกแจงเอกรูปบนช่วง $(0,10)$ แล้ว จงคำนวณหา

ก) $P(0 < X \le 3)$ ข) $P(X > 3)$ ค) $P(0 \le X < 10)$

ตัวอย่าง 6 ถ้า X มีการแจกแจงเอกรูป บน $\left[-2,6\right]$ แล้ว จงหา $F(4)$ (ฟังก์ชันการแจกแจง)

2 การแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง (The exponential distribution)

ถ้าให้ T คือ ช่วงระยะเวลาของการรอคอย จนกว่าเหตุการณ์ที่เราสนใจจะเกิดขึ้นเป็นครั้งแรกตั้งแต่เริ่มต้นสังเกต จะเห็นว่า T เป็นตัวแปรสุ่มต่อเนื่องซึ่งจะเรียก T ว่า ตัวแปรสุ่มเลขชี้กำลัง (Exponential random variable)

บทนิยาม 3 T เป็นตัวแปรสุ่มเลขชี้กำลัง ก็ต่อเมื่อ T มีฟังก์ชันความหนาแน่น

$$f(t)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda t} & ,t>0\\ 0 & ,t\le 0\end{cases}$$

ตัวอย่าง 7 การให้บริการของห้องฉุกเฉิน (Emergency Room Traffic) โรงพยาบาลแห่งหนึ่ง มีเก็บข้อมูลการให้บริการของห้องฉุกเฉินไว้ในแต่ละวัน โดยเริ่มบันทึกตั้งแต่เวลา 18.00 น. ของทุก ๆ วัน พบว่าระยะเวลารอคอยของคนไข้คนแรกที่มารับบริการ มีการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง มีพารามิเตอร์ $\lambda = 6.9$ (หน่วยเป็นชั่วโมง) ถ้าเริ่มจดบันทึกตั้งแต่ เวลา 18.00 น. ของแต่ละวัน จงหาความน่าจะเป็นที่คนไข้คนแรกจะเข้ารับบริการในห้องฉุกเฉิน ณ เวลา

ก) ระหว่าง 18.15 น. ถึง 18.30 น.

ข) ก่อน 19.00 น.

....

....

....

....

....

....

....

....

ทฤษฎีบท 2 สมบัติไม่มีความจำของการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง ถ้า T มีการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง $T \sim Exp(\lambda)$ แล้ว $P\left(T > a+b \mid T > a\right) = P(T > b)$

ตัวอย่าง 8 จากตัวอย่าง 7 ถ้าคนไข้คนแรกที่มาถึงห้องฉุกเฉินไม่ได้มาในช่วงเวลา 18:00 ถึง 19:00 น. จงหาความน่าจะเป็นที่เขาจะมาถึงก่อนเวลา 18:45 น.

....

....

....

....

....

....

....

....