

การแจกแจงของตัวแปรสุ่มสองมิติ

ที่แล้มาได้กล่าวถึงตัวแปรสุ่มตัวเดียว ที่นิยามบนปริภูมิตัวอย่าง S ซึ่งมักเรียกกันว่า กรณีตัวแปรสุ่ม 1 มิติ แต่มีหลายตัวอย่างในผลการทดลองในปริภูมิตัวอย่างอาจจะกำหนดค่าตัวแปรสุ่มได้หลายแบบ เช่น ปัจจัยสำคัญสำหรับผู้ทำธุรกิจบ้านและที่ดินกับผู้ซื้อบ้าน คือ จำนวนห้องและจำนวนห้องน้ำ ซึ่งเราอาจกำหนดตัวแปรสุ่ม 2 มิติ คือ ให้ X แทนจำนวนห้องนอน และ Y แทนจำนวนห้องน้ำ หรือสุม คนมา 1 คน สนใจ น้ำหนัก (X) ส่วนสูง (Y) และระดับสติปัญญา (Z) เป็นต้น เพื่อให้การศึกษานี้เข้าใจง่ายขึ้นจะพิจารณากรณีตัวแปรสุ่ม 2 ตัวก่อน ซึ่งมีชื่อเรียกเฉพาะว่า กรณีตัวแปรสุ่ม 2 มิติ ส่วนในกรณีทั่ว ๆ ไป ที่ผลการทดลองเกี่ยวข้องกับตัวแปรสุ่ม 2 มิติ จะสามารถขยายกฎเกณฑ์หรือวิธีการต่าง ๆ ออกไปจนถึงตัวแปรสุ่มหลายตัว ในบทนี้จะขอกกล่าวถึงกรณีตัวแปรสุ่ม 2 ตัวก่อน

1. ฟังก์ชันมวลความน่าจะเป็นร่วม และฟังก์ชันมวลความน่าจะเป็นตามขอบ

บทนิยาม 1 ฟังก์ชันมวลความน่าจะเป็นร่วม

ให้ X และ Y เป็นตัวแปรสุ่มที่นิยามบนปริภูมิตัวอย่างเดียวกัน ฟังก์ชันมวลความน่าจะเป็นร่วมของ X และ Y เขียนแทนด้วย $P_{X,Y}$ คือ ฟังก์ชันค่าจริงที่นิยามบน \mathbb{R}^2 โดย $p_{X,Y}(x,y) = P(X=x, Y=y)$

ตัวอย่าง 1 : ฟังก์ชันความน่าจะเป็นร่วม (PDF ร่วม)

ข้อมูลจากบริษัททำธุรกิจบ้านและที่ดินแห่งหนึ่ง แสดงจำนวนห้องนอนและจำนวนห้องน้ำของบ้าน 50 หลังที่อยู่ระหว่างเปิดโครงการ (ดังตาราง 6.1) ถ้าสุ่มบ้านมา 1 หลังให้ X และ Y แทน จำนวนห้องนอน และจำนวนห้องน้ำของบ้านที่สุ่มมา ตามลำดับ

ตาราง ตารางการแสดงจำนวนห้องนอน (X) และจำนวนห้องน้ำ (Y) ของบ้าน 50 หลัง

		จำนวนห้องน้ำ (Y)				
		2	3	4	5	รวม
จำนวน ห้องนอน (X)	2	3	0	0	0	3
	3	14	12	2	0	28
	4	2	11	5	1	19
	รวม	19	23	7	1	50

ก) จงหา $P_{X,Y}(3,2)$

ข) จงหาฟังก์ชันความน่าจะเป็นร่วม (PDFร่วม) ของ X และ Y

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ตัวอย่าง 3 ตาราง 3 แสดงข้อมูลสมมติของจำนวนห้องนอนและจำนวนห้องน้ำสำหรับบ้าน 5,000 หลัง ตาราง แสดงจำนวนห้องนอน (U) และจำนวนห้องน้ำ (V) ของบ้านจำนวน 5,000 หลัง

		จำนวนห้องน้ำ (V)				
		2	3	4	5	รวม
จำนวน ห้องนอน (U)	2	144	138	42	6	300
	3	1064	1288	392	56	2800
	4	722	874	266	38	1900
	รวม	1900	2300	700	100	5000

ถ้าสุ่มบ้านมาหนึ่งหลัง ให้ U และ V แทนจำนวนห้องนอนและจำนวนห้องน้ำของบ้านที่สุ่มได้ ตามลำดับ จงหา PMF ร่วมและ PMF ตามขอบของตัวแปรสุ่ม U และ V

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ทฤษฎีบท 2 สูตรความน่าจะเป็นหลักมูล (FPF)

ถ้า X และ Y เป็นตัวแปรสุ่มวิฤต ที่นิยามบนปริภูมิตัวอย่างเดียวกัน แล้วทุกเซตย่อยใด ๆ $A \subset \mathbb{R}^2$

$$P((x,y) \in A) = \sum_{(x,y) \in A} \sum P_{x,y}(x,y)$$

หรือกล่าวว่าการน่าจะเป็นที่คู่อันดับของตัวแปรสุ่มวิฤตจะมีค่าอยู่ในเซตย่อยของระนาบ สามารถหาได้โดยการรวม PMF ร่วมของทั้ง 3 ตัวแปรสุ่มบนเซตย่อยนั้น

ตัวอย่าง 4 จากตัวอย่าง 1 ถ้าสุ่มบ้านมา 1 หลังจากทั้งหมด 50 หลัง จงหาความน่าจะเป็นที่บ้านหลังที่สุ่มมานั้น

- ก) มีจำนวนห้องนอนและจำนวนห้องน้ำเท่ากัน
- ข) มีจำนวนห้องนอน มากกว่าจำนวนห้องน้ำ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ตัวอย่าง 5 จากตัวอย่าง 2 ให้พิจารณาอายุการใช้งานของอุปกรณ์ไฟฟ้า X และ Y ที่มีส่วนประกอบเหมือนกันแล้ว จงหาความน่าจะเป็นที่ทั้งสองชิ้นจะมีอายุการใช้งานมากกว่า 4 เท่าของหน่วยเวลา

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....