การประมาณค่าพารามิเตอร์

1. วิธี Expectation

ต้องการทราบว่า $\bar{x}$ สามารถประมาณ μ ได้ถูกต้องหรือไม่

พิสูจน์ว่า $E[\bar{x}] = \mu$ หรือไม่

$$E[\bar{x}] = E\left[\frac{\sum x_i}{n}\right]$$

$$= \frac{E[x_1 + x_2 + \ldots + x_n]}{n}$$

$$= \frac{E[x_1] + E[x_2] + \ldots + E[x_n]}{n}$$

$$= \frac{\mu + \mu + \ldots + \mu}{n}$$

$$= \frac{n\mu}{n} \qquad = \mu$$

ดังนั้น $\bar{x}$ เป็นตัวประมาณค่าเฉลี่ยประชากร (μ)

จะได้ว่า $\bar{x}$ ประมาณค่า μ ได้ถูกต้องไม่เอนเอียง Unbiased)

2. วิธี Maximum Likelihood Estimator (MLE)

ถ้าทราบการแจกแจงความน่าจะเป็นของข้อมูล เช่น x แจกแจงปัวซง

มีฟังก์ชันความน่าจะเป็น $f(x) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^{x}}{x!}$ $\quad ; x = 0,1,\ldots$ มีค่าพารามิเตอร์ λ

สามารถประมาณ λ ด้วยวิธี Maximum Likelihood Estimator ตามขั้นตอนได้ดังนี้

1) หา Likelihood function ของพารามิเตอร์ λ หรือหา $L(\lambda)$

$L(\lambda)$ คือ ผลคูณของฟังก์ชันความน่าจะเป็นของตัวอย่างทั้งหมด

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i) \qquad = f(x_1) \times f(x_2) \times \cdots \times f(x_n)$$

ถ้าสุ่มตัวอย่างขนาด n คือ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ เมื่อ x แจกแจงปัวซง จะได้ว่า

$$f(x_1) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^{x_1}}{x_1!}$$

$$f(x_2) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^{x_2}}{x_2!}$$

$$\vdots$$

$$f(x_n) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^{x_n}}{x_n!}$$

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i)$$

$$= \frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^{x_1}}{x_1!} \times \frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^{x_2}}{x_2!} \times \ldots \times \frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^{x_n}}{x_n!}$$

$$= \frac{[e^{-\lambda}]^n \cdot \lambda^{\sum_{i=1}^{n} x_i}}{\prod_{i=1}^{n} x_i!}$$

2) หาอนุพันธ์

จะได้ $$\partial L(\lambda) = \frac{\partial}{\partial\lambda} \frac{[e^{-\lambda}]^n \cdot \lambda^{\sum_{i=1}^{n} x_i}}{\prod_{i=1}^{n} x_i!}$$

$$= \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} x_i!}\left[(e^{-\lambda})^n \frac{\partial\lambda^{\sum_{i=1}^{n} x_i}}{\partial\lambda} + \lambda^{\sum_{i=1}^{n} x_i} \frac{\partial(e^{-\lambda})^n}{\partial\lambda} \right]$$

$$= \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} x_i!}\left[(e^{-\lambda})^n \sum_{i=1}^{n} x_i \lambda^{\sum_{i=1}^{n} x_i - 1} \frac{\partial\lambda}{\partial\lambda} + \lambda^{\sum_{i=1}^{n} x_i} n(e^{-\lambda})^{n-1} \frac{\partial e^{-\lambda}}{\partial\lambda} \right]$$

$$= \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} x_i!}\left[(e^{-\lambda})^n \sum_{i=1}^{n} x_i \lambda^{\sum_{i=1}^{n} x_i - 1} - \lambda^{\sum_{i=1}^{n} x_i} n(e^{-\lambda})^{n-1} e^{-\lambda} \right]$$

$$= \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} x_i!}\left[(e^{-\lambda})^n \sum_{i=1}^{n} x_i \lambda^{\sum_{i=1}^{n} x_i - 1} - \lambda^{\sum_{i=1}^{n} x_i} n(e^{-\lambda})^{n} \right]$$

3) เทียบอนุพันธ์ที่หาได้ในข้อ 2 ให้เท่ากับ 0

$$\frac{1}{\prod_{i=1}^{n} x_i!}\left[(e^{-\lambda})^n \sum_{i=1}^{n} x_i \lambda^{\sum_{i=1}^{n} x_i - 1} - \lambda^{\sum_{i=1}^{n} x_i} n(e^{-\lambda})^{n} \right] = 0$$

$$(e^{-\lambda})^n \sum_{i=1}^{n} x_i \lambda^{\sum_{i=1}^{n} x_i - 1} = \lambda^{\sum_{i=1}^{n} x_i} n(e^{-\lambda})^{n}$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{\lambda^{\sum_{i=1}^{n} x_i}}{\lambda^{\sum_{i=1}^{n} x_i - 1}}$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \lambda$$

$$\bar{x} = \lambda$$

$\therefore$ ใช้ค่าเฉลี่ยตัวอย่าง $(\bar{x})$ ประมาณค่าเฉลี่ยประชากร (λ)

x มีการแจกแจงแบร์นูลลี มีพารามิเตอร์ p $\quad f(x) = p^{x}(1-p)^{1-x} \quad ; x = 0,1$ สุ่มตัวอย่างขนาด n คือ $x_1, x_2, ..., x_n$ จะได้ว่า

$$f(x_1) = p^{x_1}(1-p)^{1-x_1}$$

$$f(x_2) = p^{x_2}(1-p)^{1-x_2}$$

$$\vdots$$

$$f(x_n) = p^{x_n}(1-p)^{1-x_n}$$

1) หา Likelihood function ของพารามิเตอร์ p **หรือ** $L(p)$

$$\begin{aligned} L(p) &= \prod_{i=1}^{n} f(x_i) \\ &= p^{x_1}(1-p)^{1-x_1} \times p^{x_2}(1-p)^{1-x_2} \times ... \times p^{x_n}(1-p)^{1-x_n} \\ &= p^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-p)^{\sum_{i=1}^{n}(1-x_i)} \\ &= p^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i} \end{aligned}$$

2) หาอนุพันธ์

จะได้ $\quad \partial L(p) = \frac{\partial}{\partial p}\left[p^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-p)^{(n-\sum_{i=1}^{n} x_i)} \right]$

$$= p^{\sum_{i=1}^{n} x_i}\frac{\partial(1-p)^{(n-\sum_{i=1}^{n} x_i)}}{\partial p} + (1-p)^{(n-\sum_{i=1}^{n} x_i)}\frac{\partial p^{\sum_{i=1}^{n} x_i}}{\partial p}$$

$$= p^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(n-\sum_{i=1}^{n} x_i)(1-p)^{(n-\sum_{i=1}^{n} x_i)-1}\frac{\partial(1-p)}{\partial p} + (1-p)^{(n-\sum_{i=1}^{n} x_i)}\sum_{i=1}^{n} x_i p^{\sum_{i=1}^{n} x_i - 1}\frac{\partial p}{\partial p}$$

$$= -p^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(n-\sum_{i=1}^{n} x_i)(1-p)^{(n-\sum_{i=1}^{n} x_i)-1} + (1-p)^{(n-\sum_{i=1}^{n} x_i)}\sum_{i=1}^{n} x_i p^{\sum_{i=1}^{n} x_i - 1}$$

3) เทียบอนุพันธ์ที่หาได้ในข้อ 2 ให้เท่ากับ 0

$$0 = -p^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(n - \sum_{i=1}^{n} x_i)(1-p)^{(n-\sum_{i=1}^{n} x_i)-1} + (1-p)^{(n-\sum_{i=1}^{n} x_i)} \sum_{i=1}^{n} x_i p^{\sum_{i=1}^{n} x_i - 1}$$

$$\frac{p^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(n - \sum_{i=1}^{n} x_i)}{p^{\sum_{i=1}^{n} x_i - 1}} = \frac{(1-p)^{(n-\sum_{i=1}^{n} x_i)} \sum_{i=1}^{n} x_i}{(1-p)^{(n-\sum_{i=1}^{n} x_i)-1}}$$

$$p(n - \sum_{i=1}^{n} x_i) = (1-p)\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$np - p\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i - p\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$np = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = p$$

$$\bar{x} = p$$

$\therefore$ ใช้ค่าเฉลี่ยตัวอย่าง $(\bar{x})$ ประมาณค่าเฉลี่ยประชากร (p)